

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université du 20 Août 1955 Skikda

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique



N° d'ordre : D121222014D

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT en SCIENCES

Spécialité : Génie Mécanique

Par :

M. MERAH Abdelkrim

Contribution à l'étude des phénomènes thermo-convectifs d'un métal liquide contenu dans un milieu confiné

Soutenue le : 28/11/2022

Devant le Jury composé par :

Nom et prénom	Grade	Qualité	Affiliation
SEBBAGH Toufik	MCA	Président	Université 20 août 1955-Skikda
KELAIAIA Ridha	Professeur	Rapporteur	Université 20 août 1955-Skikda
MEFTAH Kamel	Professeur	Examineur	Université Batna 2
GUERBAAI Salah	MCA	Examineur	Université de Biskra
KHERIEF Nacereddine Mohamed	MCA	Examineur	ENSET Skikda
BOUCHHIT Bachir	MCA	Examineur	Université 20 août 1955-Skikda

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé sous la direction de Monsieur **KELAIAIA Ridha**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Université 20 Août 1955-Skikda, à qui j'exprime ma sincère gratitude et ma reconnaissance pour tous les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués. Je voudrais également lui dire à quel point j'ai été exceptionnellement sensible à ses qualités humaines d'écoute, de bienveillance, de son soutien, et de compréhension pendant toute la durée de ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur **SEBBAGH Toufik**, Maître de Conférences A à l'Université 20 Août 1955-Skikda, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance. Je tiens à lui exprimer ma profonde et respectueuse gratitude.

Je suis très honoré de la participation à ce jury de Monsieur **MEFTAH Kamel**, Professeur de l'Enseignement Supérieur à l'Université Batna 2, je le remercie très vivement pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner ce travail.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur **GUERBAAI Salah**, Maître de Conférences à l'Université de Biskra, qu'il trouve, ici, mes sincères remerciements pour l'honneur qu'il me fait en faisant partie de ce jury.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements et ma gratitude à Monsieur **KHERIEF Nacereddine Mohamed**, Maître de Conférences A à ENSET Skikda, pour avoir accepté de me faire l'honneur de participer au jury de ma thèse.

J'exprime ma profonde et sincère reconnaissance à Monsieur **BOUCHHIT Bachir**, Maître de Conférences A à l'Université 20 Août 1955-Skikda, à qui j'exprime mes vifs remerciements pour l'honneur d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à exprimer ma sympathie à tous mes collègues de l'Université 20 Août 1955-Skikda. Je pense particulièrement à mes collègues et responsables du Département de Génie Mécanique, membres du CSD et du CSF, et à toutes les personnes qui ont été impliquées dans l'étude et le traitement de mes dossiers d'inscription et de réinscriptions durant toutes les années de préparation de cette thèse.

EiH

YEMMA Houria ITAWEL RABBI GEL3EMRIM

BAVA Lakhdar Akirhem RABBI

ULTMA Fouzia Akmirhem RABBI

NANA Rabia Haroun Akmirhem RABBI

AYTHMA, SUYTHMA & THARWANWEN

Mes PROCHES

Table des matières

REMERCIEMENTS.....	II
RESUME.....	XV
INTRODUCTION GENERALE.....	1
I RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	5
Introduction	5
I.1. PHENOMENES THERMOCONVECTIFS	5
I.2. CONVECTION DANS UN MILIEU CONFINE.....	9
I.2.1. Cavité à gradient de température vertical	10
I.2.2. Cavité à gradient de température horizontal.....	11
I.3. NOMBRE DE PRANDTL.....	11
I.4. JUMELAGE : HYDRODYNAMIQUE - THERMIQUE.....	13
I.4.1. Facteurs affectant l'écoulement	17
I.4.2. Régimes d'écoulement.....	17
I.4.3. Couche d'Ekman	18
I.5. METAUX LIQUIDES	19
I.6. MAGNETOHYDRODYNAMIQUE ET MAGNETOCONVECTION	21
I.7. PARAMETRES DE CONTROLE	23
I.7.1. Nombre de Reynolds	23
I.7.2. Nombre de Taylor	24
I.7.3. Nombre de Reynolds magnétique	24
I.7.4. Nombre de Hartmann.....	25
I.8. COUCHE D'EKMAN-HARTMANN	25
Conclusion.....	25
II FORMULATION MATHEMATIQUE.....	27
Introduction	27
II.1. PRESENTATION DU PROBLEME	27
II.2. GEOMETRIES BIDIMENSIONNELLES.....	28
II.2.1. Formulation mathématique et adimensionnement	29
II.2.2. Cavité à gradient de température horizontal.....	32
II.2.3. Cavité rectangulaire partiellement chauffée et inclinée.....	34
II.2.4. Cavité rectangulaire de type Kyropoulos partiellement chauffée	40
II.2.5. Echange thermique par convection entre un fluide et une paroi solide	42
II.3. GEOMETRIE TRIDIMENSIONNELLE	43

II.3.1.	Géométrie cylindrique tridimensionnelle de type Czochralski	43
II.3.2.	Géométrie cylindrique tridimensionnelle de type Couette	47
	Conclusion.....	48
III	APPROCHE NUMERIQUE ET VALIDATION	49
	Introduction	49
III.1.	DISCRETISATION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES	50
III.1.1.	Discrétisation de l'équation de l'énergie	51
III.1.2.	Discrétisation de l'équation de la vorticité.....	51
III.1.3.	Discrétisation de l'équation fonction courant.....	52
III.1.4.	Discrétisation des conditions aux limites.....	53
III.1.5.	Critère de tolérance sur les résidus.....	55
III.1.6.	Stabilité numérique	55
III.1.7.	Algorithme de calcul	56
III.1.8.	Optimisation du maillage.....	57
III.2.	APPROCHE NUMERIQUE PAR CFD	60
III.2.1.	Principe de simulation numérique utilisant CFD.....	61
III.2.2.	Types de maillage	62
III.2.3.	Schémas numériques de discrétisation	62
	Conclusion.....	69
IV	RESULTATS ET DISCUSSION.....	70
	Introduction	70
IV.1.	CAVITES BIDIMENSIONNELLES	70
IV.1.1.	Influence du nombre de Rayleigh dans les cavités carrées.....	70
IV.1.2.	Influence de l'inclinaison dans les cavités carrées.....	82
IV.2.	CAVITES BIDIMENSIONNELLES DE TYPE KYROPOULOS.....	85
IV.2.1.	Cavité carrée à parois horizontales adiabatiques et à parois verticales actives	85
IV.2.2.	Cavité carrée à parois thermiquement actives	94
VII.2.	CAVITES TRIDIMENSIONNELLES	105
VII.2.1.	Cavité fermée de type Taylor-Couette cylindrique	105
VII.2.2.	Ecoulement entre deux cylindre avec changement brusque des rayons	110
VII.2.3.	Ecoulement entre deux cylindre coniques.....	118
VII.2.4.	Ecoulement dans la configuration géométrique de type Czochralski.....	130
	Conclusion.....	141
	CONCLUSION GENERALE.....	142
	ET PERSPECTIVES	142
	PUBLICATIONS DANS LE CADRE DE CETTE	148
	THESE.....	148

Liste des Tableaux

<u>Tableau III.1</u> Principe de la méthode des différences finies	51
<u>Tableau III.2</u> Différences finies en amont et en aval.....	51
<u>Tableau III.3</u> Comparaison des nombres de Nusselt moyens	59
<u>Tableau VI.1</u> Variation du nombre de Nu_{moy} en fonction du nombre de Ra pour les deux configurations	103
<u>Tableau VI.2</u> Variation du nombre de la fonction courant en fonction du nombre de Rayleigh pour les deux configuration.....	104

Liste des figures

Figure I. 1 Illustration d'un système de convection Rayleigh-Bénard, l'accélération due à la pesanteur g est parallèle au gradient de température imposé	5
Figure I. 2 Grandeur naturelle (calqué sur une photographie), Tourbillons Cellulaires dans une nappe liquide, Température 60° , Epaisseur 640μ [9]	8
Figure I. 3 Schéma illustrant les rouleaux de la convection de Rayleigh- Bénard	10
Figure I. 4 Schéma représentant la convection dans une enceinte à gradient de température horizontal	11
Figure I. 5 Ecoulement Taylor-Couette est le jumeau hydrodynamique de la convection de Rayleigh Bénard : (a) rouleaux de Rayleigh-Benard et (b) tourbillons de Taylor	16
Figure I. 6 Système d'écoulement de Taylor-Couette	16
Figure I. 7 Deuxième instabilité mode ondulatoire (Wavy mode)	18
Figure I. 8 Divers domaines d'application des métaux liquides [10]	20
Figure I. 9 Moteur à métal liquide avec un faible frottement et une faible usure [55]	21
Figure II. 1 Configuration géométrique avec parois chaude et paroi froide	32
Figure II. 2 Configuration géométrique avec les parties actives situées aux milieux des parois	33
Figure II. 3 Configuration géométrique avec la partie verticale chaude située en bas et la partie froide située en haut	33
Figure II. 4 Configuration géométrique avec la partie verticale chaude située en haut et la partie froide située en bas	34
Figure II. 5 Configuration inclinée haut chaud - bas froid	34
Figure II. 6 Configuration inclinée milieu chaud-milieu froid	35
Figure II. 7 Configuration inclinée bas chaud-haut froid	35
Figure II. 8 Configuration géométrique avec parois verticales chaudes et une partie de la paroi horizontale froide en haut et la base est adiabatique	40
Figure II. 9 Configuration géométrique avec toutes les parois actives chaude sauf la partie supérieure comprise entre $1/8$ et $7/8$ est froide	41
Figure II. 10 Configuration de Czochralski tridimensionnelle	43
Figure III. 1 Maillage du domaine de calcul en (i, j)	50
Figure III. 2 Organigramme de calcul	56
Figure III. 3 Nombre de nœuds suivant X et Y	57
Figure III. 4 Profil de la composante de la vitesse U en $Y=0.5$ pour $Ra = 10^6$	58
Figure III. 5 Profil de la composante de la vitesse V en $X=0.5$ pour $Ra = 10^6$	59
Figure III. 6 Comparaison des isothermes et des lignes de courants pour $Gr=10^5$: (à gauche) Présent travail, (à droite) les résultats numériques de Kandaswamy et al [28]	60
Figure IV. 1 Isothermes pour $Ra = 103$, H-B (a) $Nu = 1.372$, M-M (b) $Nu = 1.713$ et B-H (c) $Nu = 1.446$	71
Figure IV. 2 Lignes de courant pour $Ra = 103$, H-B (a) $\Psi_{max} = 0.738$, M-M (b) $\Psi_{max} = 1.035$ et B-H (c) $\Psi_{max} = 0.971$	71
Figure IV. 3 Isothermes pour $Ra = 104$, H-B (a) $Nu = 2.050$, M-M (b) $Nu = 3.243$ et B-H (c) $Nu = 2.933$	72
Figure IV. 4 Lignes de courant pour $Ra = 104$, H-B (a) $\Psi_{max} = 2.444$, M-M (b) $\Psi_{max} = 4.290$ et B-H (c) $\Psi_{max} = 5.126$	72
Figure IV. 5 Isothermes pour le nombre de Rayleigh $Ra = 105$, H-B (a) $Nu = 3.179$, M-M (b) $Nu = 6.073$ et B-H (c) $Nu = 5.513$	73
Figure IV. 6 Lignes de courant pour $Ra = 105$, H-B (a) $\Psi_{max} = 3.511$, M-M (b) $\Psi_{max} = 7.393$ et B-H (c) $\Psi_{max} = 11.062$	73

Figure IV. 7 Isothermes pour $Ra = 106$, H-B (a) $Nu = 4.418$, M-M (b) $Nu = 11.107$ et B-H (c) $Nu = 10.668$	73
Figure IV. 8 Lignes de courant pour $Ra = 106$, H-B (a) $\Psi_{max} = 5.946$, M-M (b) $\Psi_{max} = 11.775$ et B-H (c) $\Psi_{max} = 20.712$	74
Figure IV. 9 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de Ra	74
Figure IV. 10 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de nombre de Ra	75
Figure IV. 11 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Milieu - Milieu pour différentes valeurs de nombre de Ra	75
Figure IV. 12 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Milieu-Milieu pour différentes valeurs de Ra	76
Figure IV. 13 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Bas- Haut pour différentes valeurs de nombre de Ra	76
Figure IV. 14 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Bas- Haut pour différentes valeurs de Ra	77
Figure IV. 15 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de Ra	78
Figure IV. 16 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Haut – Bas pour différentes valeur de Ra	78
Figure IV. 17 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Milieu -Milieu pour différentes valeurs Ra	79
Figure IV. 18 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Milieu -Milieu pour différentes valeurs de Ra	79
Figure IV. 19 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Bas -Haut pour différentes valeurs de Ra	80
Figure IV. 20 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Bas -Haut pour différentes valeurs de nombre de Ra	80
Figure IV. 21 Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh et pour les trois configurations	81
Figure IV. 22 Isothermes pour $Ra=10^5$, $A=1$, Configuration Haut-Bas pour angles d’inclinaison.....	82
Figure IV. 23 Lignes de courant, $Ra=105$, $A=1$, Configuration Haut-Bas, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$	83
Figure IV. 24 Isothermes pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Milieu-Milieu pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$,	83
Figure IV. 25 Lignes de courant pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$	84
Figure IV. 26 Isothermes pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$	84
Figure IV. 27 Isothermes pour $Ra=10^5$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$	85
Figure IV. 28 Contour de température $aRa = 101$, $bRa = 102$, $cRa = 103$, $dRa = 104$, $eRa = 105$, (f) $Ra = 2.105$, (g) $Ra = 5.105$ et (h) $Ra = 106$	86
Figure IV. 29 Profile de la température le long de $X=0.5$ pour différentes valeurs de Ra	87
Figure IV. 30 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh	88
Figure IV. 31 Contour de fonction de courant : $aRa = 101$, $bRa = 102$, $cRa = 103$, $dRa = 104$, $eRa = 105$, (f) $Ra = 2.105$, (g) $Ra = 5.105$ et (h) $Ra = 106$	89
Figure IV. 32 Contour de la vitesse horizontale U (a) $aRa = 101$, $bRa = 102$, $cRa = 103$, $dRa = 104$, $eRa = 105$, (f) $Ra = 2.105$, (g) $Ra = 5.105$ et (h) $Ra = 106$	90
Figure IV. 33 Contour de la vitesse verticale V : $aRa = 101$, $bRa = 102$, $cRa = 103$, $dRa = 104$, $eRa = 105$, (f) $Ra = 2.105$, (g) $Ra = 5.105$ et (h) $Ra = 106$	91
Figure IV. 34 Profils de la vitesse horizontale U le long de $Y = 0.5$ pour différentes valeur de Ra	92
Figure IV. 35 Profils de la vitesse verticale V le long de $X=0.5$ pour différents nombre de Ra	92
Figure IV. 36 Variation nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh.....	93
Figure IV. 37 Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude pour différentes valeurs de Ra	94

Figure IV. 38 Contours de température $aRa = 101, bRa = 102, cRa = 103, dRa = 104, eRa = 105, fRa = 2.105$ et $(g) Ra = 5.105$	95
Figure IV. 39 Profil de la température le long de $X = 0.5$ pour différentes valeurs de Ra	96
Figure IV. 40 Contour des lignes de courant $aRa = 101, bRa = 102, cRa = 103, dRa = 104, eRa = 105, fRa = 2.105$ et $(g) Ra = 5.105$	97
Figure IV. 41 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction du Ra	98
Figure IV. 42 Contour de la vitesse horizontale U courant $aRa = 101, bRa = 102, cRa = 103, dRa = 104, eRa = 105, fRa = 2.105, gRa = 5.105$ et $(g) Ra = 106$	99
Figure IV. 43 Contour de la vitesse verticale V $aRa = 101, bRa = 102, cRa = 103, dRa = 104, eRa = 105, fRa = 2.105, gRa = 5.105$ et $(g) Ra = 106$	100
Figure IV. 44 Profils de la vitesse horizontale U le long de $Y = 0.5$	101
Figure IV. 45 Profils de la vitesse verticale V le long de $X = 0.5$	101
Figure IV. 46 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra	102
Figure IV. 47 Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude pour différents Ra	102
Figure IV. 48 Variation du nombre de $Numoy$ en fonction du nombre de Ra pour les deux configurations de type Kyropoulos.....	103
Figure IV. 49 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction de nombre de Rayleigh pour les deux configurations	104
Figure IV. 50 Système d'écoulement et le type de maillage utilisé.....	106
Figure IV. 51 Champ de pression pour différents nombre de Taylor	107
Figure IV. 52 Vecteurs tangentiels aux lignes de courant sur plan formé par les composantes (Vr, Vz)	108
Figure IV. 53 Composantes de vitesses dans le plan (r, Z) pour différents nombre de Taylor	109
Figure IV. 54 Schéma des systèmes Taylor-Couette avec changement d'espace annulaire. (a) Un changement du rayon du cylindre intérieur, (b) un changement du rayon du cylindre extérieur, et (c) une variation du rayon des cylindres intérieur et extérieur, tous les systèmes à $\Gamma = 10, \Gamma' = 10, \eta = 0,66$ et $D = 2d$	111
Figure IV. 55 Schéma des géométries de maillage des systèmes de Taylor-Couette : (180 cellules dans la direction axiale et 240 cellules dans les directions azimutales).....	112
Figure IV. 56 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (a) pour différentes valeurs de nombre de Taylor $a1Ta = 7.42, a2 Ta = 14.56, (a3) Ta = 22.28, (a4) Ta = 29.71, (a5) Ta = 37.13$ et $(a6) Ta = 44.56$	113
Figure IV. 57 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (b) pour différentes valeurs de nombre de Taylor $b1Ta = 7.42, b2 Ta = 14.56, (b3) Ta = 22.28, (b4) Ta = 29.71, (b5) Ta = 37.13$ et $(b6) Ta = 44.56$	114
Figure IV. 58 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (c) pour différentes valeurs de nombre de Taylor $c1Ta = 7.42, c2 Ta = 14.56, (c3) Ta = 22.28, (c4) Ta = 29.71, (c5) Ta = 37.13$ et $(c6) Ta = 44.56$	115
Figure IV. 59 Profile axial de la composante tangentielle de la vitesse sans dimension au milieu de l'espace large selon le plan $r^*, Z^*, \Gamma = 10, \eta = 0.66, Ta = 59.42$	116
Figure IV. 60 Isotherme et lignes de courant dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 104$	117
Figure IV. 61 Composante axiale de la vitesse et lignes de courant dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 104$	118
Figure IV. 62 Composante radiale de la vitesse dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 104$	118
Figure IV. 63 Schéma de système d'écoulement Couette conique	121
Figure IV. 64 Maillage du système d'écoulement Couette conique (768000 cellules).....	121
Figure IV. 65 Vitesse angulaire en fonction du nombre de Taylor relatif ; (a) $Z^* = 0$, (b) $Z^* = 0.66$, (c) $Z^* = 1.14$, (d) $Z^* = 1.7$ et (e) $Z^* = 2.17$ pour $\alpha = 0^\circ$	122
Figure IV. 66 Mouvement en spirale- hélicoïdal du fluide à l'intérieur de l'espace annulaire, $T^* = 1.24$	123
Figure IV. 67 Lignes de courant (U, W) dans le plan (r^*, Z^*) pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$	124

Figure IV. 68 Coefficient de frottement sur les parois des cônes cylindriques intérieur et extérieur pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$	125
Figure IV. 69 Coefficient de frottement sur les parois intérieur et extérieur pour l'angle de conicité 0° (forme cylindrique), $T^* = 1.24$	125
Figure IV. 70 Distribution de la composante azimutale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$	126
Figure IV. 71 Profile de la composante axiale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour différents rayons $r^* = 0.25$, $r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ pour le cas cylindrique	127
Figure IV. 72 Profile de la composante radiale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour différents rayons $r^* = 0.25$, $r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ pour le cas cylindrique	127
Figure IV. 73 Profile de la vitesse angulaire de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour un rayon $r^* = 0.5$ pour le cas cylindrique	127
Figure IV. 74 Profiles de la vitesse azimutale, de la vitesse angulaire et du moment cinétique pour $T^* = 1.41$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différents rayon $r^* = 0.25$, $r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ $\alpha = 15^\circ$..	128
Figure IV. 75 Profiles de la vitesse angulaire en fonction du rayon r^* pour $T^* = 1.24$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différentes hauteurs $Z^* = 0$, $Z^* = 0.66$, $Z^* = 1.14$, $Z^* = 1.7$, $Z^* = 1217$ et $\alpha = 0^\circ$...	128
Figure IV. 76 Profiles de la vitesse angulaire adimensionnelle ω^* en fonction du rayon r^* pour $T^* = 1.24$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différentes hauteurs $Z^* = 0$, $Z^* = 0.66$, $Z^* = 1.14$, $Z^* = 1.7$, $Z^* = 1217$ et $\alpha = 15^\circ$	129
Figure IV. 77 Profiles de la vitesse angulaire adimensionnelle ω^* en fonction de la hauteur Z^* pour $r^* = 0.5$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différents nombre de Taylor T^* et $\alpha = 0^\circ$	129
Figure IV. 78 Maillage utilisé dans la simulation dans les systèmes de croissance cristalline de type Cz.....	130
Figure IV. 79 Champ d'écoulement (A) isothermes (B) et isobares (C) dans le cas sans champ magnétique.....	133
Figure IV. 80 Champ d'écoulement (D) isothermes (E) et isobares (F) dans le cas avec un champ magnétique transversal	134
Figure IV. 81 Champ d'écoulement (H) isothermes (I) et isobares (J) en présence du champ magnétique axial.....	135
Figure IV. 82 Apparition de tourbillons transitoires à différents stades en présence du champ magnétique axial.....	136
Figure IV. 83 Apparition des zones d'isobares ressemblantes aux tourbillons hydrodynamique en présence du champ magnétique axial.....	137
Figure IV. 84 Superposition des isobares sur les vortex de Taylor	138
Figure IV. 85 Isothermes avec champ magnétique pour quatre premières étapes	139
Figure IV. 86 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vitesse à la surface libre.....	140
Figure IV. 87 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vorticit�� à la surface libre.....	140
Figure IV. 88 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vitesse de la pression à la surface libre	140

Liste des nomenclatures et abréviations

Abréviation

Cz	Czochralski
T-C	Taylor-Couette
Ky	Kyropoulos
2D	Bidimensionnel
3D	Tridimensionnel
MATLAB	Matrix Laboratory
Ansys	Analysis System
FORTRAN	Formula Translation/Translator
Gambit	Genomic Analysis and Mapping by In Vitro Transposition
Tecplot	Technical Plots
R-B	Reyeigh-Bénard
H-B	Haut-Bas
M-M	Milieu-Milieu
B-H	Bas-Haut
TC	Taylor-Couette
PIV	Particle Image Velocity
MHD	MagnétoHydroDynamics
MCZ	Croissance cristalline Czochralski avec champ magnétique

Symboles en lettres grecques

α	Diffusivité thermique	$[m \cdot s^{-2}]$
β_0	Coefficient de dilatation thermique a pression constante	$[K^{-1}]$
Δ	Différence - écart	-
δ	Facteur géométrique	-
ϵ_0	Permittivité du vide	$[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9]$
λ	Conductivité thermique	$[W \cdot m^{-1}K^{-1}]$
μ	Viscosité dynamique du fluide	$[kg \cdot m^{-1}s^{-1}]$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$[(4\pi \cdot 10^{-7})]$
ν	Viscosité cinématique	$[m \cdot s^{-2}]$
η_m	Viscosité magnétique	$[Pa \cdot s]$
Γ	Facteur d'aspect de la géométrie cylindrique	-
γ	Tension superficielle	$[J \cdot m^{-1}]$
ω	Vorticité.	$[s^{-1}]$
Ω	Vorticité adimensionnelle	-
Ω_i	Vitesse angulaire du cylindre intérieur du système T-C	$[rad \cdot s^{-1}]$
Ω_e	Vitesse angulaire du cylindre extérieur du système T-C	$[rad \cdot s^{-1}]$
Ω_{ic}	Vitesse angulaire critique du cylindre intérieur du système T-C	$[rad \cdot s^{-1}]$
Ω_c	Vitesse angulaire du cylindre de la configuration Cz	$[rad \cdot s^{-1}]$
Ω_s	Vitesse angulaire du disque de la configuration Cz	$[rad \cdot s^{-1}]$
θ	Angle d'inclinaison	$[rad]$

Θ	Température adimensionnelle	-
τ_v	Temps de diffusion visqueuse	[s]
τ_α	Temps de diffusion thermique	[s]
ρ_0	Masse volumique de référence (constante)	[kg.s ⁻³]
ψ	Fonction de courant	[m ⁻¹ .s ⁻²]
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle	-
σ	Conductivité électrique	[Siemens.m ⁻¹]
ξ	Coefficient de relaxation	-

Symboles en lettres latines

A	Facteur de forme géométrique de la cavité 2D	-
A_C	Facteur de forme géométrique de la cavité cylindrique	-
B_0	Intensité du champ magnétique externe	[T]
C_p	Capacité calorifique massique du fluide à pression constante	[J.kg ⁻¹ .K ⁻¹]
D	Largeur de l'espace annulaire le plus large	[m]
d	Largeur de l'espace annulaire	[m]
l	Longueur caractéristique	[m]
H	Hauteur de la cavité bidimensionnelle	[m]
H_c	Hauteur du cylindre Cz	[m]
h	Hauteur de système T-C	
L	Largeur de la cavité	[m]
g	Champ de gravité	[m.s ⁻²]
Gr	Nombre de Grashof	-
Ma	Nombre de Marangoni	-
N	Nombre d'interaction magnétique	-
Nu	Nombre de Nusselt	-
$Numoy$	Nombre de Nusselt moyen	-
$Nuloc$	Nombre de Nusselt local	-
p	Pression dans le fluide	[Pa]
\hat{p}	Pression adimensionnelle	-
Pr	Nombre de Prandtl	-
\hat{r}	Variable radiale adimensionnelle	-
R_c	Rayon de la géométrie cylindrique Cz	[m]
R_s	Rayon du disque de la géométrie Cz	[m]
R_{in}	Rayon du cylindre intérieur du système Taylor-Couette	[m]
R_{ex}	Rayon du cylindre extérieur du système Taylor-Couette	[m]
Ra	Nombre de Rayleigh	-
Rac	Nombre de Rayleigh critique	-
Re	Nombre de Reynolds pour	-
Re_m	Nombre de Reynolds magnétique	-
Re_C	Nombre de Reynolds de cylindre de la géométrie Cz	-
Re_s	Nombre de Reynolds du disque de la géométrie Cz	-
Ta	Nombre Taylor	-
t	Temps	[s]
\hat{t}	Temps adimensionnel	-
T	Température du fluide	[K]
T_0	Température de référence (constante) associée à ρ_0	[K]
T_f	Température à la paroi froide	[K]

T_c	Température à la paroi chaude	[K]
\hat{T}	Température adimensionnelle dans le cas de Cz	-
u, v	Composantes de vecteur vitesse du fluide dans les directions x et y respectivement	[m.s ⁻¹]
T_m	Température moyenne	[K]
x, y, z	Coordonnées cartésiennes	[m]
X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	-

Exposants et Indices

r	Relatif à l'axe de coordonnée cylindriques radial
θ	Relatif à l'axe de coordonnée cylindriques azimutal
z	Relatif à l'axe de coordonnée cylindriques axial
c	Relatif à la paroi chaude
f	Relatif à la paroi froide
i	Relatifs au cylindre intérieur
e	Relatifs au cylindre extérieur

Vecteurs

\vec{V}	Vecteur de vitesse	[m.s ⁻¹]
$\vec{\hat{V}}$	Vecteur de vitesse adimensionnelle	-
\vec{B}	Champ magnétique	[Tesla]
\vec{E}	Champ électrique	[V.m ⁻¹]
\vec{J}	Densité de courant électrique	[A.m ⁻²]
$\vec{\nabla}$	Nabla pseudo-vecteur le gradient	-

Notations

.	Opération de produit scalaire
\wedge	Opération de produit vectoriel

ملخص

في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة ظاهرة الحمل الحراري لمعدن سائل موجود في وسط محصور بأشكال هندسية مختلفة، اعتمادًا على ظروف التسخين وميل التجايف، يمكن أن تكون حركة السائل أكثر استقرارًا أو أكثر هيجان. لذلك، يصبح التحكم في التدفق له أهمية قصوى. حيث أجريت هذه دراسة التكوين البلوري من نوع Czochralski تحت تأثير المجال المغناطيسي الخارجي المحوري أو الشعاعي. الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو إبراز سلوك معدن سائل ذي رقم Prandtl منخفض يخضع لتدرج درجة الحرارة ويوجد في تجويف مغلق، وكذلك دراسة تأثيرات الهندسة والميل ومعاملات التحكم وتحديدًا تأثير رقم رايلي Rayleigh على سلوك السوائل من خلال تحليل التباين رقم نسلت المتوسط والمحلي بتغيير رقم رايلي من 10 إلى 10^6 .

بالنسبة للتجويف ثلاثي الأبعاد من نوع Taylor-Couette، تمت دراسة عدم الاستقرار الهيدروديناميكي الأول لتدفق الصوديوم السائل الموجود بين أسطوانتين محورتين لانهائيتين حيث يتم تثبيت الأسطوانة الخارجية والأخرى الداخلية تخضع إلى دوران. تُظهر النتائج المتحصل عليها بواسطة ديناميكا الموائع الحسابية المعتمدة على أساس طريقة الأحجام المحدودة من أجل رقم تايلور منخفض جدًا، أن التدفق الأسامي مستقر، ومتناظر عن طريق إنسحاب عمودي وأنه لا توجد تشكل خلية في فجوة الهواء. من خلال زيادة رقم تايلور، ظهرت خليتان أوليتان بالقرب من كل لوحة نهائية، تسمى دوامات Eckman. بعد القيمة الحرجة، يصبح التدفق غير مستقر. تبدو النتائج مرضية فيما يتعلق بسلوك عدم الاستقرار الهيدروديناميكي، بالاتفاق مع البيانات التجريبية الموجودة المؤلفات العلمية.

الكلمات المفتاحية: الظواهر الحرارية، معادن سائلة، تدفق Taylor-Couette، مغناطيسي هيدروديناميكي، محاكاة رقمية، تجويف محصور.

RESUME

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du phénomène de thermo-convectifs d'un métal liquide présent dans un milieu confiné de géométries différentes, selon les conditions de chauffage et d'inclinaison des cavités, le mouvement du liquide peut être plus stable ou plus agité. Par conséquent, le contrôle particulier de l'écoulement devient plus qu'important. Cette étude a également été menée sur la configuration de croissance cristalline de type Czochralski sous l'influence du champ magnétique externe axial ou radial.

L'objectif principal de cette étude est de mener des investigations numériques sur la convection thermique et les écoulements rotatifs dans des cavités 2D et 3D. Nous nous sommes penchés sur les effets de la géométrie, de l'inclinaison et des paramètres de contrôle, en particulier l'effet du nombre de Rayleigh sur le comportement de fluide en analysant la variation de nombre de Nusselt moyen et local. Nous faisons varier le nombre de Rayleigh de 10 jusqu'à 10^6 .

Les résultats trouvés par la voie de simulation numérique de cavités 2D montrent que l'augmentation de Ra change le transfert de chaleur du mode diffusif de $Ra = 10^3$ vers le mode convectif et donc le Nusselt augmente.

Pour le cas de l'une cavité 3D de Taylor-Couette, la première instabilité hydrodynamique de l'écoulement de sodium liquide contenu entre deux cylindres coaxiaux infinis dans lesquels le cylindre extérieur est fixe et l'intérieur tourne a été étudiée numériquement par CFD basé sur la méthode des volumes finis. Pour un nombre de Taylor très faible, les résultats montrent que l'écoulement de base est stationnaire, axisymétrique invariant par translation verticale et qu'aucune cellule ne se forme dans l'entrefer. En augmentant le nombre de Taylor, deux premières cellules sont apparues près de chaque plaque d'extrémité, appelées vortex d'Eckman. Au-delà de la valeur critique, l'écoulement devient instable. Les résultats semblent satisfaisants quant à la première instabilité hydrodynamique, en accord avec les données expérimentales trouvées dans la littérature.

Mots-clés : Convection, métal liquide, écoulement de Taylor-Couette, Simulation numérique, milieu confiné, Magnétohydrodynamique.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the thermo-convective phenomenon of a liquid metal present in a confined medium of different geometries, depending on the heating conditions and the inclination of the cavities, the movement of the liquid can be more stable or more restless. Therefore, the particular control of the flow becomes more than important. This study was also carried out on the Czochralski type crystal configuration under the influence of the external axial or radial magnetic field.

The main objective of this study is to carry out numerical investigations on thermal convection and rotating flows in 2D and 3D cavities. We investigated the effects of geometry, inclination and control parameters, namely the effect of Rayleigh number on fluid behavior by analyzing the variation of mean and local Nusselt number. We varied the Rayleigh number from 10 up to 10^6 .

The results found by the simulation for two-dimensional cavities show that the increase in Ra accelerates the flow in the cavity and the heat transfer changes from the diffusive mod for $Ra = 10^3$ to the convective mode and consequently the Nusselt number increases.

For the case of the Taylor-Couette flow three-dimensional cavity, the first hydrodynamic instability of the liquid sodium flow contained between two infinite coaxial cylinders where the outer cylinder is fixed and the inner one is rotating has been studied numerically using the finite volume method. For a very low Taylor number, the results show that the basic flow is stationary, axisymmetric invariant by vertical translation and that no cell forms in the air gap. By increasing the Taylor number, two first cells appeared near each endplate, called Eckman vortices. Beyond a threshold value, it can be seen that this base rate becomes unstable. For the large Taylor number, the counter-rotating rollers in the liquid sodium cylindrical space flow appeared and extended all around the inner cylinder of the cylinder. The tangential velocity values are greater than the radial and axial velocity components. The results seem satisfactory concerning the behavior of the hydrodynamic instability, in agreement with the experimental data found in the literature.

Keywords: Convection, Liquid metal, Taylor-Couette flow, Numerical simulation, Confined medium, Magnetohydrodynamics.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le domaine des phénomènes thermo-convectifs et des écoulements rotatifs a suscité et continue d'intéresser de nombreux chercheurs scientifiques et industriels à ce jour. La recherche scientifique menée dans le domaine des deux problèmes jumeaux s'étend sur un peu plus d'un siècle. Un énorme travail de recherche, suite à l'étude du phénomène par les expériences [7] et l'analyse théorique de [44] au début du XXe siècle, a été entrepris jusqu'à nos jours. [51] a également été le premier à étudier les instabilités hydrodynamiques entre deux cylindres concentriques en rotation. Le phénomène de convection en milieux confinés est souvent rencontré dans l'industrie et a des conséquences fondamentales. Ceci est principalement dû à la simplicité du système d'écoulement et à la richesse des informations et de la compréhension des régimes de transition laminaire-turbulent.

De nombreuses études théoriques et expérimentales ont été consacrées au cas des écoulements confinés dans un espace annulaire pour examiner l'instabilité centrifuge soumise à l'influence des forces de frottement visqueuses et inertielles.

Les écoulements rotatifs sont probablement le problème le plus couramment étudié en mécanique des fluides en raison de leurs diverses applications dans la nature et les procédés industriels. Depuis l'établissement des travaux empiriques et théoriques fondateurs de Taylor [51], ce type d'écoulements a suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique dans divers domaines, tels que, la géophysique, l'ingénierie du mélange d'agrégats, les réacteurs chimiques, les processus de croissance cristalline de Czochralski et de Kyropoulos, et etc.

Le mouvement d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux relativement tournants, délimités par deux plaques d'extrémité, ledit problème de Taylor-Couette, est un modèle académique idéal pour étudier les régimes de transition laminaire-turbulent à l'échelle du laboratoire [50].

Le système de Taylor-Couette a une longue histoire et un grand nombre de travaux expérimentaux, analytiques et numériques qui sont apparus pour étudier l'apparition et la propagation des tourbillons et les régimes de transition laminaire-turbulent. Le rapport d'aspect,

le rapport des rayons, l'espace annulaire et l'interaction entre les bords d'extrémités et le fluide en mouvement ont un effet important sur les régimes de l'écoulement de Couette [38].

La résolution du problème de la convection en milieu confiné se réduit à prédire les champs de température et de vitesse ainsi que l'intensité de la fonction de courant en fonction des divers paramètres de contrôle. Il est également important de prévoir les taux de transfert de chaleur (nombre de Nusselt).

Le présent travail est de nature numérique, traitant deux catégories de problèmes, dans le premier cas nous nous intéressons à la convection naturelle dans une cavité contenant du métal liquide soumis au gradient de température avec parois chaudes, parois froides et autres adiabatiques. Dans le deuxième cas, nous nous intéressons aux écoulements de Taylor-Couette.

Certaines hypothèses simplificatrices seront adoptées pour permettre la modélisation des équations mathématiques régissant le mouvement du fluide sous l'influence de gradient de température et de rotation des parois. L'écoulement sera régi par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie. La résolution numérique est basée sur la méthode des différences finies pour les cavités 2D et sur la méthode des volumes finis pour les cavités cylindrique 3D.

Contexte du travail

Cette étude porte sur deux problèmes jumeaux : l'étude du phénomène de convection du métal liquide à faible nombre de Prandtl dans des cavité 2D et 3D et des écoulements hydrodynamiques entre deux cylindres coaxiaux de type Taylor-Couette.

Les études menées sont des investigations numériques des effets de nombreux paramètres de contrôle sur l'écoulement, en particulier les effets des nombres de Rayleigh, Nusselt et Taylor. Sachant que le métal liquide est un fluide de propriétés thermophysiques exceptionnelles, toutefois il est opaque, et donc les simulations numériques sont indispensables pour la compréhension des mécanismes de formation. L'approximation de Boussinesq est appliquée, la condition de non-glissement est considérée. Dans le cas du système d'écoulement hydrodynamique, nous nous intéressons à l'étude de la première instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette en fonction du nombre de effets combinés de l'inclinaison et du gradient de température sur les phénomènes convectifs.

Motivation et contribution

L'objectif principal de cette thèse est de mettre en évidence les effets de la géométrie, des paramètres de contrôles à savoir le nombre de Rayleigh sur le nombre de Nusselt caractérisant le régime du transfert de chaleur et le nombre de Taylor sur l'apparition de la première instabilité hydrodynamique dans le système de Taylor-Couette. La compréhension et le contrôle du comportement du fluide au mouvement par convection naturelle ou mixte sont primordiaux pour l'élaboration des cristaux semi-conducteurs de haute qualité utilisés dans les ordinateurs, les téléphones portables, les appareils laser ou les cellules solaires, etc.

L'instabilité convective se produisant dans la masse fondue joue un rôle important dans de nombreux aspects de la croissance cristalline à partir de la phase liquide. Subséquemment, la convection dans la phase liquide doit être contrôlée. L'application d'un champ magnétique au système Czochralski est un outil efficace pour contrôler le bain fondu pendant le processus de croissance qui affecte directement la qualité du cristal.

Des techniques mathématiques de modélisation, d'analyse et de simulation sont utilisées pour soutenir le développement des processus de croissance. De nombreux chercheurs ont consacré leurs efforts à l'étude de l'écoulement et du transfert de chaleur dans la croissance Czochralski avec champ magnétique (MCZ).

Organisation du manuscrit

Ce travail est résumé dans un manuscrit organisé de la façon suivante :

Dans un **premier chapitre** que nous avons intitulé " recherche bibliographique", nous présentons deux problèmes jumeaux : les phénomènes thermo-convectifs et l'écoulement de Taylor-Couette, ainsi qu'une récapitulation sur les métaux liquides et paramètres de contrôle.

Nous avons consacré **le deuxième chapitre** à la modélisation mathématique, les équations qui gouvernent les écoulements, à savoir les équations de Navier-Stokes, de continuité et de l'énergie, ainsi que les conditions aux limites, les paramètres de contrôle et l'adimensionnement.

Dans **le troisième chapitre**, nous présentons l'approche numérique et la validation basée sur la méthode des différences finies et CFD.

Le quatrième chapitre est une contribution par voie numérique à l'étude hydrodynamique, thermique et magnétohydrodynamique de la convection dans cavités 2D,

de l'écoulement de Taylor Couette, et l'étude des phénomènes thermo-convectifs dans le système d'écoulement de la croissance cristalline de type Czochralski avec et sans champ magnétique externe uniforme.

CHAPITRE

I

**RECHERCHE
BIBLIOGRAPHIQUE**

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE

I

Introduction

Cette étude porte principalement sur les phénomènes thermo-convectifs d'un métal liquide contenu dans un milieu confiné avec/sans champ magnétique. Elle s'intéresse particulièrement à l'effet de la géométrie et des paramètres de contrôle c'est-à-dire les nombres de Rayleigh et de Hartmann sur la convection naturelle et on fait remonter le nombre de Grashof et de Reynolds pour le cas d'une convection forcée ou mixte. Ce chapitre a pour objectif de présenter les écoulements thermo-convectifs dans diverses configurations et les métaux liquides de faible nombre de Prandtl.

I.1. PHENOMENES THERMOCONVECTIFS

Le phénomène de convection est répandu partout et fréquemment rencontré dans la nature et dans divers systèmes industriels. Il provient d'une interaction complexe au sein d'un environnement ou entre milieux une fois qu'il y a un gradient de température. Cette interaction est responsable de la diversité des écoulements résultants. La convection thermique est l'un des quatre modes de transfert de chaleur, y compris la conduction, le rayonnement et le changement de phase, qui sont d'une importance vitale à la fois sur les plans fondamental et applications, tels que la climatisation, le chauffage et le refroidissement.

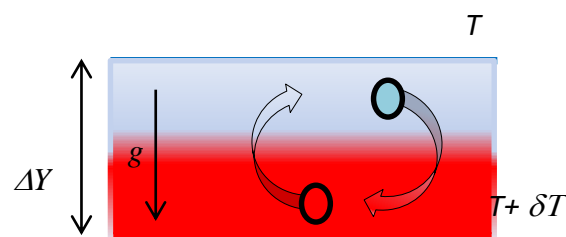


Figure I. 1 Illustration d'un système de convection Rayleigh-Bénard, l'accélération due à la pesanteur g est parallèle au gradient de température imposé

La détermination du type d'écoulement peut être faite par les causes du mouvement fluconsidéré. Si le déplacement du fluide est dû à la présence des forces extérieures, l'entraînement du fluide se fait par la convection forcée. Si les causes du mouvement du fluide sont des forces internes générées par les propriétés du fluide lui-même, notamment la force de flottabilité générée par des inhomogénéités spatiales dans la masse volumique avec la présence d'un champ de pesanteur, la convection est dite naturelle ou libre.

La masse volumique du fluide est affectée par sa température, qui devient différente de la masse volumique du fluide avoisinant. Sous l'effet de la poussée d'Archimède, le fluide se déplace alors verticalement. Ces mouvements sont appelés convection thermique. Ils sont à l'origine de plusieurs phénomènes naturels, notamment les courants marins, les orages, les remontées de magma, etc.

En technologie, citant comme exemple, l'eau de circuit secondaire de réacteur des centrales nucléaires est refroidie dans des cheminées utilisant la capacité d'extraction de chaleur de la convection de l'eau. Les tours solaires utilisant également la convection pour produire de l'électricité, etc.

Une différence notable entre la convection forcée et naturelle est la vitesse d'écoulement. Pour la plupart des applications techniques, la convection forcée est plus rapide que les systèmes de convection naturelle.

Un mécanisme de transport supplémentaire dans le transfert thermique est le rayonnement thermique. Chaque objet émet de la chaleur sous forme d'ondes électromagnétiques en fonction de sa température. La pertinence de cet effet pour la convection thermique dépend de la perméabilité du fluide au rayonnement thermique. Aux basses températures proches de la température ambiante, le transport de chaleur radiative peut souvent être négligé par rapport à la diffusion et à l'advection de chaleur. De plus, les métaux liquides sont notoirement difficiles à pénétrer par rayonnement électromagnétique. Par conséquent, l'effet du rayonnement ne sera pas considéré dans le présent travail.

La première étude expérimentale approfondie de la convection thermique a été valorisée par deux publications [7, 9]. La description du comportement d'une fine couche de fluide chauffée par le bas et avec une surface supérieure libre en haut. Un mouvement du fluide n'était détectable qu'une fois dépassée une différence de température critique, appelée début de convection. Les structures d'écoulement résultantes étaient des cellules hexagonales avec un écoulement ascendant en leur centre et un écoulement descendant aux limites entre les cellules.

Il a été montré que l'écoulement observé dans les expériences de [8] était causé par des forces dues à une tension superficielle inhomogène (appelée convection de Marangoni), plutôt que par des forces de flottabilité. Cela était dû à la surface libre et à la très faible épaisseur de la couche de fluide de l'ordre de quelques millimètres [7,8]. Cependant, les publications de Bénard ont suscité un certain nombre d'approfondissements sur le sujet par différents scientifiques. La première explication théorique a été avancée par [44]. Il a calculé la différence de température critique et la taille de la structure pour l'apparition d'un écoulement convectif dans une couche fluide infinie dilatante horizontale, avec chauffage par le bas et refroidissement par le haut. Ce système spécifique, illustré à la figure I.2, a été nommé convection de Rayleigh-Bénard (CRB) en l'honneur de ces deux scientifiques. Les études théoriques de Rayleigh sont considérées comme une base de toutes les recherches sur le sujet et sont toujours utilisées aujourd'hui. Le travail a été entrepris par [9].

La formulation des équations par Rayleigh décrit la convection thermique avec l'application de l'approximation de [11]. En général, toutes les propriétés matérielles du fluide dépendent de la température, des changements dus aux variations de température sont négligés, à l'exception du changement de masse volumique ρ dans la force de poussée d'Archimède. La masse volumique est approchée par une fonction linéaire de la température :

$$\rho(T) = \rho_0 - \rho_0 \beta (T - T_0) \quad (\text{I.1})$$

Avec :

$\rho_0 = \rho(T_0)$ est la masse volumique à une température de référence T_0 et β est le coefficient de dilatation thermique volumétrique à pression constante p . Dans tous les autres aspects, le fluide est considéré comme incompressible et la masse volumique $\rho = \rho_0$ est constante.

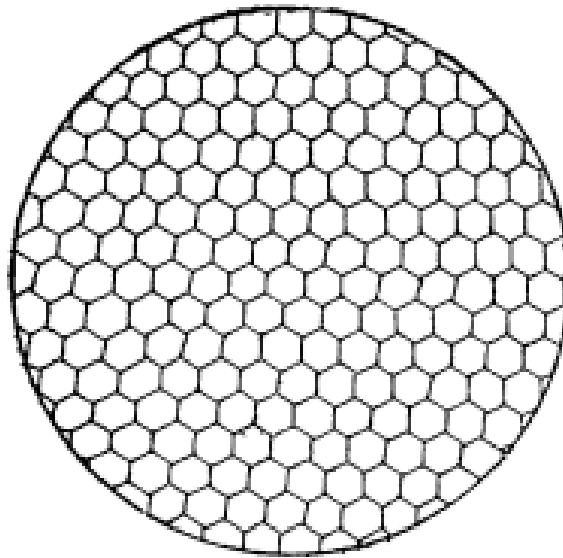


Figure I. 2 Grandeur naturelle (calqué sur une photographie), Tourbillons Cellulaires dans une nappe liquide, Température 60°, Epaisseur 640 μ [9]

Lorsqu'il s'agit de la convection naturelle, le terme moteur de mouvement du fluide est $g\beta\Delta T$, avec ΔT est l'écart de température entre les deux plaques (si le fluide était dans un canal ou cavité). Le nombre de Rayleigh Ra est le paramètre de contrôle de convection naturelle, il exprime le rapport entre la poussée d'Archimède et les forces de dissipation (viscosité et diffusion), puisque la viscosité s'oppose au mouvement du fluide par la force de frottement visqueux et la diffusivité thermique tend à annuler les gradients de température à l'origine de la convection naturelle.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T l^3}{\nu\alpha} = \frac{\text{Poussée d'Archimède}}{\text{Dissipation}} \quad (\text{I.2})$$

L'élément perturbateur est la poussée d'Archimède et les éléments stabilisateurs sont la viscosité et la diffusivité thermique. Le transfert de la chaleur s'effectue par diffusion de la quantité de mouvement dans les couches limites thermiques et hydrodynamiques. Pour comparer les deux mécanismes, un autre paramètre sans dimension représentant un rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique α est défini. Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, on le définit de la manière suivante :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{I.3})$$

Si l'on suppose un élément de fluide de dimension caractéristique l , on note le temps de diffusion visqueuse par τ_v et le temps de diffusion thermique par τ_α , le nombre de Prandtl sera donné par :

$$Pr = \frac{\tau_\alpha}{\tau_v} \quad (I.4)$$

$$\tau_v = \frac{l^2}{\nu} \text{ et } \tau_\alpha = \frac{l^2}{\alpha}$$

On constate ainsi que pour les fluides de grand nombre de Prandtl, le temps thermique est plus grand que le temps visqueux et que les processus de diffusion de la chaleur guident le mouvement du fluide. Pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl (métaux liquides est le cas de travail de cette thèse), les effets thermiques s'amenuisent et le comportement du fluide est essentiellement hydrodynamique.

I.2. CONVECTION DANS UN MILIEU CONFINE

De nombreux travaux de recherche ont porté sur l'analyse des écoulements induits par la flottabilité en milieux confinés. [59,60], ont mené une étude expérimentale de l'effet des températures des parois haute et basse sur convection naturelle laminaire dans une cavité carrée. [53] ont étudié l'effet de l'angle d'inclinaison sur la convection naturelle dans une enceinte fermée, inclinée et chauffée dont l'analyse est faite sur une large gamme de paramètres ; nombre de Rayleigh, Ra ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$); Nombre de Prandtl, Pr ($0,07 \leq Pr \leq 70$) ; longueurs sans dimension de l'élément chauffant dans les directions x et y (compris entre 0,25 et 0,75) ; Les angles d'inclinaison sont compris entre 0° et 270° . A noter que les extrémums du transfert de chaleur sont analysés à la fois selon l'angle d'inclinaison et la longueur des cornières chauffantes. Ils ont constaté que l'effet du nombre de Prandtl sur le nombre moyen de Nusselt est plus significatif si le nombre de Prandtl est relativement faible ($Pr < 1$).

Dans les travaux [15,16], les auteurs ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet de la source de chaleur et sa position sur les paramètres de la convection naturelle, en utilisant une technique d'interférométrie holographique et un système 2D-PIV (Image Particle Velocimetry). Les auteurs ont trouvé des corrélations empiriques et numériques reliant les nombres de Nusselt aux nombres de Rayleigh. [18] ont présenté un aperçu de diverses recherches sur la convection naturelle dans plusieurs enceintes carrées, triangulaires, trapézoïdales, losanges ou parallélogrammes et de géométries complexes. Les cavités de formes non carrées ont été exposées en raison de leurs nombreuses applications étendues dans diverses industries de transformation des aliments, ... etc. Les milieux à parois droites sont beaucoup

plus faciles à modéliser, à concevoir et les schémas d'écoulement hydrodynamique et thermique sont moins complexes que les structures complexes telles qu'à surfaces inclinées, courbées et ondulées. Le mouvement des fluides et la distribution de température dans les milieux confinés sont généralement illustrés de manière exhaustive à l'aide des lignes de courant et des isothermes, respectivement. [1] ont fait une revue bibliographique de convection naturelle dans des cavités. Cette revue résume les études sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans les enceintes triangulaires, trapézoïdales, parallélogrammes et les enceintes à parois courbes et ondulées. En outre, cette revue résume également les études qui ont été réalisées pour des enceintes soumises à différentes conditions aux limites thermiques et un certain nombre d'études ont montré que la variation du rapport d'aspect et de l'angle de base des enceintes triangulaires et rhombiques/parallélogrammes.

I.2.1. Cavité à gradient de température vertical

L'étude de la convection naturelle des fluides dans les cavités a fait l'objet d'un grand nombre de travaux. Son intérêt réside dans son implication dans de nombreux phénomènes naturels et industriels. Plusieurs formes géométriques ont été considérées, telles que la cavité rectangulaire et cylindrique ainsi que des cavités de forme complexe. Les cavités rectangulaires et cylindriques restent les formes géométriques favorisées. Dans ce type de cavités, deux parois sont généralement maintenues à des températures différentes (gradient thermique), tandis que les autres parois sont considérées comme isolées ou adiabatiques.

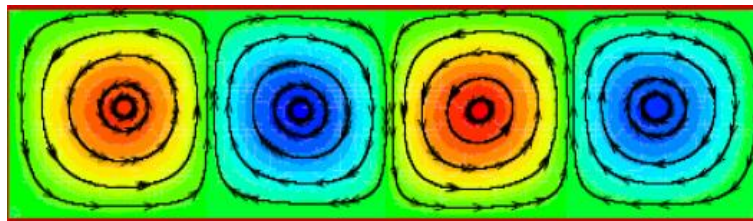


Figure I. 3 Schéma illustrant les rouleaux de la convection de Rayleigh- Bénard

Le métal liquide contenu dans un milieu confiné composé de deux plaques horizontales chauffé par la paroi basse et refroidi par la paroi haute est appelé convection de Rayleigh-Bénard. La convection de Rayleigh-Bénard a une longue et riche histoire, elle est étudiée depuis des décennies aussi bien pour ses diverses applications industrielles que du point de vue recherche fondamentale. Au-delà d'une valeur critique de l'écart de température, des rouleaux contrarotatifs d'axes horizontaux commence à apparaître au sein du fluide.

$$Ra = \frac{g\beta \frac{(T_c - T_f)}{L}}{\nu\alpha} H^4 \quad (I.5)$$

Où :

H : Hauteur de la cavité.

L : Longueur de la cavité.

T_c : Température chaude.

T_f : Température froide.

L'élément perturbateur qui joue le rôle de déstabilisateur est la poussée d'Archimède, tandis que les éléments stabilisateurs sont la viscosité et la diffusivité thermique.

- Si $Ra < 1710 = Rac$, l'écoulement est stable.
- Si $Ra \geq 1710$, apparition des rouleaux de Bénard.

Rac : étant la valeur critique de Rayleigh pour une couche fluide horizontale infinie.

I.2.2. Cavité à gradient de température horizontal

Dans ce type de configurations, l'une des parois verticales est chauffée, tandis que l'autre est refroidie et les parois horizontales sont considérées comme adiabatiques (Figure 1.4).

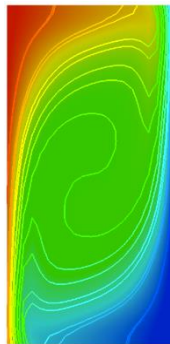


Figure I. 4 Schéma représentant la convection dans une enceinte à gradient de température horizontal

L'écoulement est sous forme d'une seule cellule et les lignes de courant du fluide montent le long de la paroi chaude et descendent le long de la paroi froide.

I.3. NOMBRE DE PRANDTL

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été effectués pour étudier l'effet du nombre de Prandtl sur le mécanisme de convection naturelle. [6] ont montré l'effet du nombre de Prandtl sur l'écoulement de cavité d'un fluide en convection naturelle. Les résultats de ces études montrent que la structure de l'écoulement est fortement dépendante du nombre de Prandtl. [52]

ont étudié la convection naturelle de l'air dans des cavités carrées à parois verticales semi-adiabatiques numériquement, pour des nombres de Rayleigh compris entre 10^3 et 10^7 . Ils ont montré des effets de conduction significatifs pour un nombre de Rayleigh égal à 10^5 . [24] a mené une étude numérique et expérimentale de l'effet de l'inclinaison sur les écoulements de convections naturelles de l'air contenu dans une cavité différentiellement chauffée pour des nombre de Rayleigh entre 10^4 et 10^6 . [29] ont étudié numériquement la convection de fluides avec des nombres de Prandtl compris entre $Pr = 0.01$ et $Pr = 100$ pour des valeurs du nombre de Rayleigh Ra comprises entre 10^2 et 10^{11} . Leurs résultats ont montré que la valeur du nombre critique de Rayleigh décroît lorsque Pr diminue.

Dans les travaux de Soong et al., une étude numérique de la convection naturelle et des phénomènes de transition associés dans une enceinte inclinée bidimensionnelle à chauffage différentiel est rapportée. Les nombres de Rayleigh en régime d'écoulement stable, sont compris entre 10^3 et 2×10^4 , et les angles d'inclinaison sont compris entre 0° et 90° . Les enceintes de rapport d'aspect longueur/hauteur égale à 4, 3 et 1 sont étudiées. Air de $Pr = 0,71$ dans une enceinte de rapport d'aspect égale à 4 est choisi comme modèle d'écoulement pour examiner les influences de l'inclinaison à divers nombres de Rayleigh. Les effets de la condition initiale l'écoulement sont examinés pour le facteur de forme égale à 3. [47]

Mebarek-Oudina a étudié numériquement la stabilité convective dans un espace annulaire cylindrique avec une source de chaleur iso-flux discrète de différentes longueurs. Les parties adiabatiques non chauffées et la source de chaleur discrète sont localisées sur la paroi intérieure. Les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques, tandis que la paroi extérieure est maintenue à une température plus basse. Les résultats montrent que l'augmentation du rapport de longueur de la source de chaleur diminue le nombre de Rayleigh critique. [53]

Orvedahl et al. ont montré par simulation que les écoulements sont plus rapides pour les fluides avec des nombres de Prandtl Pr relativement faibles que les écoulements de fluide avec Pr plus élevés pour le même nombre de Rayleigh [40]. Les fluides avec Pr plus élevés ont une dissipation plus visqueuse, ce qui entraîne des écoulements plus lents (équivalent à un nombre de Reynolds inférieur). Ceci est cohérent avec les résultats trouvés par les travaux de O'Mara et al. [39]. Les résultats de la simulation pour de nombres de Rayleigh plus élevés montrent un état quasiment semblable à la chute libre, la diffusion ne joue pratiquement plus un rôle dans l'équilibre des forces du bilan. Dans cet état, l'énergie cinétique devient indépendante à la fois de la viscosité et de la diffusion thermique.

[Gourari et al. 2019] Une étude numérique est menée par Gourari et al. porte sur l'écoulement de convection naturelle de l'eau entre deux cylindres coaxiaux où le cylindre intérieur génère une source de chaleur constante. Le cylindre extérieur est froid tandis que les parois supérieure et inférieure sont isolées thermiquement. Pour un écoulement laminaire et un angle d'inclinaison égal à 0° , 45° , 90° . Les résultats montrent que le nombre Nusselt moyen augmente avec l'augmentation des nombres de Rayleigh. Le meilleur transfert de chaleur est obtenu pour l'angle d'inclinaison 90° [22].

Dans les travaux de Laouira et al., les phénomènes de transfert de chaleur à l'intérieur d'un canal horizontal avec une enceinte trapézoïdale ouverte soumis à une source de chaleur de différentes longueurs sont traités. La source de chaleur est considérée comme un élément chauffant local de longueur variable, qui est encastré dans la paroi inférieure de l'enceinte et maintenu à une température constante. Le flux d'air pénètre horizontalement dans le canal à une température froide constante et à une vitesse fixe. Les autres parois de l'enceinte et le canal sont maintenus isolés thermiquement. Les nombres de Nusselt locaux et moyens augmentent avec la longueur de la source de chaleur locale. De plus, la température maximale est située près de l'emplacement de la source de chaleur [31].

I.4. JUMELAGE : HYDRODYNAMIQUE - THERMIQUE

La convection thermique dans une couche fluide chauffée par le bas (Rayleigh-Bénard) et les écoulements entre cylindres coaxiaux à rotation différentielle (système de Taylor-Couette) ont été étudiés pendant plus d'un siècle, tant expérimentalement que théoriquement. Les deux sont des systèmes attrayants pour les études de laboratoire sur la dynamique des fluides, car les visualisations et la collecte de données sont plus faciles que dans les expériences sur les écoulements dans les tuyaux et les canaux. Les relations asymptotiques ne sont pas seulement importantes pour les applications d'ingénierie, mais sont également nécessaires pour la compréhension des phénomènes de transport dans les systèmes naturels, tels que l'atmosphère et les océans de la Terre et les atmosphères des planètes et des étoiles. Les travaux de recherche expérimentaux sur les phénomènes thermo-convectifs dans les cavités fermées rencontrent de difficultés de prise de mesures, sachant que les vitesses de l'écoulement sont faibles et la sensibilité aux conditions aux limites est très importante.

En 1898, Bénard tentait de préparer un cohéreur à diélectriques solides, il observa, par hasard, la présence de figures polygonales semi-régulières dans un bain de paraffine fondue dans lequel de la poussière de graphite avait été incorporé. Il s'est enquis si ce phénomène

apparemment courant avait déjà été observé scientifiquement et a décidé de préparer des expériences de laboratoire sur la convection thermique, afin de décrire et de mesurer, dans une couche liquide horizontale chauffée par le bas, les courants de convection qui régnaient, aussi près que possible de leur état de plus grande stabilité. Une grande partie de ses efforts avait été consacrée à éviter toute inhomogénéité de température qui pourrait déclencher un processus incontrôlé dans le mouvement du liquide, une préoccupation qu'il a exprimée en disant : « Il est clair que, si la moindre fluctuation ou excès local de température, est suffisant pour créer un centre d'ascension ; comment est-il possible d'obtenir un régime stable ? Grâce à la construction d'un appareil à cuve métallique et circulation de vapeur, offrant des conditions thermiques très homogènes et une température constante dans la couche inférieure du liquide, il a observé différents schémas de mouvement convectif. Le principal résultat de ses observations fut la découverte d'un réseau de cellules hexagonales presque régulières, appelées vortex cellulaires, c'est-à-dire un système stable aux caractéristiques géométriques particulières. Il a utilisé l'expression tourbillons cellulaires, plus tard connus sous le nom de cellules de Bénard.

Il a insisté sur les caractéristiques polygonales de ce vortex cellulaire, semi-régulier, dues à l'existence de polygones de quatre, cinq, six et sept côtés, mais avec une prédominance d'hexagones. Il a souligné la difficulté de produire régulièrement des hexagones sur une longue surface sans beaucoup de défauts. Ces tourbillons cellulaires pourraient être générés en régime permanent, sous un flux de chaleur modéré. Bénard a également observé des tourbillons dans des liquides assez volatils, tels que l'alcool ou l'hydrocarbure. Afin d'obtenir une épaisseur uniforme et d'éviter les problèmes d'évaporation, Bénard a étudié la circulation du liquide au sein de la cellule convective. Il a déterminé le modèle de la trajectoire avec des lignes de courant fermées, étudiant le liquide chaud montant à travers l'axe de la cellule hexagonale et descendant le long de la périphérie bordée de plans verticaux.

Bejan dans ses travaux de recherche [5] a montré dans son livre les différents processus de convection thermique et leurs évolutions dans plusieurs configurations, notamment entre des plaques planes, dans des tubes cylindriques, dans conduits coniques, dans des panneaux à caractéristiques multi-bandes et à ailettes arborescentes, etc.

Les travaux de Prigent et al. [41] montrent une forte analogie entre la convection de Rayleigh-Bénard et le système de Taylor-Couette. Cette analogie est bien connue lorsqu'il s'agit de l'instabilité primaire et repose sur l'existence d'une stratification instable dans les deux systèmes,

Il existe une forte analogie entre la convection de Rayleigh-Bénard et le système de Taylor-Couette. Cette analogie est bien connue lorsqu'il s'agit de l'instabilité primaire, et repose sur l'existence d'une stratification instable dans les deux systèmes. Le problème de l'écoulement dans l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux avec la rotation du cylindre intérieur a été étudié pour la première fois par Newton en 1687. Au plus tard, par Stokes en 1880 qui constata que le mouvement du cylindre intérieur engendrait une force centrifuge qui projette le fluide vers la paroi externe en déstabilisant l'écoulement. Le mouvement d'un fluide visqueux incompressible confiné entre deux cylindres rotatifs coaxiaux a été initialement étudié en 1888 par Mallock et a relevé les observations suivantes :

- Si la vitesse de rotation du cylindre intérieur est supérieure à la vitesse de rotation du cylindre extérieur, l'écoulement a une tendance à devenir instable.
- Si le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur.

Les mesures de Mallock étaient les plus précises et se situaient à moins de 1 % des viscosités dérivées des mesures de Poiseuille sur la base de l'absence de glissement au niveau des parois du tube et des surfaces du cylindre. La mesure de la viscosité des fluides était étroitement liée à l'adoption de la condition aux limites sans glissement aux interfaces solide-fluide. En 1888, Couette mesura la viscosité de l'eau [17]. En 1923, Taylor a mené des études de mouvement des fluides entre deux cylindres coaxiaux en rotation différentielle, sont contemporaines avec les travaux de Bénard sur la convection thermique [51]. En 2000, Wimmer a repris les travaux de Taylor et de Bénard pour d'autres géométries [58]. En 2012, Huisman a également étudié les écoulements entre deux cylindres coaxiaux et les instabilités de Bénard [27]. Une forte analogie entre les systèmes d'écoulement rotatif et de convection de Rayleigh-Bénard a été observée par Barakos et al. en 1994 [4].

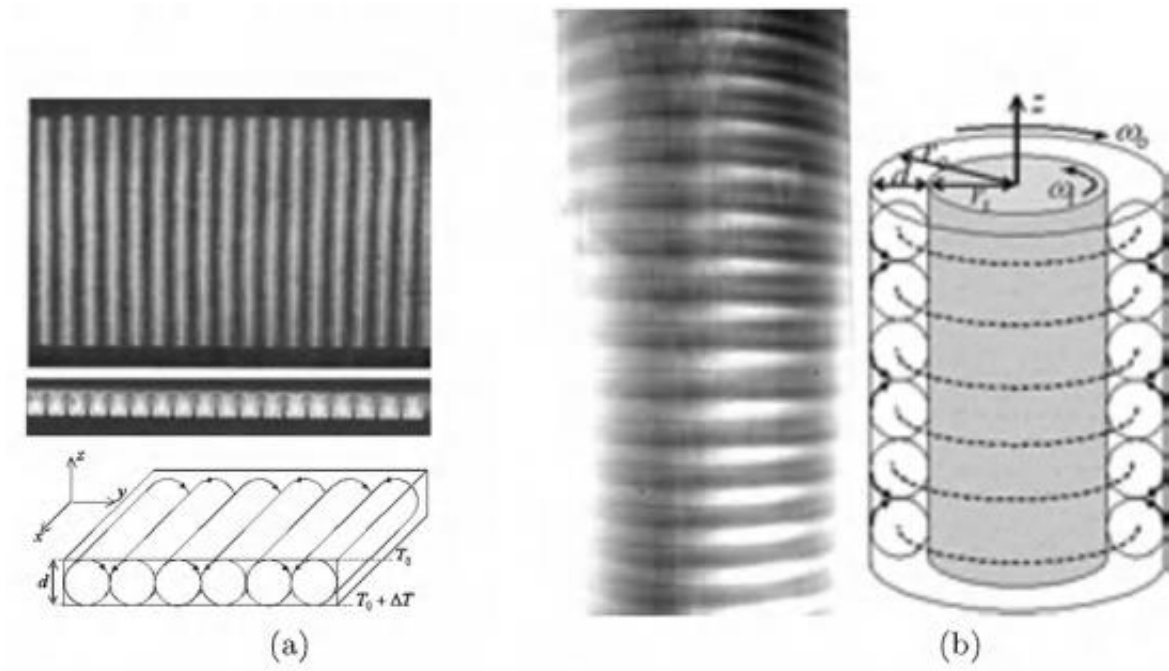


Figure I. 5 Ecoulement Taylor-Couette est le jumeau hydrodynamique de la convection de Rayleigh Bénard : (a) rouleaux de Rayleigh-Benard et (b) tourbillons de Taylor

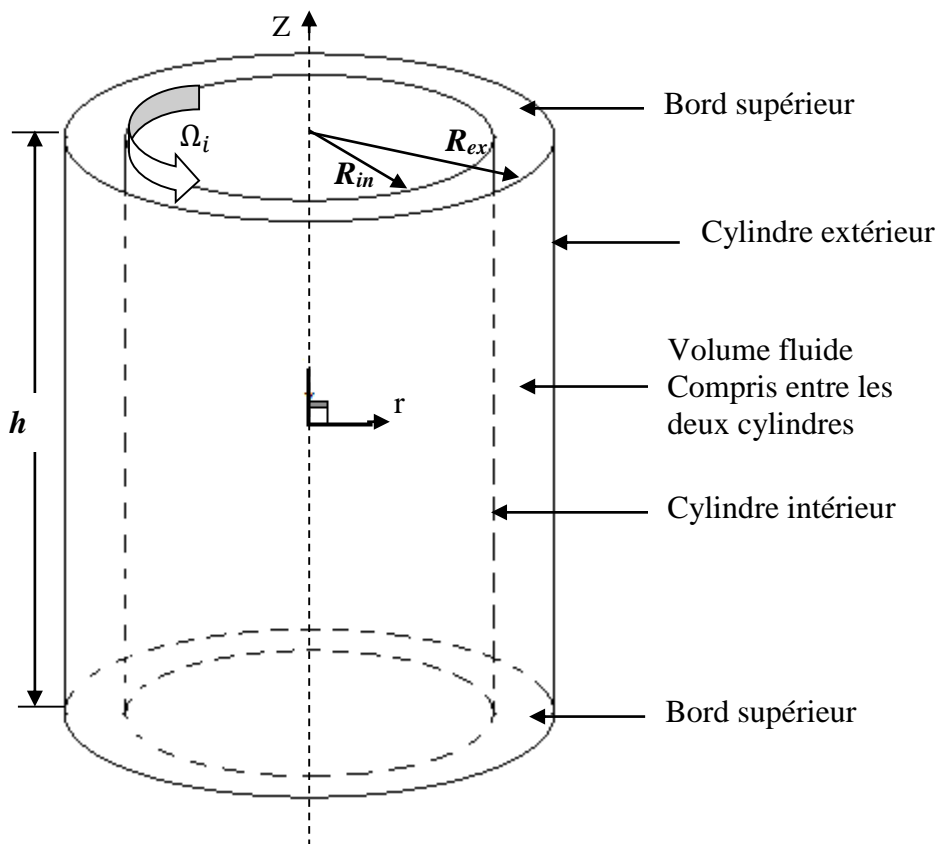


Figure I. 6 Système d'écoulement de Taylor-Couette

Dans les deux cas, l'écoulement se développant au début de l'instabilité est constitué de tourbillons appelés respectivement tourbillons de Taylor et rouleaux de Bénard (figure I.4), [42,43].

L'écoulement de type Taylor-Couette est le mouvement d'un fluide défini entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_{in} et R_{ex} , le cylindre externe est fixe et le cylindre intérieur tourne à une vitesse angulaire Ω_I , et de hauteur donnée H fig. (I.5). Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. Trois états de rotation peuvent être distingués, le cas dans lequel les deux cylindres sont en contre rotation, en Co-rotation ou l'un des cylindres est fixe. Cet écoulement de Taylor- Couette est un modèle d'étude des instabilités hydrodynamiques et de la transition laminaire-turbulent. Pour les faibles vitesses angulaires, l'écoulement de base est stationnaire axisymétrique et invariant par translation verticale qui correspond à un écoulement laminaire stable. Au-delà d'une valeur seuil, on observe que cet écoulement de base devient laminaire perturbé ou instable.

I.4.1. Facteurs affectant l'écoulement

Le comportement du fluide en mouvement peut être affecté par divers effets de différentes origines, à savoir l'effet de source thermique, d'origine rhéologique, de l'inclinaison, de l'accélération, des parois d'extrémités (bords), des oscillations azimutales ou radiales des cylindres et de l'interaction avec le champ magnétique. Les effets géométriques, y compris les effets de l'excentricité, de la rugosité, de la largeur/longueur de l'espace annulaire ou du rapport radial, du taux de remplissage et du facteur d'aspect jouent aussi un rôle capital.

I.4.2. Régimes d'écoulement

Le cylindre intérieur tourne à la vitesse Ω_i et le cylindre extérieur à la vitesse Ω_e . Lorsque le cylindre extérieur est fixe, l'écoulement devient instable au-dessus d'une vitesse critique Ω_{ic} .

I.4.2.1. Régime laminaire stable

A basse vitesse, les lignes de courant sont des cercles concentriques, il n'y a pas de structure particulière visible et l'écoulement est stable, stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale.

I.4.2.2. Régime laminaire perturbé ou instable

La transition laminaire-turbulent de l'écoulement de couette est appelée première instabilité qui peut être déterminée analytiquement. A partir de la valeur de Taylor

critique $Ta = Tc_1$, Lorsque le cylindre intérieur tourne de façon contrarotatif, il crée des cellules qui occupent la largeur de l'espace annulaire d et se distribuent suivant l'axe Z . Ce types des cellules appelée cellules de Taylor.

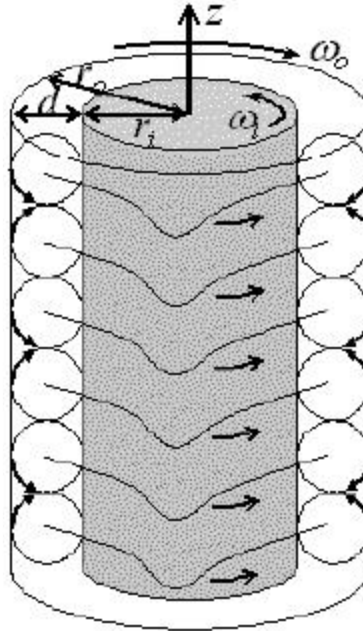


Figure I. 7 Deuxième instabilité mode ondulatoire (Wavy mode)

Lorsque la vitesse angulaire dépasse la vitesse de seuil pour un nombre de Reynolds critique Rec_2 , un mouvement comportant des tourbillons ondulés en direction azimutale est provoqué. Il s'agit de l'onde azimutale qui se propageant dans la direction angulaire Ω qui donne lieu un ensemble d'ondes instationnaires superposées aux cellules de Taylor, ce comportement du fluide est appelé deuxième instabilité.

I.4.3. Couche d'Ekman

Pour étudier les échanges de quantité de mouvement qui existent dans les écoulements, Prandtl défini la notion de couche limite. Il s'agit d'un principal lieu d'échange de quantité de mouvement caractérisé par la présence d'une paroi fixe ou d'une interface entre deux fluides différents. Prandtl étudia le cas d'une couche limite laminaire où les effets visqueux sont aussi importants que les effets inertiels. Il expliqua que dans ce cas la viscosité d'un fluide joue un rôle très important près de la paroi tandis qu'ailleurs, la viscosité peut être négligée. La couche limite est plutôt une couche limite turbulente.

Au niveau des extrémités du système d'écoulement de Taylor-couette, et pour des faibles vitesses de rotation, on observe des cellules près des bords appelée tourbillon d'Ekman. Les

cellules d'Ekman correspondent à la première rupture de symétrie de l'écoulement laminaire, due à un bilan de forces visqueuses et de Coriolis. L'interaction des forces de frottement des bords du système de l'écoulement de Taylor-Couette avec la force centrifuge induite par la rotation du cylindre intérieur sachant que la condition aux limites prise est l'adhérence parfaite du fluide aux parois. En effet, le mécanisme du transport du moment cinétique peut affecter significativement le profil de la vitesse azimutale.

Le système d'écoulement de Taylor-Couette classique formé de deux cylindres coaxiaux n'est pas la seule configuration qui intéresse la communauté scientifique, d'autres configurations ont aussi passionné les chercheurs, à savoir entre deux sphères concentriques [58], entre deux cônes coaxiaux [26, 57], entre cône-cylindre coaxiaux [30] et d'autres configurations [48,49].

I.5. METAUX LIQUIDES

Au cours des dernières années, les métaux liquides sont en plein essor. Ils sont une classe de matériaux métalliques ayant la particularité d'exister sous forme liquide à température ambiante ou à température relativement basses par rapport aux métaux amorphes, possèdent des propriétés uniques qui les distinguent des métaux traditionnels, tel que leur haut conductivité électrique et thermique, leur résistance à la corrosion et leur forte capacité à se mouler et être façonnés sous différentes formes. Il est important de préciser que les métaux liquides ont des caractéristiques spécifiques, notamment une faible viscosité, une tension superficielle élevée et une bonne biocompatibilité. Les métaux liquides ont été découverts dans les années 1960 par les chercheurs soviétiques, qui ont développé une méthode de refroidissement rapide de métaux fondus pour produire des métaux amorphes. Les métaux liquides ont une structure amorphe, ce qui signifie qu'ils n'ont pas de structure cristalline régulière comme les métaux traditionnels. Cette structure amorphe donne aux métaux liquides des propriétés intéressantes, notamment une résistance à la corrosion élevée et une grande ductilité. Les métaux liquides ont également une surface lisse, ce qui les rend utiles pour la production de capteurs et d'autres dispositifs électroniques. Les métaux liquides ont une haute conductivité électrique et thermique, ce qui les rend utiles pour les applications de chauffage et de refroidissement. Ils sont également résistants à l'oxydation et à la corrosion.

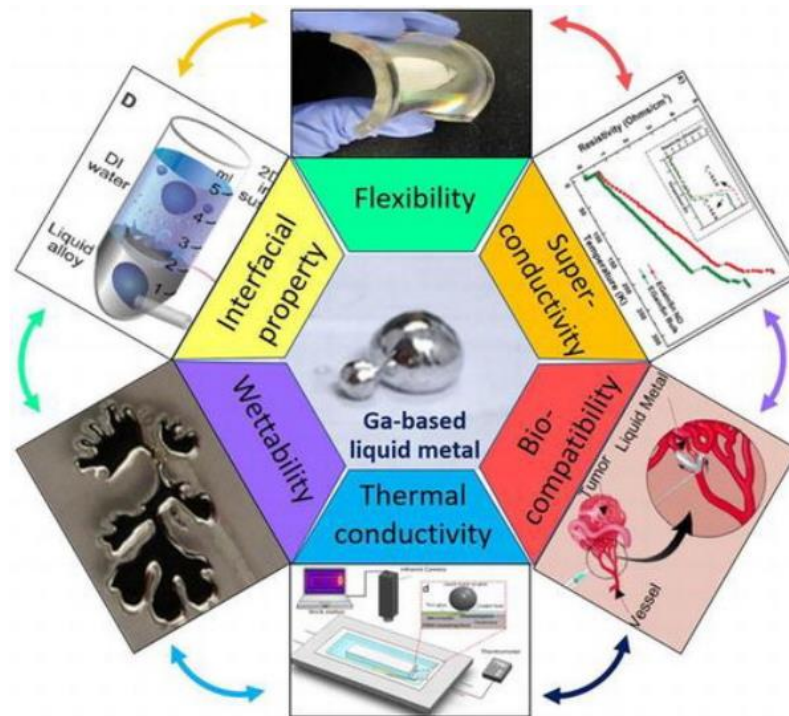


Figure I. 8 Divers domaines d'application des métaux liquides [10]

De nombreux travaux de recherche fondamentale ont été constamment menés dans le but d'ouvrir de nouvelles voies pour progresser l'innovation et même pour l'acquisition d'une technologie moderne de nouvelle génération basée sur les métaux liquides. Des progrès significatifs ont été réalisés dans le développement de dispositifs multifonctionnels utilisant des métaux liquides, notamment les batteries à métaux liquides selon les travaux de Zhang et al. [61], de Wei et al. [56], et de [19], le domaine des actionneurs électromécaniques par Sivasankan et Bhuvaneshwar [46], les circuits électroniques [23,13], la nanotechnologie et les nanomatériaux [20, 50], les moteurs à métal liquide [55], la biotechnologie [37], biomedical [45] et d'autres domaines d'application [25, 32].

Le phénomène thermo-convectif des métaux liquides en milieux confinés a suscité un grand intérêt du fait de ses applications multiples en géophysique, astrophysique, biomédical, générateurs magnétohydrodynamiques, dans les réacteurs nucléaires, dans les convoyeurs de maintenance, dans le refroidissement dans le domaine de la fusion thermonucléaire, dans le domaine des films liquides, dans les processus de condensation, dans le domaine de la croissance de cristalline de semi-conducteurs de grand diamètre, en fabrication des robots. D'où la compréhension du comportement des métaux liquides soumis au gradient de température devient une nécessité pour l'utiliser dans la vie courante.

Le sodium liquide est classé comme l'un des métaux liquides de bonnes propriétés thermo-physiques électriques élevées, Il se caractérise principalement par une bonne conductivité électrique, une bonne conductivité thermique, une faible densité et une basse température de fusion, qui est de 98 °C, ce qui évite les complications technologiques du traitement expérimental. De plus, des températures élevées peuvent être atteintes avec le métal liquide à la pression atmosphérique, ce qui permet d'augmenter le rendement de conversion d'énergie. Dans le même temps, certaines méthodes d'impression 3D en métal liquide récemment mises au point aideront également à la fabrication de telles machines. On s'attend à ce qu'un monde merveilleux de robots à métal liquide devait devenir une réalité dans un avenir proche. Les machines à métaux liquides ou les moteurs en métal liquide sont en développement des recherches et des applications possibles le long de la frontière susmentionnée [22].

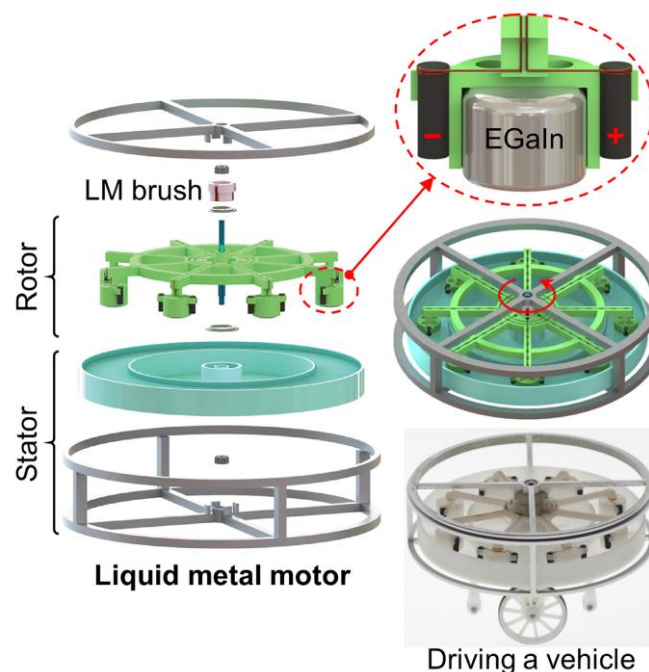


Figure I. 9 Moteur à métal liquide avec un faible frottement et une faible usure [55]

I.6. MAGNETOHYDRODYNAMIQUE ET MAGNETOCONVECTION

La magnétohydrodynamique (MHD) est un domaine de recherche interdisciplinaire très vaste de la physique qui étudie les interactions entre les champs électromagnétiques et les fluides électriquement conducteurs tels que les métaux liquides, les plasmas, etc. La MHD a de nombreuses applications dans des domaines tels que la propulsion spatiale, la génération d'énergie, la métallurgie, la géophysique, l'aéronautique, etc. Les réacteurs sont généralement refroidis par un métal liquide utilisent généralement des métaux fondus tels que le sodium ou une combinaison de sodium et d'autres métaux liquides en raison de leurs excellentes propriétés

de transfert de chaleur, de sorte que le réacteur peut fonctionner à des pressions beaucoup plus basses et à des températures plus élevées.

Le principe de base utilisé en MHD est la loi fondamentale de l'induction électromagnétique découverte par Faraday. La magnétohydrodynamique est souvent rencontrée dans la nature (noyaux terrestre, Plasmas solaire, etc. ainsi que dans les procédés industriels, à savoir la production de cristaux de semi-conducteurs et en métallurgie, etc.).

En raison de l'opacité des métaux liquides, qui est une barrière pour visualiser les écoulements de fluides électriquement conducteurs sous l'influence d'un champ magnétique. Les techniques de mesure sont assez limitées à l'heure actuelle pour obtenir des informations complètes sur le champ d'écoulement. La capture des structures tourbillonnaires est assez importante pour étudier l'influence du champ magnétique sur le mouvement du métal liquide. Par conséquent, la simulation numérique est une solution pour surmonter cette limitation et pour comprendre et prédire le comportement des métaux liquides sous l'influence du gradient de température et du champ magnétique.

En 1950, Velikhov [54], et Chandrasekhar en 1960 [12] ont montré que l'application d'un champ magnétique axial affecte le comportement hydrodynamique d'un écoulement d'un fluide conducteur donnant une naissance de l'instabilité de Velikhov. Cette instabilité induit une amplification de champ magnétique dans le fluide conducteur. Elle se produit lorsqu'un fluide conducteur est soumis à un champ magnétique et à un gradient de vitesse perpendiculaire au champ magnétique. L'instabilité conduit à la formation de tourbillons dans le fluide, qui un groupe d'équations peuvent amplifier le champ magnétique. La modélisation mathématique de la MHD est un ensemble d'équations qui décrivent la dynamique des fluides conducteurs dans des champs magnétiques, notamment les équations étendues de Navier-Stokes, qui inclut le terme supplémentaire de force électromagnétique du corps de Lorentz $\vec{j} \wedge \vec{B}$ sur le côté droit de l'équation du mouvement. Ainsi, les équations gouvernantes incluent l'approximation incompressible du liquide. Le modèle choisi, seule la partie magnétique de la force de Lorentz est à prendre en compte (la partie électrique est d'ordre inférieur). Pour un fluide Newtonien soumis uniquement à cette force, on a alors les équations venant de l'électromagnétisme sont les équations de *Maxwell* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} \wedge \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{I.8})$$

La loi d'Ohm

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (\text{I.9})$$

L'équation de continuité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{I.10})$$

Les équations de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{I.11})$$

Où \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} est le champ magnétique, p est le champ de pression dans le fluide, ρ la masse volumique, $\mu = \nu \cdot \rho$ est la viscosité dynamique (ν est la viscosité cinématique).

I.7. PARAMETRES DE CONTROLE

L'étude des instabilités hydrodynamiques fait intervenir des paramètres sensibles et introduit des nombres adimensionnels caractérisant la stabilité et l'instabilité de l'écoulement.

Il s'agit essentiellement de deux paramètres de contrôle régissant l'hydrodynamique, notamment le nombre de Reynolds ou le nombre de Taylor. Pour la magnétohydrodynamique, il s'agit de quatre paramètres de contrôle, à savoir de la magnétohydrodynamique.

I.7.1. Nombre de Reynolds

Pour caractériser les différents domaines d'écoulement, on utilise le nombre adimensionnel de Reynolds (Re). Il est défini par le rapport suivant :

$$Re = \frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force visqueuse}} = \frac{d V_{in}}{\nu} \quad (\text{I.12})$$

Où V_{in} désigne la vitesse du cylindre intérieur tournant $V_{in} = R_{in} \Omega_i$

- R_{in} : rayon du cylindre interne.
- Ω_i : vitesse de rotation du cylindre interne.
- ν : viscosité cinématique du fluide.
- d : Espace entre les deux cylindres coaxiaux ou espace annulaire $d = R_{ex} - R_{in}$

Ce nombre compare la prépondérance des effets des deux forces, l'une stabilisante qui est la force visqueuse et, l'autre déstabilisante est imposée par la force centrifuge.

I.7.2. Nombre de Taylor

Il est souvent utilisé comme un nombre caractéristique de la géométrie cylindrique liée aux systèmes tournants. Il présente comme une combinaison du nombre de Reynolds Re et du facteur géométrique $\delta = \frac{d}{R_{in}}$.

Le nombre de Taylor Ta de l'écoulement représenté comme le rapport entre deux temps caractéristiques :

$$T_a = \frac{\tau_s}{\tau_{des}} \quad (\text{I.13})$$

$\tau_s = \frac{d^2}{\nu}$ indique le temps de la diffusion visqueuse dû au transfert de vorticité sur la distance d (temps de stabilisation).

τ_{des} est le temps caractéristique d'advection du fluide sous l'action de la force centrifuge sur une distance d dans la direction radiale (temps de déstabilisation).

Pour évaluer τ_{des} on applique la loi fondamentale de la dynamique qui exprime la force en faisant apparaître les caractéristiques temporelles, d'espace et de vitesse V_1 exprimées à l'aide de τ_{des} , d et V_{in} dont on obtient :

$$\frac{d}{\tau_{des}^2} = \frac{V_{in}^2}{in} \quad (\text{I.14})$$

D'où l'on tire

$$\tau_{des} = \frac{\sqrt{dR_{in}}}{V_{in}} \quad (\text{I.15})$$

L'expression de nombre de Taylor et s'écrit de façon suivant

$$T_a = \frac{d_{in} R_{in}}{\nu} \sqrt{\delta} = Re \sqrt{\delta} \quad (\text{I.16})$$

Selon la valeur du paramètre Re ou Ta , l'écoulement devient stable ou instable.

I.7.3. Nombre de Reynolds magnétique

C'est un nombre adimensionnel qui caractérise la convection par rapport à la diffusion du champ magnétique donné par :

$$Re_m = \frac{\text{Convection du champ magnétique}}{\text{Diffusion du champ magnétique}} = \sigma \mu_0 \vartheta R_c \quad (I.17)$$

I.7.4. Nombre de Hartmann

Le nombre de Hartmann (Ha) est un nombre adimensionnel utilisé en magnétohydrodynamique pour traiter et caractériser le mouvement de fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique. Il représente le rapport entre la force de Laplace et les forces visqueuses.

On le définit de la manière suivante :

$$Ha = \left(\frac{\text{Force électromagnétique}}{\text{Forces visqueuses}} \right)^{1/2} = BR_c \sqrt{\frac{\sigma}{\nu \rho}} \quad (1.18)$$

I.8. COUCHE D'EKMAN-HARTMANN

L'interaction entre un fluide visqueux, incompressible, et une paroi rigide en rotation développe une couche d'Ekman, tandis que si la paroi est maintenue fixe sous l'effet d'un champ magnétique externe perpendiculaire à la surface induit une couche d'Hartmann. Lorsque la combinaison de la rotation de la paroi et l'application du champ magnétique externe les couches d'Ekman ou d'Hartmann deviennent couche d'Ekman-Hartmann, d'où la participation de triplet : la rotation de système, facteur d'aspect et le champ magnétique sur le comportement du fluide au voisinage des parois terminales.

Conclusion

Cette brève synthèse des travaux antérieurs montre que le phénomène thermo-convectif des métaux liquides est relativement sensible aux divers paramètres, à savoir les paramètres géométriques tels que l'inclinaison du système d'écoulement, la forme de la géométrie, les paramètres hydrodynamiques et magnétohydrodynamique tels les nombres adimensionnels et conditions aux limites et les propriétés intrinsèques des fluides considérés caractérisé par le nombre de Prandtl. Ainsi, malgré le grand nombre de recherche sur la convection, la thermoconvection dans les métaux liquides est toujours d'actualité.

CHAPITRE

II

**FORMULATION
MATHEMATIQUE**

FORMULATION MATHÉMATIQUE

CHAPITRE

II

Introduction

Les écoulements naturels et industriels sont rarement constitués de fluides isolants, ceux-ci sont électriquement et thermiquement conducteurs. La modélisation de phénomènes hydrodynamique, thermique et électromagnétique est nécessaire pour comprendre et analyser les champs de pression, de température et de vitesse des écoulements.

Nous allons présenter dans ce chapitre les modèles mathématiques théoriques, basés sur les équations qui régissent le phénomène de convection en milieu confiné. Ces équations sont fondées selon les lois de la physique, à savoir les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) et de l'énergie, ainsi que les conditions aux limites. Un ensemble d'hypothèses s'est imposé, à savoir la nature de fluide considéré comme visqueux, newtonien et incompressible. L'approximation de Boussinesq a été introduite. Afin de généraliser notre investigation et définir les différents paramètres de contrôle, l'adimensionnement des équations a été effectuée.

II.1. PRESENTATION DU PROBLEME

Afin de pouvoir résoudre les équations régissant l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte, les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées :

- Le fluide est incompressible et newtonien.
- L'écoulement est supposé laminaire, c'est-à-dire les forces de viscosité dominent les forces d'inertie.
- Les parois de l'enceinte sont supposées parfaitement lisses, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rugosité.
- L'écoulement se fait sans flux thermique généré.
- Les effets de rayonnement thermique sont négligés, c'est-à-dire que les échanges de chaleur ne se font pas que par conduction et convection.

- Les propriétés physiques du fluide (viscosité, conductivité thermique, la diffusivité thermique, conductivité thermique, etc.) sont supposées constantes et indépendante de la température à l'exception de la masse volumique calculée en utilisant l'approximation de Boussinesq.

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (\text{II.1})$$

Dans notre étude, nous allons étudier plusieurs configurations géométriques, notamment la géométrie carrée, rectangulaire, cylindriques et conique.

II.2. GEOMETRIES BIDIMENSIONNELLES

Dans cette partie, on suppose que le problème de la convection naturelle se déroule dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle du facteur de forme $A = H/L$, L est sa longueur suivant l'axe x et H est sa hauteur suivant l'axe y , et remplie d'un fluide conducteur qui est notre cas un métal liquide.

L'emploi de la variable adimensionnelle permet d'exprimer la réalité des phénomènes physique indépendamment des systèmes de mesures, pour permettre d'avoir une généralisation de l'information sur une variété de problèmes ayant les mêmes grandeurs de coefficient de similitudes de l'un côté et de l'autre d'en déduire le nombre de paramètres du problème. Pour faire apparaître les paramètres de contrôle du problème étudié, Il est nécessaire d'introduire les grandeurs de référence, à savoir :

- Nombre de Grashof (Gr)

Le nombre de Grashof est un nombre sans dimension, caractérise la convection naturelle dans le fluide ; correspond au rapport entre les forces de gravité et les forces visqueuses.

$$Gr = \frac{\beta g H L^3 (T_c - T_f)}{\nu^2} \quad (\text{II.2})$$

- Nombre de Prandtl (Pr)

Le nombre de Prandtl est un nombre sans dimension, Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν et la diffusivité thermique α

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (\text{II.3})$$

- Nombre de Rayleigh (Ra)

Le nombre de Rayleigh Ra est un nombre sans dimension, définit comme le rapport entre le phénomène moteur du mouvement (la poussée d'Archimède) et les phénomènes résistants (diffusion de chaleur et frottement visqueux) dans le cas où l'élément moteur du mouvement est un écart de température, ce qui est tout le temps le cas dans des cavités différentiellement chauffées, si le nombre de Rayleigh $Ra < 2000$, le transfert s'opère par conduction, au-delà de cette valeur on a un transfert par convection naturelle. Ce nombre s'exprime de la façon suivante :

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (II.4)$$

II.2.1. Formulation mathématique et adimensionnement

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie régissant l'écoulement de convection naturelle dans l'enceinte et rapportées à un système de coordonnées cartésiennes sont données par :

- Équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (II.5)$$

- Équation de quantité de mouvement suivant x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (II.6)$$

- Équation de quantité de mouvement suivant y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g(\beta(T - T_0)) \quad (II.7)$$

- Équation d'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (II.8)$$

Avec :

u et v : Composantes de vecteur vitesse du fluide dans les directions x et y respectivement.

g : Vecteur accélération de la pesanteur.

p : Pression dans le fluide.

λ : Conductivité thermique du fluide.

T : Température du fluide.

c_p : Capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

μ : Viscosité dynamique du fluide.

ν : Viscosité cinématique du fluide.

II.2.1.1. Fonction de courant - vorticité

L'introduction des variables vorticité ω et fonction de courant ψ a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression.

Dervant les équations du mouvement (II.6) et (II.7) respectivement par rapport à y et à x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (\beta(T - T_0)) \quad (\text{II.10})$$

En soustrayant l'équation (II.9) de (II.10), nous obtenons :

$$u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \nu \left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{II.11})$$

En utilisant la définition de la fonction de vorticité ω

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega \quad (\text{II.12})$$

Avec :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.16})$$

Ainsi que l'équation (II.11) devient :

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{II.17})$$

En définissant une fonction de courant, ψ comme étant la fonction scalaire tel que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{II.18})$$

L' quation (II.17) devient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (\text{II.19})$$

L'équation d'nergie (II.8) devient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

L'équation de la fonction de courant devient :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\omega \quad (\text{II.21})$$

II.2.1.2. Mise en équations sous forme adimensionnelle

L'adimensionnement ou la normalisation des équations consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

En posant les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\Psi = \frac{\psi}{\alpha}, \quad x = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad A = \frac{H}{L}, \quad \Omega = \frac{\omega L^2}{\alpha} \quad \text{et} \quad \Theta = \frac{T - T_m}{T_c - T_f},$$

la température de référence T_m est définie comme: $T_m = \frac{T_c - T_f}{2}$. Avec : α est la diffusivité thermique

L'équation de la vorticité (19) après adimensionnement devient sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = Pr \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ra \cdot Pr \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \quad (\text{II.22})$$

Equation d'énergie :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.23})$$

Equation de la fonction de courant :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = -\Omega \quad (\text{II.24})$$

Equation de pression :

Dérivant les équations (II.6) et (II.7) par rapport à x et y respectivement, et ajoutant les deux équations résultantes membre à membre après l'adimensionnement, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} \right) = - \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 - 2 \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + Ra \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \quad (\text{II.25})$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \right)^2 \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \quad (\text{II.28})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y}\right)^2 \quad (\text{II.29})$$

On obtient alors :

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}\right) = -2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + Ra \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right) \quad (\text{II.30})$$

II.2.2. Cavité à gradient de température horizontal

La condition de non glissement des particules fluides est imposée sur les parois de toutes les cavités. Le problème physique considéré s'agit d'une cavité bidimensionnelle, de longueur L , de hauteur H . Les parois partiellement thermiquement actives de la cavité sont maintenues à deux températures différentes et uniformes, nommées respectivement, T_c et T_f , ($T_c > T_f$). Les conditions aux limites correspondant à chaque configuration envisagée sont représentées sur les figures (II.1), (II.2) et (II.3). Les parties actives chaudes sont situées sur la paroi verticale gauche et les parties actives froides sont localisées sur la paroi verticale droite.

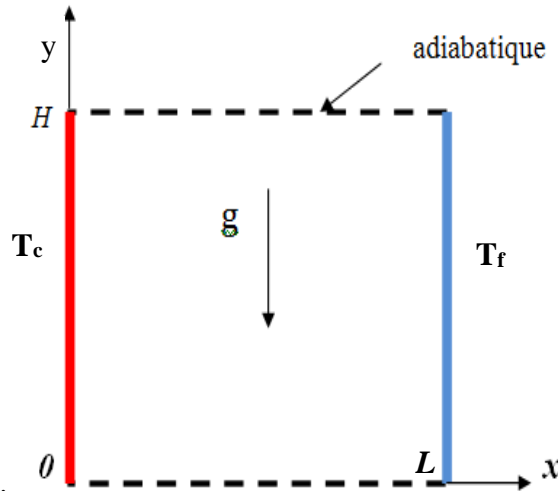


Figure II. 1 Configuration géométrique avec parois chaude et paroi froide

Pour la figure (II.1), la longueur de la partie thermiquement active chaude est donnée par la longueur $0 \leq Y \leq A$ en $X = 0$ et la partie froide en $X = 1$.

Pour la figure (II.2), la partie thermiquement active est de longueur $A/2$ en $X = 0$ sachant que $A/4 < Y < 3A/4$ détermine la paroi chaude. La partie localisée à $X = 1$ et $A/4 < Y < 3A/4$ est la paroi froide. Les parties des parois verticales qui restent et les parois horizontales sont inactives et adiabatiques pour $Y = 0$ et $Y = A$.

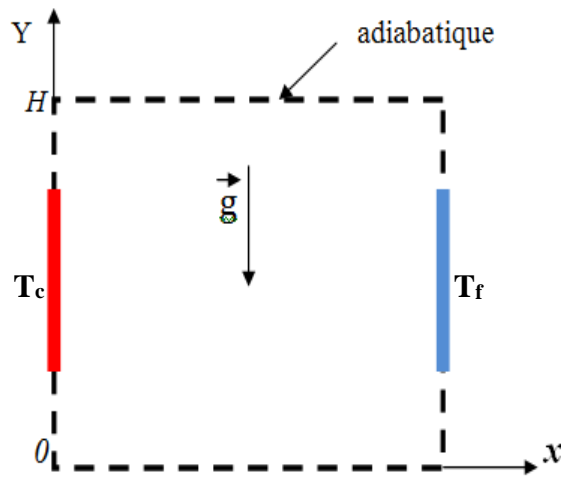


Figure II. 2 Configuration géométrique avec les parties actives situées aux milieux des parois

Pour la figure (II.3), la longueur de la partie thermiquement active est de longueur $A/2$, la partie froide localisée à $X = 1$ et $A/2 < Y < A$ et la partie chaude est située à $X = 0$ et $A/2 < Y < A$. Les parties des parois verticales qui restent et les parois horizontales sont inactives et adiabatiques $Y = 0$ et $Y = A$.

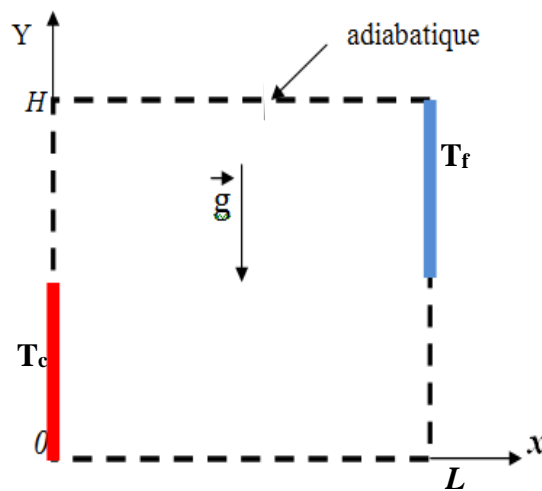


Figure II. 3 Configuration géométrique avec la partie verticale chaude située en bas et la partie froide située en haut

Pour la figure (II.4), les parois inactives et adiabatiques sont les parois horizontales. $Y = 0$ et $Y = A$.

La longueur de la partie thermiquement active est de longueur $A/2$, la partie chaude localisée à $X = 0$ et $A/2 < Y < A$ et la partie froide est située à $X = 1$ et $0 < Y < A/2$.

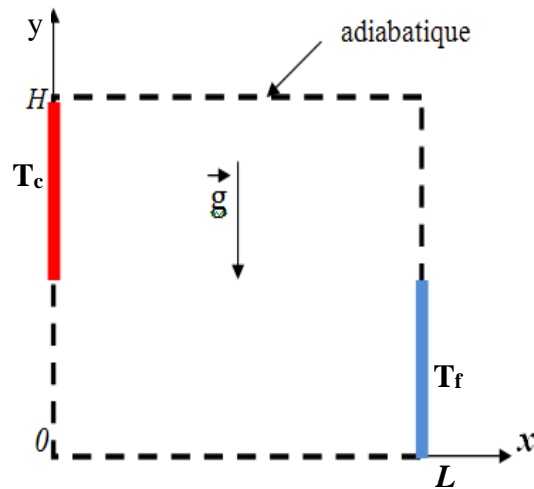


Figure II. 4 Configuration géométrique avec la partie verticale chaude située en haut et la partie froide située en bas

II.2.3. Cavité rectangulaire partiellement chauffée et inclinée

Le problème physique considéré est schématisé sur les figures (II.5), (II.6) et (II.7). Il s'agit d'une cavité bidimensionnelle inclinée d'un angle φ ,

Trois configurations géométriques ont été considérées selon la position des parois actives.

1- Configuration haut chaud-bas froid : la paroi active chaude se situe en haut de la paroi verticale droite de la cavité et la paroi active froide se situe en bas de la paroi verticale gauche de la cavité (Figure II.5).

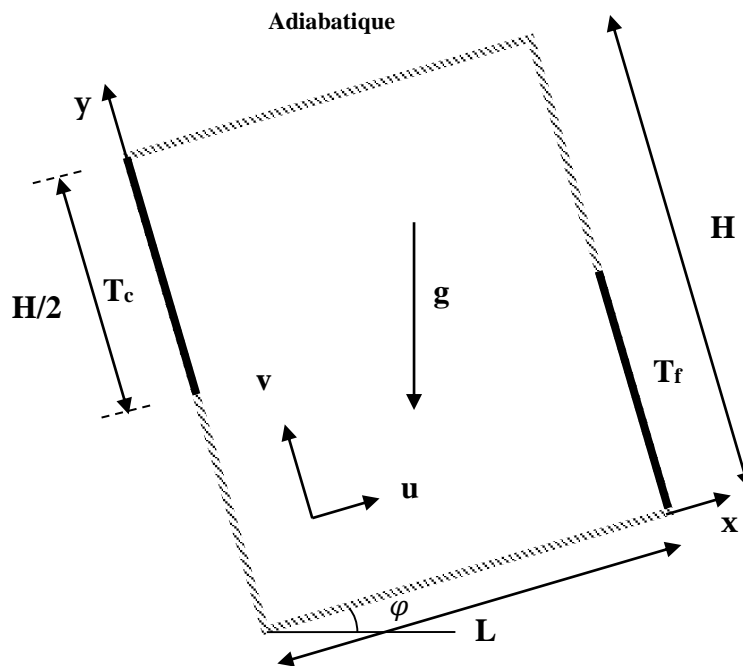


Figure II. 5 Configuration inclinée haut chaud – bas froid

2- Configuration milieu chaud-milieu froid : les deux parois actives se trouvent aux milieux des parois verticales droite et gauche de la cavité (Figure II.6).

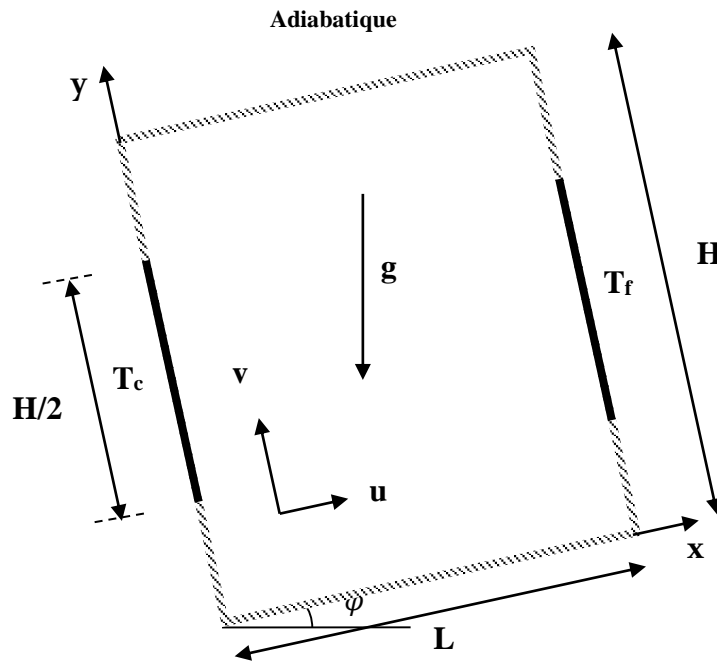


Figure II. 6 Configuration inclinée milieu chaud-milieu froid

3- Configuration bas chaud-haut froid : la paroi froide se situe en bas de la paroi verticale droite et la paroi chaude se situe en haut de la paroi verticale gauche de la cavité (Figure II.7).

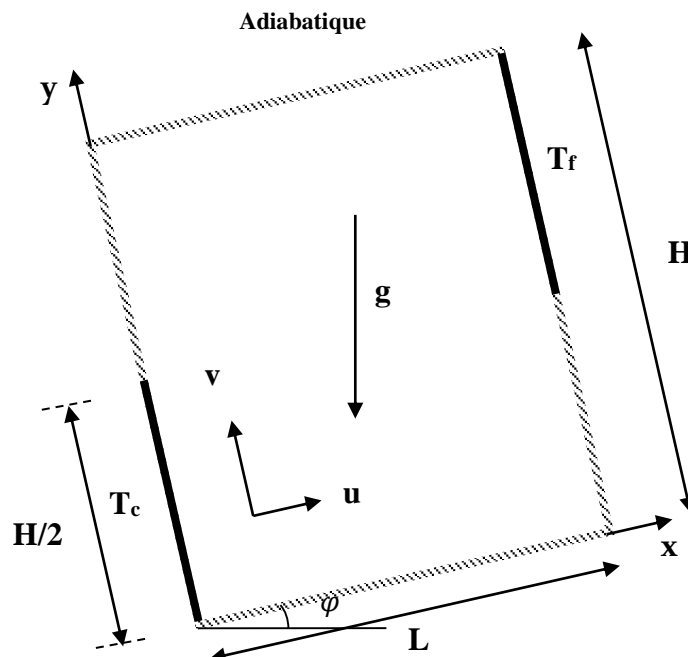


Figure II. 7 Configuration inclinée bas chaud-haut froid

Les équations générales régissant l'écoulement de convection dans l'enceinte inclinée et rapportées à un système de coordonnées cartésiennes sont données par :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.31})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g (\beta(T - T_0)) \sin \varphi \quad (\text{II.32})$$

- Equation de quantité de mouvement suivant y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g (\beta(T - T_0)) \cos \varphi \quad (\text{II.33})$$

- Equation d'Energie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.34})$$

L'introduction des variables vorticité ω et de fonction de courant ψ a pour objectif de simplifier l'équation du mouvement en éliminant le gradient de pression.

Dérivant les équations du mouvement (II.30) et (II.31) respectivement par rapport à y et à x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial}{\partial y} (\beta(T - T_0)) \sin \varphi \quad (\text{II.35})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} (\beta(T - T_0)) \cos \varphi \quad (\text{II.36})$$

En soustrayant l'équation (II.35) de (II.36), nous obtenons

$$u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \nu \left[\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \right] - g \beta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi \right) \quad (\text{II.37})$$

En utilisant la définition de la fonction de vorticité ω

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega \quad (\text{II.38})$$

Avec :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (\text{II.42})$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) \quad (\text{II.43})$$

Ainsi que l'équation (II.37) devient :

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi \right) \quad (\text{II.44})$$

En définissant une fonction de courant, ψ , comme étant la fonction scalaire tel que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

L'équation (II.44) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - g\beta \left(\frac{\partial T}{\partial y} \sin \varphi - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \varphi \right) \quad (\text{II.45})$$

L'équation d'énergie (II.34) devient

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.46})$$

L'équation de la fonction de courant devient

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\omega \quad (\text{II.47})$$

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier a priori la viabilité d'une équation ou du résultat d'un calcul. Elle est utile également pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

L'adimensionnement a pour avantage de faciliter la simplification des équations et de généraliser les résultats. On aboutit au modèle mathématique adimensionnel ci-dessous :

- Equation de la vorticité :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra} \cdot \text{Pr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \sin \varphi - \frac{\partial \Theta}{\partial X} \cos \varphi \right) \quad (\text{II.48})$$

- L'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.49})$$

- Equation de la fonction de courant :

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) = -\Omega \quad (\text{II.50})$$

- Equation de la pression :

Dérivant (II.32) et (II.33) par rapport à y et x respectivement, et ajoutant les deux équations résultantes membre à membre, on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + Ra\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial \theta}{\partial x}\cos\varphi\right) \quad (\text{II.51})$$

Avec :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (\text{II.53})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (\text{II.54})$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}\right)^2 \quad (\text{II.55})$$

On obtient alors :

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = -2\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + Ra\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial \theta}{\partial x}\cos\varphi\right) \quad (\text{II.56})$$

Les conditions aux limites sous forme adimensionnelle qui correspondent à chaque configuration sont :

Configurations gauche-droite ; Figure (II.1)

- Parois horizontales adiabatiques

$$0 \leq X \leq 1, \quad \begin{cases} Y = 0 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \\ Y = A : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

- Parois verticales actives

$$0 \leq Y \leq A, \quad \begin{cases} X = 0 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0,5 \\ X = 1 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = -0,5 \end{cases}$$

Configuration Milieu-Milieu ; Figure (II.2) et figure (II.6)

- Parois horizontales sont adiabatiques

$$0 \leq X \leq 1, \quad \begin{cases} Y = 0 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \\ Y = A : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

- Parois verticales partiellement actives

$$X = 0, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/4 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ A/4 \leq Y \leq 3A/4 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0,5 \\ 3A/4 \leq Y \leq A : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

$$X = 1, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/4 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ A/4 \leq Y \leq 3A/4 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = -0,5 \\ 3A/4 \leq Y \leq A : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

Configuration bas-haut ; figure (II.3) et figure (II.7)

- Parois horizontales sont adiabatiques

$$0 \leq X \leq 1, \begin{cases} Y = 0 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \\ Y = A : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

- Parois verticales partiellement actives

$$X = 0, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/2 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0,5 \\ 1/2 \leq Y \leq A : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

$$X = 1, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/2 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ A/2 \leq Y \leq 1 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = -0,5 \end{cases}$$

Configuration haut-bas ; figure (II.4) et figure (II.5)

- Parois horizontales sont adiabatiques

$$0 \leq X \leq 1, \begin{cases} Y = 0 : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \\ Y = A : \Psi = 0, \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

- Parois verticales partiellement actives

$$X = 0, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/2 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \\ A/2 \leq Y \leq 1 : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = 0,5 \end{cases}$$

$$X = 1, \begin{cases} 0 \leq Y \leq A/2: \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \Theta = -0,5 \\ A/2 \leq Y \leq A : \Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}, \frac{\partial \Theta}{\partial X} = 0 \end{cases}$$

II.2.4. Cavité rectangulaire de type Kyropoulos partiellement chauffée

Le but de cette section est l'étude de la convection naturelle dans deux configurations différentes utilisant la cavité de Kyropoulos retrouvée particulièrement dans le domaine de croissance cristalline.

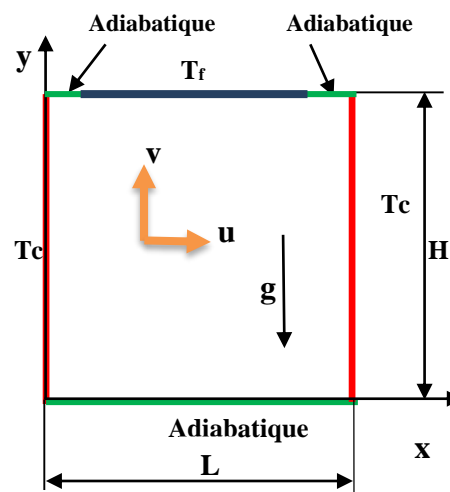


Figure II. 8 Configuration géométrique avec parois verticales chaudes et une partie de la paroi horizontale froide en haut et la base est adiabatique

Les géométries de deux configurations considérées sont sous forme rectangulaire bidimensionnelle de longueur L , suivant l'axe x et de hauteur H suivant l'axe y schématisées présentée par les figures (II.8) et (II.9). Sur la figure (II.8), les conditions aux limites sont schématisées, les deux parois verticales de la cavité thermiquement actives sont maintenues à une température uniformes T_c , et refroidi par une partie centrale localisées ($1/8 \leq X \leq 7/8$) dans la paroi horizontale supérieure ($Y = A$) et maintenue à une température uniforme T_f , tel que $T_c > T_f$. Les parois inactives sont les parois horizontales l'une correspondant à $Y = 0$ et l'autre à $Y = A$ localisées à $1/8 \leq X \leq 7/8$ sont adiabatiques (une condition de flux nul de Newman).

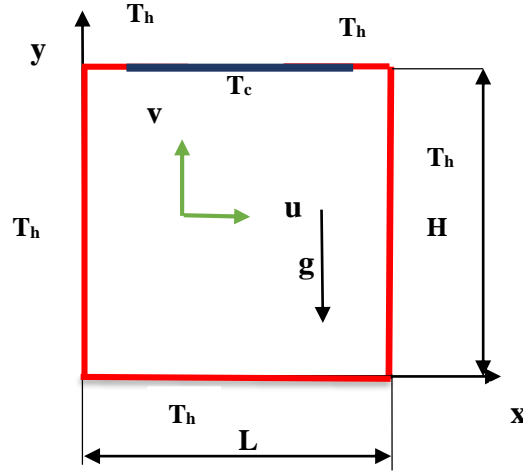


Figure II. 9 Configuration géométrique avec toutes les parois actives chaude sauf la partie supérieure comprise entre $1/8$ et $7/8$ est froide

La figure (II.9) représente une cavité refroidie par une partie centrale localisées ($1/8 \leq X \leq 7/8$) à $Y = A$, et maintenue à une température T_f et chauffé par les parois actives thermiquement à une température T_c .

Les conditions aux limites sous forme adimensionnelles de deux configurations de Kyropoulos sont :

La configuration géométrique schématisée sur la Figure (II.8) :

- Parois horizontales :

$$Y = A, \begin{cases} 0 \leq X \leq 1/8 : \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} ; \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \\ 1/8 \leq X \leq 7/8, \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} ; \Theta = -0,5 \\ 7/8 \leq X \leq 1 : \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} ; \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \end{cases}$$

$$Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 1. \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} ; \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

- Parois verticales :

$$0 \leq Y \leq A, \begin{cases} X = 0 : \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} ; \Theta = 0,5 \\ X = 1 : \Psi = 0 ; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} ; \Theta = 0,5 \end{cases}$$

La configuration géométrique schématisée sur la Figure (II.9) :

- Parois horizontales

$$Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 1 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}; \Theta = 0.5$$

$$Y = A, \quad \begin{cases} 0 \leq X \leq 1/8 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}; \Theta = 0.5 \\ 7/8 \leq X \leq 1 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}; \Theta = 0.5 \\ 1/8 \leq X \leq 7/8 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}; \Theta = -0.5 \end{cases}$$

- Parois verticales

$$0 \leq Y \leq A, \quad \begin{cases} X = 0 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}; \Theta = 0.5 \\ X = 1 : \Psi = 0; \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}; \Theta = 0.5 \end{cases}$$

II.2.5. Echange thermique par convection entre un fluide et une paroi solide

Afin de caractériser quantitativement les transferts de chaleur par convection entre le fluide et la paroi, nous définissons le nombre de Nusselt. Le nombre de Nusselt est une quantité sans dimension. Il peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence. Le coefficient de transfert de chaleur dépend à la fois des propriétés thermiques d'un milieu, des caractéristiques hydrodynamiques de son écoulement et des conditions aux limites hydrodynamiques et thermiques.

$$\text{Nu}(X) = -\frac{\partial \theta}{\partial Y}, \text{ pour une paroi horizontale active.}$$

$$\text{Nu}(Y) = -\frac{\partial \theta}{\partial X}, \text{ pour une paroi horizontale active.}$$

Les valeurs moyennes des nombres de Nusselt le long des parois actives se calculent avec la formule suivante :

- $\text{Nu}_{\text{moyen}} = \frac{1}{L} \int \text{Nu}(x) dx$, pour une paroi horizontale active de longueur L
- $\text{Nu}_{\text{moyen}} = \frac{1}{H} \int \text{Nu}(Y) dy$ pour une paroi verticale active de hauteur H

II.3. GEOMETRIE TRIDIMENSIONNELLE

Dans ce travail, deux types de formes géométriques tridimensionnelles, à savoir la géométrie de Czochralski et la géométrie de Couette, sont étudiées.

II.3.1. Géométrie cylindrique tridimensionnelle de type Czochralski

Dans le système de configuration Czochralski, le matériau fondu est contenu dans un four de forme cylindrique à une température T_c , suivi de la croissance d'un cristal à partir du matériau fondu. Le cristal est de forme cylindrique, il est de même axe que le creuset. La croissance du cristal est contrôlée en ajustant la température du creuset et en réglant les vitesses de rotation du cristal et de creuset.

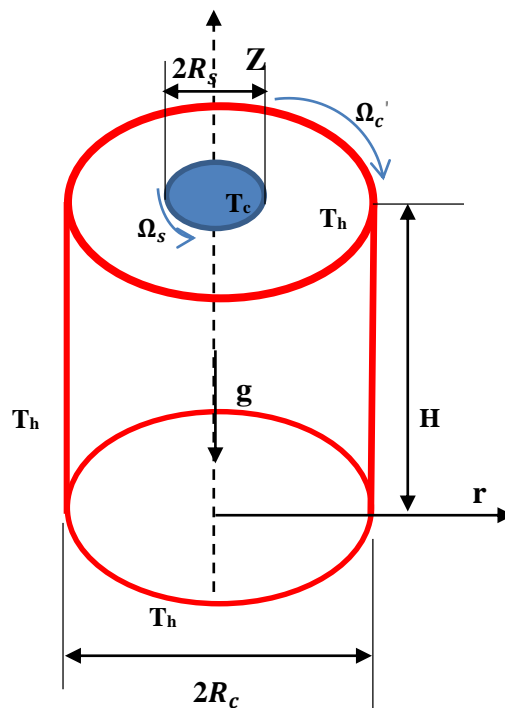


Figure II. 10 Configuration de Czochralski tridimensionnelle

Pour modéliser l'écoulement de convection dans la configuration de Czochralski, nous proposons un ensemble d'hypothèses simplificatrices, telles que les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes, le bain fondu est un fluide newtonien, électriquement conducteur, incompressible et satisfait l'hypothèse de Boussinesq. Le régime de l'écoulement est laminaire, l'interface solide-liquide est plane sa température est constante.

Les équations fondamentales régissant la dynamique de cet écoulement sont les équations de Navier-Stokes, qui décrivent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement du

fluide visqueux et de l'énergie. On note u_r , u_θ et u_z les composantes de la vitesse du mouvement, la pression p et la T température associées, baignant dans le champ de gravité \vec{g} ,

Tenant compte les hypothèses énoncées ci-dessus, nous aboutissons à la formulation des équations suivante :

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.57})$$

- Equations de la conservation de la quantité de mouvement :

Suivant le mouvement radial

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2\partial u_\theta}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.58})$$

Suivant le mouvement azimutal

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_z^2}{r^2} \right) \quad (\text{II.59})$$

Suivant le mouvement axial

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \beta (T - T_c) g \quad (\text{II.60})$$

$T_c)g$

Equation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta \frac{\partial T}{r \partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.61})$$

La mise sous forme adimensionnelle des équations de conservation se fait selon les grandeurs caractéristiques suivantes : le rayon du cylindre R , la viscosité cinématique ν , la pression p et la masse volumique ρ .

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{r}{R}, & r &= \hat{r}R, & \partial r &= R \partial \hat{r} \\ \hat{u}_r &= \frac{u_r R}{\nu}, & u_r &= \frac{\hat{u}_r \nu}{R}, & \partial u_r &= \frac{\nu}{R} \partial \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta &= \frac{u_\theta R}{\nu}, & u_\theta &= \frac{\hat{u}_\theta \nu}{R}, & u_\theta &= \frac{\nu}{R} \partial \hat{u}_\theta \\ \hat{T} &= \frac{T - T_f}{T_c - T_f}, & T &= (T_c - T_f) \hat{T} + T_f & \partial T &= (T_c - T_f) \partial \hat{T} \end{aligned}$$

$$\hat{p} = \frac{p R^2}{\rho v^2}, \quad p = \frac{\rho v^2}{R^2} \hat{p}, \quad \partial p = \frac{\rho v^2}{R^2} \partial \hat{p}, \quad \text{Ac} = \frac{h}{R}$$

Les équations adimensionnelles régissant l'écoulement, à savoir l'équation de continuité, de conservation de débit de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie dans la configuration de type Czochralski tridimensionnelle sont données décrites comme suit :

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{\hat{r}} \left(\frac{\partial(\hat{r}\hat{u}_r)}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (\text{II.62})$$

- Equations de la conservation de la quantité de mouvement :

Suivant le mouvement radial

$$\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta^2}{\hat{r}} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r}\hat{u}_r) \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \hat{z}^2} \right] \quad (\text{II.63})$$

Suivant le mouvement azimutal :

$$\frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{u}_r \hat{u}_\theta}{\hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r}\hat{u}_\theta) \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial \hat{z}^2} \right] \quad (\text{II.64})$$

Suivant le mouvement axial :

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial \hat{z}^2} \right] + \frac{Gr}{Re^2} \Theta \quad (\text{II.65})$$

- Equation de conservation d'énergie :

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \hat{r} \hat{T} + \hat{u}_\theta \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\hat{r}^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (\text{II.66})$$

Les conditions aux limites :

Paroi du cylindre : $\hat{u}_\theta = Re_c, \hat{T} = 1$

Base du cylindre : $\hat{u}_\theta = \hat{r}.Re_c, \hat{T} = 1$

Partie froide haut de cylindre : $\hat{u}_\theta = \hat{r}.Re_s, \hat{T} = 1$

Axe de rotation : $\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} = 0, \hat{u}_z = \hat{u}_\theta = 0, \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{r}} = 0$

À la surface libre : $\hat{u}_z = 0, \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{z}} = Ma \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{r}}$

$Ma = -\frac{R(T_h - T_c)}{\nu} \frac{\partial \gamma}{\partial T}$ est le nombre de Marangoni qui contrôle la convection thermo-capillaire.

$Re_c = \frac{\Omega_c R_c^2}{\nu}$ est le nombre de Reynolds de cylindre.

$Re_s = \frac{\Omega_s R_c R_s}{\nu}$ est le nombre de Reynolds du disque supérieur.

L'influence du champ magnétique permanent externe est considérée par la densité de force de Lorentz dans les équations de Navier-Stokes. Les équations adimensionnelles qui décrivent le comportement d'un fluide conducteur en présence d'un champ magnétique permanent externe, à savoir les équations de continuité, de conservation de la quantité de mouvement, de conservation de l'énergie et du champ magnétique pour le fluide conducteur de vitesse \vec{v} , de température T et de pression P peuvent être écrites comme suit.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \hat{t}} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} - \frac{Gr}{Re^2} \hat{T} \vec{u}_z + N(\vec{J} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.67})$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \vec{V} \cdot \nabla \hat{T} = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 \hat{T} \quad (\text{II.68})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{II.69})$$

$$\vec{J} = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.70})$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad (\text{II.71})$$

avec \vec{B} , \vec{J} , \vec{E} et Φ sont respectivement la densité de flux magnétique, la densité de courant électrique, le champ électrique et le potentiel électrique. L'adimensionnement s'effectue selon les grandeurs caractéristiques suivantes :

R_c : Longueur caractéristique ;

$R_s \Omega_s$: Vitesse caractéristique ;

ρV_c^2 : Pression caractéristique ;

$T_c - T_f$: Température caractéristique

$\sigma V_c B_0$: Densité de courant caractéristique.

R_c , R_s , Ω_s , T_f et B_0 désignent respectivement le rayon du creuset, le rayon du cristal, la vitesse angulaire du cristal, la température de métal liquide et l'intensité du champ magnétique uniforme. Dans les équations de Navier-Stokes incluant la force électromagnétique (EM), le rapport caractéristique de la force EM et la force d'inertie qui définit le paramètre

$$d'interaction $N = \frac{\sigma B_0^2 R_c}{\rho \Omega_s R_s}$.$$

Les nombres de Grashof, Prandtl et Reynolds correspondant respectivement aux rotations du cristal et du creuset sont définis comme

$$Gr = g\beta (T_c - T_{\text{métal fondu}}) R_c^3 / \nu^2, Re_s = \Omega_s R_c R_s / \nu \text{ et } Re_c = \Omega_c R_c^2 / \nu$$

II.3.2. Géométrie cylindrique tridimensionnelle de type Couette

En hydrodynamique, les équations dynamiques décrivent l'écoulement d'un fluide dans un champ de vitesse, et peuvent être sous forme adimensionnelles en utilisant les coordonnées cartésiennes ou cylindriques. Les équations de Navier-Stokes pour écoulement d'un fluide newtonien et incompressible en coordonnées cylindriques sont les suivantes :

Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z) = 0 \quad (\text{II.72})$$

Equations de Navier- Stokes :

Suivant le mouvement radial

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II.73})$$

Suivant le mouvement azimutal

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{II.74})$$

Suivant le mouvement axial

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.75})$$

L'adimensionnement des équations dynamiques :

$$\hat{u}_r = \frac{u_r}{U_{\theta max}}, u_r = \hat{u}_r U_{\theta max}, \partial u_r = U_{\theta max} \partial \hat{u}_r$$

$$\hat{u}_\theta = \frac{u_\theta}{U_{\theta max}}, u_\theta = \hat{u}_\theta U_{\theta max}, \partial u_\theta = U_{\theta max} \partial \hat{u}_\theta$$

$$\hat{u}_z = \frac{u_z}{U_{\theta max}}, u_z = \hat{u}_z U_{\theta max}, \partial u_z = U_{\theta max} \partial \hat{u}_z$$

$$\hat{r} = \frac{r}{d}, r = d \cdot \hat{r}, \partial r = d \cdot \partial \hat{r}$$

$$\hat{z} = \frac{z}{d}, z = d \cdot \hat{z}, \partial z = d \cdot \partial \hat{z}$$

$$\Gamma = \frac{H}{d}$$

$$\hat{g}_x = \frac{g_x}{g}, g_x = g \hat{g}_x, \hat{g}_y = \frac{g_y}{g}, g_y = g \hat{g}_y, \hat{g}_z = \frac{g_z}{g}, g_z = g \hat{g}_z$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\rho U_{\theta max}^2} p, p = \rho U_{\theta max}^2 \hat{p}, \partial p = \rho U_{\theta max}^2 \partial \hat{p}$$

$$\hat{t} = \frac{t U_{\theta max}}{d}, t = \hat{t} \frac{d}{U_{\theta max}}, \partial t = \frac{d}{U_{\theta max}} \partial \hat{t}$$

Les équations de conservation deviennent après adimensionnement comme suit :

- Equation de continuité :

$$\frac{1}{\hat{r}} \left(\frac{\partial(\hat{r}\hat{u}_r)}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{1}{\partial \hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (\text{II.76})$$

- Equations de Navier- Stokes :

Suivant le mouvement radial

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta^2}{\hat{r}} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{r}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r}\hat{u}_r) \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \theta^2} - \right. \\ \left. \frac{2}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_r}{\partial \hat{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

Suivant le mouvement azimutal

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{u}_r \hat{u}_\theta}{\hat{r}} = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r}\hat{u}_\theta) \right) + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. \frac{2}{\hat{r}^2} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \hat{u}_\theta}{\partial \hat{z}^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

Suivant le mouvement axial

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_r \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{u}_\theta}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \theta} + \hat{u}_z \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial \hat{r}} \right) + \frac{\partial^2 \hat{u}_z}{\partial \hat{z}^2} \right] + \frac{1}{Fr} \hat{g}_z \quad (\text{II.79})$$

$$Fr = \frac{g d}{U_{\theta max}^2}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes équations gouvernantes les écoulements hydrodynamique, d'origine thermique et sous l'influence du champ magnétique. Pour différentes configurations géométriques, l'adimensionnement des équations est mené afin de mettre en évidence les différents paramètres de contrôle de l'écoulement.

CHAPITRE

III

APPROCHE NUMERIQUE ET VALIDATION

APPROCHE NUMERIQUE ET VALIDATION

CHAPITRE

III

Introduction

L'objectif des méthodes numériques est de fournir une solution approchée de comportement réel des phénomènes physiques. La physique possède des caractères tridimensionnels, temporelles et non linéaire c'est à dire très complexe. Le rôle de modélisateur est de simplifier suffisamment le problème tout en conservant l'originalité du phénomène physique étudié en mécanique des fluides, les écoulements que ce soit on régime laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équation aux dérivée partielle (E.D.P). Ainsi, tous les phénomènes physiques sont régis par ce système formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour les caractéristiques du champ d'écoulement et du champ thermique.

Le choix de l'utilisation de telle méthode numérique va dépendre essentiellement du type et de la complexité du problème à résoudre : la nature du fluide, le comportement thermodynamique, la modélisation du milieu et le problème stationnaire ou in stationnaire.

Les logiciels de simulation numérique des écoulements peuvent être considérés comme de véritables "expériences numériques" lorsqu'ils sont réalisés avec soin. L'avantage des "méthodes numériques" est que toutes les grandeurs physiques liées à l'écoulement (champ de vitesse, champ de pression, contraintes, etc.), sont disponibles en tout point de l'écoulement. Dans une expérience, obtenir ces grandeurs physiques en tout point du champ est souvent impossible ou très difficile à mettre en pratique.

La sensibilité au maillage des résultats obtenus est prise en considération pour un choix du maillage adéquat. Le code de calcul élaboré à l'aide le langage de programmation Matlab est validé par rapport aux autres travaux publiés dans la littérature.

III.1. DISCRETISATION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

La variable inconnue φ est décrite par plusieurs valeurs dans les points d'un maillage. Le développement de l'inconnue en séries de Taylor tronquées est utilisé pour approximer les dérivées de l'inconnue, dans chaque point du maillage, par différences finies en utilisant les inconnues voisines. En remplaçant les dérivées dans les équations différentielles par différences finies, on obtient un système d'équations algébriques pour les valeurs de l'inconnue dans chaque point du maillage.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser le système physique (cavité) par le biais d'un maillage uniforme (voir figure III.1), en un nombre fini de points appelés nœuds. Chaque nœud est identifié par un couple d'indice (i, j) . Ainsi, on calcule les valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant sur chaque nœud, en résolvant les équations gouvernantes établies au chapitre II. A l'intérieur de notre système d'éléments, les dérivées partielles sont approchées par le biais de discrétisations, selon des schémas centrés et décentrés en amont ou en aval, avec un degré deux de précision.

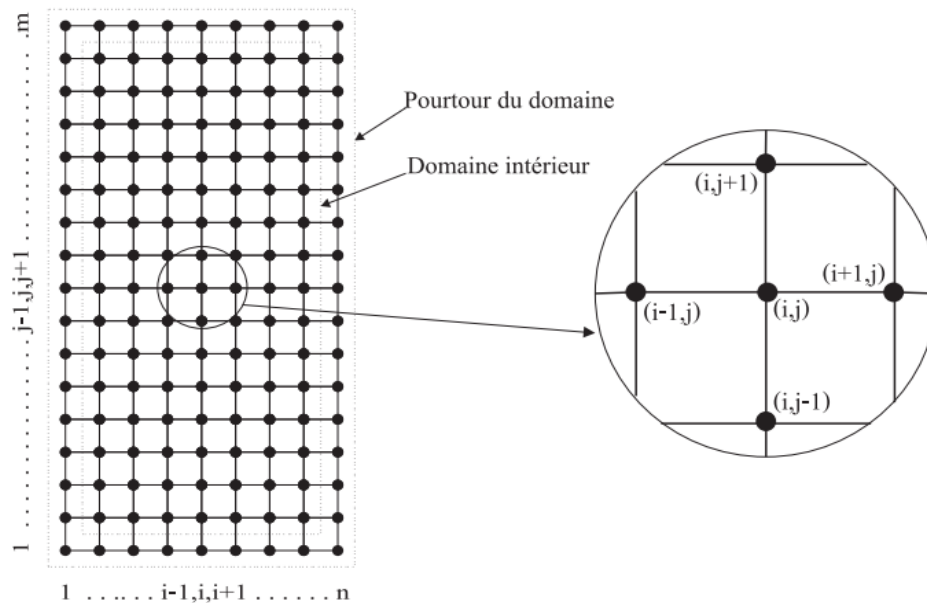


Figure III. 1 Maillage du domaine de calcul en (i, j)

A l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma aux différences finies centrées à savoir :

Tableau III. 1 Aucune entrée de table d'illustration n'a été trouvée.

Suivant l'axe X	Suivant l'axe Y
$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$	$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$
$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right _{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$	$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right _{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$

Les dérivées partielles qui expriment les conditions aux frontières sont discrétisées avec un schéma aux différences finies décentrées en amont ou en aval.

Tableau III. 2 Différences finies en amont et en aval

Différences finies en amont	Différences finies en aval
$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{i,j} = \frac{4f_{i+1,j} - f_{i+2,j} - 3f_{i,j}}{2\Delta x}$	$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{i,j} = \frac{f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 3f_{i,j}}{2\Delta x}$
$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{i,j} = \frac{4f_{i,j+1} - f_{i,j+2} - 3f_{i,j}}{2\Delta y}$	$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right _{i,j} = \frac{4f_{i,j+1} - f_{i,j+2} - 3f_{i,j}}{2\Delta y}$

III.1.1. Discrétisation de l'équation de l'énergie

Les étapes de la discrétisation de l'équation d'énergie sont présentées ci-dessous comme suit :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j}}{2\Delta X}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Y}$$

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}}{2\Delta X}, \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j-1}}{2\Delta Y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i+1,j} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i-1,j}}{(\Delta X)^2}, \quad \left. \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right|_{i,j} = \frac{\Theta_{i,j+1} - 2\Theta_{i,j} + \Theta_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2}$$

Après le réarrangement, on obtient :

$$\Theta_{i,j} = \frac{\left\{ \left(\frac{-1}{4\Delta X \Delta Y} \right) [(\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1})(\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i-1,j}) - (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i-1,j})(\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j-1})] + \left(\frac{\Theta_{i+1,j} + \Theta_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \right) + \left(\frac{\Theta_{i,j+1} + \Theta_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right) \right\}}{\left(\frac{2}{(\Delta X)^2} + \frac{2}{(\Delta Y)^2} \right)} \quad (\text{III.1})$$

III.1.2. Discrétisation de l'équation de la vorticité

Les étapes de la discrétisation de l'équation de la vorticité sont présentées ci-dessous comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = Pr \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) - Ra \cdot Pr \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta Y}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \Big|_{i,j} = \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta Y}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta X}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X} \Big|_{i,j} = \frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{2\Delta X}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} \Big|_{i,j} = \frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta X}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \Big|_{i,j} = \frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{(\Delta X)^2}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta Y} \right) \left(\frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{2\Delta X} \right) - \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta Y} \right) \left(\frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta Y} \right) \\ &= Pr \left(\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right) - Ra \cdot Pr \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta X} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Après le réarrangement, on obtient

$$\Omega_{i,j} = \frac{\left(\frac{-1}{4\Delta X \Delta Y Pr} \right) \cdot [(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \cdot (\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) \cdot (\Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1})]}{\frac{2}{(\Delta X)^2} + \frac{2}{(\Delta Y)^2}}$$

$$- \frac{Ra \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{\Omega_{i+1,j} + \Omega_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\Omega_{i,j+1} + \Omega_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right)}{\frac{2}{(\Delta X)^2} + \frac{2}{(\Delta Y)^2}} \quad (\text{III.4})$$

III.1.3. Discrétisation de l'équation fonction courant

Les étapes de la discrétisation de l'équation de la fonction de courant sont présentées ci-dessous comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) = -\Omega \quad \text{Avec : } \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2}$$

Après substitution, on obtient :

$$\left(\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right) = -\Omega$$

Après réarrangement on obtient :

$$\psi_{i,j} = \frac{\left[\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \right] + \Omega_{i,j}}{\left(\frac{2}{(\Delta X)^2} + \frac{2}{(\Delta Y)^2} \right)} \quad (\text{III.5})$$

Les champs de vitesse $U_{i,j}$, $V_{i,j}$ sont déduits selon :

$$U = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}}{2\Delta Y}, \quad V = - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial X} \right|_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j}}{2\Delta X}$$

III.1.4. Discrétisation des conditions aux limites

Les étapes de la discrétisation des conditions aux limites sont données pour chaque fonction et chaque équation.

III.1.4.1. Fonction de courant

Les conditions aux limites correspondantes à la fonction de courant sont :

$$X=0, \quad \Psi_{1,j}=0 \quad X=1, \quad \Psi_{NX,j}=0 \quad Y=0, \quad \Psi_{i,1}=0 \quad Y=A, \quad \Psi_{i,NY}=0$$

III.1.4.2. Vorticité

Les conditions aux limites de la fonction de courant donnent :

$$\Psi_{1,j} = 0 \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right)_{1,j} = 0$$

Donc, on obtient :

$$\Omega_{1,j} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{1,j} = \frac{-2\Psi_{2,j}}{(\Delta X)^2}$$

On peut déduire les autres conditions aux limites sur les autres parois :

$$\begin{aligned} X=0 & \quad \Omega_{1,j} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{1,j} = \frac{-2\Psi_{2,j}}{(\Delta X)^2} \\ X=1 & \quad \Omega_{NX,j} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{NX,j} = \frac{-2\Psi_{NX-1,j}}{(\Delta X)^2} \\ Y=0 & \quad \Omega_{i,1} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{i,1} = \frac{-2\Psi_{i,2}}{(\Delta X)^2} \\ Y=A & \quad \Omega_{i,NY} = - \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \right|_{i,NY} = \frac{-2\Psi_{i,NY-1}}{(\Delta X)^2} \end{aligned}$$

III.1.4.3. Température

Parois horizontales :

$$0 \leq X \leq 1 \quad Y = 0, \quad \begin{cases} \Theta_{i,1} = \frac{4\Theta_{i,2} - \Theta_{i,3}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{i,1} = \frac{4\Theta_{i,2} - \Theta_{i,3} + 3\Theta_{i,1}}{2\Delta Y} = 0 \end{cases}$$

$$Y = A, \quad \begin{cases} \Theta_{i,NY} = \frac{4\Theta_{i,NY-1} - \Theta_{i,NY-2}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{i,NY} = \frac{-4\Theta_{i,NY-1} - \Theta_{i,NY-2} + 3\Theta_{i,NY}}{2\Delta Y} = 0 \end{cases}$$

Parois verticales :

- Configuration Milieu-Milieu :

$$\begin{aligned} & 0 \leq Y \leq A/4, \quad \begin{cases} \Theta_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j} + 3\Theta_{1,j}}{2\Delta X} = 0 \end{cases} \\ X = 0 & \quad A/4 \leq Y \leq 3A/4, \quad \Theta_{1,j} = 0.5 \\ & 3A/4 \leq Y \leq A, \quad \begin{cases} \Theta_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j} + 3\Theta_{1,j}}{2\Delta X} = 0 \end{cases} \\ X = 1 & \quad 0 \leq Y \leq A/4, \quad \begin{cases} \Theta_{NX,j} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,NX} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j} + 3\Theta_{NX,j}}{2\Delta X} = 0 \end{cases} \\ & \quad A/4 \leq Y \leq 3A/4, \quad \Theta_{NX,j} = -0.5 \\ & \quad 3A/4 \leq Y \leq A, \quad \begin{cases} \Theta_{NX,j} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,NX} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j} + 3\Theta_{NX,j}}{2\Delta X} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Configuration Gauche-Droite :

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad 0 \leq Y \leq A & \quad \Theta_{1,j} = 0.5 \\ X = 1 & \quad 0 \leq Y \leq A & \quad \Theta_{NX,j} = -0.5 \end{aligned}$$

- Configuration haut-bas :

$$\begin{aligned} X = 0 & \quad 0 \leq Y \leq A/2 & \quad \begin{cases} \Theta_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j} + 3\Theta_{1,j}}{2\Delta X} = 0 \end{cases} \\ & \quad A/2 \leq Y \leq A & \quad \Theta_{1,j} = 0.5 \\ & \quad 0 \leq Y \leq A/2 & \quad \Theta_{NX,j} = -0.5 \end{aligned}$$

$$X = 1 \quad A/2 \leq Y \leq A \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{NX,j} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,NX} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j} + 3\Theta_{NX,j}}{2\Delta X} = 0 \end{array} \right.$$

Configuration bas-haut :

$$\begin{array}{ll} 0 \leq Y \leq A/2 & \Theta_{1,j} = 0.5 \\ X = 0 & A/2 \leq Y \leq A \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,j} = \frac{4\Theta_{2,j} - \Theta_{3,j} + 3\Theta_{1,j}}{2\Delta X} = 0 \end{array} \right. \\ X = 1 & 0 \leq Y \leq A/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{NX,j} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j}}{3} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{1,NX} = \frac{4\Theta_{NX-1,j} - \Theta_{NX-2,j} + 3\Theta_{NX,j}}{2\Delta X} = 0 \end{array} \right. \\ & A/2 \leq Y \leq A \quad \theta_{NX,j} = -0.5 \end{array}$$

III.1.5. Critère de tolérance sur les résidus

Les schémas de différences finies discrétisent l'espace en points discrets, ce qui permet de représenter les dérivées d'une équation sous forme de différences discrètes. Nous comparons les résidus calculés à chaque itération avec la tolérance prédéfinie qui est définie comme suit :

$$\frac{\sum |\phi_{i,j}^n - \phi_{i,j}^{n-1}|}{\sum |\phi_{i,j}^n|} \leq 2 \cdot 10^{-6}$$

Où ϕ est l'une des variables physiques Ω , Ψ , θ et n représente l'avancement des itérations. Si les résidus sont inférieurs à la tolérance $2 \cdot 10^{-6}$, le processus de calcul est considéré comme ayant convergé.

III.1.6. Stabilité numérique

La stabilité numérique se réfère à la propriété d'un algorithme numérique de produire des résultats fiables et précis sur une large gamme de conditions d'entrée et de perturbations, telles que des erreurs arrondis, des perturbations numériques, des conditions aux limites, etc. L'algorithme numérique doit être stable et les petites perturbations dans les données d'entrée ou les approximations numériques ne doivent pas amener à des résultats complètement différents ou à des oscillations incontrôlables. L'algorithme numérique est considéré comme stable si les erreurs d'arrondis et les perturbations numériques sont limités et ne s'amplifient pas au fil du temps. Les facteurs de sous-relaxation sont utilisés dans le cas des problèmes non linéaires. Il est nécessaire de contrôler le changement d'un paramètre du domaine fluide lors de la résolution numérique afin d'éviter la divergence du calcul numérique. Le critère de sous-relaxation réduit le changement des paramètres durant chaque itération.

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \xi \Delta \phi$$

ξ : est le facteur de sous-relaxation et n : représente l'avancement des itérations successives.

$\Delta \phi$: La différence entre les résultats des deux itérations $n - 1$ et n .

III.1.7. Algorithme de calcul

Pour résoudre le système d'équations (III.1), (III.2) et (III.3), nous utilisons une méthode itérative à coefficient de relaxation. Les étapes qui doivent être parcourues dans cet Organigramme sont :

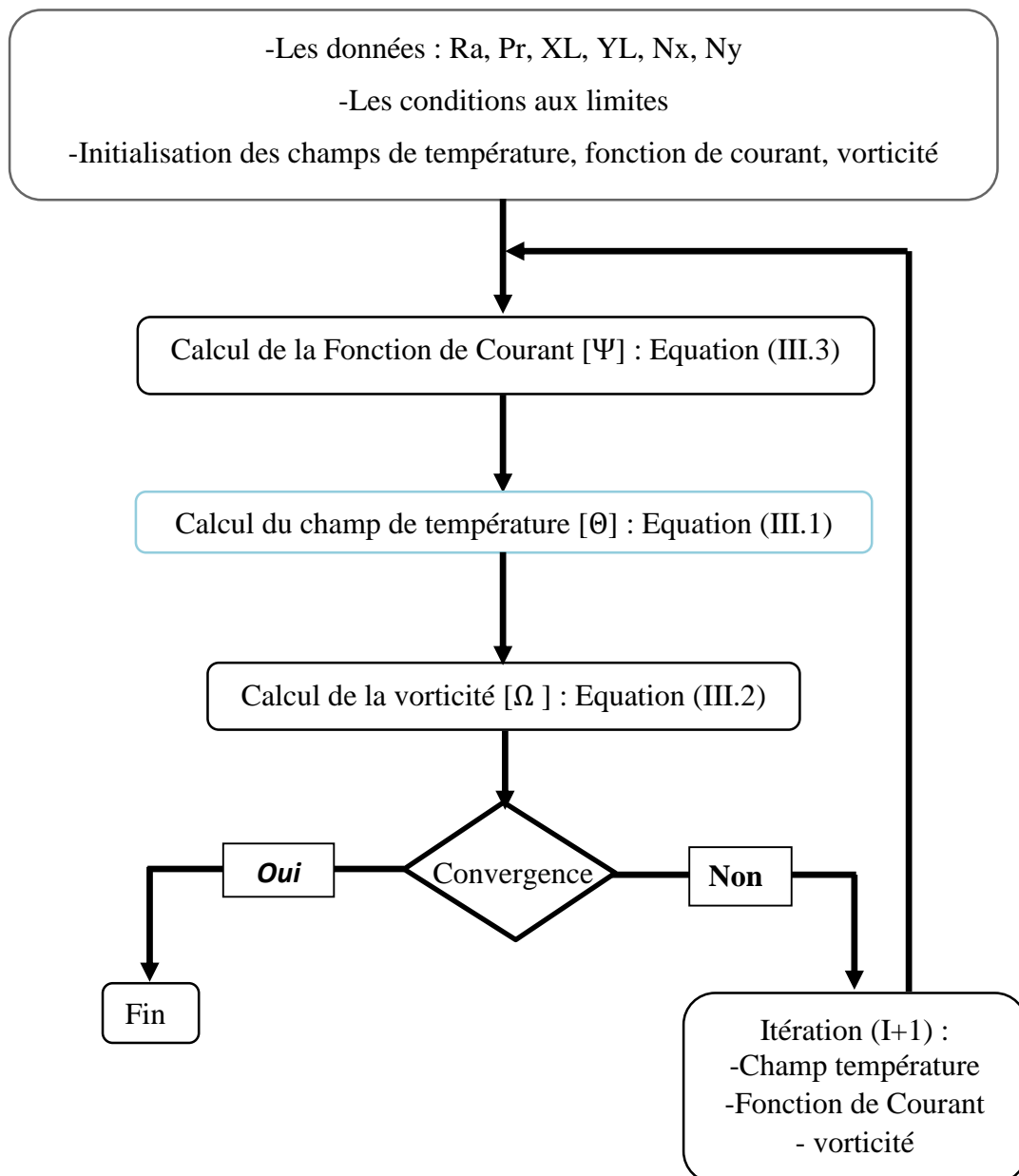


Figure III. 2 Organigramme de calcul

- 1) Initialisation des valeurs de la température, de la vorticité et de la fonction de courant au sein du maillage.
- 2) Calcul de la distribution de la fonction de courant (Equation III.3).
- 3) Calcul de la distribution de la température (Equation III.1).
- 4) Calcul de la vorticité (Equation III.2).
- 5) Calcul des composantes de la vitesse.
- 6) Stockage des valeurs de Θ , et $\Omega \cdot \Psi$

III.1.8. Optimisation du maillage

Le choix du maillage a une grande influence sur la précision des résultats et le temps de calcul, et pour voir cet effet, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration Milieu-Milieu.

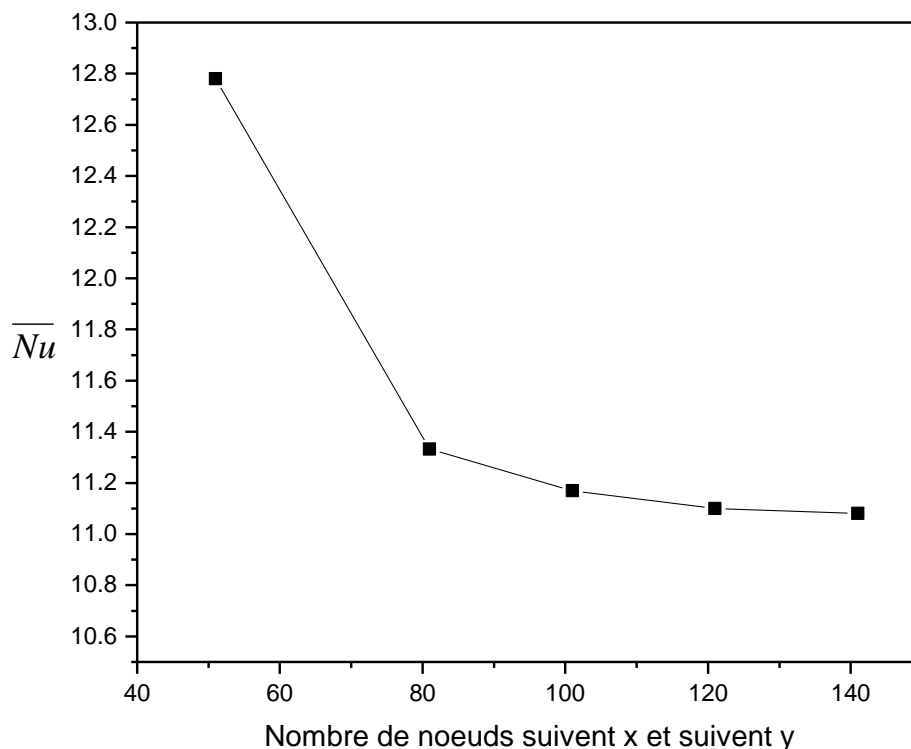


Figure III. 3 Nombre de nœuds suivant X et Y

Les graphes montrés sur les figures III.3, III.4 et III.5 illustrent respectivement la variation du nombre de Nusselt moyen, le profil de vitesse horizontale et verticale au plan medium en

fonction du nombre de nœuds. Notre choix s'est porté sur le maillage (121x121) qui assure un bon compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul.

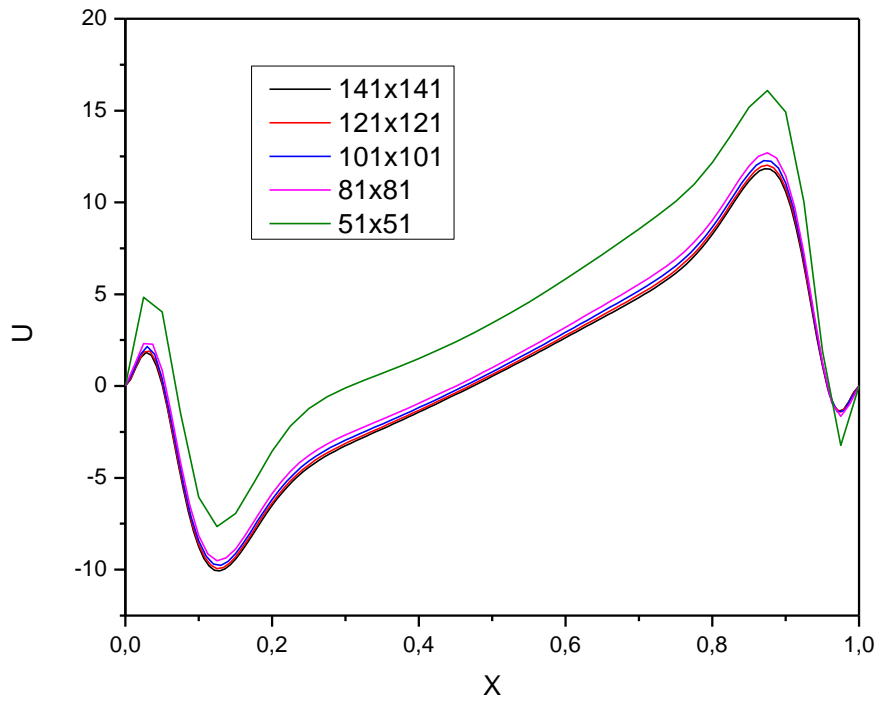


Figure III. 4 Profil de la composante de la vitesse U en Y=0.5 pour Ra =10⁶

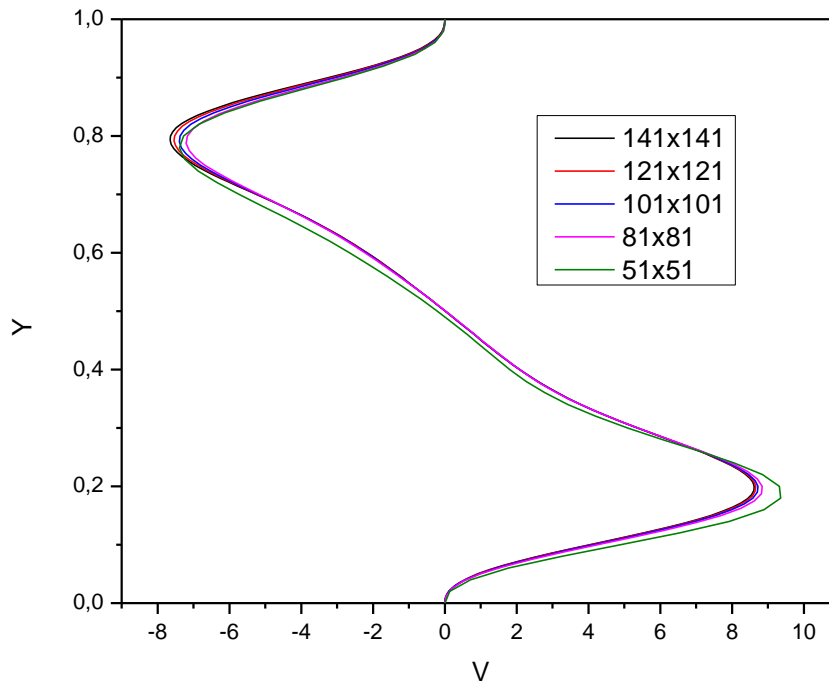


Figure III. 5 Profil de la composante de la vitesse V en X=0.5 pour Ra =10⁶

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail avec le code élaboré en langage Fortran, une validation de notre simulation numérique a été faite en comparant avec les études numériques de Valencia et al. [52] et Sivasankaran et al. [46] qui sont disponibles dans la littérature.

Tableau III. 3 Comparaison des nombres de Nusselt moyens

Ra	10 ⁴			10 ⁵			10 ⁶		
	H-B	M-M	B-H	H-B	M-M	B-H	H-B	M-M	B-H
Référence [52]	2.142	3.399	2.997	3.295	6.383	5.713	4.505	12.028	11.659
Référence [46]	2.089	3.318	2.888	3.136	6.198	5.643	4.397	11.532	10.982
Présent Travail	2.050	3.243	2.933	3.179	6.073	5.513	4.418	11.108	10.668

La méthode utilisée est des différences finies pour les trois cas afin de valider notre code. Pour cela, on a gardé les mêmes conditions que [52] et [46] et le fluide en convection est l'air dans une géométrie carrée avec des parois partiellement chauffées et on a aussi utilisé les mêmes nombres de Rayleigh (Ra) et les mêmes configurations (parois actifs situent aux positions : Haut-Bas, Milieu-Milieu et Bas-Haut) que dans le tableau ci-dessus comporte les valeurs du

nombre de Nusselt moyen pour la présente étude et celles de Valencia et al [52] et Sivasankaran et al [46]. On constate que nos résultats sont similaires avec ceux présentés par Kandaswamy [28], avec pourcentage d'erreur relativement acceptable.

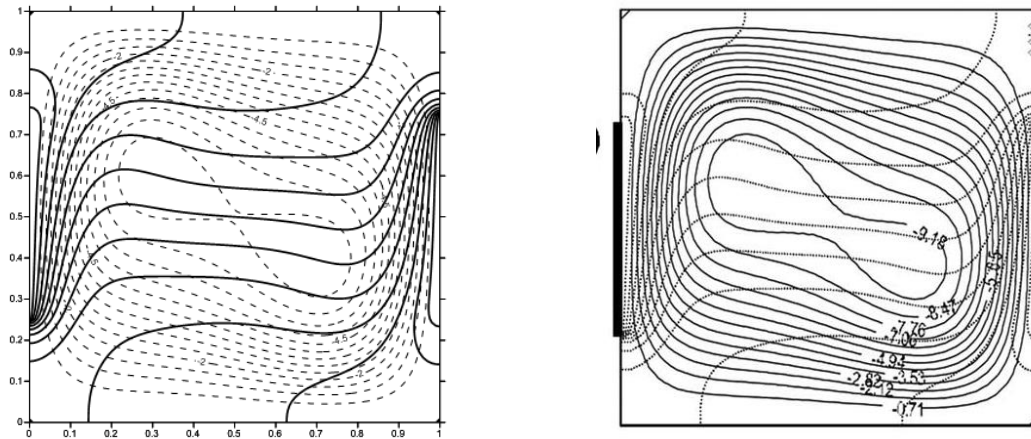


Figure III. 6 Comparaison des isothermes et des lignes de courants pour $Gr=10^5$: (à gauche) Présent travail, (à droite) les résultats numériques de Kandaswamy et al [28]

La comparaison des isothermes et des lignes de courant (Figure III.14) pour un nombre de Grashof égale à 10^5 avec les résultats numériques de Kandaswamy [28] présente une excellente concordance, ce qui nous a permis de valider notre procédure de simulation numérique.

III.2. APPROCHE NUMERIQUE PAR CFD

La mécanique des fluides numérique (Computational Fluid Dynamics, CFD) en anglais, est un outil qui permet la résolution numérique d'équations de conservation utilisant les méthodes numériques et des algorithmes pour simuler et analyser le comportement des fluides. Elle consiste à utiliser des logiciels pour résoudre les équations complexes qui décrivent le mouvement des fluides. Ce sont, généralement, des équations aux dérivées partielles (EDP) dont la solution dépend de deux à quatre variables : la variable de temps avec une à trois coordonnées spatiales. Ce système d'équations a rarement une solution analytique. Il est donc nécessaire de les résoudre par une méthode numérique. Les méthodes numériques utilisées en mécanique des fluides consistent généralement à diviser le milieu fluide ou l'espace du mouvement du fluide en une grille de points discrets, puis à résoudre les équations à chaque point de la grille pour calculer les champs de vitesse, de pression et température, etc.

III.2.1.Principe de simulation numérique utilisant CFD

La simulation par CFD passe par trois étapes principales, à savoir le pré-traitement (géométrie et maillage), le traitement (solveur) et le post-traitement (traitement des résultats). Le pré-traitement comprend la définition et la discrétisation de la géométrie à analyser. Plus précisément, la géométrie ou le domaine d'écoulement est divisé en un certain nombre d'éléments discrets par une grille ou un maillage. La géométrie décrit la forme du problème à analyser. Il existe différentes manières de créer la géométrie, en fonction de la complexité du domaine d'écoulement. Les cellules de calcul à l'intérieur du domaine d'écoulement définissent un ensemble de volumes de contrôle unitaires. Le problème de l'écoulement se résout dans chaque cellule. La forme et la taille des cellules ont un impact significatif sur la convergence, la précision de la solution et le temps de calcul. De nombreux éléments de cellule et types de grille différents sont disponibles. Un maillage peut être grossier, moyen ou fin. Le choix approprié du maillage dépend de la complexité de la géométrie sur le champ d'écoulement et des types de cellules pris en charge par le solveur. Les cellules tétraédriques, prismatiques ou pyramidales sont utilisées en tridimensionnel.

Trois principes fondamentaux régissent les aspects physiques de tout écoulement continu, y compris les turbulents, à savoir la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie. La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution des équations qui gouvernent les écoulements. La discrétisation utilisant la méthode des volumes finis implique la substitution d'approximations constantes par morceaux pour les termes de l'équation intégrale représentant les processus d'écoulement tels que la convection, la diffusion et les termes sources. La précision d'une solution convergée dépend des modèles physiques, de la résolution de la grille, ainsi que de la configuration du problème.

Pour obtenir une solution, il est nécessaire de spécifier les informations requises pour contrôler l'algorithme de résolution numérique. Au cours du processus de simulation par CFD, il existe des erreurs d'intégration dans les équations discrétisées, additionnées sur tous les volumes de contrôle, ce qui peut entraîner une imprécision dans la solution d'écoulement. La solution des équations numériques peut être utilisée pour évaluer de telles erreurs. Ces mesures d'erreur, qui sont généralement appelées erreurs résiduelles ou résidus, peuvent être utilisées comme guide pour voir si un processus de résolution converge ou non. Au fur et à mesure que le processus de résolution progresse d'itération en itération, les erreurs résiduelles de chaque équation devraient diminuer. De faibles résidus suggèrent une solution qui converge et la simulation peut être considérée comme stable si les résidus continuent de diminuer en amplitude

de manière monotone avec d'autres itérations. Autrement dit, les solutions des problèmes résolus par CFD sont considérées comme convergeant lorsque le champ d'écoulement et les champs scalaires ne changent plus.

III.2.2. Types de maillage

Le choix et la qualité du maillage généré peuvent affecter la précision et l'exactitude des résultats numériques et les performances de la simulation numérique. Il existe donc divers types de maillages utilisés pour mener une simulation numérique à la fois précise et efficace. Quelques types de maillages qui peuvent être choisis :

- Maillage structuré : un maillage structuré est un type de maillage dans lequel les nœuds sont organisés selon une grille régulière ou rectilinéaire. Ce type de maillage est souvent utilisé pour modéliser des géométries simples et régulières, telles que les cavités cylindriques ou prismatiques.

- Maillage non structuré : un maillage non structuré est un type de maillage et les nœuds ne sont pas organisés selon une grille régulière. Ce type de maillage est souvent utilisé pour modéliser des géométries complexes et irrégulières, telles que des formes organiques ou des objets de forme libre.

- Maillage tétraédrique tridimensionnel : un maillage tétraédrique tridimensionnel est un maillage où les éléments sont des tétraèdres, c'est-à-dire des polyèdres à quatre faces triangulaires. Ce type de maillage est souvent utilisé dans les simulations de fluides et de l'analyse des éléments finis.

- Maillage hexaédrique tridimensionnel dans lequel les éléments sont des hexaèdres, c'est-à-dire des polyèdres à six faces quadrilatérales. Ce type de maillage est souvent utilisé dans les simulations de mécanique des structures et de l'analyse des éléments finis.

- Maillage mixte qui utilise différents types d'éléments, tels que des tétraèdres et des hexaèdres, dans la même structure. Ce type de maillage est souvent utilisé pour modéliser des géométries complexes qui nécessitent différents types d'éléments pour une précision optimale.

- Maillage adaptatif qui est généré automatiquement en fonction des besoins de la simulation. Ce type de maillage est souvent utilisé pour optimiser la précision et l'efficacité de la simulation en utilisant un maillage fin où cela est nécessaire et un maillage plus grossier là où cela est possible.

III.2.3. Schémas numériques de discrétisation

Le logiciel utilisé dans notre travail est ANSYS-Fluent basé sur le schéma numérique de

type volumes finis qui consiste à discrétiser les équations de Navier-Stokes dans chaque volume de contrôle en utilisant les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Ce schéma est explicite, car il utilise des points voisins pour résoudre les équations du mouvement. ANSYS-Fluent utilise deux solveurs, à savoir, le solveur basé sur la pression (« a pressure-based solver » en anglais) et le solveur basé sur la masse volumique « a density-based solver » en anglais).

Le solveur basé sur la pression repose sur le calcul du champ de pression à partir du champ de vitesse. Ce processus itératif est répété jusqu'à ce que la solution converge vers un état stable ou une solution périodique. Le solveur basé sur la masse volumique ou la densité est particulièrement utile pour les écoulements des fluides compressibles, où les variations de la masse volumique sont significatives et où le nombre de Mach est élevé. Dans notre travail, nous avons adopté le solveur basé sur la pression qui est généralement plus robuste et plus efficace en termes de calcul que le solveur basé sur la densité.

La discrétisation spatiale utilisé par ANSYS Fluent fait référence au processus de division du domaine de fluide en un ensemble de volumes de contrôle finis ou de cellules. Ces cellules sont ensuite utilisées pour discrétiser les équations gouvernant l'écoulement du fluide, afin de les résoudre numériquement. L'exactitude de la solution dépend de la taille et de la forme des cellules, ainsi que de l'ordre du schéma numérique utilisé pour approximer les dérivées dans les équations. La discrétisation spatiale est basée sur la méthode des volumes finis, qui conserve les bilans de masse, de moment et d'énergie à travers les volumes de contrôle. La méthode des volumes finis est une méthode conservative qui calcule les débits aux faces de chaque cellule, puis utilise ces flux pour mettre à jour la solution dans chaque cellule. La méthode des volumes finis utilisée implique le calcul des valeurs centrées sur la cellule des variables d'écoulement telles que la pression, la vitesse et la température. Ces valeurs sont ensuite utilisées pour calculer les flux aux faces de la cellule en utilisant un schéma numérique, tel que le schéma d'upwind du premier ordre ou le schéma de différence centrale du deuxième ordre. Le schéma numérique utilisé dépend des conditions d'écoulement et de l'exactitude requise. Dans l'ensemble, la discrétisation spatiale est une étape cruciale pour simuler avec précision et efficacité les problèmes d'écoulement de fluides. Elle implique la division du domaine de fluide en un ensemble de volumes de contrôle, le calcul des flux aux faces de la cellule et la résolution des équations gouvernant l'écoulement des fluides à l'aide d'une méthode numérique.

L'exactitude de la solution dépend de la taille et de la forme des cellules et du schéma numérique utilisé pour approximer les dérivées dans les équations. La distribution des nœuds

de points qui fait référence à l'emplacement des nœuds de calcul ou des points de maillage à l'intérieur d'un domaine de simulation. Ces nœuds ou points de maillage sont utilisés pour discrétiser le domaine de simulation en éléments plus petits, permettant la résolution des équations gouvernantes en des points discrets. Il existe différentes méthodes pour générer des distributions de nœuds de points, notamment le maillage structuré et non structuré. Dans le maillage structuré, les nœuds sont placés dans un motif régulier, tel qu'une grille, tandis que dans le maillage non structuré, les nœuds sont placés de manière irrégulière pour mieux capturer les géométries complexes.

La distribution des nœuds de points peut avoir un impact significatif sur l'exactitude et l'efficacité d'une simulation. Un maillage dense avec un grand nombre de nœuds peut fournir une solution plus précise mais peut également entraîner des temps de calcul plus longs. En revanche, un maillage clairsemé avec un petit nombre de nœuds peut fournir des simulations plus rapides mais au détriment de la précision. Le contrôle de la distribution des nœuds de points se fait à l'aide des outils de maillage. Il existe plusieurs options disponibles pour générer différents types de maillage, tels que le maillage tétraédrique, hexaédrique et polyédrique. Il est également possible de contrôler la densité des nœuds de points dans des régions spécifiques du domaine de simulation pour affiner le maillage dans les zones d'intérêt. En fin de compte, la sélection d'une distribution appropriée de nœuds de points est cruciale pour obtenir des résultats de simulation précis et efficaces.

La régularité (ou "smoothness" en anglais) se réfère à la qualité du maillage utilisé dans la simulation. Un maillage régulier a une distribution régulière de nœuds ou de points, ce qui donne une simulation plus précise et fiable. Un maillage régulier est important dans les simulations ANSYS Fluent, car il peut avoir un impact significatif sur l'exactitude des résultats. Un maillage de haute qualité et régulier peut conduire à des résultats de simulation plus précis et fiables, tandis qu'un maillage de mauvaise qualité peut entraîner des erreurs et des imprécisions dans la simulation.

La skewness des cellules (ou « cell skewness » en anglais) est une mesure de l'écart d'une cellule dans un maillage par rapport à une forme idéale, telle qu'un hexaèdre parfait ou un tétraèdre parfait. C'est une métrique utilisée pour évaluer la qualité d'un maillage dans les simulations de dynamique des fluides numérique (CFD). La skewness d'une cellule est définie comme le rapport de l'angle dièdre maximum à la longueur de bord minimale de la cellule. En général, les cellules avec des valeurs de skewness élevées sont considérées de qualité inférieure, car elles peuvent causer des imprécisions numériques et des problèmes de convergence dans

les simulations CFD. Les cellules devraient avoir des valeurs de skewness proches de zéro, indiquant qu'elles sont proches d'une forme parfaitement adéquate. En améliorant la qualité du maillage, les simulation CFD engendrent des résultats plus précis et fiables.

Le rapport d'aspect d'une cellule (ou « cell aspect ratio » en anglais) fait référence au rapport de sa plus grande dimension à sa plus petite dimension. Ce paramètre est important, car les cellules ayant un rapport d'aspect élevé peuvent causer des problèmes numériques dans la simulation, tels qu'une mauvaise convergence, des résultats inexacts, voire même une instabilité. Pour vérifier le rapport d'aspect des cellules dans ANSYS FLUENT, l'option "Grille>Vérifier>" dans le menu principal utilisé. Cela ouvrira la fenêtre "Vérifier la grille", où par utilisation de l'option "Rapport d'aspect" et définir une valeur seuil pour le rapport d'aspect maximal autorisé. ANSYS FLUENT affichera alors une liste de cellules qui dépassent le seuil, afin de les identifier et les corriger.

Les valeurs discrètes du scalaire sont stockées au centre des cellules. Cependant, les valeurs faciales sont requises pour les termes de convection et doivent être interpolées à partir des valeurs du centre de la cellule. Ceci est accompli utilisant l'un des schémas upwind. upwinding signifie que la valeur nominale est dérivée des quantités dans la cellule en amont, ou "upwind", par rapport à la direction de la vitesse normale.

ANSYS Fluent nous permet de choisir parmi plusieurs upwind schémas : upwind de premier ordre, upwind de second ordre, loi de puissance et QUICK. Ces schémas sont décrits comme suit :

Le schéma d'upwind du premier ordre (ou « first-order upwind scheme » en anglais) s'agit du schéma numérique le plus simple dispensable utilisé par ANSYS Fluent, il est employé lorsqu'une précision de premier ordre est souhaitée, les quantités sur les faces de cellule sont déterminées en supposant que les valeurs du centre de cellule de toute variable de champ représentent une valeur moyenne de cellule et se maintiennent dans toute la cellule ; Les grandeurs de face sont identiques aux grandeurs de cellule. Ainsi, lorsque le rembobinage de premier ordre est sélectionné, la valeur faciale est fixée égale à la valeur du centre de cellule dans la cellule en amont. Le schéma d'upwind du premier ordre est disponible dans les solveurs basés sur la pression et basés sur la densité. Son inconvénient est la diffusion numérique dans le maillage tétraédrique et induit des résultats moins précis.

Le schéma d'upwind du deuxième ordre (ou « second-order upwind scheme » en anglais), ce schéma est plus approprié qu'un schéma du premier ordre pour les maillages triangulaires et

tétraédriques où l'écoulement n'est jamais aligné avec le maillage. Le schéma est plus précis que schéma d'upwind du deuxième ordre, car il applique une reconstruction du gradient de la variable d'état à l'intérieur de chaque cellule. Dans ce schéma, les quantités au niveau des faces cellulaires sont calculées à l'aide d'une approche de reconstruction linéaire multidimensionnelle, dans laquelle une précision d'ordre supérieur est obtenue au niveau des faces cellulaires grâce à une expansion en série de Taylor de la solution centrée sur la cellule autour du centroïde de la cellule. Par conséquent, la valeur faciale d'une variable est calculée en faisant la moyenne des valeurs des cellules dans les deux cellules adjacentes au visage à l'aide d'une méthode de gradient. Le principal inconvénient de ce schéma est qu'il peut entraîner des valeurs faciales qui sont en dehors de la plage des valeurs de cellule dans les régions à forts gradients. Dans ce cas, il est alors nécessaire d'appliquer des limiteurs aux valeurs nominales prédites pour obtenir précision et stabilité.

La méthode basée sur les nœuds de Green-Gauss est appliquée comme limiteur pour le calcul des gradients dans les centres des cellules. La méthode basée sur les nœuds Green-Gauss calcule la moyenne arithmétique des valeurs nodales sur le visage. Les valeurs nodales sont calculées à partir de la moyenne pondérée des valeurs des cellules entourant les nœuds. Il existe également d'autres schémas de discrétisation tels que, le schéma de discrétisation de la loi de puissance (ou « Power Law Schema » en anglais) fondé sur l'interpolation de la valeur nominale en utilisant la solution exacte, il est plus précis que le schéma d'upwind du premier ordre pour les écoulements de Stokes ou de faible nombre de Reynolds ($Re < 5$). Le schéma de loi de puissance est disponible dans le solveur basé sur la pression et lors de la résolution d'équations scalaires supplémentaires dans le solveur basé sur la densité.

Le schéma MUSCL de troisième ordre (ou « Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws » en anglais) : Contrairement au schéma QUICK, qui s'applique uniquement aux maillages hexagonaux structurés, le schéma MUSCL est applicable aux maillages arbitraires. Comparé au schéma upwind de second ordre, le MUSCL de troisième ordre a le potentiel d'améliorer la précision spatiale pour tous les types de maillages en réduisant la diffusion numérique, surtout pour les écoulements tridimensionnels complexes, et il est disponible pour toutes les équations de transport. Le schéma MUSCL est également centré sur l'aval, ce qui signifie qu'il utilise des informations sur les flux qui pénètrent dans la cellule à partir de l'amont pour calculer les flux sortants de la cellule. Cela permet de mieux prendre en compte les effets de convection. De plus, il donne plus de précision que les autres schémas.

Le couplage pression-vitesse Il s'agit du schéma numérique où les quantités aux faces des cellules sont déterminées en supposant que, pour toute variable dans toute la cellule, les valeurs nominales sont identiques à la moyenne des cellules. Par conséquent, lorsque le schéma amont de premier ordre est sélectionné, la valeur nominale d'une variable est fixée égale à la valeur moyenne de cellule de la variable dans la cellule amont.

L'algorithme SIMPLE (The Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) utilise la relation de correction de vitesse et de pression dans l'équation de conservation de la masse et obtenir le champ de pression. Cet algorithme substitue les équations de correction de flux dans l'équation de continuité discrète pour obtenir une équation discrète pour la correction de pression dans la cellule. L'algorithme SIMPLE est recommandé pour les calculs en régime permanent.

La procédure SIMPLEC (ou « SIMPLE-Consistant » en anglais) est similaire à la procédure SIMPLE décrite ci-dessus. La seule différence réside dans l'expression utilisée pour la correction du flux de face.

L'algorithme PISO (ou « Pressure Implicit with Splitting of Operators » en anglais) fait partie de la famille d'algorithmes SIMPLE, est basé sur le degré le plus élevé de la relation approximative entre les corrections de pression et de vitesse. L'une des limitations des algorithmes SIMPLE et SIMPLEC est que les nouvelles vitesses et les flux correspondants ne satisfont pas l'équilibre de quantité de mouvement après la résolution de l'équation de correction de pression. Par conséquent, le calcul doit être répété jusqu'à ce que le solde soit satisfait. Pour améliorer l'efficacité de ce calcul, l'algorithme PISO effectue deux corrections supplémentaires : la correction de voisinage et la correction d'asymétrie.

De plus, l'idée principale de l'algorithme PISO est de déplacer les calculs répétés requis par SIMPLE et SIMPLEC à l'intérieur de l'étape de résolution de l'équation de correction de pression. Après une ou plusieurs boucles PISO supplémentaires, les vitesses corrigées satisfont plus étroitement les équations de continuité et de quantité de mouvement. Ce processus itératif est appelé une correction de momentum ou "correction de voisinage". L'algorithme PISO implique plusieurs étapes, dont voici un aperçu :

- Initialisation des valeurs de pression, de vitesse, de densité, et de viscosité pour chaque élément de la grille.
- Calcul des forces appliquées sur chaque élément de la grille, à partir des données initiales.

- Calcul des valeurs de pression, de vitesse, de densité, et de viscosité pour chaque élément de la grille, en fonction des forces appliquées et des valeurs actuelles de ces grandeurs.
- Correction des valeurs de pression pour prendre en compte la divergence des flux de fluides, à l'aide de l'algorithme PISO. Cette correction est effectuée en plusieurs étapes itératives.
- Mise à jour des valeurs de vitesse, de densité, et de viscosité en fonction des nouvelles valeurs de pression corrigées.
- Répétition des étapes 2 à 5 jusqu'à ce que les valeurs calculées convergent vers une solution stable.

L'interpolation des gradients sont nécessaires pour évaluer les flux diffusifs, les dérivées de vitesse et pour les schémas de discrétisation d'ordre élevé. Les gradients des variables aux centres des faces du maillage sont calculés selon les méthodes suivantes :

- Méthode de Green-Gauss Cell-Based : est une technique pour calculer les dérivées spatiales de quantités scalaires. Cependant, cela peut être coûteux en termes de calcul, en particulier dans les simulations tridimensionnelles avec des géométries complexes.
- Méthode de Green-Gauss Node-Based : est la technique la plus précise et minimise la valeur de la fausse diffusion. Elle est recommandée pour les maillages tri- et tétradimensionnels.
- Méthode de Least-Squares Cell-Based : Cette méthode est recommandée pour les maillages polyédriques. Les gradients des variables sur les faces des maillages sont calculés à l'aide d'une série multidimensionnelle de Taylor.

Dans toutes les simulations CFD, les équations gouvernantes doivent être transformées en expressions algébriques qui sont résolues de manière itérative. Pour obtenir une solution, il est nécessaire de spécifier les informations requises pour contrôler l'algorithme de résolution numérique. Au cours du processus de simulation CFD, il existe des erreurs d'intégration dans les équations discrétisées, additionnées sur tous les volumes de contrôle, ce qui peut entraîner une imprécision dans la solution d'écoulement. La solution des équations numériques peut être utilisée pour évaluer de telles erreurs. Ces mesures d'erreur, qui sont généralement appelées erreurs résiduelles ou résidus, peuvent être utilisées comme guide pour voir si un processus de résolution converge ou non.

Le résidu est le déséquilibre de l'équation de conservation pour la masse ou la quantité de mouvement additionnée sur toutes les cellules de calcul. Le résidu des solutions peut également être utilisé pour surveiller les performances d'une simulation. Les progrès vers une solution

convergée peuvent être grandement facilités par la sélection rigoureuse des paramètres de divers facteurs de sous-relaxation. Chaque facteur de sous-relaxation (URF) est ajusté. Au fur et à mesure que le processus de résolution progresse d'itération en itération, les erreurs résiduelles de chaque équation devraient diminuer. De faibles résidus suggèrent une solution qui converge et la simulation peut être considérée comme stable si les résidus continuent de diminuer en amplitude de manière monotone avec d'autres itérations. Autrement dit, les solutions des problèmes CFD sont considérées comme convergeant lorsque le champ d'écoulement et les champs scalaires ne changent plus. Lorsque la valeur de chaque résidu se situe entre trois et quatre ordres de grandeur en dessous de sa valeur initiale, on dit que la solution atteint une convergence vers un niveau acceptable, selon le niveau de précision requis. À la fin de chaque itération du solveur de flux, la somme du carré résiduel de chaque variable conservée est calculée et stockée dans un fichier de données ou affichée sur l'écran du terminal, où l'historique de convergence est visualisé. Cela permet de vérifier rapidement l'avancement de la solution. De faibles résidus ne garantissent cependant pas que la solution convergée est correcte. Des rapports supplémentaires sur les quantités intégrées aux surfaces et aux frontières sont souvent utilisés pour juger de la convergence. Une variable physique du champ de flux de solution doit donc être surveillée pour assurer la convergence du calcul vers une solution physiquement correcte. Cette convergence est atteinte lorsque la variable physique reste constante pendant un nombre suffisant d'itérations et que les résidus ont atteint une réduction prédéterminée.

Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de résolution des équations qui régissent les écoulements par la méthode des différences finies est étalée, ainsi que les étapes principales de la simulation des écoulements utilisant CFD sont brièvement présentées. L'étude de maillage ainsi que les résultats de validation des codes qui vont être employés pour les simulations sont déployés.

CHAPITRE

IV

**RESULTATS ET
DISCUSSION**

RESULTATS ET DISCUSSION

CHAPITRE

IV

Introduction

Dans ce chapitre, les résultats de l'étude par la simulation numérique de la convection naturelle laminaire stationnaire dans différentes géométries, notamment dans des cavités, carrées avec angle de rotation, rectangulaire de type Bridgman de différents facteurs de forme avec des conditions aux limites imposées, dans les configurations de Czocharski et de Kyropoulos et le champ hydrodynamique dans un espace annulaire compris entre deux cylindres coaxiaux sont présentés. Les isothermes, les lignes de courant et les profils de vitesse au plan médian de cavité sont présentés en fonction du nombre de Rayleigh (Ra) pour un nombre de Prandtl (Pr) donné. De plus, des résultats concernant les nombres de Nusselt local et moyen pour différentes conditions seront abordés et discutés.

IV.1. CAVITES BIDIMENSIONNELLES

Dans cette partie, différentes configurations géométriques bidimensionnelles sont considérées dont la convection naturelle est étudiée en fonction du nombre Rayleigh.

IV.1.1. Influence du nombre de Rayleigh dans les cavités carrées

D'après les équations adimensionnées décrivant l'écoulement et les transferts de chaleur établies auparavant, notre problème dépend du nombre de Rayleigh et il est donc nécessaire d'étudier son influence. Pour cette partie, nous considérons que la cavité est carrée ($A=1$) et horizontale (angle d'inclinaison égale à zéro).

IV.1.1.1. Isothermes et lignes de courants

Les figures (IV.1 IV.2 IV.3, IV.4) représentent les isothermes et les lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et pour les trois configurations. Les isothermes et les lignes de courant ont presque la même allure pour les trois configurations. Nous

remarquons que le régime de l'écoulement est monocellulaire représenté par une grande cellule épousant la forme de l'enceinte, l'écoulement tourne dans le sens trigonométrique du fait que les particules du fluide s'échauffent près de la paroi chaude et montent le long de cette paroi, sous l'action de la poussée d'Archimède, puis ce mouvement s'oriente vers la paroi froide par la présence de la paroi horizontale supérieure où les particules du fluide perdent leur chaleur et descendent le long de la paroi froide et finissent par s'orienter de nouveau, par la paroi horizontale inférieure, vers la paroi chaude, c'est ainsi que se forme la cellule.

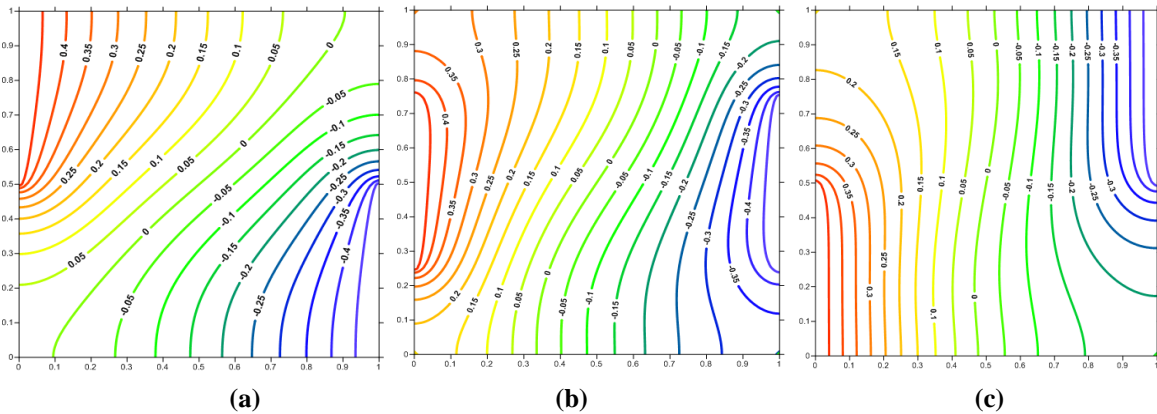


Figure IV. 1 Isothermes pour $Ra = 10^3$, H-B (a) $\overline{Nu} = 1.372$, M-M (b) $\overline{Nu} = 1.713$ et B-H (c) $\overline{Nu} = 1.446$

Pour des valeurs de Rayleigh $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$, les lignes de courant restent concentriques avec l'apparition de deux cellules ayant le même sens de rotation, ces deux cellules tournent très lentement comme la montre les valeurs sur les figures IV.3 et IV.4.

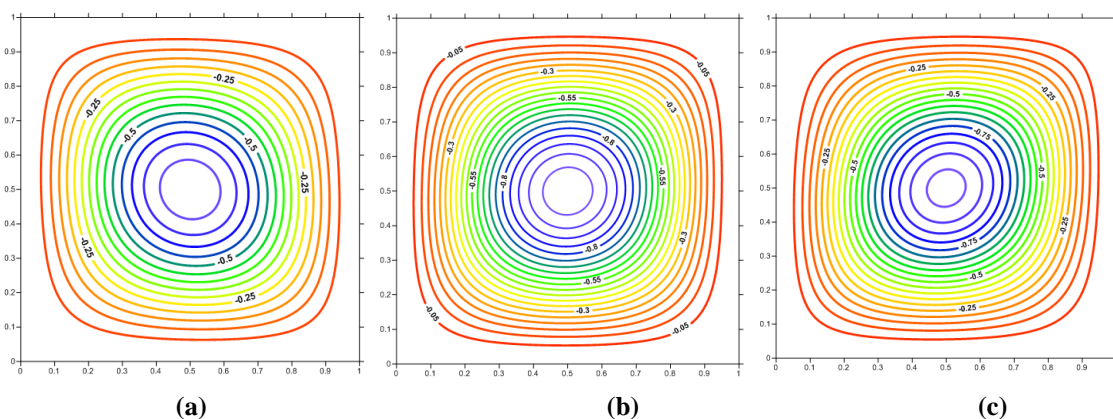


Figure IV. 2 Lignes de courant pour $Ra = 10^3$, H-B (a) $|\Psi_{\max}| = 0.738$, M-M (b) $|\Psi_{\max}| = 1.035$ et B-H (c) $|\Psi_{\max}| = 0.971$

Pour $Ra=10^3$ les lignes isothermes sont des courbes presque parallèles aux parois latérales (froide et chaude) les transferts thermiques se font par pseudo conduction, car les champs de vitesse sont

différents de zéro. Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh $Ra=10^4$, $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$, les figures montrent que les lignes isothermes se modifient beaucoup pour devenir parallèles aux parois horizontales inactives au milieu de l'enceinte et épouser la forme des parois partiellement actives verticales tout en étant très serrées ce qui dénote d'un transfert très intense dans ces régions là, ce qui est très bien illustré par les figures des isotherme pour $Ra=10^6$ qui montrent aussi que même les lignes de courant sont très serrées près de ces parois. Les valeurs de la fonction de courant correspondant à ces figures augmentent significativement tout ceci nous amène à dire que la convection naturelle est devenue prépondérante. L'augmentation du nombre de Rayleigh traduit donc une intensification de la convection naturelle.

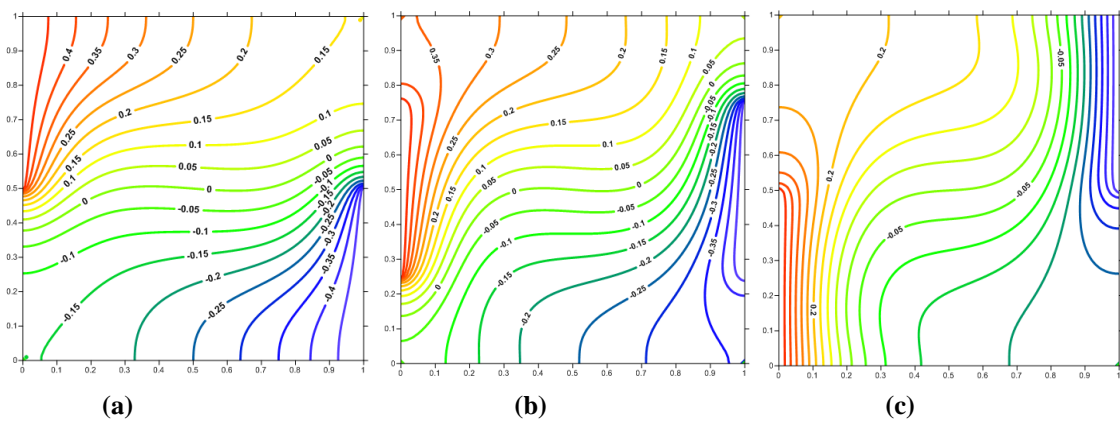


Figure IV. 3 Isothermes pour $Ra = 10^4$, H-B (a) $\overline{Nu} = 2.050$, M-M (b) $\overline{Nu} = 3.243$ et B-H (c) $\overline{Nu} = 2.933$

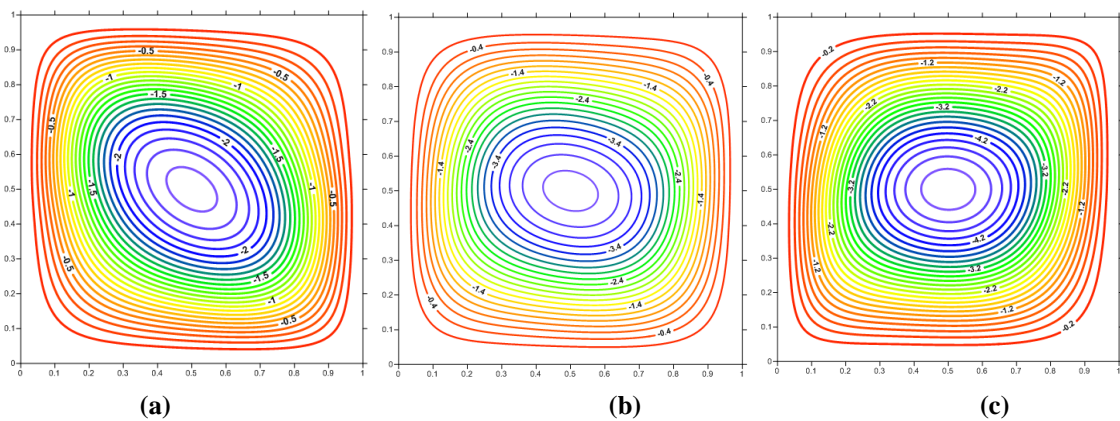


Figure IV. 4 Lignes de courant pour $Ra = 10^4$, H-B (a) $|\Psi_{\max}| = 2.444$, M-M (b) $|\Psi_{\max}| = 4.290$ et B-H (c) $|\Psi_{\max}| = 5.126$

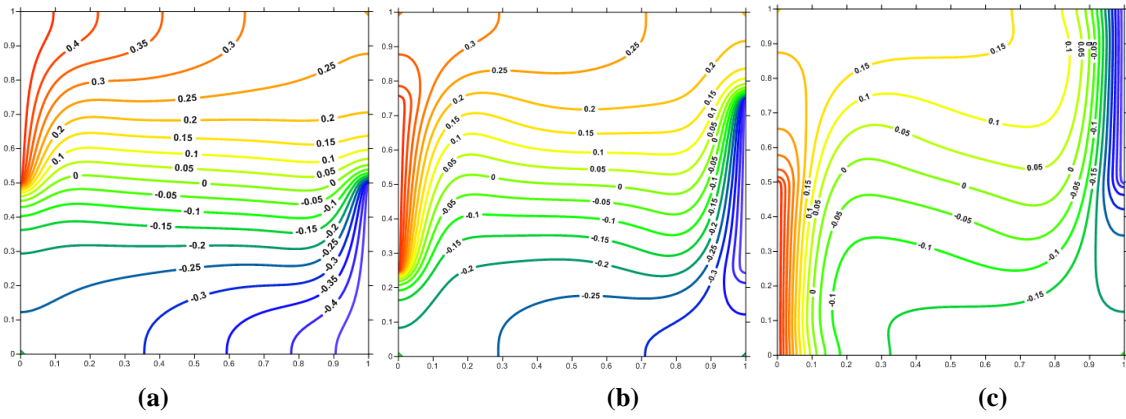


Figure IV. 5 Isothermes pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^5$, H-B (a) $\overline{Nu} = 3.179$, M-M (b) $\overline{Nu} = 6.073$ et B-H (c) $\overline{Nu} = 5.513$

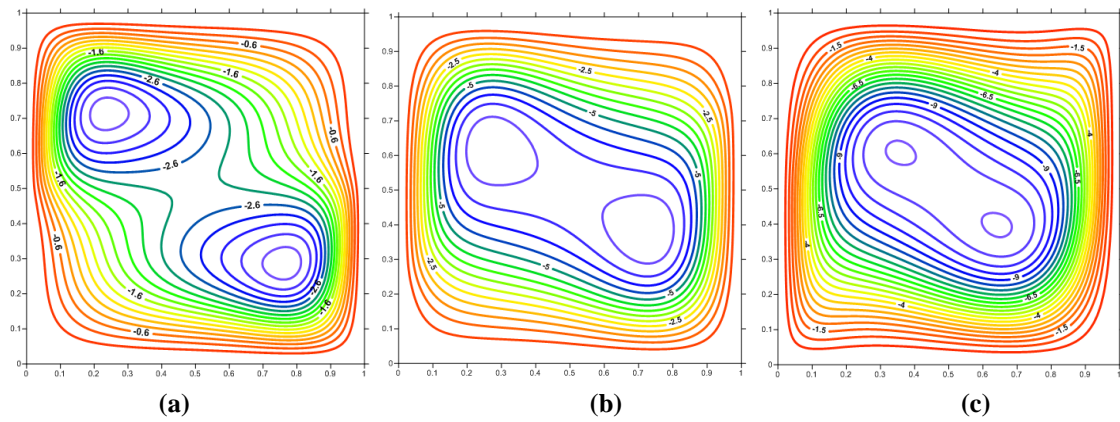


Figure IV. 6 Lignes de courant pour $Ra = 10^5$, H-B (a) $|\Psi_{\max}| = 3.511$, M-M (b) $|\Psi_{\max}| = 7.393$ et B-H (c) $|\Psi_{\max}| = 11.062$

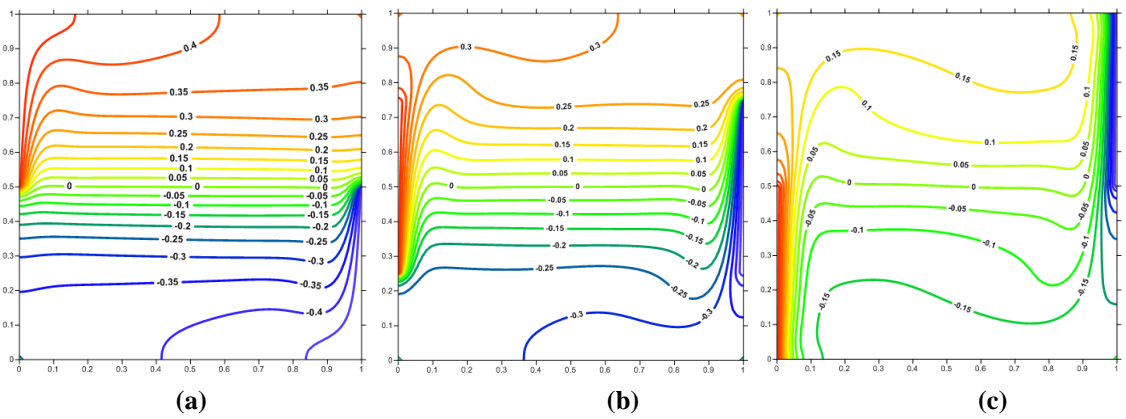


Figure IV. 7 Isothermes pour $Ra = 10^6$, H-B (a) $\overline{Nu} = 4.418$, M-M (b) $\overline{Nu} = 11.107$ et B-H (c) $\overline{Nu} = 10.668$

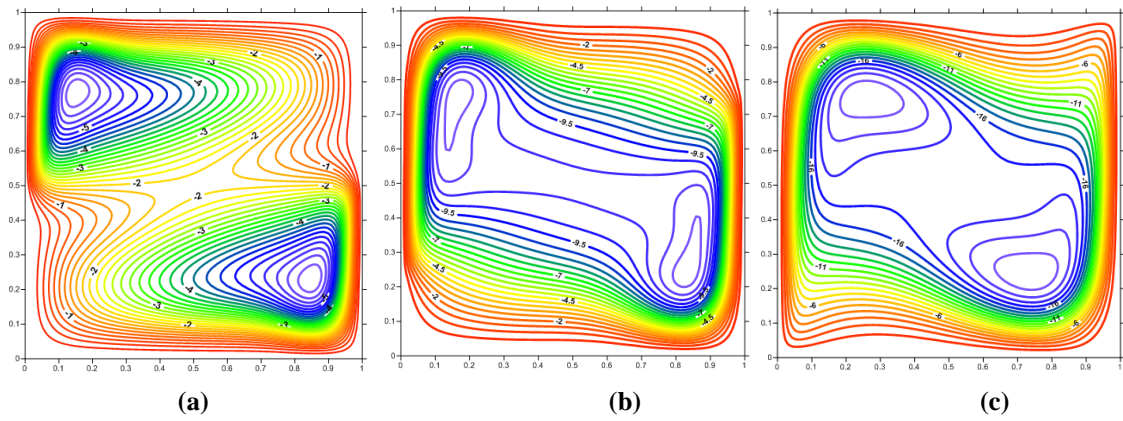


Figure IV. 8 Lignes de courant pour $Ra = 10^6$, H-B (a) $|\Psi_{\max}| = 5.946$, M-M (b) $|\Psi_{\max}| = 11.775$ et B-H (c) $|\Psi_{\max}| = 20.712$

IV.1.1.2. Profils de vitesse

Les profils de vitesse verticale, représentés sur les figures IV.9, IV.10, IV.11, IV.12, IV.13 et IV.14 confirment les résultats obtenus sous forme de lignes de courant.

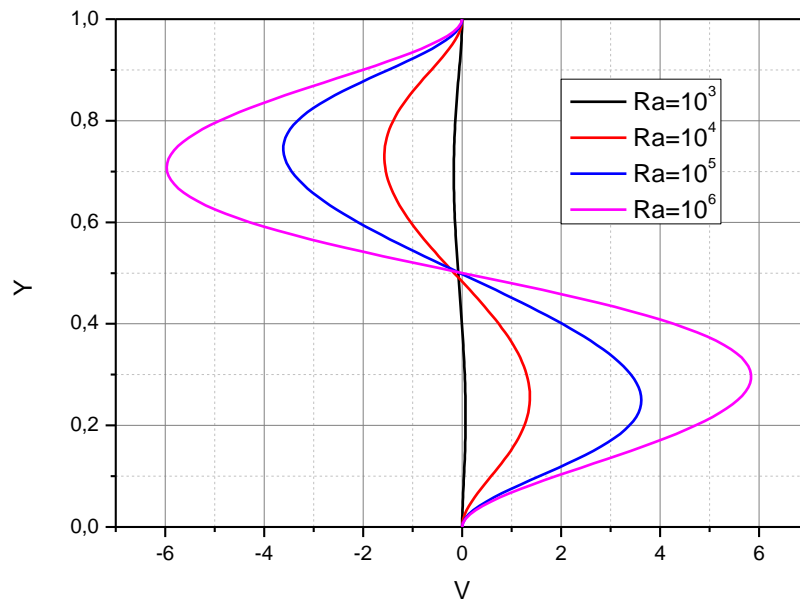


Figure IV. 9 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de Ra

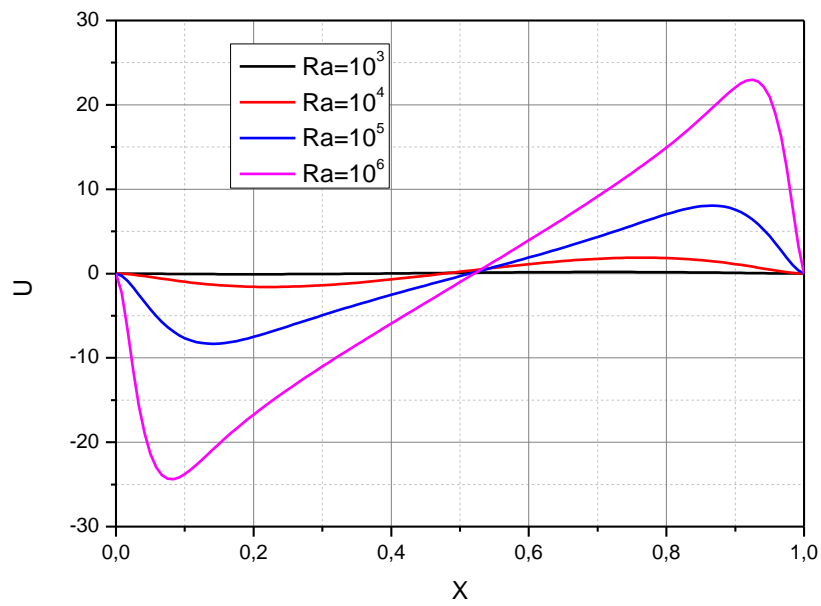


Figure IV. 10 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de nombre de Ra

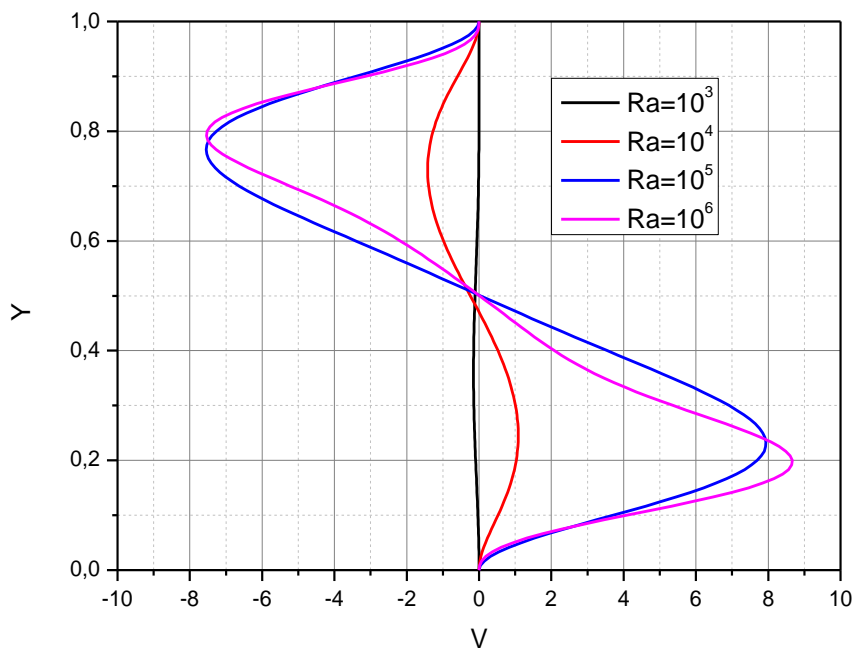


Figure IV. 11 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Milieu - Milieu pour différentes valeurs de nombre de Ra

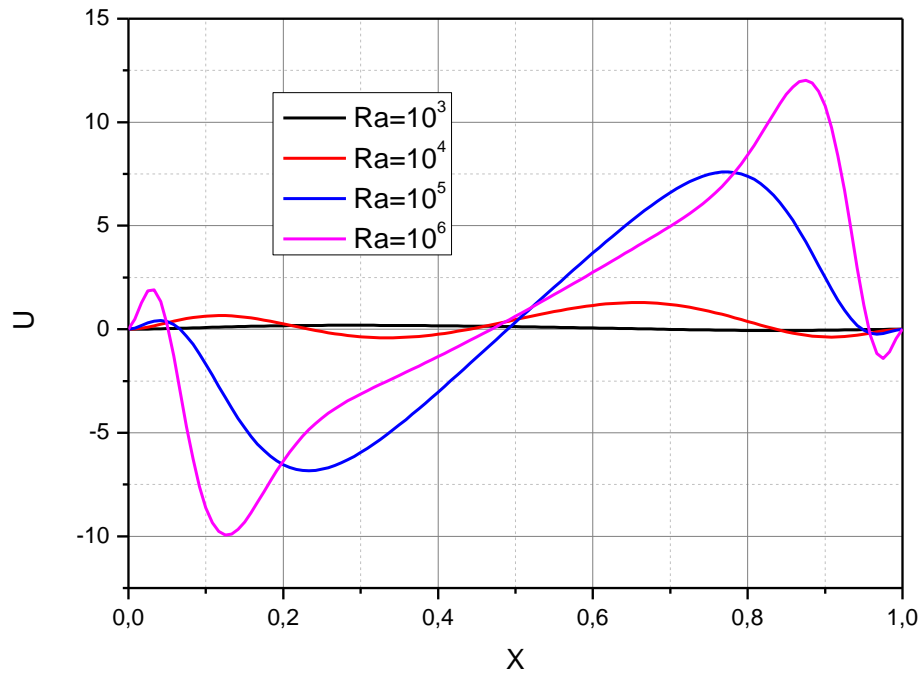


Figure IV. 12 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Milieu-Milieu pour différentes valeurs de Ra

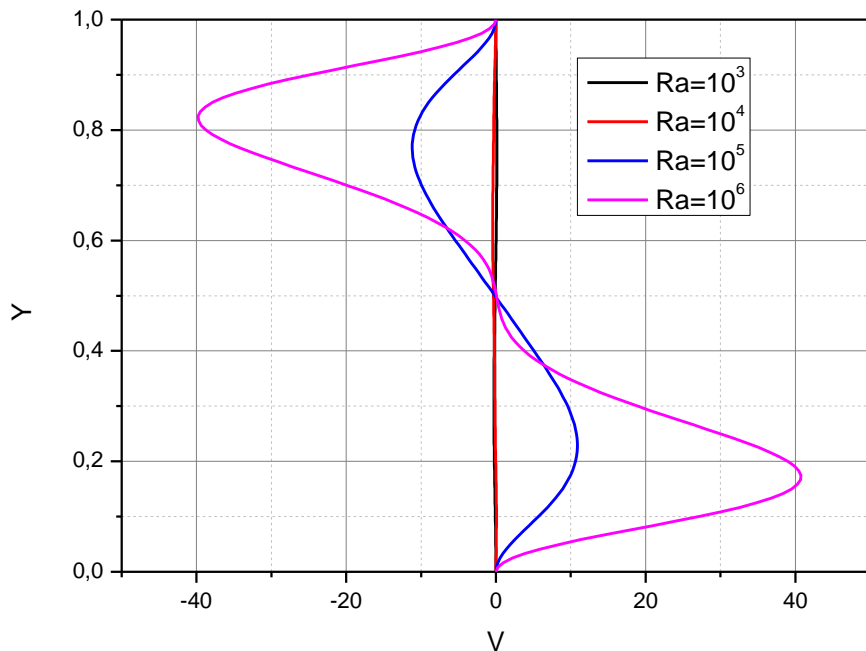


Figure IV. 13 Profil de vitesse Verticale V en $X=0.5$ pour la configuration Bas- Haut pour différentes valeurs de nombre de Ra

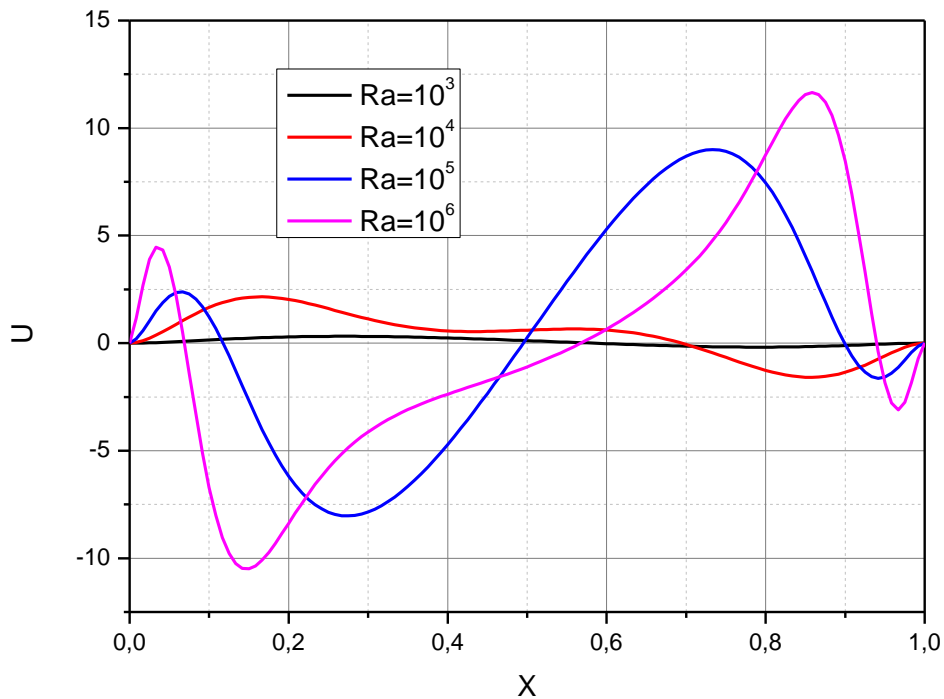


Figure IV. 14 Profil de vitesse horizontale U en $Y=0.5$ pour la configuration Bas- Haut pour différentes valeurs de Ra

IV.1.1.3. Variation du nombre de Nusselt local

Les Figures (IV.15, IV.16, IV.17, IV.18, IV.19 et IV.20) montrent la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et pour chaque configuration. On constate que le transfert de chaleur se fait principalement par conduction pour $Ra=10^3$ du fait que le nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude est proche de zéro, sachant que le Nu représente le rapport entre le transfert thermique par convection et le transfert par conduction. En augmentant le nombre de Rayleigh, le transfert thermique par convection devient dominant et par conséquent le nombre de Nusselt atteint des valeurs maximales pour $Ra=10^6$. On remarque une parfaite symétrie entre les courbes de variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude et la paroi froide, ce qui est évident du moment que le fluide qui est ascendant du côté paroi chaude devient descendant du côté paroi froide.

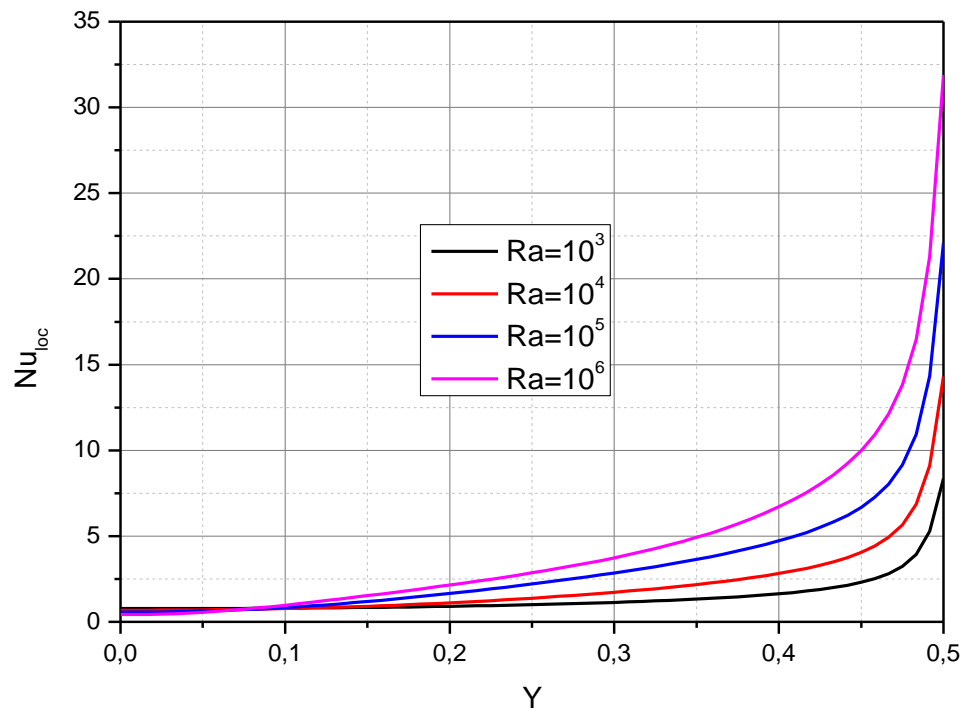


Figure IV. 15 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Haut -Bas pour différentes valeurs de Ra

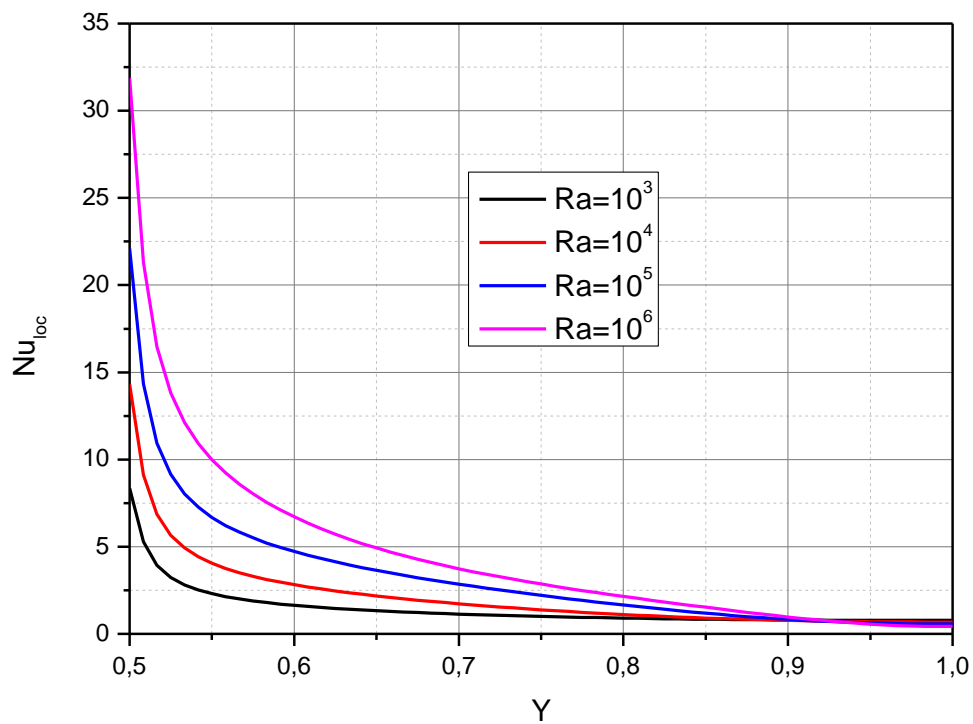


Figure IV. 16 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Haut - Bas pour différentes valeur de Ra

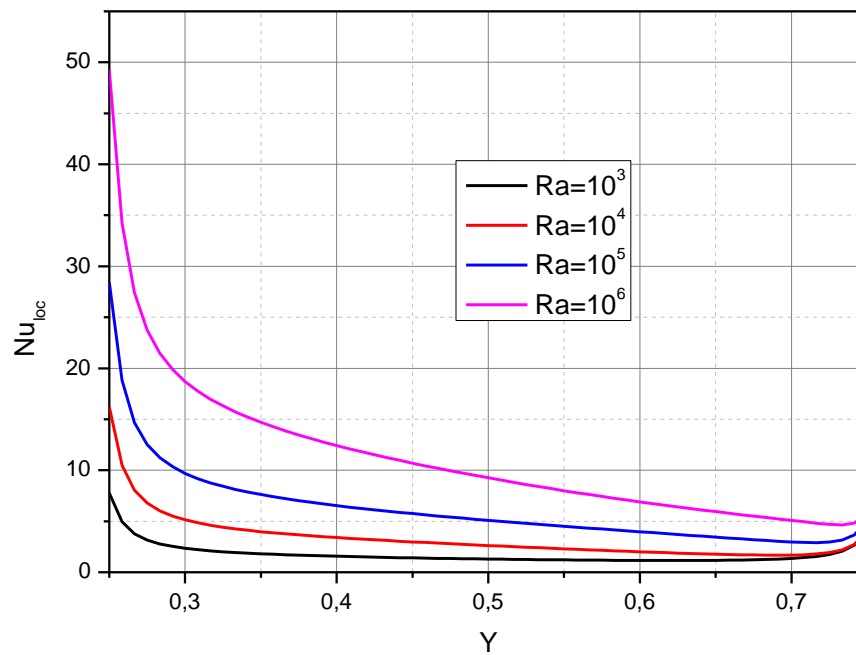


Figure IV. 17 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Milieu -Milieu pour différentes valeurs Ra

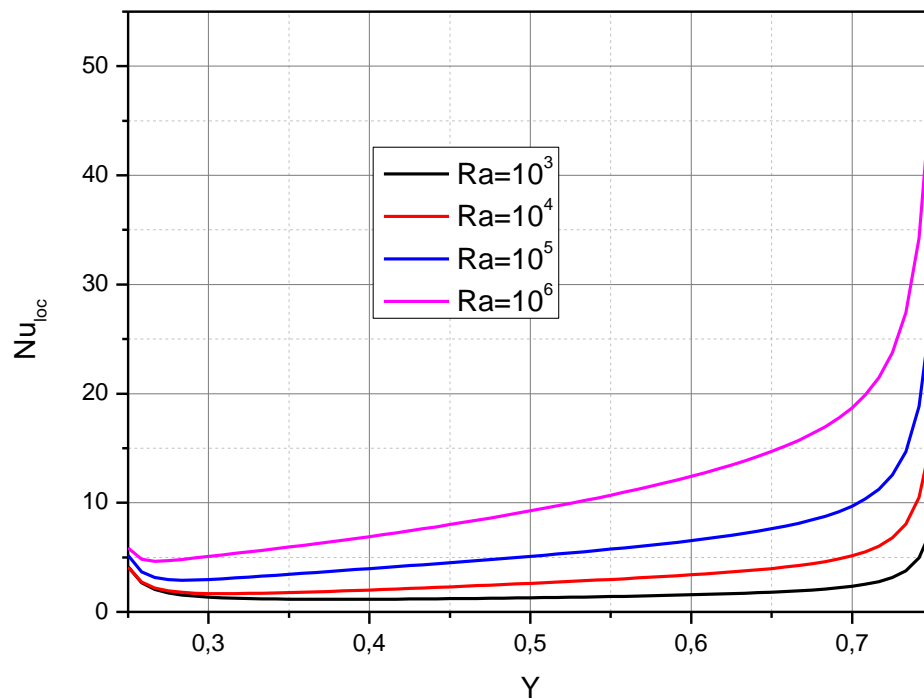


Figure IV. 18 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Milieu -Milieu pour différentes valeurs de Ra

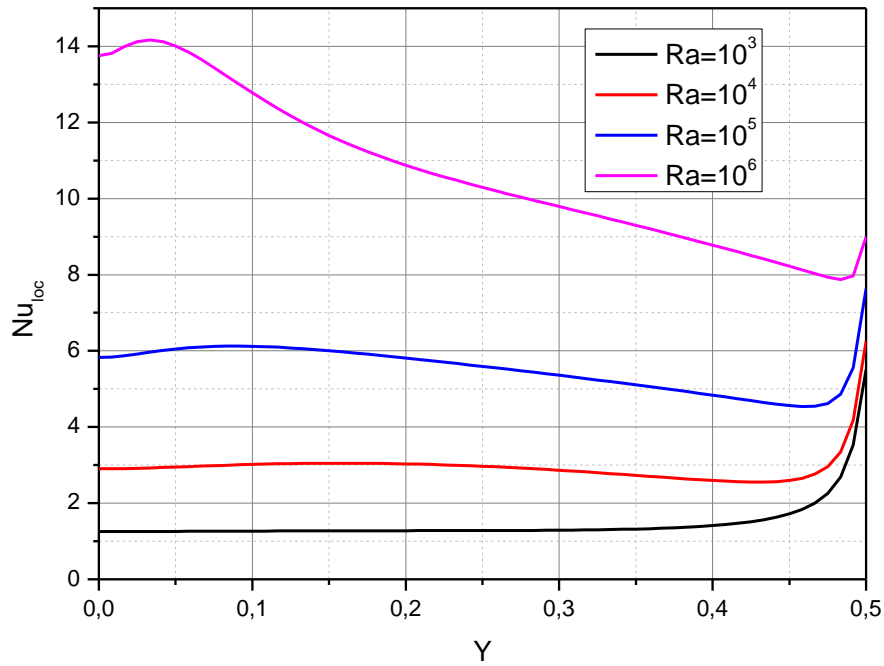


Figure IV. 19 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie chaude pour la configuration Bas - Haut pour différentes valeurs de Ra

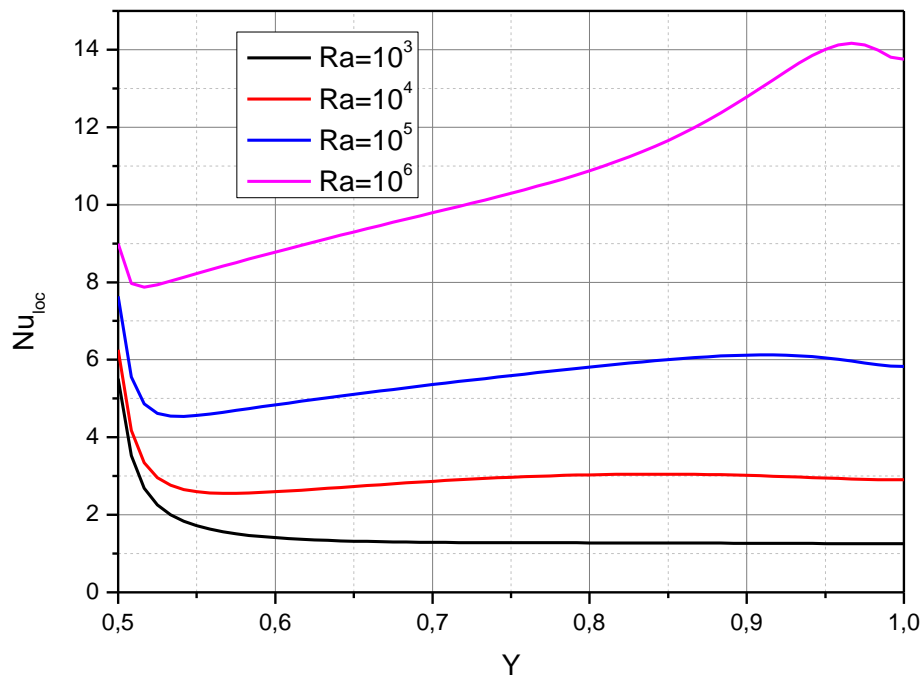


Figure IV. 20 Variation du nombre de Nusselt local le long de la partie froide pour la configuration Bas - Haut pour différentes valeurs de nombre de Ra

IV.1.1.4. Variation du nombre de Nusselt moyen

Une autre variable utilisée pour évaluer le taux du transfert thermique est le nombre de Nusselt moyen pour la paroi chaude.

La figure IV.21 représente la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh. Sur cette figure nous remarquons que le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude croît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Pour les bas nombres de Rayleigh $Ra \leq 10^3$ le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction bien qu'il y est de la convection (le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi chaude est légèrement supérieur à un (01) pour cette gamme de Ra, par contre l'échange de chaleur se fait essentiellement par convection pour des valeurs élevées de Ra ($Ra > 10^3$). Pour le même nombre de Rayleigh, le transfert de chaleur est plus grand pour la configuration Milieu-Milieu et plus petit pour la configuration Haut-Bas.

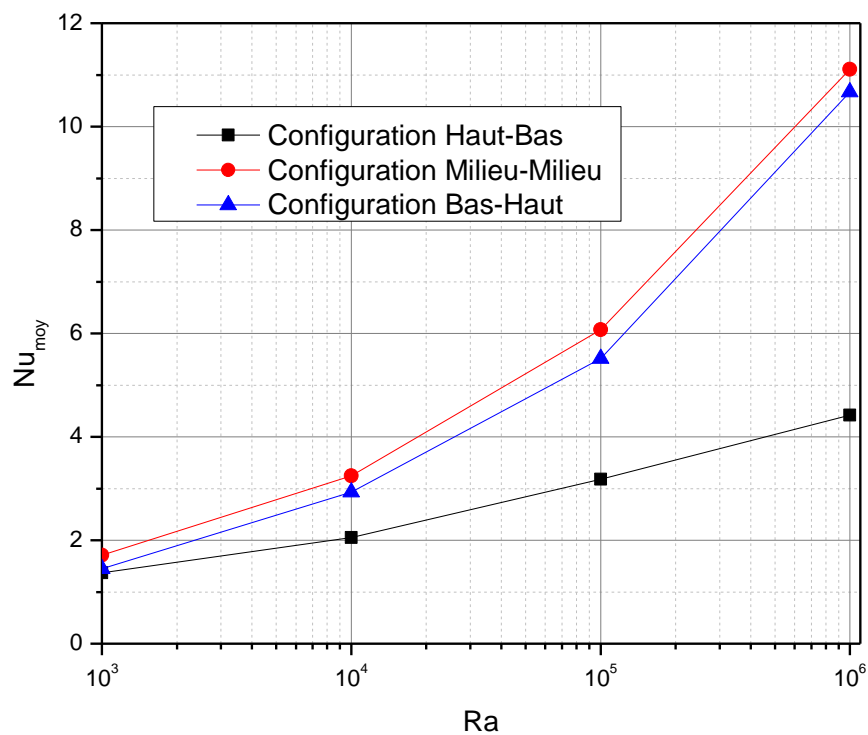


Figure IV. 21 Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh et pour les trois configurations

IV.1.2. Influence de l'inclinaison dans les cavités carrées

Pour l'étude qui suit on considère, $Ra = 10^5$, $A = 1$, $Pr = 0.01$ et ce pour différents angle d'inclinaison : 0° , 30° , 45° , 60° et 90° .

IV.1.2.1. Lignes de courants et isothermes

Les figures (IV.22, IV.23, IV.24, IV.25, IV.26 et IV.27) montrent les lignes de courants et les lignes isothermes dans la cavité pour différents angles d'inclinaison, on constate que l'angle d'inclinaison a une influence majeure sur l'écoulement et le transfert de chaleur.

On aperçoit que les isothermes suivent l'inclinaison de la cavité. Les deux cellules tendent à disparaître au fur et à mesure de l'augmentation de l'angle d'inclinaison pour devenir une grande cellule épousant la forme de l'enceinte. Pour la configuration Bas-Haut et l'angle d'inclinaison 90° , l'écoulement tourne dans le sens inverse des aiguilles du montre du fait que la paroi chaude se situe à côté de la paroi adiabatique droite et crée un écoulement tournant de la droite à gauche.

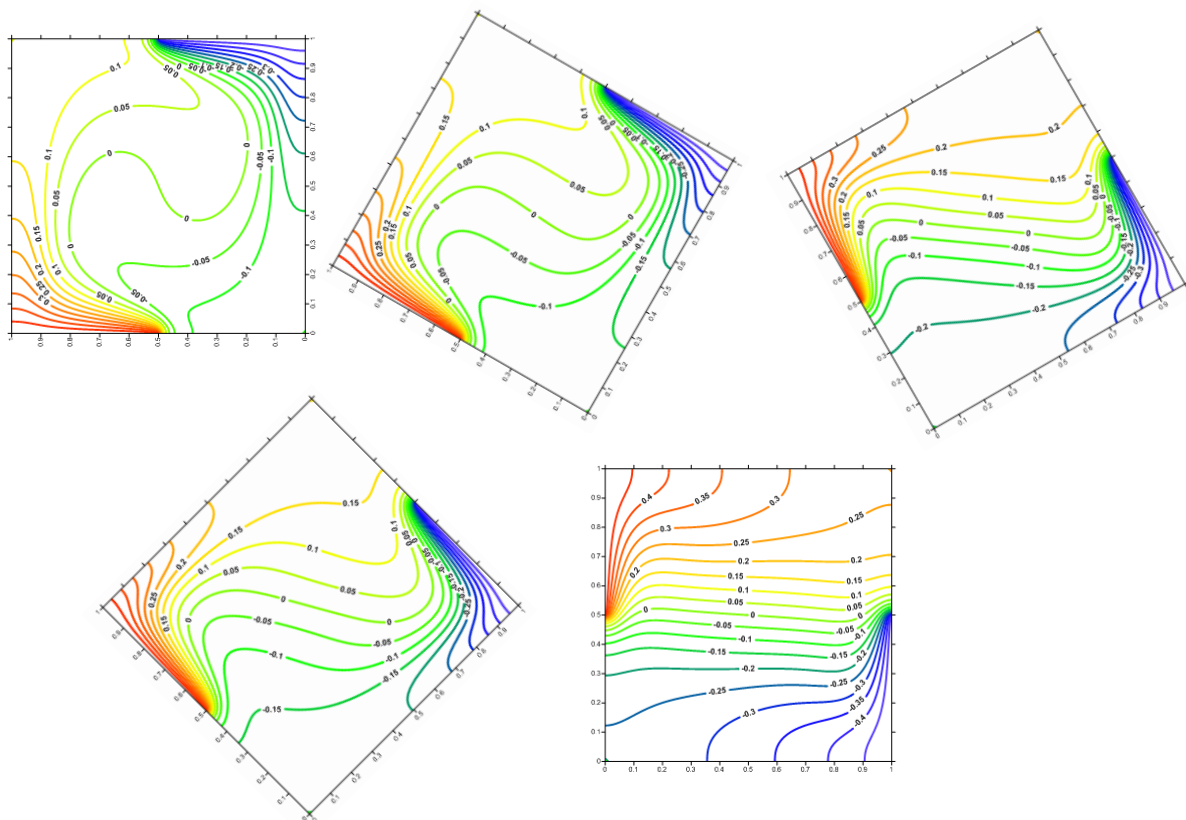


Figure IV. 22 Isothermes pour $Ra=10^5$, $A=1$, Configuration Haut-Bas pour angles d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

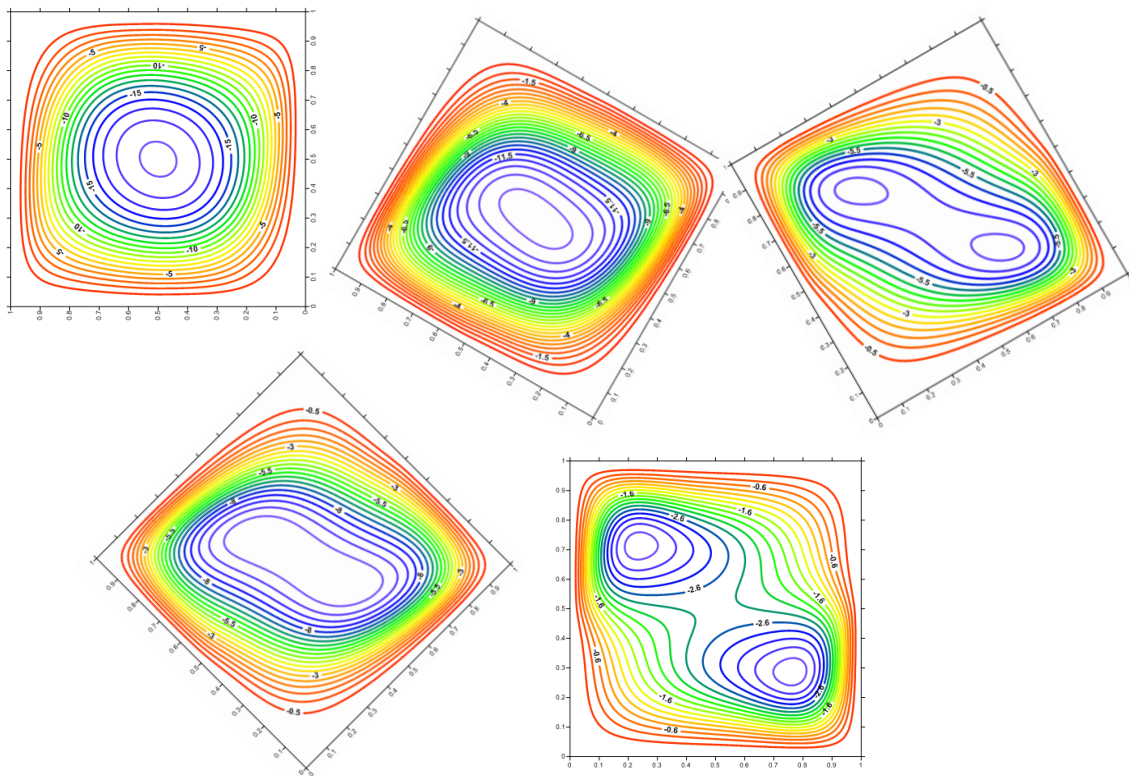


Figure IV. 23 Lignes de courant, $Ra=105$, $A=1$, Configuration Haut-Bas, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

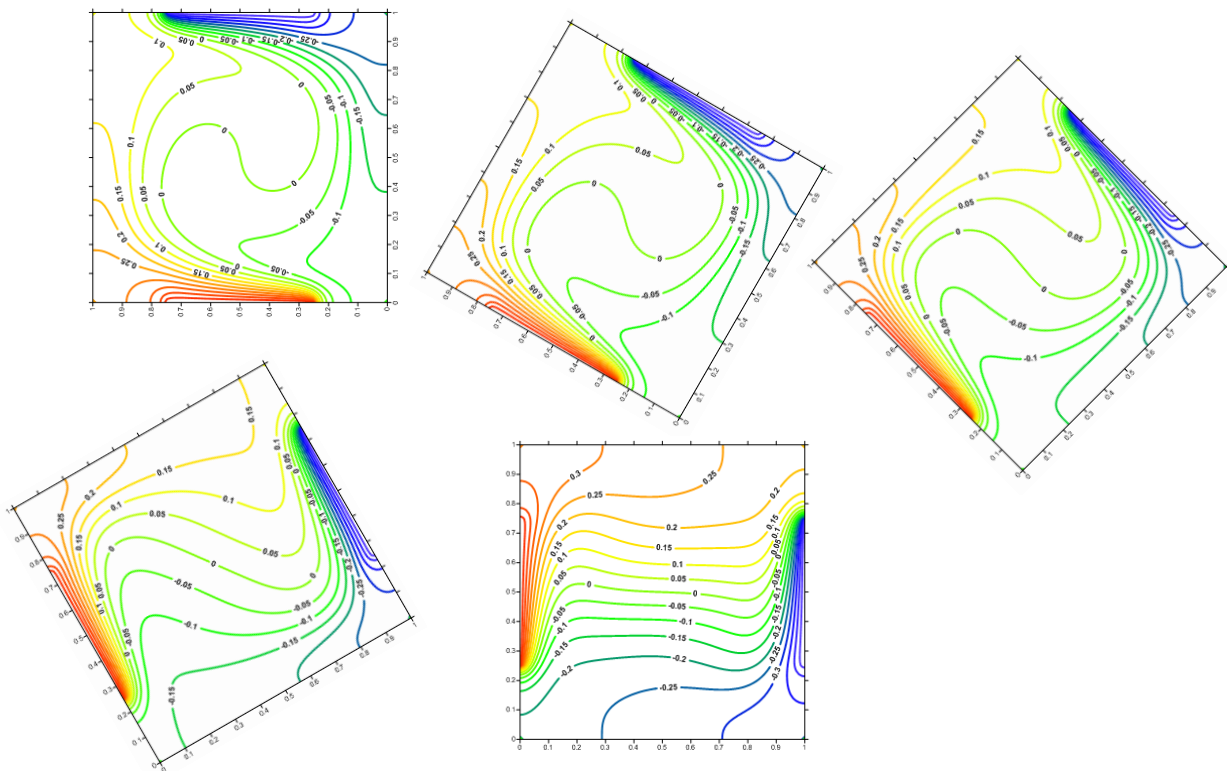


Figure IV. 24 Isothermes pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Milieu-Milieu pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

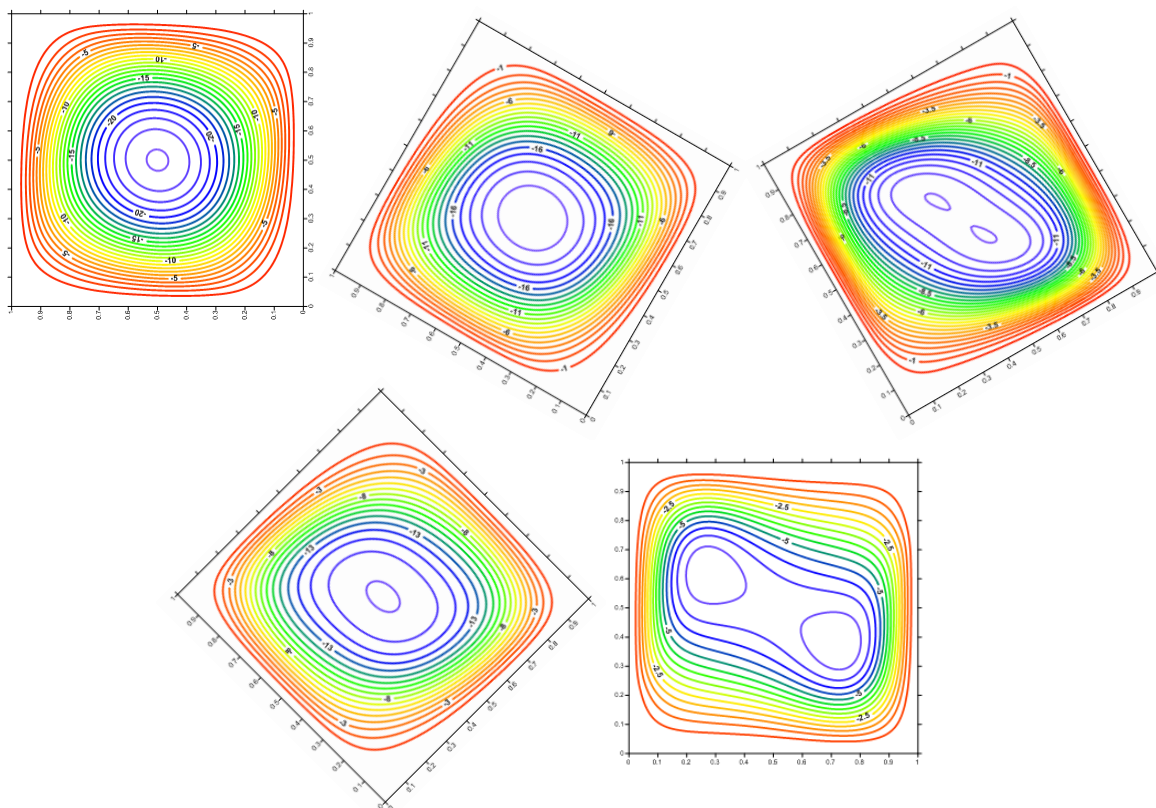


Figure IV. 25 Lignes de courant pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

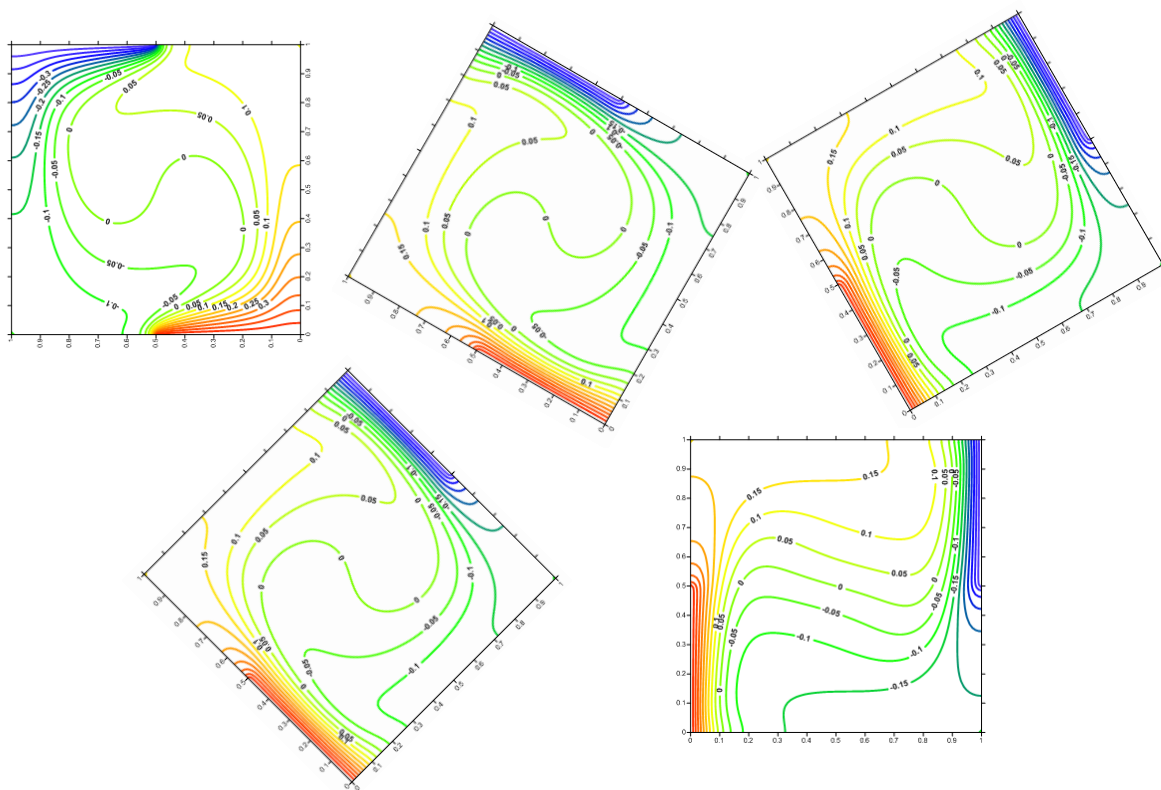


Figure IV. 26 Isothermes pour $Ra=105$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

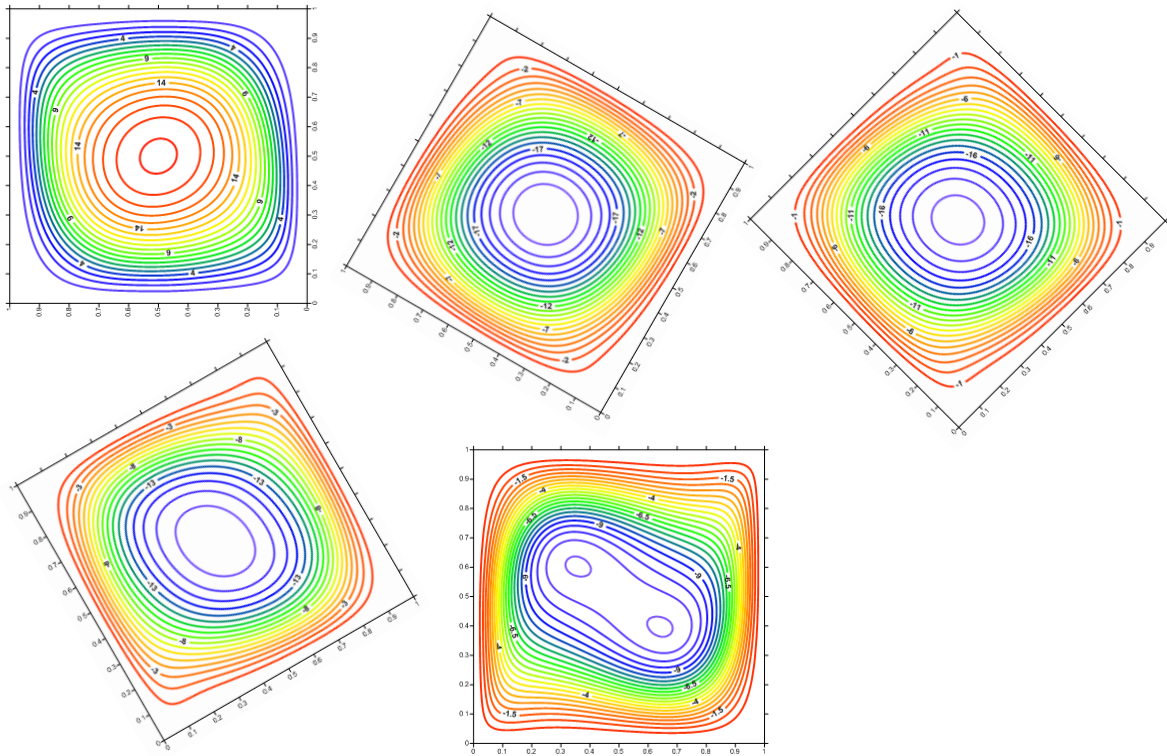


Figure IV. 27 Isothermes pour $Ra=10^5$, $A=1$, Configuration Bas-Haut pour $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$

IV.2. CAVITES BIDIMENSIONNELLES DE TYPE KYROPOULOS

Dans cette partie, nous allons présenter deux configurations sont considérés (voir la figure 8 et figure 9), pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

IV.2.1. Cavité carrée à parois horizontales adiabatiques et à parois verticales actives

Dans cette configuration, les parois de haut et de bas sont adiabatiques et les parois verticales sont actives.

IV.2.1.1. Isothermes et profils de température

La figure IV.28 représente les lignes des isothermes pour différents nombres de Rayleigh qui varie entre $Ra = 10^1$ et $Ra = 5.10^5$. Nous remarquons l'existence de deux régimes d'écoulement de fluide, l'un est diffusif pour $Ra \leq 10^3$, l'autre est convectif pour $Ra > 10^3$ et les gradients thermiques à la base du creuset sont importants.

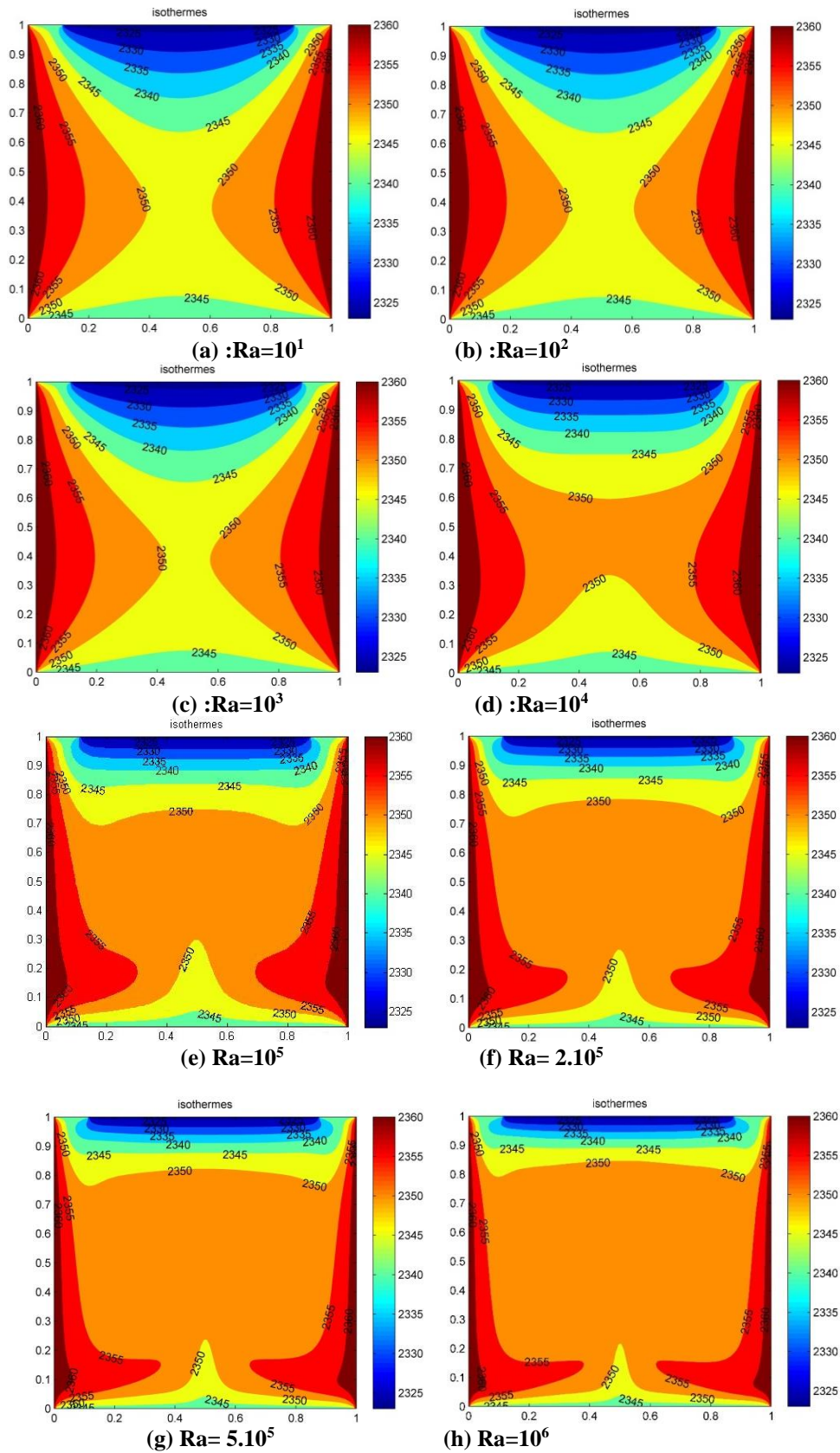


Figure IV. 28 Contour de température (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$, (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$ et (h) $Ra = 10^6$

Pour $Ra \leq 10^3$, on remarque que les isothermes prennent des formes paraboliques qui caractérisent le phénomène de conduction ; au-delà de $Ra = 10^4$ les isothermes commencent de perdre leur forme parabolique et s'orientent vers les parois latérales du creuset (parois chaudes) d'une part et d'autre part les isothermes vers l'échangeur thermique et ils s'aplatissent vers l'échangeur de chaleur (partie froide) en se rapprochant les unes des autres dans la zone située près de la paroi supérieure froide. Ce qui prouve que les gradients thermiques deviennent plus élevés à sa proximité, à cause de la circulation rapide du fluide (Accélération des particules le long de l'axe médian) ou le phénomène de la convection est dominant.

On remarque sur la figure IV.29, que le passage de la température 1 de la paroi haute à la température 0 de l'échangeur le long de l'axe médian de la cavité est d'autant plus abrupte lorsque le nombre de Rayleigh est plus grand. L'augmentation du nombre de Rayleigh a pour effet d'augmenter la vitesse des particules fluides, ces dernières gagnent de l'énergie et la température augmente. Cela traduit l'importance de la convection qui tend à homogénéiser la température de la cavité.

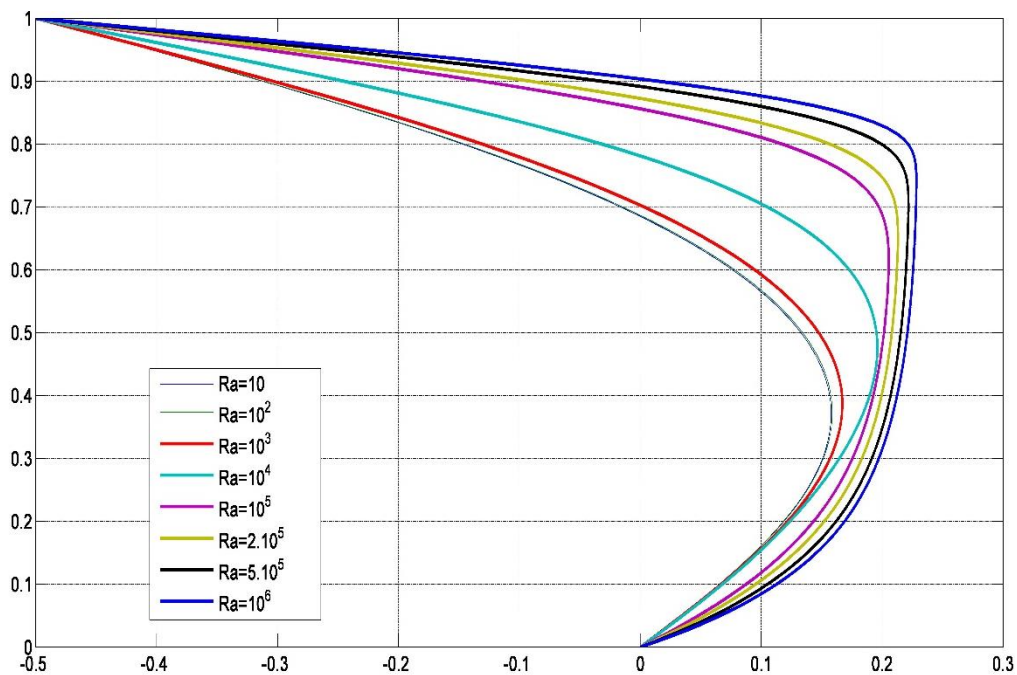


Figure IV. 29 Profil de la température le long de $X=0.5$ pour différentes valeurs de Ra

IV.2.1.2. Champ hydrodynamique

Dans la figure IV.30, nous présentons l'intensité de la fonction de courant maximale en fonction de nombre de Rayleigh.

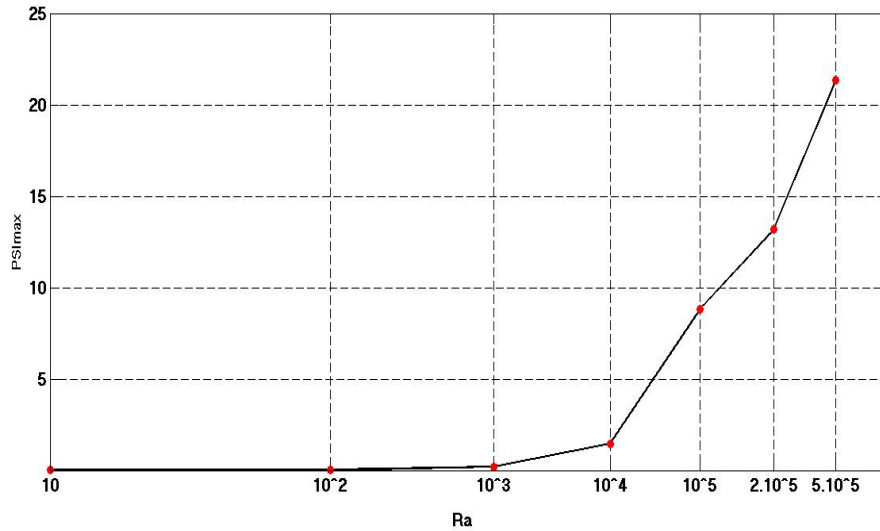


Figure IV. 30 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction du nombre de Rayleigh

IV.2.1.3. Fonction de courant

La figure IV.31 montre la formation de deux vortex symétriques produits par la circulation du Crystal fluide dans la cavité et qui varient en fonction de nombre de Rayleigh. Pour $Ra \leq 10^3$ les lignes de courant ont une faible intensité et le centre du vortex se situe à la partie supérieure du creuset. Pour $Ra \leq 10^4$ le centre de vortex commence de se déplacer vers le bas.

A partir de $Ra \leq 10^5$ les lignes de courant deviennent plus intenses et prennent presque la forme du creuset et le centre de vortex se déplace vers le bas se qui prouve que le régime convectif est dominant.

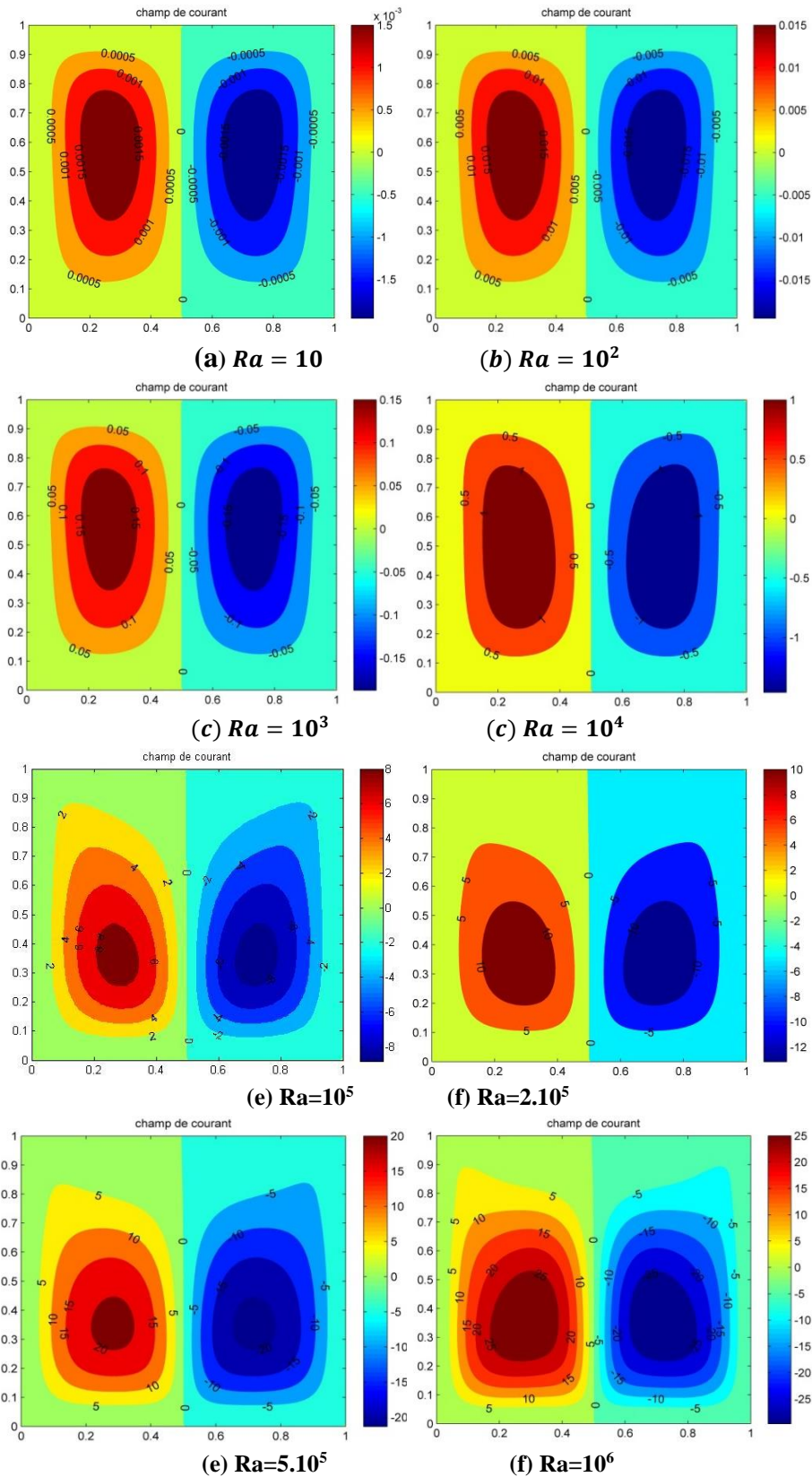


Figure IV. 31 Contour de fonction de courant : (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$, (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$ et (h) $Ra = 10^6$

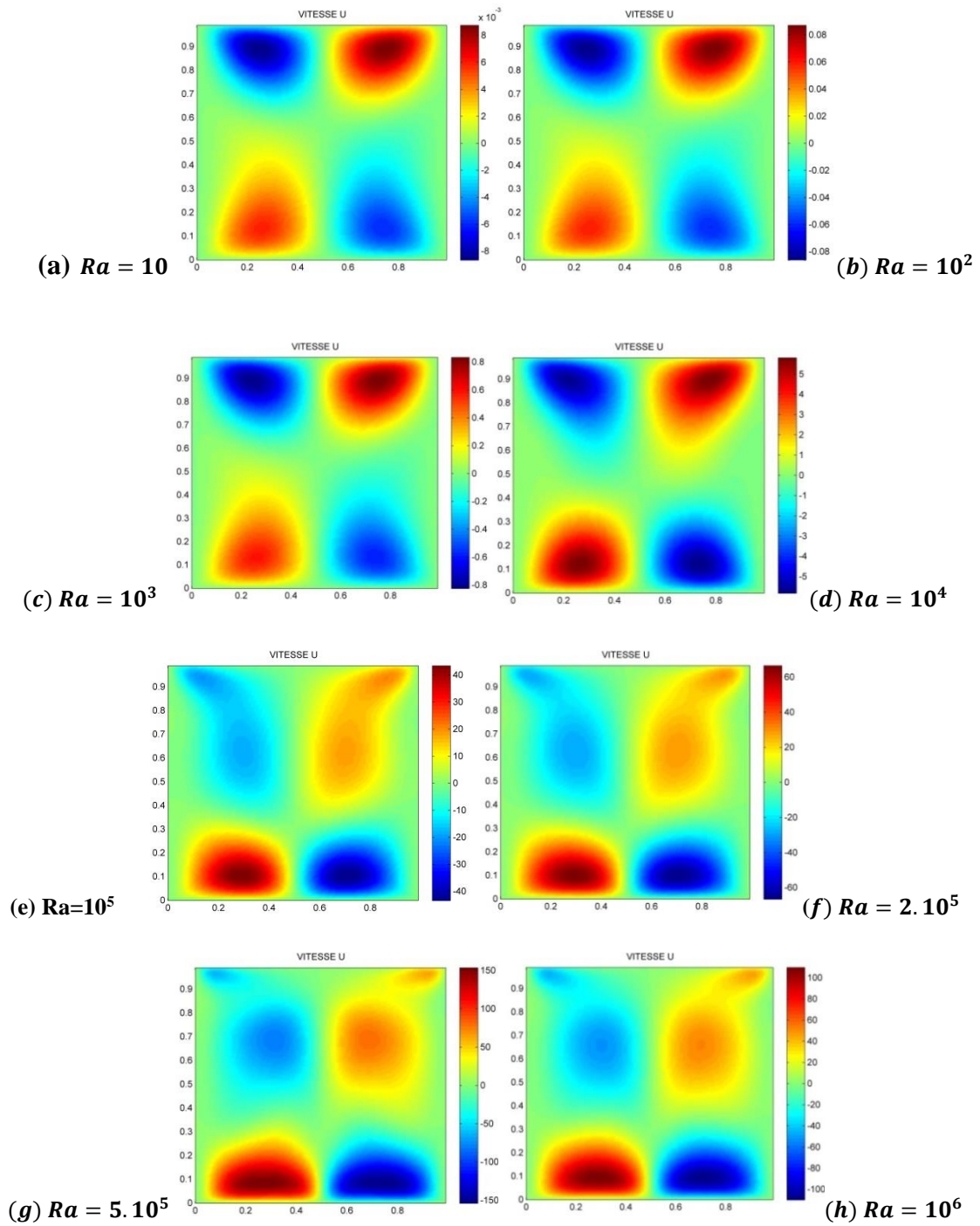
VII.1.1.1. *Champ hydrodynamique*

Figure IV. 32 Contour de la vitesse horizontale U (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$, (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$ et (h) $Ra = 10^6$

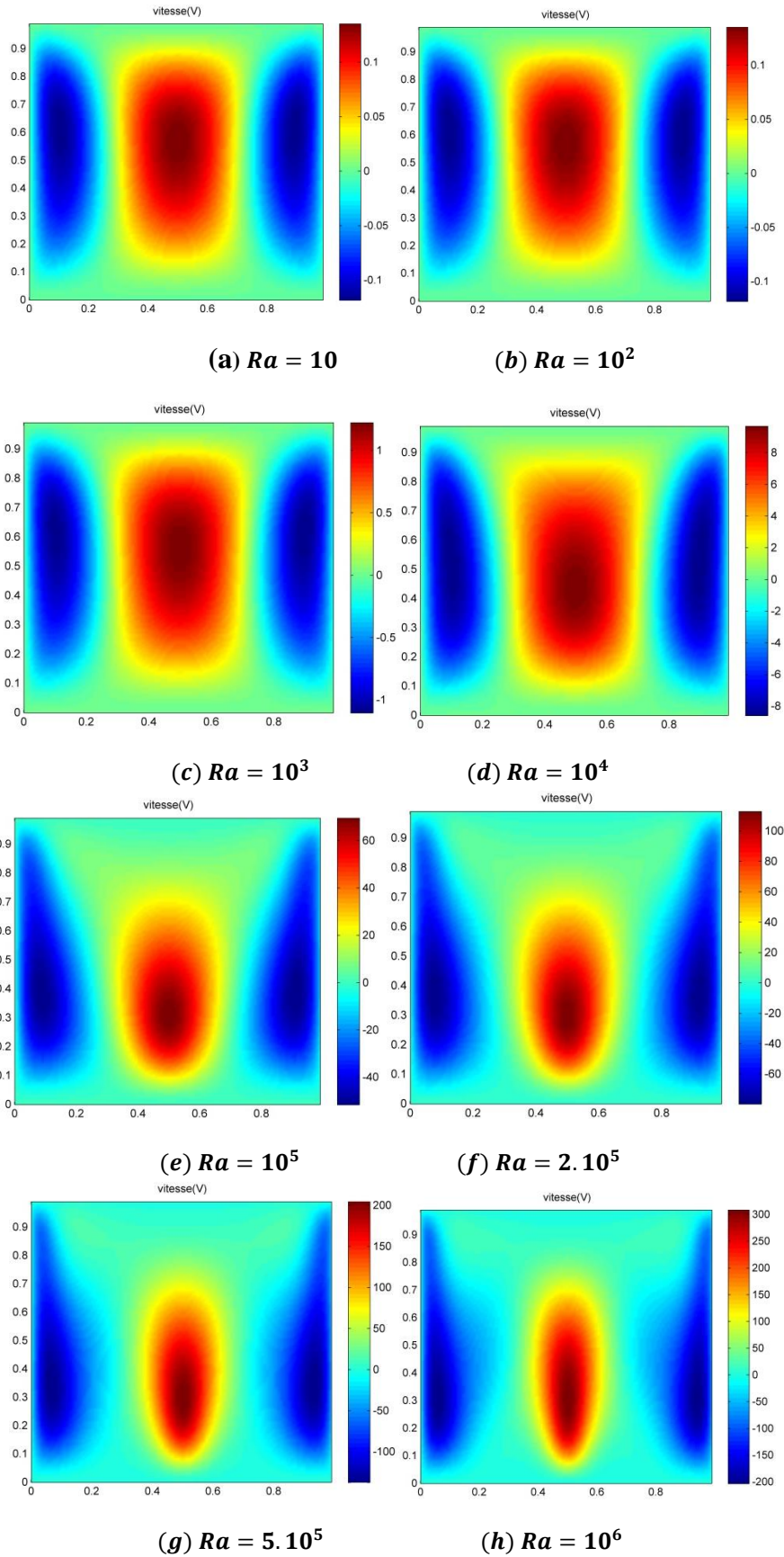


Figure IV. 33 Contour de la vitesse verticale V : (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$, (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$ et (h) $Ra = 10^6$

Selon les figures IV.32 et figure IV.33, nous remarquons que, la vitesse horizontale des particules fluides s'accélère au niveau de la paroi froide en raison de fort gradient de température entre l'échangeur de chaleur et la paroi chaude. Lorsque on s'éloigne de l'échangeur elle devient faible est pratiquement nulle à cause des faibles gradients de température tandis que la vitesse verticale s'accélère au passage des parois chaudes ce qui montre que l'écoulement est ascendant au niveau des parois chaudes et descendant sur l'axe central de la cavité, on remarque aussi, que la vitesse augmente avec l'augmentation du nombre de Ra ce qui confirme que la convection est dominante.

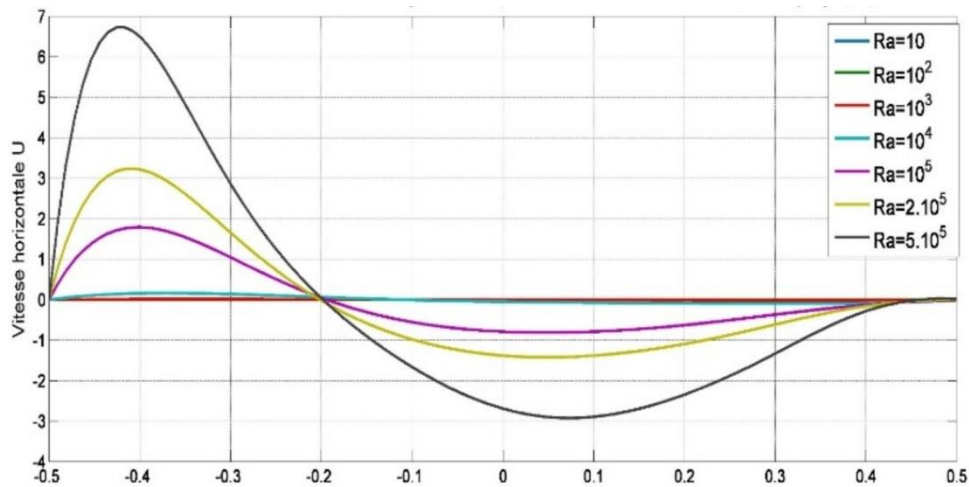


Figure IV. 34 Profils de la vitesse horizontale U le long de $Y = 0.5$ pour différentes valeurs de Ra

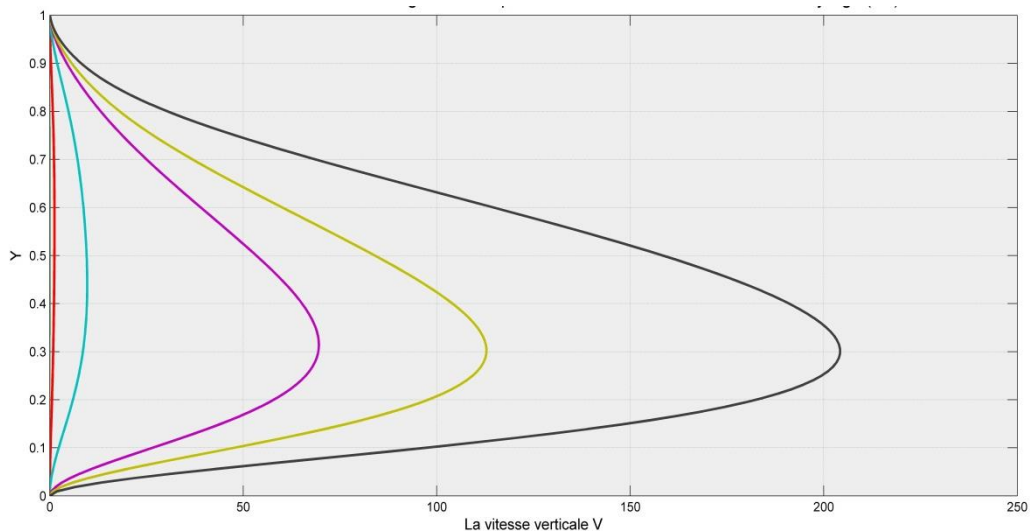


Figure IV. 35 Profils de la vitesse verticale V le long de $X=0.5$ pour différents nombres de Ra

La vitesse horizontale est accélérée au niveau de la paroi froide et la vitesse verticale est accélérée au passage des parois chaudes avec un changement visible lorsque le nombre de Ra augmente, $Ra > 10^3$.

VII.1.1.2. Nombre de Nusselt moyen

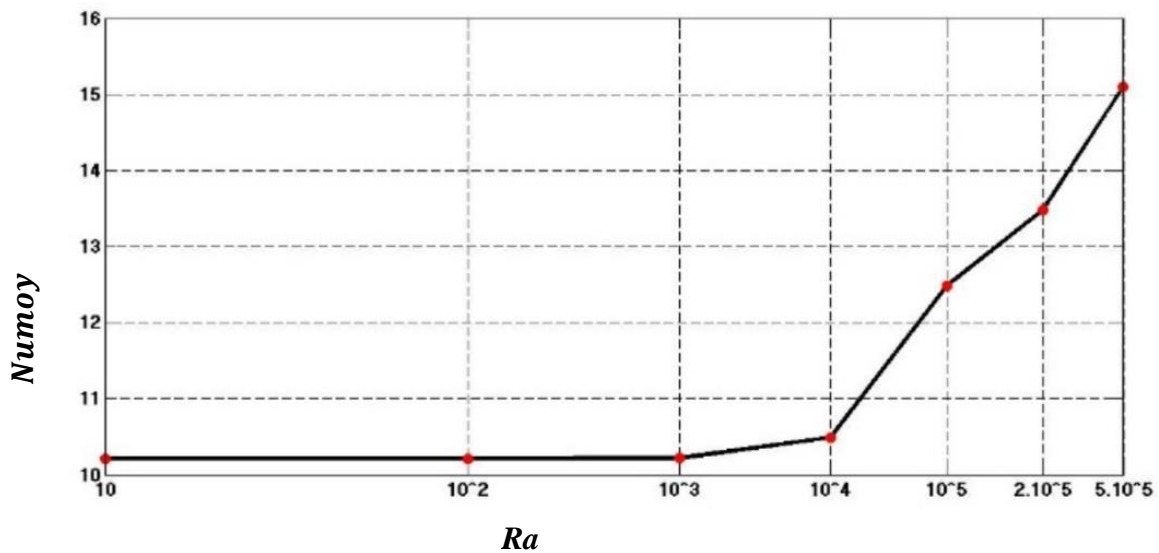


Figure IV. 36 Variation nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh

On remarque que le nombre de Nusselt moyenne augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Pour $Ra \leq 10^3$, la variation du nombre de Nusselt moyen le long des parois chaudes est faible.

Le nombre de Nusselt s'éloigne faiblement pour des valeurs de Ra plus élevées. Le nombre de Nusselt moyen augmente en fonction du nombre de Ra à partir de $Ra = 10^4$, ce qui signifie que le transfert de la chaleur par convection devient plus important.

VII.1.1.3. Nombre de Nusselt local

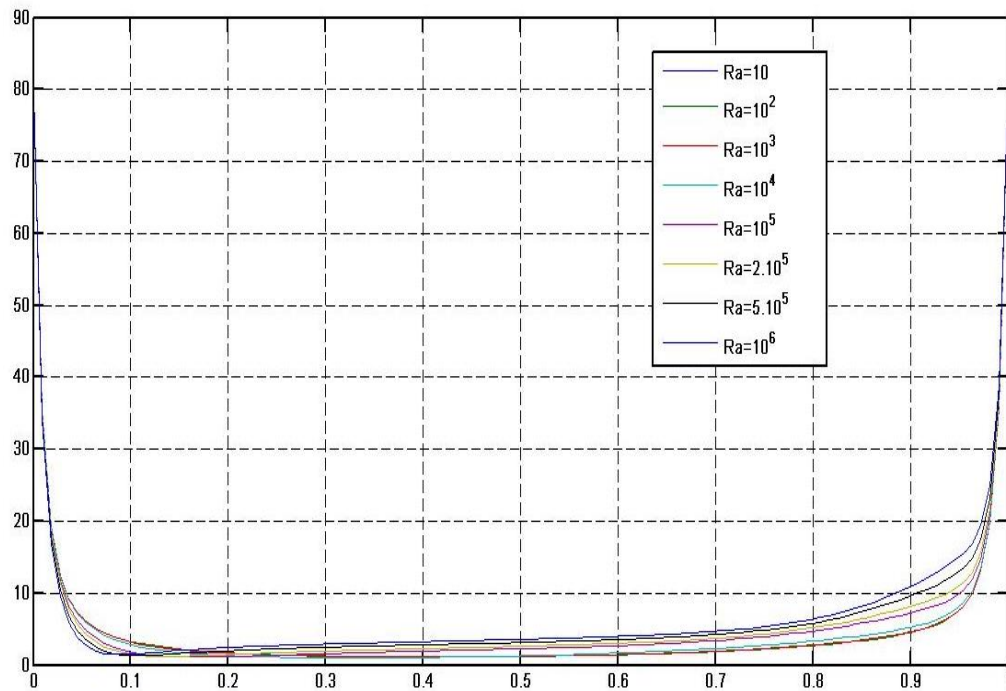


Figure IV. 37 Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude pour différentes valeurs de Ra

La figure IV.37 montre la variation du nombre de Nusselt local de la paroi verticale chaude pour différente valeur du nombre de Rayleigh, Pour $Ra \leq 10^3$, le transfert de chaleur se fait principalement par conduction du fait que Nu local est proche de zéro, En augmentant le nombre de Rayleigh, le transfert thermique par convection devient dominant et par conséquent Ra atteint des valeur maximales pour $Ra=10^6$.

VII.1.2. Cavité carrée à parois thermiquement actives

Dans cette configuration, la paroi de haut est adiabatique et les autres parois sont actives (voir la figure III.8).

VII.1.2.1. Isothermes

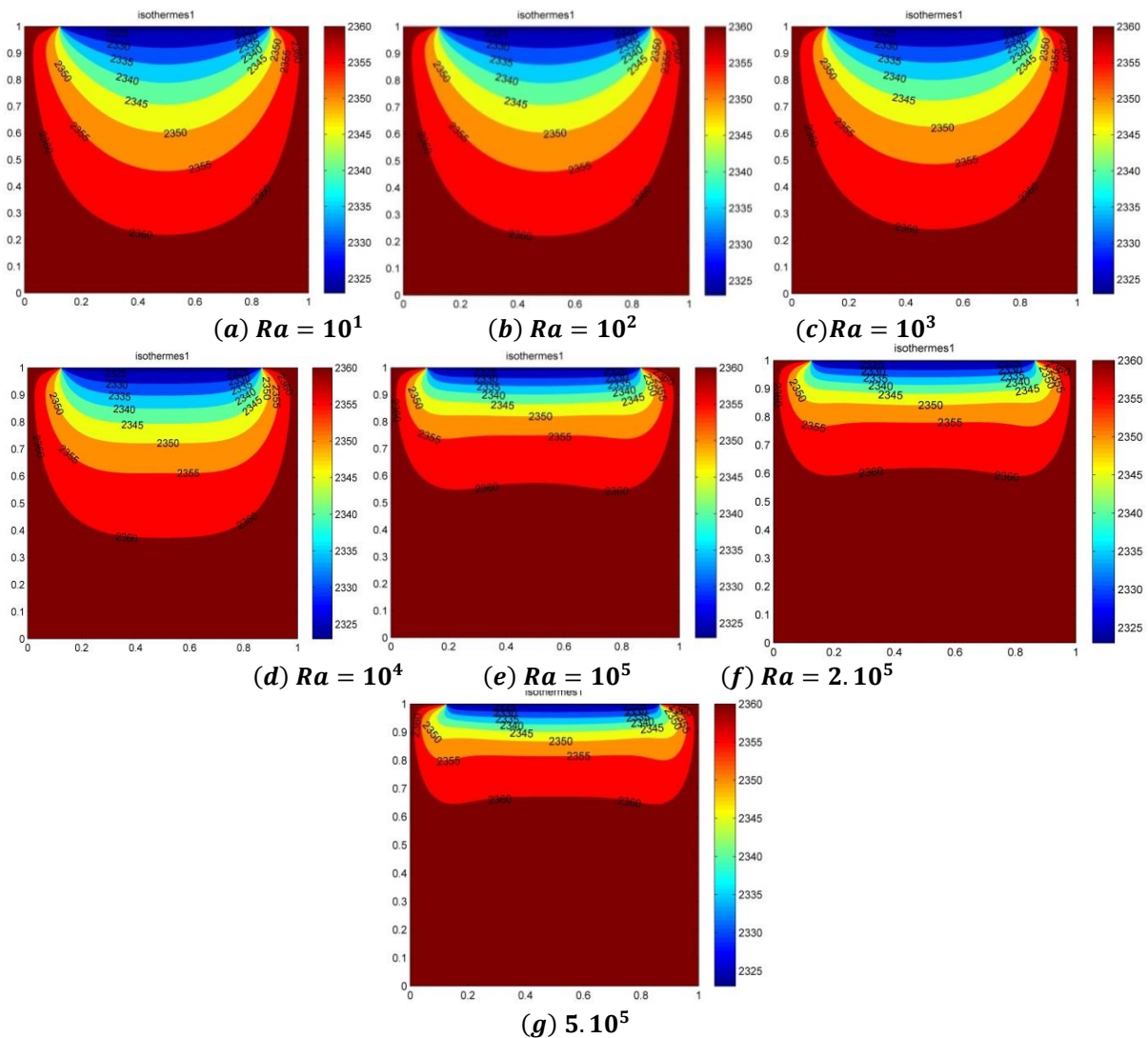


Figure IV. 38 Contours de température (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$ et (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$

Pour des faibles valeurs de Ra ($Ra = 10, 10^2$ et 10^3) les isothermes prennent une forme parabolique et circulaire près de l'interface cristal- bain ce qui prouve l'existence du régime d'écoulement conductif, les particules fluides se déplacent vers la paroi froide de l'échangeur thermique.

A partir du $Ra = 10^4$, les isothermes commencent de s'aplatir vers l'échangeur thermique et ils se rapprochent les uns des autres près de la paroi supérieure froide c'est à dire que les gradients de température deviennent plus élevés à proximité de l'échangeur thermique et la circulation du fluide devient plus rapide ce qui prouve que le phénomène de la convection naturelle est dominant.

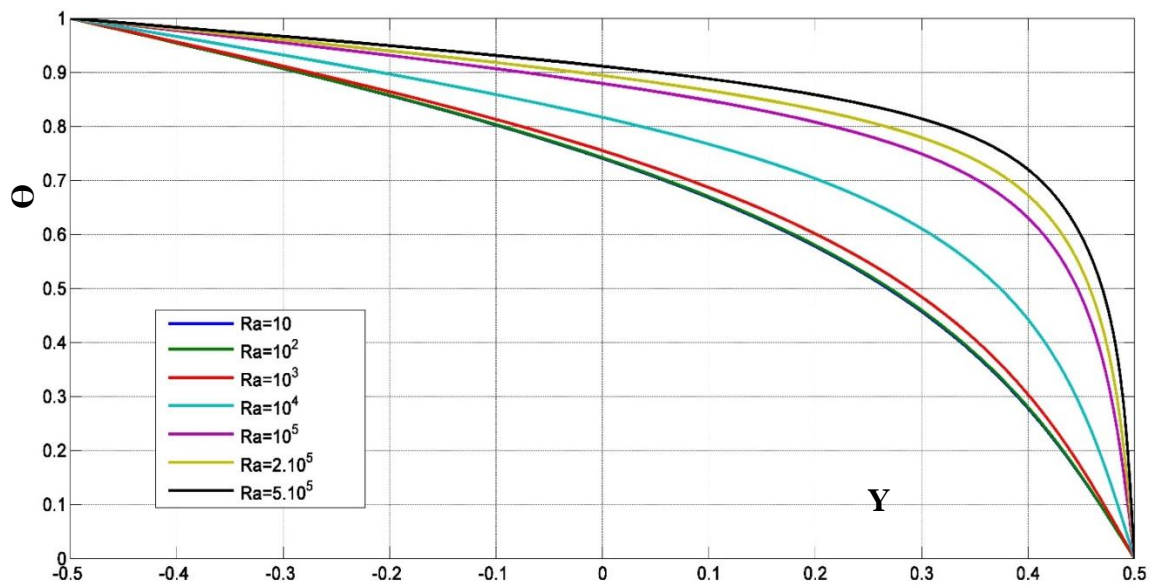


Figure IV. 39 Profil de la température le long de $X = 0.5$ pour différentes valeurs de Ra

On remarque sur la figure IV.39 que le gradient de la température est relativement important le long de l'axe médian de la cavité lorsque le nombre de Rayleigh est plus grand. L'augmentation du nombre de Ra a pour effet d'augmenter la vitesse des particules fluides, ces dernières gagnent de l'énergie et la température augmente. Cela traduit l'importance de la convection qui tend à homogénéiser la température de la cavité.

VII.1.2.2. Champ hydrodynamique

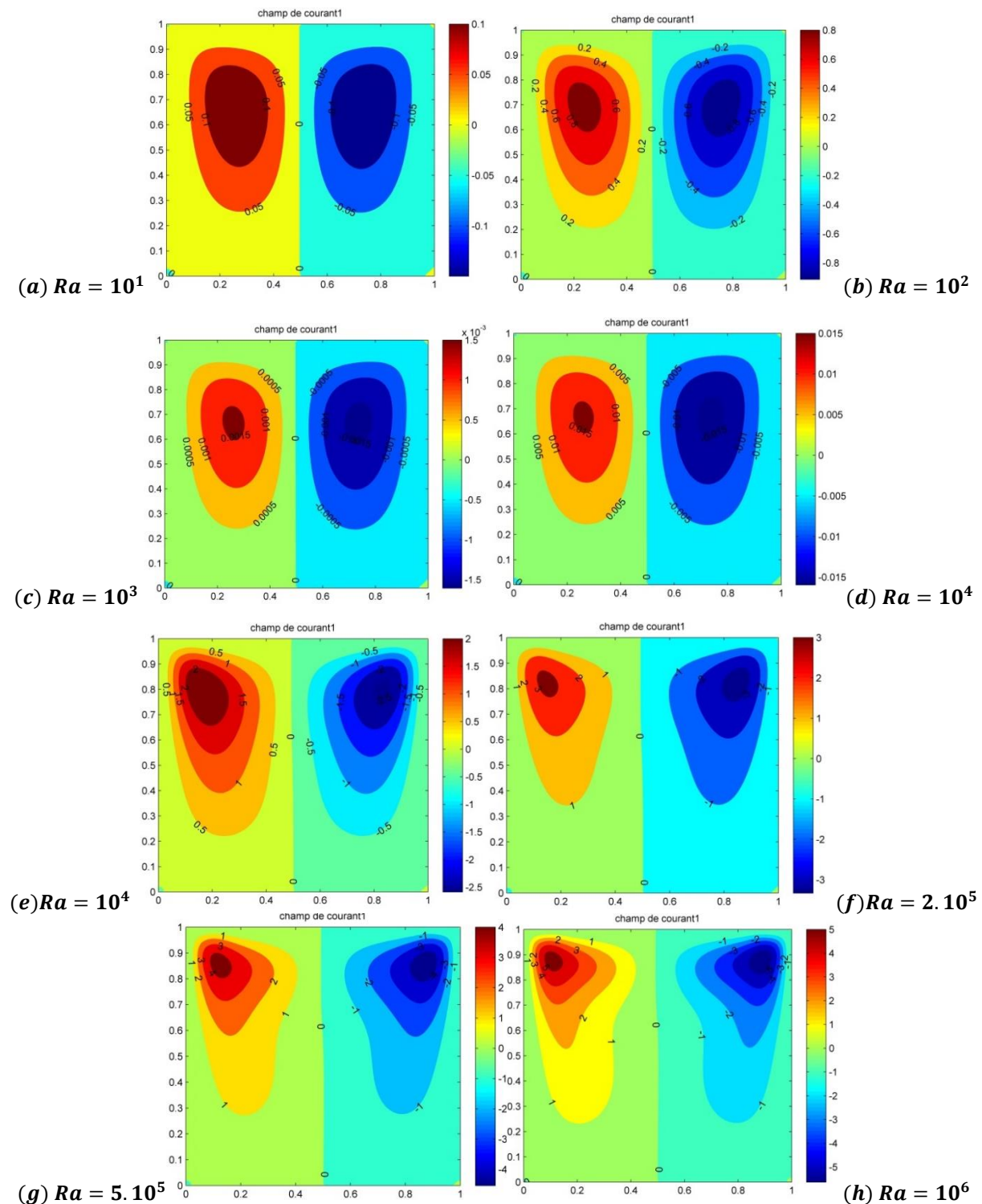


Figure IV. 40 Contour des lignes de courant (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$ et (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$

La figure IV.40 montre l'existence de deux vortex symétriques produits par la circulation du fluide dans la cavité. Pour des faibles valeurs $Ra = 10$ à $Ra = 10^3$, les lignes de courant ont une faible intensité. Au-delà de $Ra = 10^4$, le vortex occupe plus d'espace et le centre se

déplace vers le haut. Pour $Ra \geq 10^5$, les lignes de courant deviennent plus intenses et le centre du vortex se dirige vers le coin supérieur du creuset près des parois latérales chaudes.

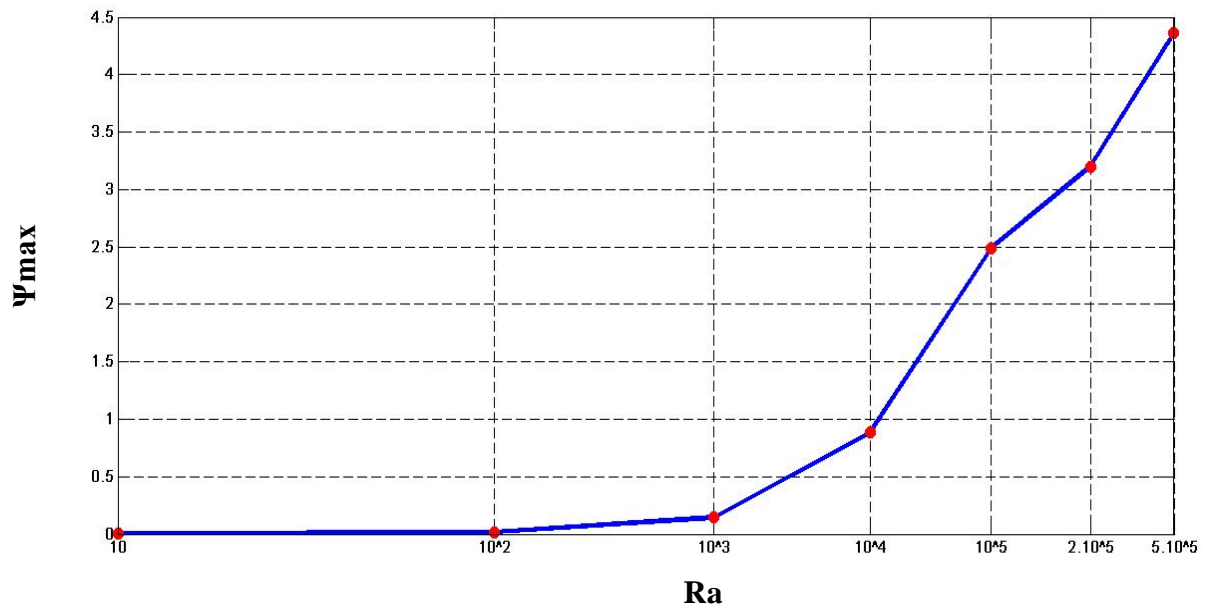


Figure IV. 41 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction du Ra

La fonction de courant maximale augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, ce qui signifie que la vitesse du fluide devient plus importante et que la convection naturelle est dominante.

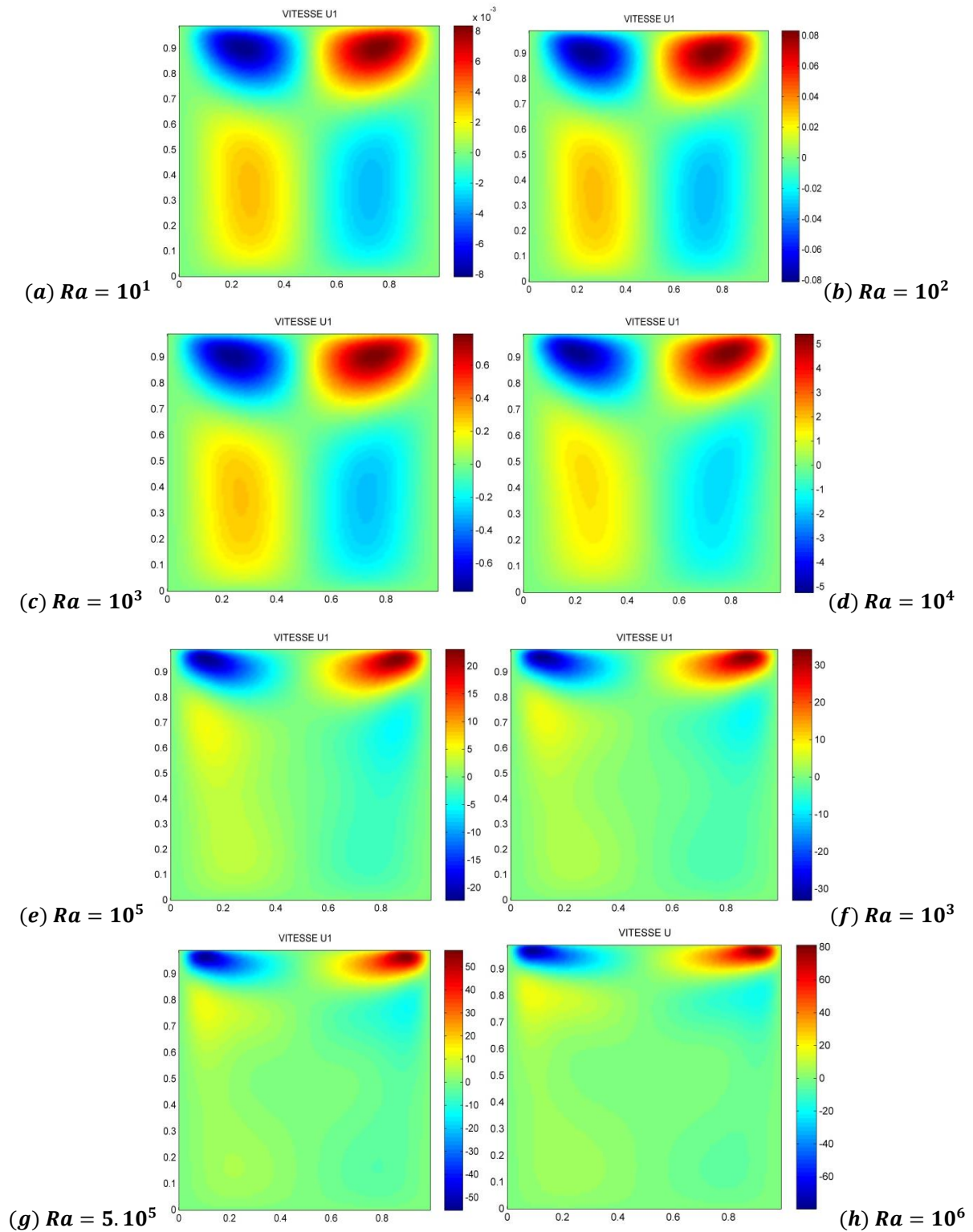


Figure IV. 42 Contour de la vitesse horizontale U courant (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2 \cdot 10^5$, (g) $Ra = 5 \cdot 10^5$ et (g) $Ra = 10^6$

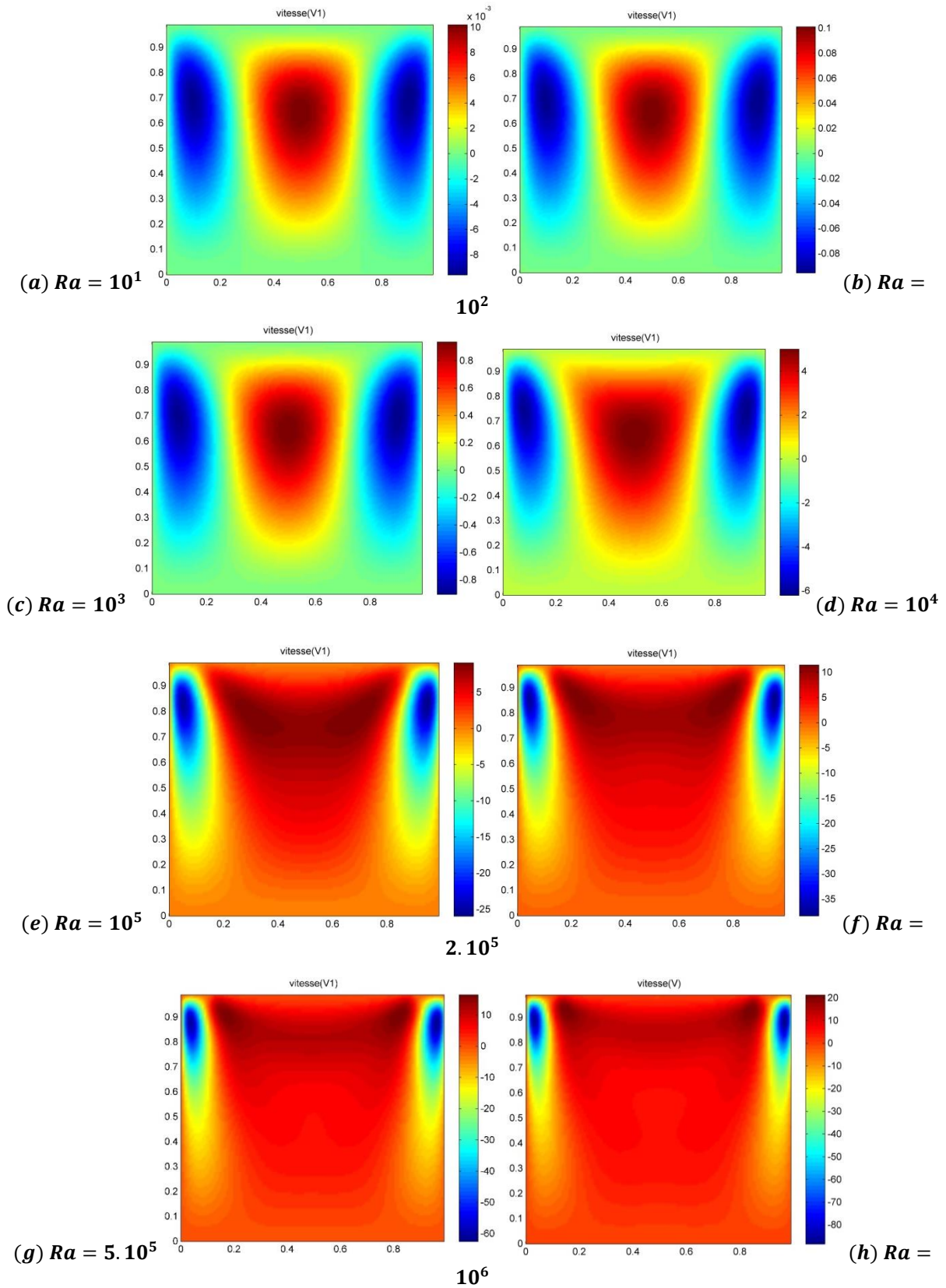


Figure IV. 43 Contour de la vitesse verticale V (a) $Ra = 10^1$, (b) $Ra = 10^2$, (c) $Ra = 10^3$, (d) $Ra = 10^4$, (e) $Ra = 10^5$, (f) $Ra = 2.10^5$, (g) $Ra = 5.10^5$ et (g) $Ra = 10^6$

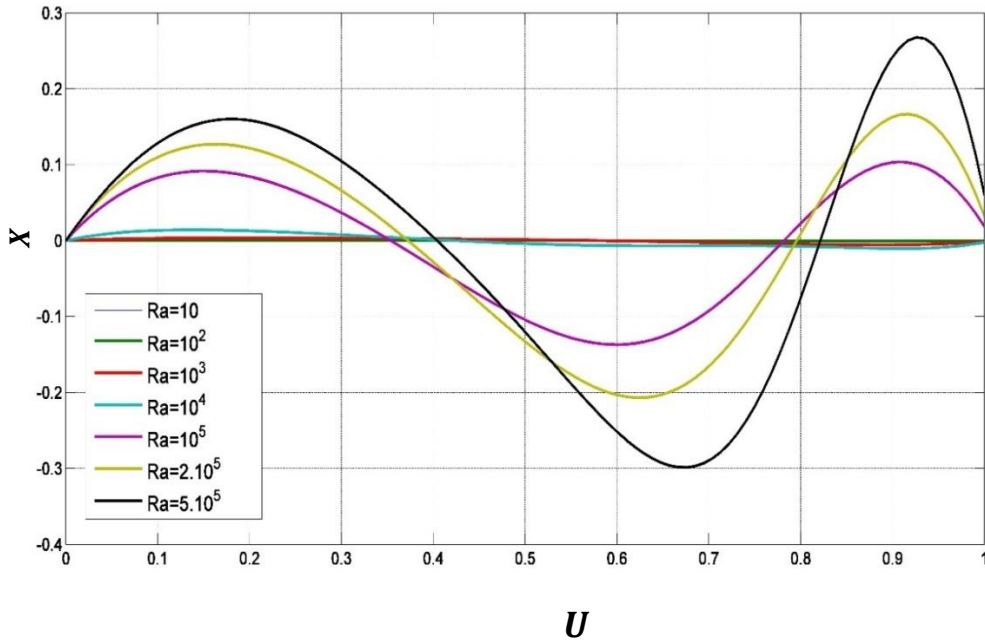


Figure IV. 44 Profils de la vitesse horizontale U le long de $Y = 0.5$

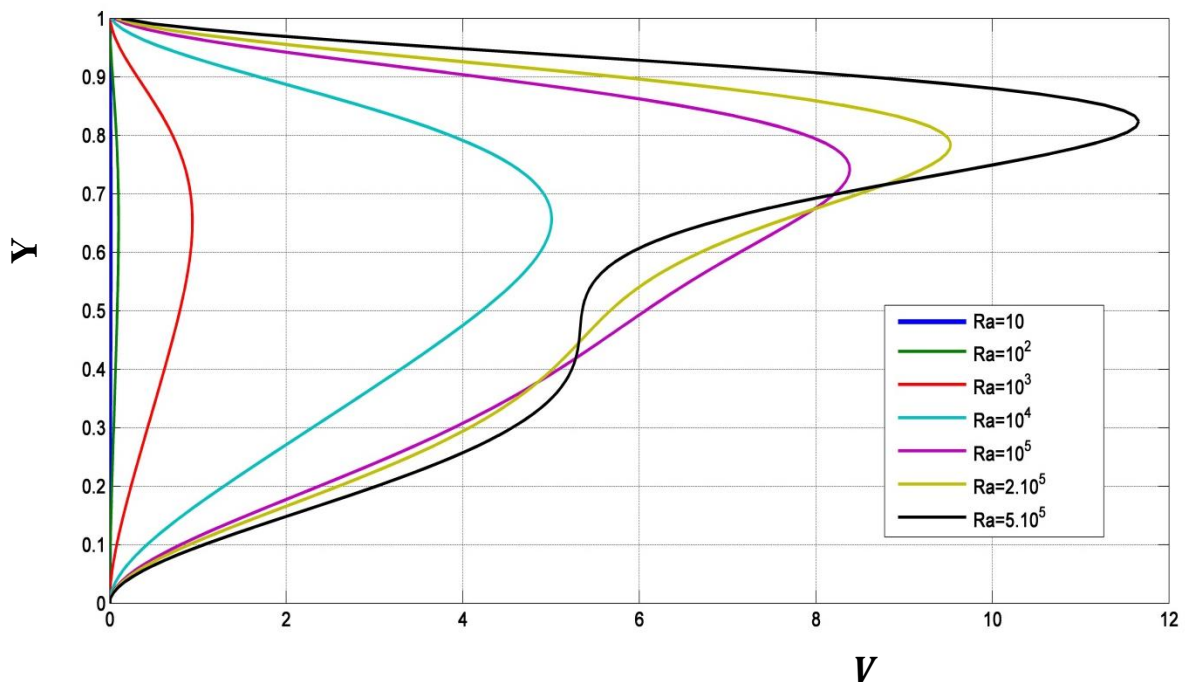


Figure IV. 45 Profils de la vitesse verticale V le long de $X = 0.5$

Dans la figure IV.43, les champs des vitesses horizontale et verticale sont présentés. Les figures IV.44 et IV.45 montrent que la vitesse horizontale est accélérée au niveau de la paroi froide et la vitesse verticale est accélérée au passage des parois chaudes avec un changement visible lorsque le nombre du Ra augmente.

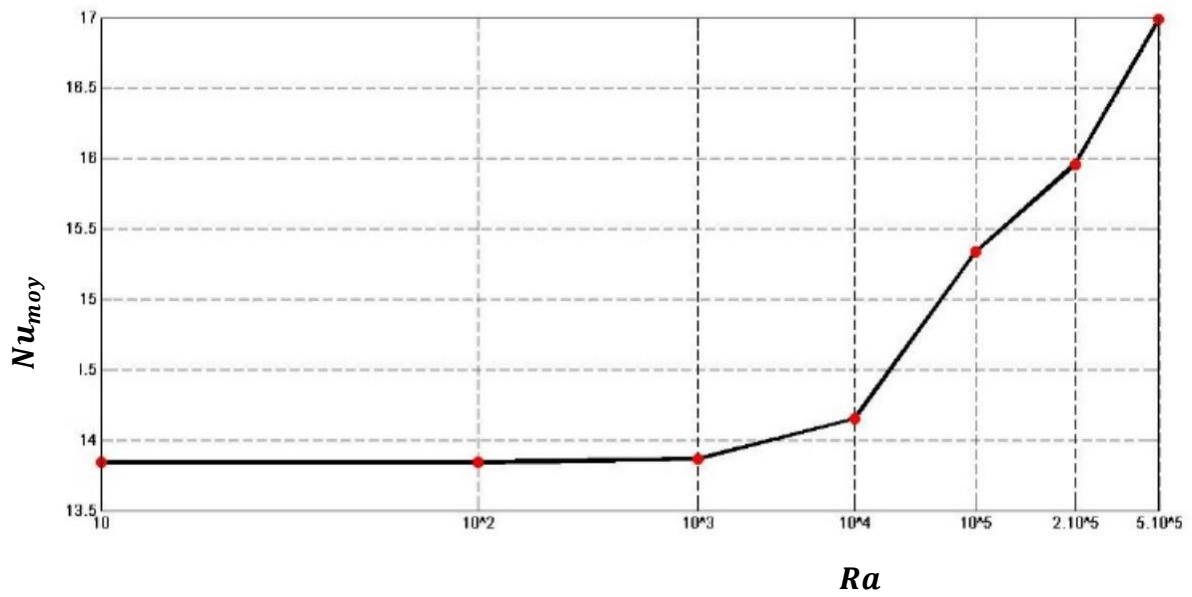


Figure IV. 46 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de Ra

La figure (IV.46) on constate que le nombre du Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. Pour $Ra \leq 10^3$, la variation du nombre de Nu_{moy} le long des parois chaudes est faible.

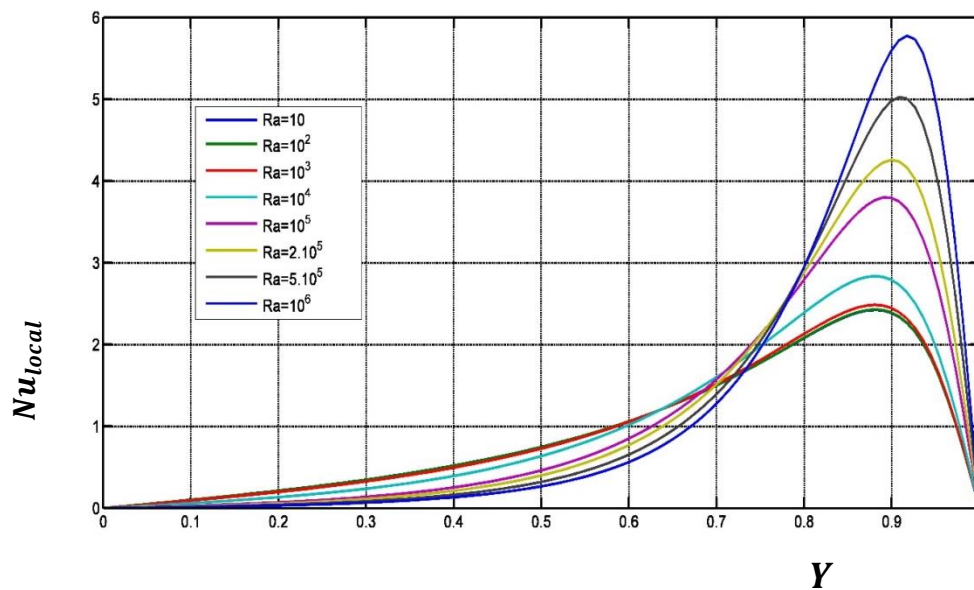


Figure IV. 47 Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude pour différents Ra

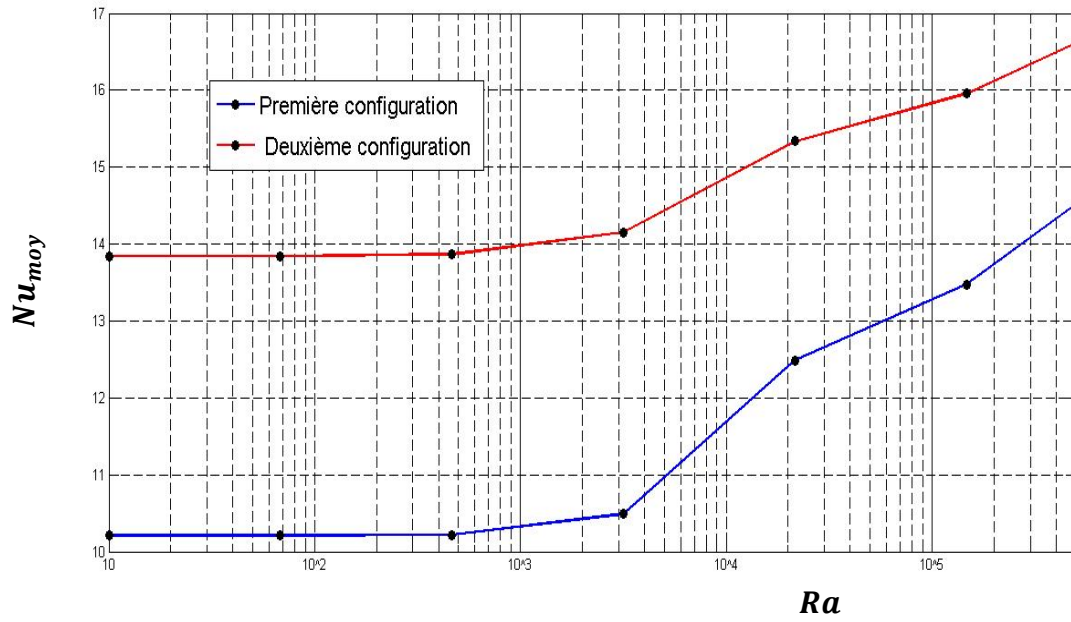


Figure IV. 48 Variation du nombre de Nu_{moy} en fonction du nombre de Ra pour les deux configurations de type Kyropoulos

Tableau IV. 1 Variation du nombre de Nu_{moy} en fonction du nombre de Ra pour les deux configurations

Nu_{moy}		
Ra	Première configuration	Deuxième configuration
10	10.2095	13.8404
10^2	10.2098	13.8425
10^3	10.2174	13.8667
10^4	10.4866	14.1513
10^5	12.4872	15.3349
$2 \cdot 10^5$	13.4743	15.9589
$5 \cdot 10^5$	15.1024	16.9895
10^6	16.6132	17.9117

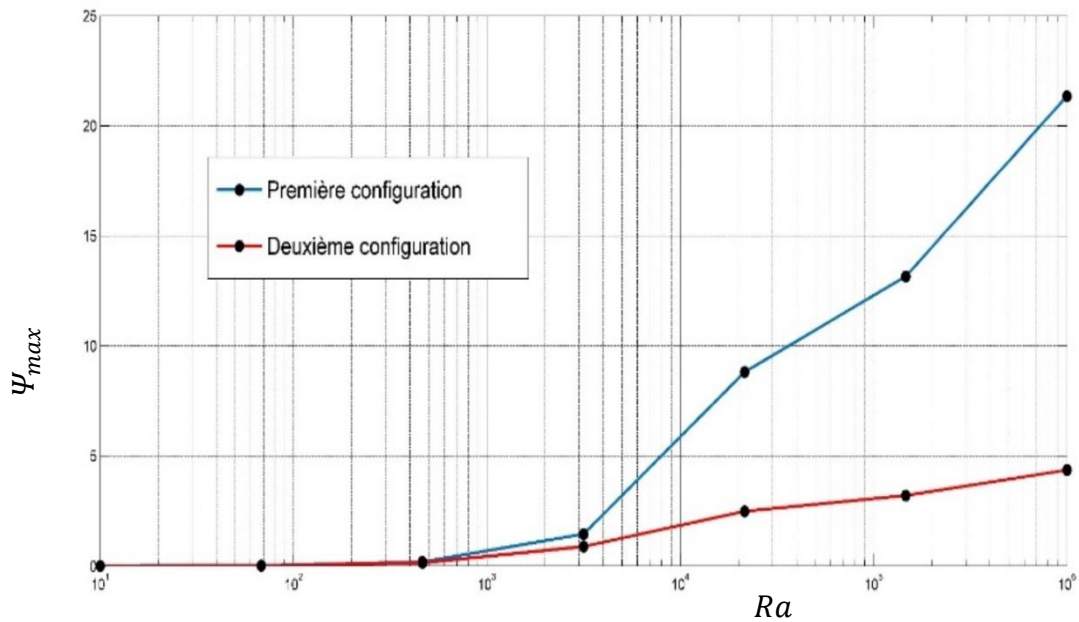


Figure IV. 49 Evolution de la fonction du courant maximale en fonction de nombre de Rayleigh pour les deux configurations

Tableau IV. 2 Variation du nombre de le fonction coutant maximale en fonction du nombre de Rayleigh pour les deux configurations

Ψ_{max}		
Ra	Première configuration	Deuxième configuration
10	0.0019	0.0016
10 ²	0.0194	0.0156
10 ³	0.1861	0.1460
10 ⁴	1.4544	0.8839
10 ⁵	8.8107	2.4872
2.10 ⁵	13.1591	3.2018
5.10 ⁵	21.3452	4.3597
10 ⁶	29.7564	5.4192

Le tableau IV.1 et les figures IV. 49, montrent que la vitesse de l'écoulement est plus importante dans la première configuration, ce qui implique l'importance de la convection naturelle et la variation du taux de transfert de chaleur en fonction du nombre de Rayleigh par rapport à la deuxième configuration pour technique de Kyropoulos.

VII.2. CAVITES TRIDIMENSIONNELLES

Dans cette partie, nous nous intéressons aux cavités 3D, six cas ont été étudiés numériquement étudiés ; Le premier cas s'agit d'un écoulement de sodium liquide dans une cavité formée de deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur est en rotation et le cylindre extérieur est maintenu fixe. Dans le second cas, le fluide en mouvement est contenu dans un espace annulaire formé par deux cylindres coaxiaux avec une variation brusque du rayon du cylindre intérieur tournant. Dans le troisième cas, le fluide est contenu dans l'espace formé par deux cylindres coaxiaux avec modification des rayons des cylindres intérieur et extérieur, et l'écoulement est généré par la rotation du cylindre intérieur. Le quatrième cas, le fluide considéré est enfermé entre deux cylindres coaxiaux avec un changement de rayon extérieur. Le cinquième cas, est un écoulement entre deux cylindres coniques, le cylindre intérieur est en rotation et celui de l'extérieur est stationnaire. Le sixième cas, il s'agit de la configuration de Czochralski.

VII.2.1. Cavité fermée de type Taylor-Couette cylindrique

L'objectif principal de cette partie est d'étudier numériquement et de mettre en évidence l'effet du nombre de Taylor sur le champ de vitesse du sodium liquide qui est un liquide incompressible, non visqueux et newtonien, contenu dans un espace annulaire cylindrique. Le cylindre extérieur (stator) de rayon extérieur $R_2 = 28.5 \text{ mm}$, et de cylindre intérieur (rotor) de rayon $R_1 = 23,65 \text{ mm}$. Le rapport d'écart δ est donné par ($\delta = d / R_1$) où $d = 4,85 \text{ mm}$ est l'écart entre les rayons des deux cylindres ($d = R_2 - R_1$), (voir la figure IV.28). La hauteur du système d'écoulement considéré est $H = 155 \text{ mm}$. Par conséquent, ce système d'écoulement est régi par les paramètres suivants : rapport de rayons $R_1 / R_2 = 0.8$ qui est un petit espace annulaire et un grand rapport d'aspect $H/d = 31,9$. Le cylindre intérieur tourne à une vitesse angulaire Ω . Le nombre de Taylor est définie par $Ta = Re \cdot \delta^{1/2}$. Le nombre de Reynolds est donné par $Re = \rho R_1 \Omega d / \mu$. Le fluide de travail est le sodium liquide, sa masse volumique $\rho = 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et sa viscosité constantes $\mu = 6.53 \cdot 10^{-4} \text{ g} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. L'espace cylindrique est commodément décrit par r, θ et z , désignant les coordonnées cylindriques respectivement dans les directions radiale, azimutale et axiale, comme illustré à la figure (IV.28). De plus, nous désignons les composantes de vitesse dans les directions r, θ et z par V_r, V_θ et V_z respectivement, et la pression p .

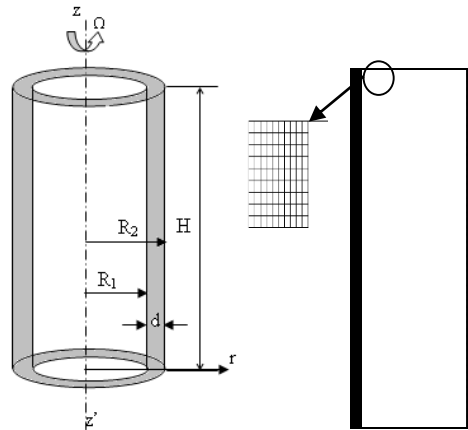


Figure IV. 50 Système d'écoulement et le type de maillage utilisé

Dans cette étude, l'accent est mis sur la compréhension de l'effet du nombre de Taylor Ta sur la distribution du champ de vitesse dans un métal liquide confiné entre deux cylindres coaxiaux. Le nombre de Taylor caractérise le rapport entre les forces centrifuges et les forces visqueuses agissant sur le liquide. Au-dessus de la valeur critique du nombre de Taylor, les forces centrifuges surpassent les forces visqueuses et l'écoulement devient instable. Il est utilisé comme critère de la stabilité de l'écoulement.

A la paroi, l'écoulement à une vitesse axiale et radiale nulle, alors qu'il est caractérisé par une composante de vitesse tangentielle. Par conséquent, les conditions aux limites de non-glissement associées sont supposées. Les composantes de vitesse radiale, tangentielle et axiale aux parois intérieure, extérieure et aux plaques d'extrémité sont données par $V_r(r = R_1 \text{ ou } r = R_2) = 0$, $V_r(Z = 0 \text{ ou } Z = H) = 0$, $V_\theta(r = R_1) = \Omega R_1$, $V_\theta(r = R_2) = 0$, $V_\theta(Z = 0 \text{ ou } Z = H) = 0$, $V_z(r = R_1 \text{ ou } r = R_2) = 0$ et $V_z(Z = 0 \text{ ou } Z = H) = 0$, respectivement. Le problème est résolu à l'aide d'un code basé sur la méthode des volumes finis. La discrétisation en impulsion a été réalisée avec un schéma QUICK. L'algorithme PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operator) est appliqué pour le couplage pression-vitesse et le solveur basé sur la pression a été discrétisé avec le schéma PRESTO (PREssure STaggering Option). La méthode basée sur les cellules de Green-Gauss a été utilisée pour l'évaluation des gradients. La convergence est gérée en surveillant les résidus des équations de continuité et de quantité de mouvement, les résidus sont fixés à 10^{-6} . Le maillage utilisé est régulier et uniforme et compte environ un million de nœuds. Dans la Fig. 1, la structure du maillage utilisé dans les simulations tridimensionnelles est donnée.

Différentes structures d'écoulement sont alors trouvées. Le premier schéma correspond à l'écoulement circulaire de Couette suivi de l'écoulement Taylor-vortex (TVF). TVF apparaît à

une valeur critique T_c . Le régime laminaire stable est l'écoulement de base existant en l'absence de toute perturbation. Cela peut être décrit comme un mouvement homogène avec un haut degré de symétrie dans tout le fluide, qui se caractérise par l'apparition de deux cellules, l'une située au bord inférieur et l'autre au bord supérieur. Ensuite, la vitesse de rotation est légèrement augmentée puis la formation de tourbillons de Taylor qui se propagent des bords vers le milieu jusqu'à l'apparition complète des cellules dans tout le cylindre. L'apparition de la première instabilité de Taylor-Couette consiste en l'apparition d'une onde stationnaire axiale périodique associée à l'écoulement de base. Cela peut être décrit comme un mouvement homogène avec un haut degré de symétrie dans tout le fluide, qui se caractérise par l'apparition de deux cellules, l'une située au bord inférieur et l'autre au bord supérieur.

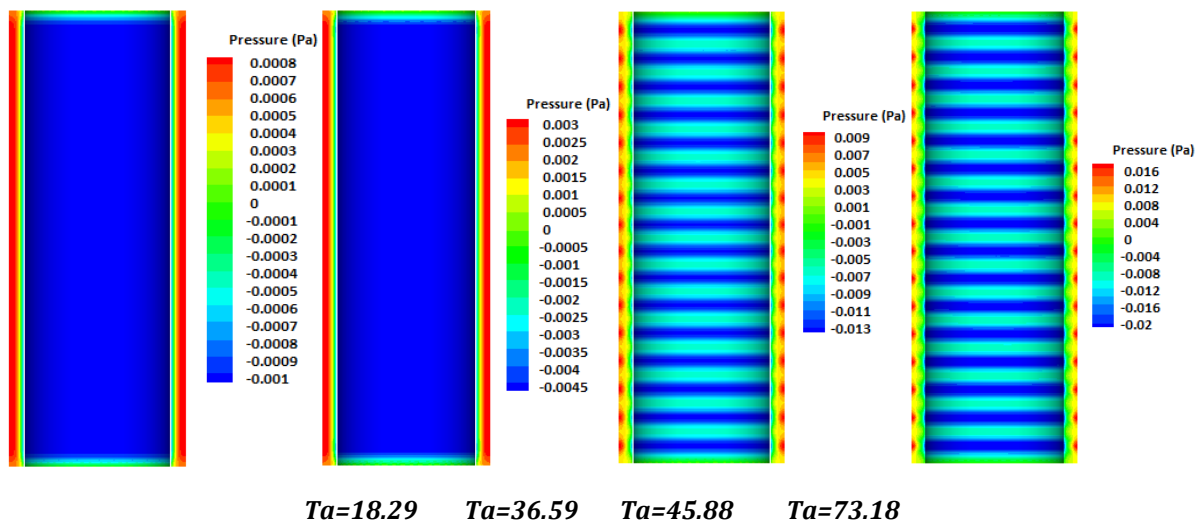


Figure IV. 51 Champ de pression pour différents nombre de Taylor

Ensuite, la vitesse de rotation est légèrement augmentée puis la formation de tourbillons de Taylor qui se propagent des bords vers le milieu jusqu'à l'apparition complète des cellules dans tout le cylindre.

L'apparition de la première instabilité de Taylor-Couette consiste en l'apparition d'une onde stationnaire axiale périodique associée à l'écoulement de base.

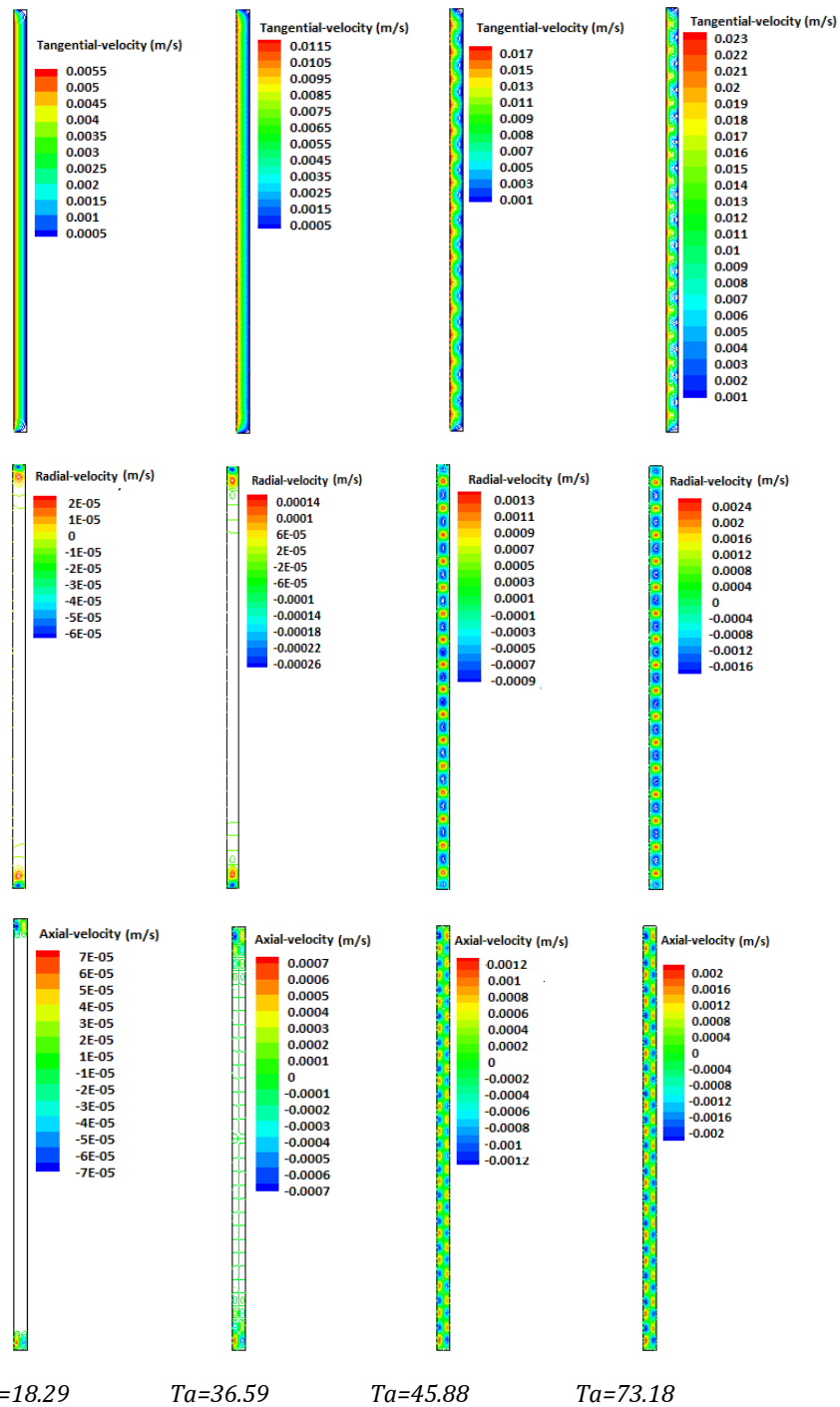


Figure IV. 53 Composantes de vitesses dans le plan (r, Z) pour différents nombre de Taylor

Pour le grand nombre de Taylor, les rouleaux contrarotatifs dans l'écoulement d'espace cylindrique de sodium liquide sont apparus et s'étendent tout autour du cylindre intérieur du cylindre. Les valeurs de vitesse tangentielle sont supérieures aux composantes de vitesse radiale et axiale. Les résultats semblent satisfaisants concernant le comportement de l'instabilité hydrodynamique.

Dans ce chapitre nous avons présenté les différents résultats de simulations de différentes cavités bidimensionnelles et tridimensionnelles. Pour le cas des configurations géométriques bidimensionnelles, nous avons utilisé un code basé sur la méthode des différences finies, pour le cas des cavités tridimensionnelles, nous avons utilisé un code basé sur la méthode des volumes finies. Nous avons déterminé le champ thermique, le champ dynamique, les profils de vitesses et des températures, ainsi que les variations de nombre de Nusselt en caractérisant le taux de transfert de chaleur à l'intérieur de la cavité. Pour l'étude de l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection, nous avons fait varier le nombre de Rayleigh de 10 jusqu'à 10^6 .

Les résultats trouvés par la simulation pour les cavités bidimensionnelles montrent que l'augmentation de Ra fait accélérer l'écoulement dans la cavité et le transfert de chaleur passe du mode diffusif pour $Ra = 10^3$ au mode convectif et par conséquent le Nusselt augmente.

Pour le cas de la cavité tridimensionnelle de type Taylor Couette, la première instabilité hydrodynamique de l'écoulement de sodium liquide contenu entre deux cylindres coaxiaux infinis où le cylindre extérieur est fixe et l'intérieur est en rotation a été étudiée numériquement à l'aide de code ANSYS®Fluent 16.0 basé sur la méthode des volumes finis. Pour un très faible nombre de Taylor, les résultats montrent que l'écoulement de base est stationnaire, axisymétrique invariant par translation verticale et qu'aucune cellule ne se forme dans l'entrefer. En augmentant le nombre de Taylor, deux premières cellules sont apparues à proximité de chaque plaque d'extrémité, appelées tourbillons d'Eckman. Au-delà d'une valeur seuil, on constate que ce débit de base devient instable. Pour le grand nombre de Taylor, les rouleaux contrarotatifs dans l'écoulement d'espace cylindrique de sodium liquide sont apparus et s'étendent tout autour du cylindre intérieur du cylindre. Les valeurs de vitesse tangentielle sont supérieures aux composantes de vitesse radiale et axiale. Les résultats semblent satisfaisants concernant le comportement de l'instabilité hydrodynamique, en accord avec les données expérimentales trouvées dans la littérature.

VII.2.2. Ecoulement entre deux cylindre avec changement brusque des rayons

Le but est d'étudier l'effet de la variation brusque de l'espace annulaire sur le flux et la vitesse des tourbillons de Taylor dans un système cylindrique de Taylor-Couette. Trois cas sont considérés, la première configuration géométrique un changement de rayon du cylindre extérieur a été effectué. La deuxième configuration géométrique, le changement de rayon du cylindre intérieur. Le dernier cas (c), le système a un changement dans les deux cylindres. La

plaque d'extrémité inférieure est fixée au cylindre extérieur, qui est maintenu fixe, le cylindre intérieur tourne et un rapport de rayon de cylindre de $\eta = 0,66$. Par conséquent, le développement des tourbillons de Taylor dans la configuration géométrique (a) pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et le profile axial de la composante de vitesse tangentielle sans dimension à mi-chemin à travers l'écart pour $Ta = 59,42$, une méthode numérique basée sur la méthode des volumes finis est utilisée dans les simulations.

VII.2.2.1. Présentation du problème

Le fluide visqueux incompressible est contenu dans un espace annulaire entre un cylindre intérieur en rotation et un cylindre fixe. Un schéma des systèmes d'écoulement pour trois configurations géométriques est illustré à la figure 1.

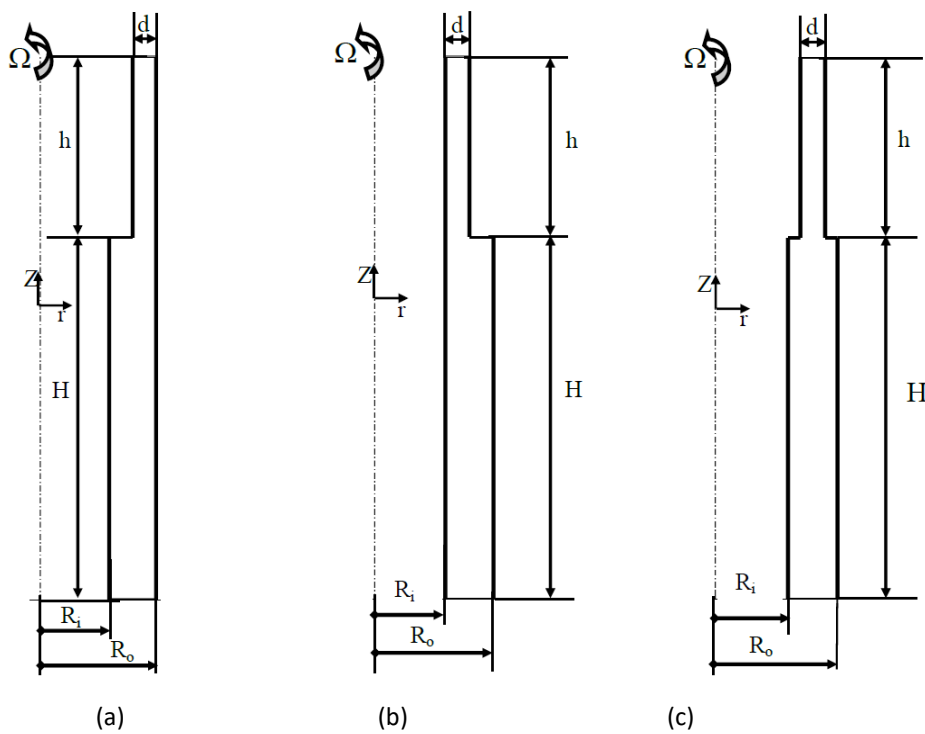


Figure IV. 54 Schéma des systèmes Taylor-Couette avec changement d'espace annulaire. (a) Un changement du rayon du cylindre intérieur, (b) un changement du rayon du cylindre extérieur, et (c) une variation du rayon des cylindres intérieur et extérieur, tous les systèmes à $\Gamma = 10$, $\Gamma' = 10$, $\eta = 0,66$ et $D = 2d$

Le rapport d'aspect de l'espace annulaire large est $\Gamma = H / D$ où D est l'espace annulaire large et $\Gamma = H / d$ est le rapport d'aspect étroit avec d est l'espace annulaire étroit. Le rapport de rayon $\eta = R_i / R_o$, la vitesse angulaire du cylindre rotatif intérieur est Ω correspondant au nombre de Reynolds $Re = (R_i \cdot \Omega \cdot (R_o - R_i)) / \nu$, avec ν est la viscosité cinématique, R_i et

R_o désignent respectivement les rayons intérieur et extérieur du volume de fluide compris entre les deux cylindres. Le nombre de Taylor est défini comme $Ta = Re \cdot ((R_o - R_i) / R_i)^{1/2}$.

La configuration géométrique, (a), consiste à remplacer la moitié du flasque supérieur couplé au cylindre extérieur par le fluide. Le rapport d'aspect $\Gamma = 10$ et $\eta = 0.66$ pour la partie de l'espace annulaire large. Pour l'écart étroit, le rapport d'aspect $\Gamma' = 10$ et le rapport de rayon $\eta' = (R_i + d) / R_o$, $\eta' = 0.8$. La configuration géométrique, GGi, consiste à remplacer la moitié du fond supérieur fixé au cylindre intérieur. Pour l'écart étroit, le rapport d'aspect $\Gamma = 10$ et le rapport de rayon $\eta' = R_i / (R_o - d)$, $\eta' = 0.75$. La configuration géométrique, (c) est de remplacer le demi-plateau supérieur situé dans la partie médiane de l'espace annulaire est remplacé par le fluide, Pour l'entrefer étroit, le rapport d'aspect $\Gamma' = 10$ et le rapport de rayon $\eta' = [R_i + (d / 2)] / (R_o - (d / 2))$, $\eta' = 0.78$, (Figure IV. 54). Les équations dynamiques gouvernantes consistent en l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement.

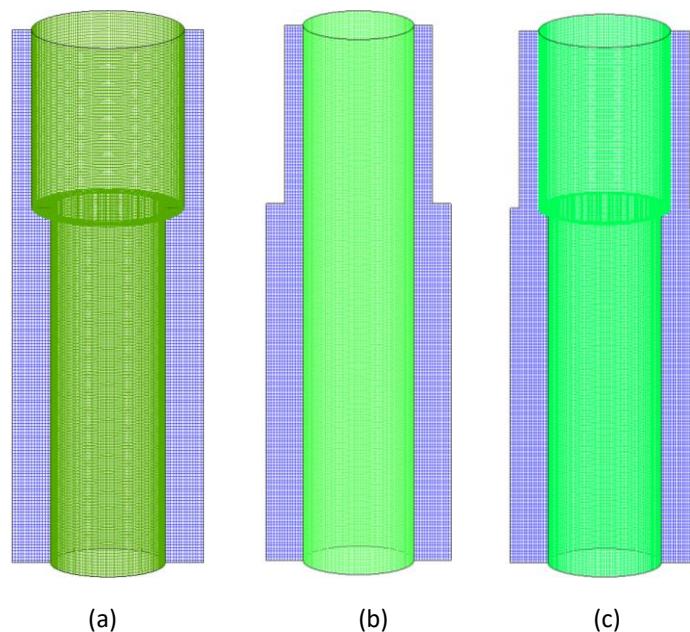


Figure IV. 55 Schéma des géométries de maillage des systèmes de Taylor-Couette : (180 cellules dans la direction axiale et 240 cellules dans les directions azimutales)

Le problème est simulé numériquement à l'aide du progiciel CFD, Ansys Fluent, basé sur la méthode des volumes finis. Le schéma PRESTO (PREssure STaggering Option) a été utilisé pour le schéma de discrétisation spatiale de la pression, le schéma PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) utilisé pour le couplage pression-vitesse et les équations de quantité de

mouvement sont calculées à l'aide du MUSCL de troisième ordre (Monotone Upstream-Centred Schemes for Conservation Laws).

Dans le contexte de l'étude de la dynamique des fluides computationnelle sur l'écoulement entre deux cylindres en rotation, il est crucial de comprendre comment les tourbillons de Taylor sont modifiés lorsque la moitié de la paroi supérieure est remplacée par le fluide.

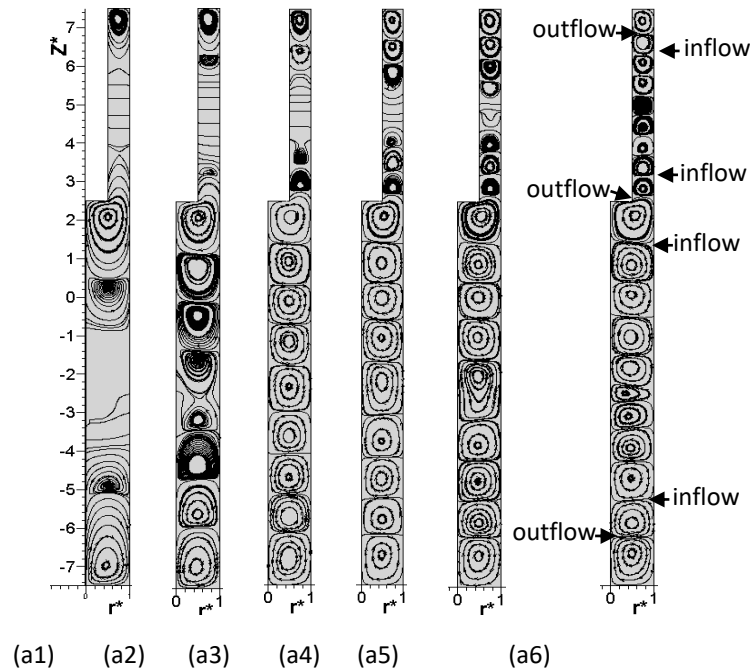


Figure IV. 56 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (a) pour différentes valeurs de nombre de Taylor (a1) $Ta = 7.42$, (a2) $Ta = 14.56$, (a3) $Ta = 22.28$, (a4) $Ta = 29.71$, (a5) $Ta = 37.13$ et (a6) $Ta = 44.56$

Dans notre travail, nous avons étudié trois cas où un demi-plateau supérieur est remplacé par un fluide renfermant dans un espace annulaire de rapport d'aspect similaire à celui de l'écoulement principal dans le système de Taylor-Couette. Les résultats de la dynamique des fluides computationnelle sur le développement des tourbillons sont présentés sur la figure IV.56 en fonction des valeurs du nombre de Taylor. Avec $Z^* = Z / D$ et $r^* = (r - Ri) / D$. Au plus, pour une petite valeur du nombre de Taylor, $Ta < 7.42$, seules les cellules proches des parois d'extrémité, sont présentes dans l'espace annulaire, correspondant au pompage d'Ekman ou interaction entre le flux principal et les plaques d'extrémité. À la variation du rayon du cylindre intérieur, le vortex pénètre dans l'espace étroit. A $Ta = 7.42$, des tourbillons de Taylor naissent.

A $Ta = 14.85$, les circulations d'Ekman diminuent de taille et d'autres tourbillons de Taylor se développent avec une faible intensité comparativement aux circulations d'Ekman. A $Ta = 22.85$, les tourbillons de Taylor sont entièrement développés dans un espace large, tandis qu'ils sont partiellement développés dans un espace annulaire étroit. A $Ta = 29.71$, un grand vortex de Taylor se forme au milieu d'un large espace. À $Ta = 44.56$ du grand vortex, deux vortex de Taylor sont formés et les vortex de Taylor sont entièrement formés dans un espace étroit. La rotation du cylindre intérieur génère une force centrifuge. Par conséquent, un écoulement est présent au niveau de la zone de séparation entre l'espace large et l'espace étroit. Le remplissage de l'espace annulaire par les tourbillons de Taylor n'est atteint que pour une valeur égale ou supérieure à une valeur de vitesse angulaire critique du cylindre intérieur en rotation correspondant à une valeur de nombre de Taylor critique Ta_c . Dans la Figure IV.58, une configuration géométrique fixe est considérée actuellement. Le demi-plateau supérieur qui est proche du cylindre intérieur est remplacé par le fluide. Le second demi-plateau supérieur est considéré comme typiquement accouplé au cylindre extérieur au repos. Par conséquent, le gradient de pression déséquilibré par la force centrifuge près de la paroi génère un mouvement radial, notamment un afflux au niveau de la zone de séparation entre l'espace étroit et large.

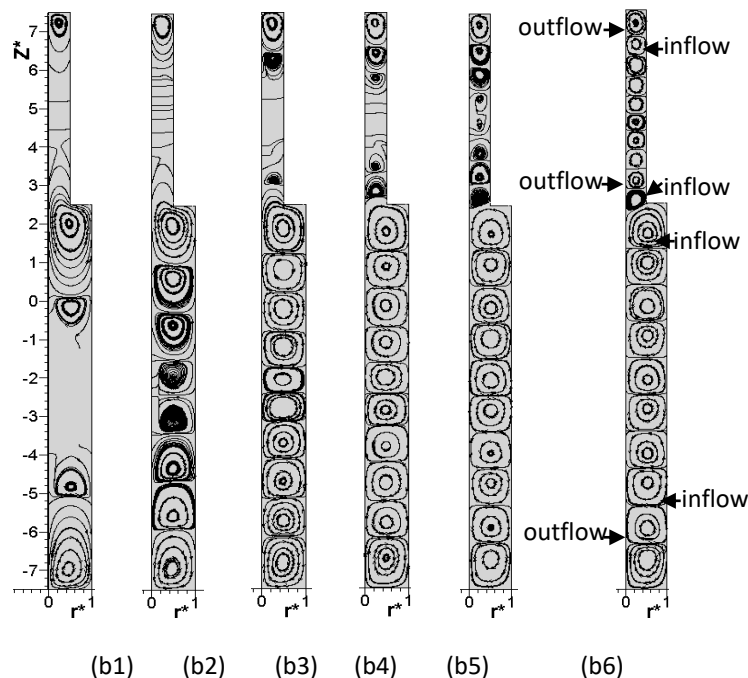


Figure IV. 57 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (b) pour différentes valeurs de nombre de Taylor (b1) $Ta = 7.42$, (b2) $Ta = 14.56$, (b3) $Ta = 22.28$, (b4) $Ta = 29.71$, (b5) $Ta = 37.13$ et (b6) $Ta = 44.56$

Le développement des tourbillons de Taylor est présenté pour différentes valeurs du nombre de Reynolds. L'espace annulaire large est comblé bien avant l'interstice étroit. Le vortex situé au rayon variable du cylindre extérieur pénètre dans l'espace étroit pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds $Ta < 37.13$.

Dans la figure IV.59, nous avons étudié l'effet de la variation des rayons des cylindres intérieur et extérieur. Il est clair que la variation de l'écart a un effet significatif sur l'écoulement des tourbillons de Taylor. Pour les faibles valeurs du nombre de Taylor, la circulation d'Ekman dans l'écoulement se développe près des parois d'extrémité supérieure et inférieure.

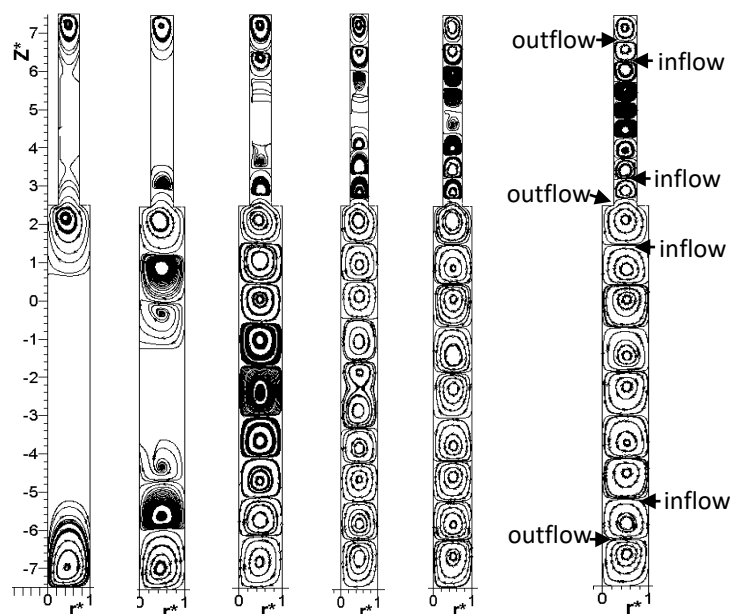


Figure IV. 58 Schéma du développement de tourbillons (vortex) de Taylor dans la configuration géométrique (c) pour différentes valeurs de nombre de Taylor (c1) $Ta = 7.42$, (c2) $Ta = 14.56$, (c3) $Ta = 22.28$, (c4) $Ta = 29.71$, (c5) $Ta = 37.13$ et (c6) $Ta = 44.56$

On note que le cylindre intérieur en rotation agit sur le fluide par une force centrifuge et que le cylindre extérieur réagit et génère un gradient de pression, développant un vortex avec un écoulement entre des espaces annulaires larges et étroits. Contrairement au sens de rotation de la première circulation cellulaire développée dans l'espace annulaire étroit de la configuration géométrique (a), le premier vortex tourne en sens inverse dans l'espace étroit des configurations géométriques (b) et (c).

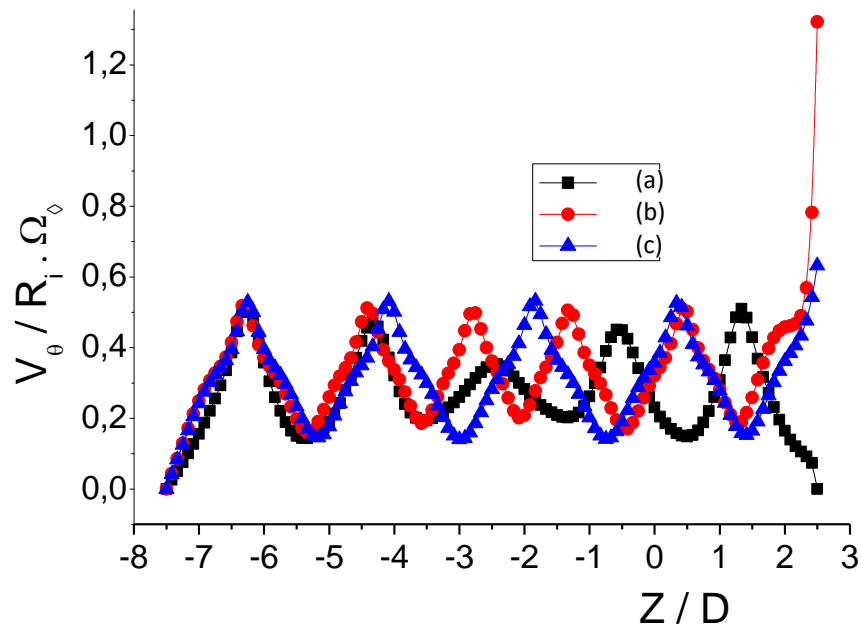


Figure IV. 59 Profil axial de la composante tangentielle de la vitesse sans dimension au milieu de l'espace large selon le plan (r^*, Z^*) , $\Gamma = 10$, $\eta = 0.66$, $Ta = 59.42$

Nous notons que la vitesse tangentielle de l'écoulement près des plaques d'extrémité est la même que la vitesse azimutale du cylindre intérieur en rotation. De plus, le déséquilibre entre la force centrifuge et la force du gradient de pression entraîne l'entrée et la sortie. Par conséquent, l'interaction entre les parois et le fluide génère la circulation d'Ekman qui apparaît près des parois d'extrémité. Sur la figure IV. 60, nous examinons le profil axial de la composante de vitesse tangentielle pour trois configurations géométriques. La composante de vitesse tangentielle est la vitesse linéaire de rotation du cylindre intérieur correspondant à $Ta = 59,26$. Considérons d'abord le cas (b) représenté sur la figure IV.60, nous constatons que la circulation d'Ekman reste presque, la même pour les trois configurations géométriques au voisinage de l'extrémité inférieure. Les écoulements tourbillonnaires de Taylor près du centre de l'anneau large sont sensiblement plus faibles. Dans le cas de (a), les tourbillons près du centre de l'espace annulaire ont une intensité plus grande et une taille plus petite que (b). Le sens de rotation du vortex de Taylor est opposé à sa rotation dans le cas (b). Elle est due à l'effet de rotation de la moitié du fond. Ensuite, dans le cas de (c), l'espace annulaire est situé entre le changement des rayons des cylindres intérieur et extérieur. Par conséquent, l'équilibre entre les forces centrifuges et de gradient de pression jouent un rôle important pour générer les tourbillons. Les tourbillons de Taylor près du centre de l'espace large sont uniformes et sont les plus grands en intensité en taille. Le changement de rayon du cylindre intérieur détermine le sens de rotation des tourbillons situés à l'écart d'une frontière fixe. La configuration géométrique (b) retarde

l'apparition des tourbillons de Taylor au centre de l'entrefer. La configuration géométrique (c) est la meilleure pour avoir des cellules de Taylor uniformes.

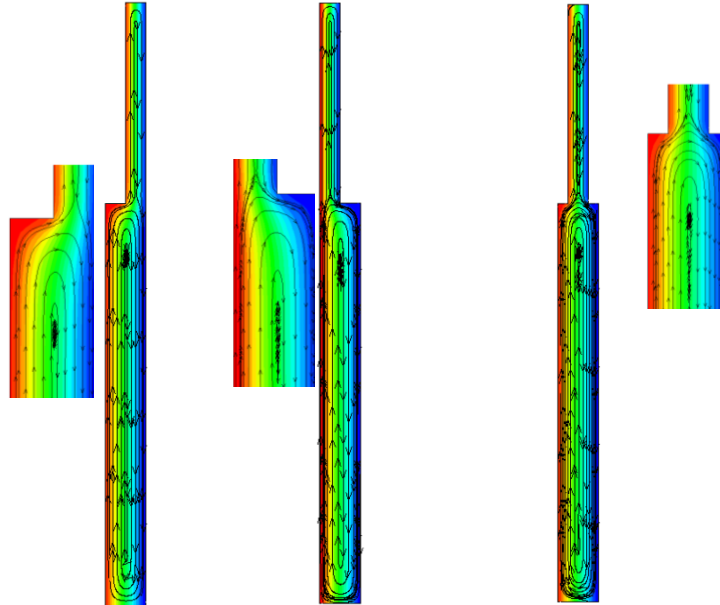


Figure IV. 60 Isotherme et lignes de courant dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 10^4$

Nous avons fait une investigation numérique sur la convection naturelle pour les trois cas (a), (b) et (c).

Les résultats présentés ci-dessous, montrent clairement que les lignes de courant montent d'en bas vers le haut au voisinage du cylindre intérieur considéré chaud et descendent vers le bas suivant la paroi du cylindre extérieur froid.

Le nombre de contrôle de la convection naturelle, est le nombre de Rayleigh Ra , $Ra = 10^4$.

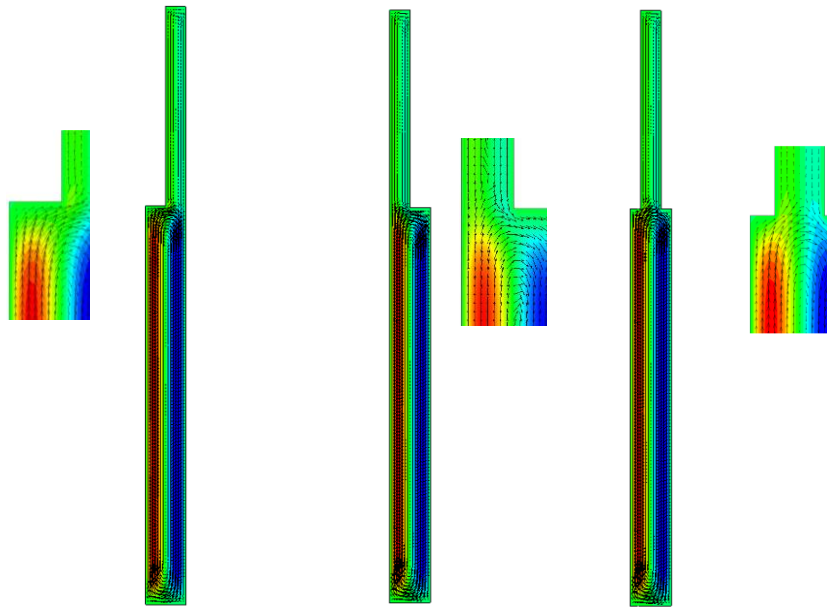


Figure IV. 61 Composante axiale de la vitesse et lignes de courant dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 10^4$

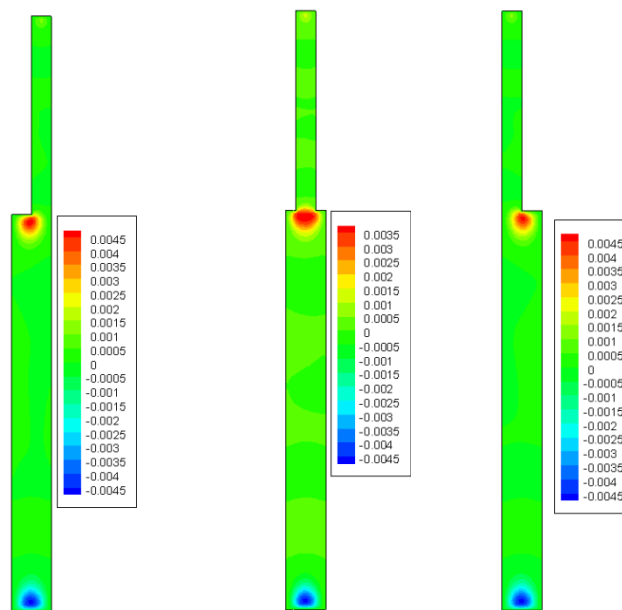


Figure IV. 62 Composante radiale de la vitesse dans le plan (r^*, Z^*) , avec la paroi interne est chaude et la paroi externe est froide $Ra = 10^4$

VII.2.3. Écoulement entre deux cylindre coniques

Dans cette partie, une investigation numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible contenu dans l'espace annulaire, formé par deux cylindres coniques coaxiaux a été menée. L'espace radial annulaire est considéré comme constant le long du système pour différents angles de conicité et le rapport d'aspect est fixe à $\Gamma = 5$. Le cylindre conique intérieur tourne avec une vitesse angulaire constante et le cylindre conique extérieur et les bords

d'extrémités sont maintenus immobiles. Les solutions numériques et analytiques pour l'écoulement de Couette pour des cylindres ont été comparées et l'écoulement hydrodynamique de Couette-Taylor conique est simulé pour différents angles de conicité. L'effet de l'angle de conicité sur la formation des motifs et de la structure de l'écoulement est simulé. Le mouvement en spirale du fluide pour différents nombres de Taylor est mis en évidence, les tracés des profils de champ hydrodynamique et de vitesse sont présentés.

De plus, la géométrie autre que le problème circulaire droit de Taylor-Couette est étudiée [60], Sprague et al. ont étudié numériquement et expérimentalement les tourbillons de Taylor adaptés dans des géométries axisymétriques discontinues en contournant la géométrie du cylindre intérieur. Les tourbillons de Taylor adaptés en continu avec une variation axiale du rayon intérieur et extérieur sont étudiés [37, 61]. Les tourbillons de Taylor dans l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux dont l'un a un changement de rayon sont étudiés [62]. Cette étude porte sur l'apparition de tourbillons de Taylor dans un écoulement de fluide visqueux incompressible entre deux cylindres en rotation avec une variation de l'espace annulaire. Nous analysons l'impact du changement dans le rayon intérieur, le rayon extérieur et les deux. Le cylindre intérieur tourne et le cylindre extérieur est au repos. Nous effectuons des variations de rayon pour étudier les profils axiaux des composantes de vitesse.

La structure du modèle hydrodynamique et le comportement de l'écoulement de Taylor-Couette dépendent fortement de la taille et de la géométrie du système [3]. De plus, un grand nombre d'études expérimentales, théoriques et numériques de l'apparition des tourbillons de Taylor ont été réalisées dans des géométries autres que les cylindres circulaires droits coaxiaux [32]. L'apparition et le comportement des tourbillons de Taylor résultent des forces centrifuges combinées et de l'écoulement de base tridimensionnel dû à diverses forces centrifuges sur la surface du cylindre conique et à la coexistence de motifs sous-critiques et supercritiques dans l'espace annulaire à la même vitesse de rotation [36]. Ce travail se concentre sur le mouvement en spirale tridimensionnel d'un fluide visqueux incompressible entre cylindres coniques coaxiaux. Le cylindre conique intérieur tourne et l'extérieur est au repos.

Deux types de paramètres de contrôle de l'écoulement, les paramètres géométriques et les paramètres dynamiques.

Paramètres géométriques sont :

$\eta_{top} = R_{1max} / R_{2max}$ est rapport des rayons supérieurs.

$\eta_{bot} = R_{1min} / R_{2min} = 0.75$ est rapport de rayon inférieur.

$\Gamma = H / d = 5$ est le rapport d'aspect.

$\delta = d / R_{1min} = 0.33$ est le rapport de l'espace radial.

$d = R_{2max} - R_{1max} = R_{2min} - R_{1min}$ est l'espace annulaire.

$Z^* = \frac{Z}{d}$ est la hauteur adimensionnelle.

$r^* = (r - R_{1min})/d$ est le rayon adimensionnel.

Paramètres dynamiques sont :

$Ta = Re \cdot \delta^{\frac{1}{2}}$ est le nombre de Taylor.

$Re = \frac{R_{1max} \cdot \Omega \cdot d}{\nu}$, où Ω est la vitesse angulaire du cylindre interne

$T^* = Ta / T_c$, $T^* = Ta / T_c$, T^* est le nombre de Taylor et T_c est le nombre de Taylor critique du système Taylor-Couette cylindrique.

Conditions aux limites

En $Z = H / 2$ ($\Omega = 0$) et la plaque d'extrémité supérieure $U = V = W = 0$

$Z = -H / 2$ ($\Omega = 0$) sur la plaque d'extrémité inférieure $U = V = W = 0$

$r = Z \cdot tg\alpha + R_{2min}$ ($\Omega = 0$) cône cylindrique extérieur $U = V = W = 0$

$r = Z \cdot tg\alpha + R_{1min}$ ($\Omega \neq 0$) cône cylindrique intérieur $U = W = 0$ and $V = \Omega$

. r(Z)

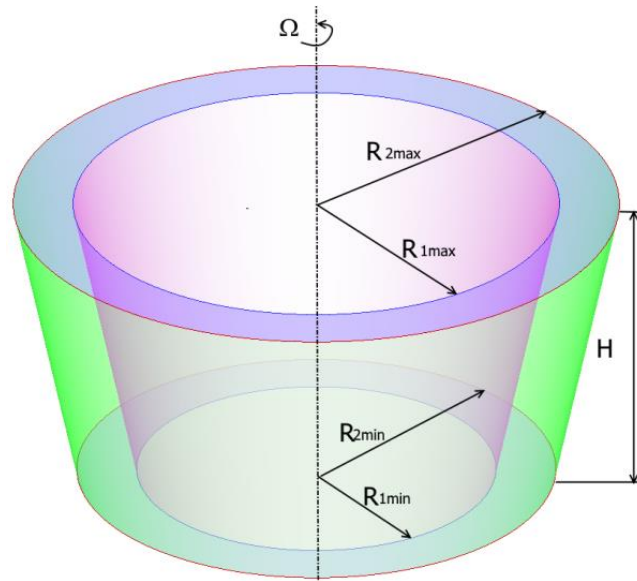


Figure IV. 63 Schéma de système d'écoulement Couette conique

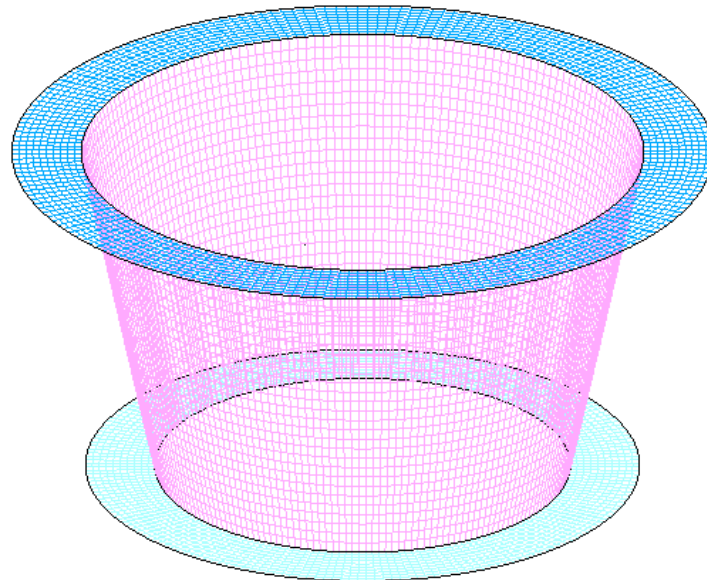


Figure IV. 64 Maillage du système d'écoulement Couette conique (768000 cellules)

La figure 3 montre l'évolution de la vitesse angulaire adimensionnelle en fonction de la position radiale pour différentes valeurs relatives du nombre de Taylor. Ces tracés sont donnés à différents niveaux $Z^* = 0, 0.66, 1.14, 1.7$ et 2.17 , correspondant à la milieu de la hauteur de l'espace annulaire (a), au milieu de la cellule de Taylor (b), à la frontière des cellules de Taylor et d'Ekman (c), au milieu de la cellule d'Ekman (d) et à proximité de la plaque d'extrémité supérieure du système d'écoulement, respectivement. Loin des plaques d'extrémité, les résultats numériques concordent bien avec le profil de Couette pour les petites valeurs relatives du nombre de Taylor inférieures ou égales à $T^* = 1$ qui correspond à la valeur critique du nombre

de Taylor, l'écoulement est purement de Couette. Les tracés sont superposés à l'exception de $Z^* = 2.17$ près de la plaque d'extrémité supérieure du système. La figure 3a indique que pour des valeurs de nombre de Taylor supérieures à la valeur critique $T^* = 1$, le gradient de vitesse angulaire décroît fortement jusqu'à mi-écart et décroît légèrement près de la paroi externe à mi-hauteur qui représente la position séparant deux cellules de Taylor.

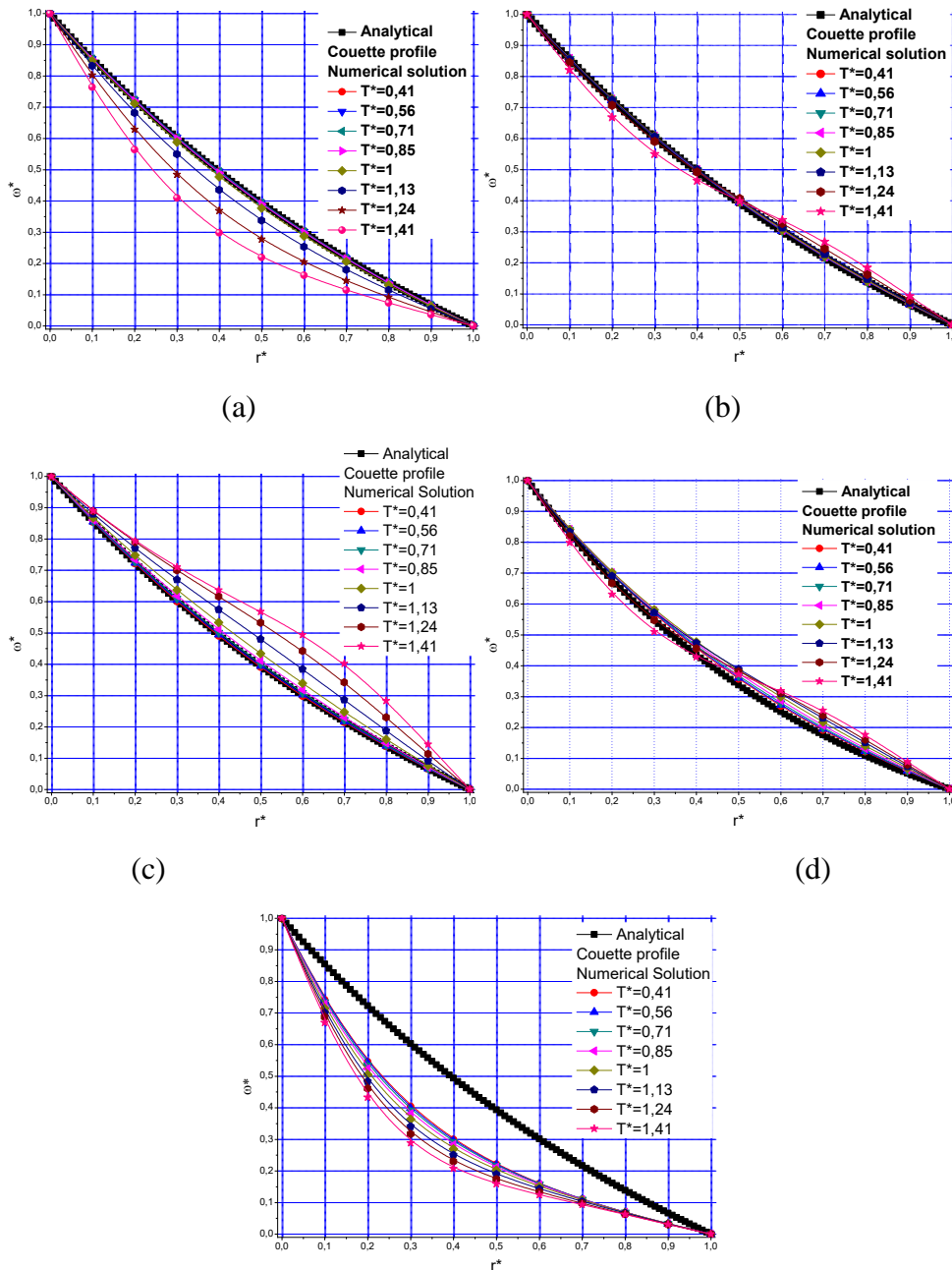


Figure IV. 65 Vitesse angulaire en fonction du nombre de Taylor relatif ; (a) $Z^* = 0$, (b) $Z^* = 0.66$, (c) $Z^* = 1.14$, (d) $Z^* = 1.7$ et (e) $Z^* = 2.17$ pour $\alpha = 0^\circ$



Figure IV. 66 Mouvement en spirale- hélicoïdal du fluide à l'intérieur de l'espace annulaire, $T^* = 1.24$

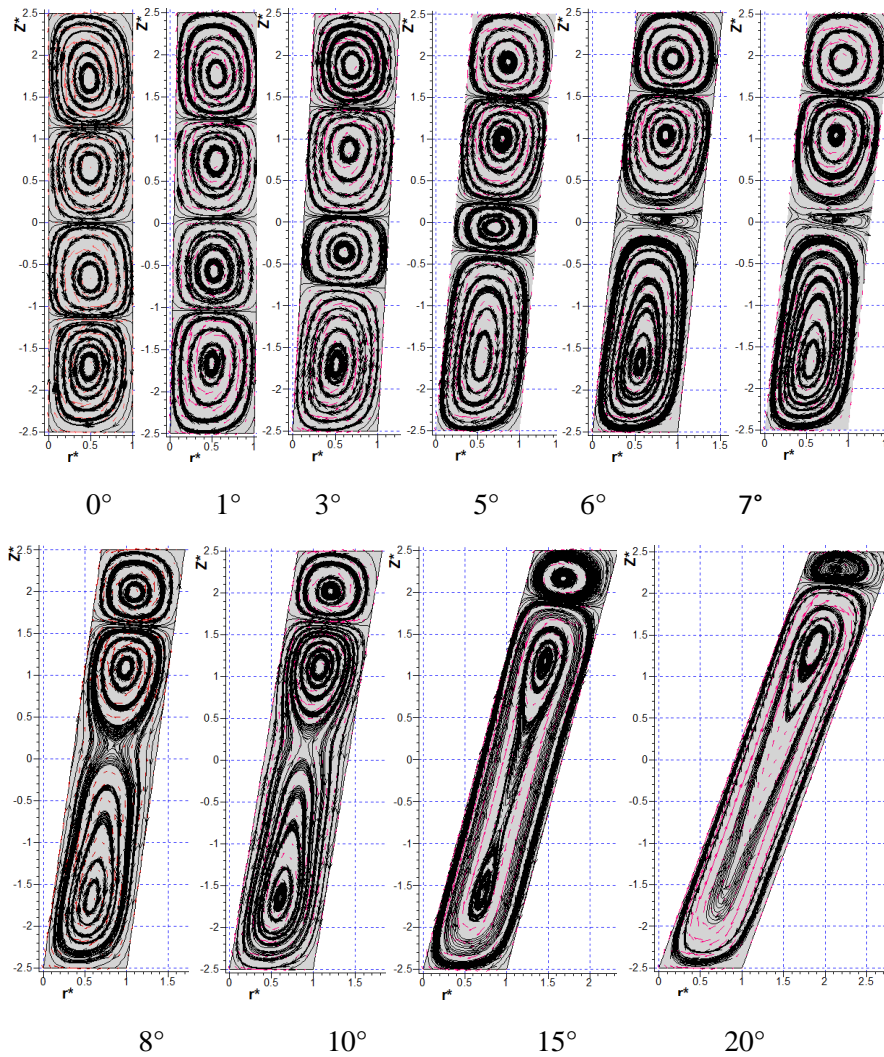


Figure IV. 67 Lignes de courant (U, W) dans le plan (r^*, Z^*) pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$

Cependant, le flux maintient le type de Couette jusqu'à $T^* = 1.41$ au niveau de la ligne horizontale passant par le milieu de la cellule de Taylor. Pendant ce temps, un point d'intersection avec le profil de Couette apparaît à $r^* = 0.5$ et $\omega^* = 0.4$, comme le montre la figure IV. 65b. La vitesse angulaire augmente comparativement au flux de Couette pour la position séparant les cellules de Taylor et d'Ekman (Figure IV. 65c). Les résultats rapportés montrent clairement l'effet de l'angle de conicité du système conique de Taylor-Couette sur l'écoulement et les vortex de Taylor (TVF).

La figure IV. 66 montre les résultats de calcul des lignes de courant dans le plan (r^*, Z^*), pour différents angles de conicité à $T^* = 1,24$. Une symétrie parfaite de la taille et de la forme des cellules par rapport au plan horizontal médian dans des cylindres circulaires. Pour les cas

de cylindres coniques, les cellules changent de taille et de forme, la structure d'écoulement perd la symétrie par rapport au plan vertical médian. La transition de quatre à trois cellules est atteinte à 6 degrés, l'effet de l'angle sur le l'écoulement et sa structure est clair, une cellule de Taylor a disparu et une fusion et une coalescence de deux cellules pour des angles de conicité supérieurs à 6 degrés.

Le coefficient de frottement moyen sur les cylindres coniques intérieur et extérieur est fortement affecté par l'augmentation de l'angle de conicité. Ces investigations nous a permet mieux observer la formation des tourbillons en spirale-hélicoïdal. L'évolution du coefficient de frottement suit la formation du motif des cellules de Taylor et Ekman. Elle dépend du sens de rotation des tourbillons, qui est chargé de générer des zones de pression dynamique forte en cas d'un écoulement entrant, et de pression dynamique faible en cas d'écoulement sortant.

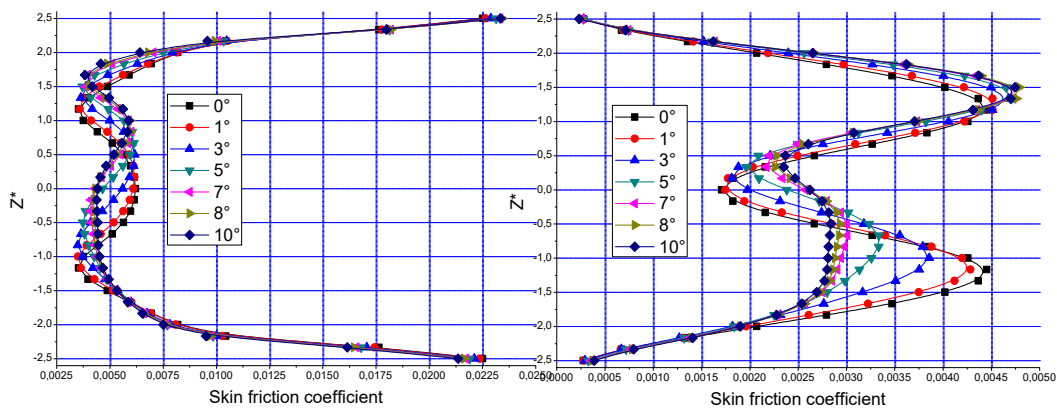


Figure IV. 68 Coefficient de frottement sur les parois des cônes cylindriques intérieur et extérieur pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$

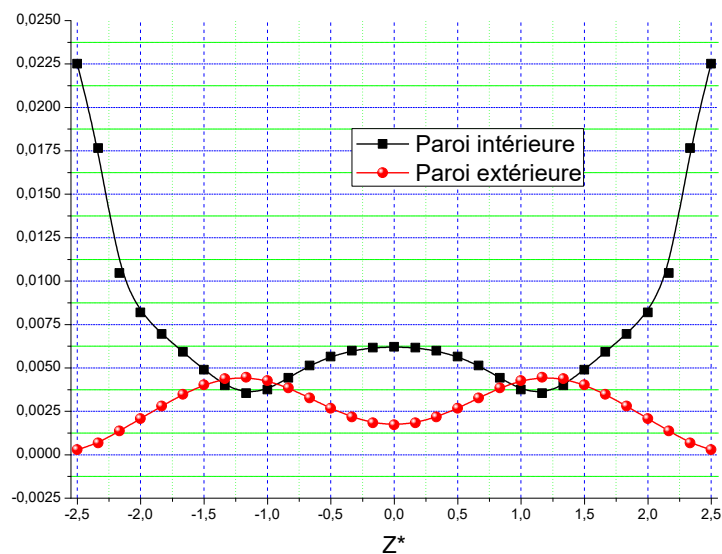


Figure IV. 69 Coefficient de frottement sur les parois intérieur et extérieur pour l'angle de conicité 0° (forme cylindrique), $T^* = 1.24$

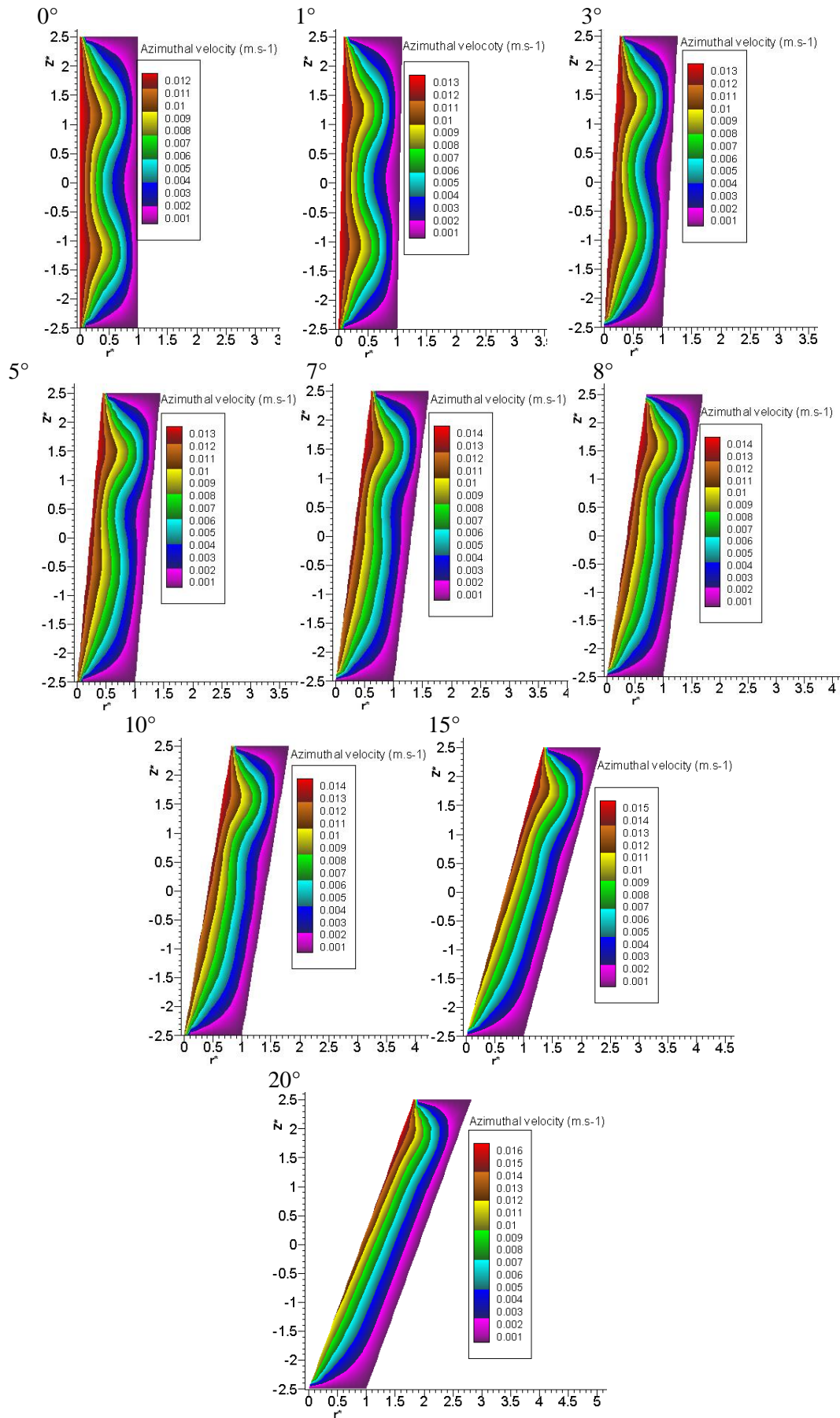


Figure IV. 70 Distribution de la composante azimutale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) pour différents angles de conicité, $T^* = 1.24$

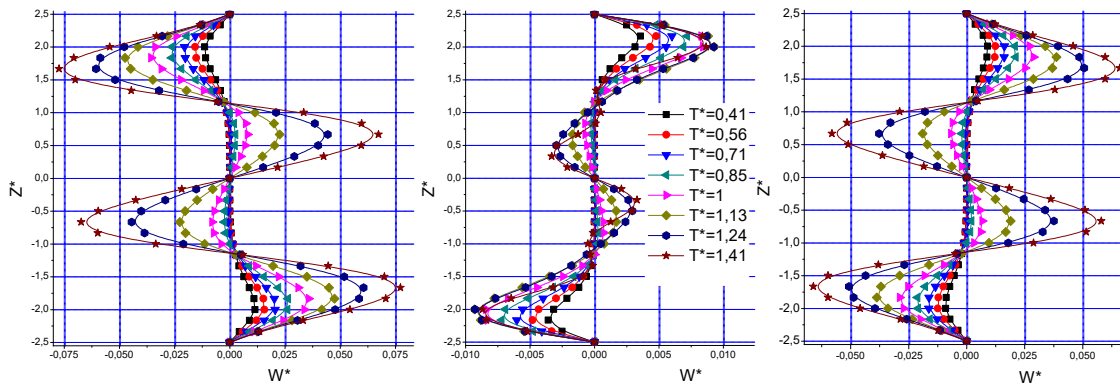


Figure IV. 71 Profil de la composante axiale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour différents rayons $r^* = 0.25$, $r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ pour le cas cylindrique

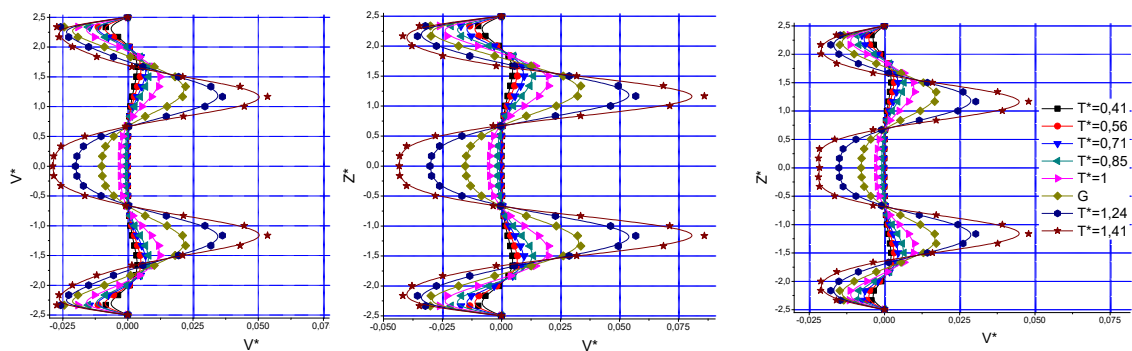


Figure IV. 72 Profil de la composante radiale de la vitesse de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour différents rayons $r^* = 0.25$, $r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ pour le cas cylindrique

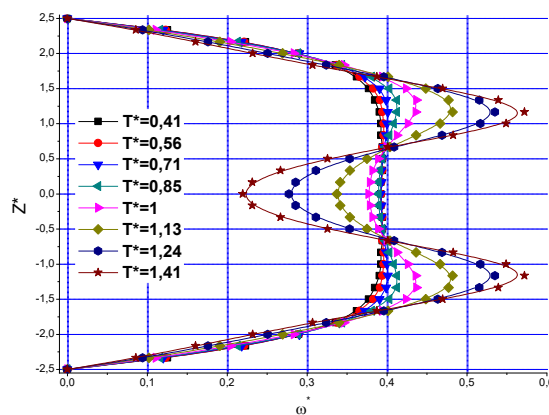


Figure IV. 73 Profil de la vitesse angulaire de l'écoulement dans le plan (r^*, Z^*) en fonction de T^* pour un rayon = 0.5 pour le cas cylindrique

L'effet de l'angle de conicité sur la distribution de la vitesse azimutale est étudié numériquement. On constate que l'écoulement perd sa symétrie par rapport au plan horizontal passant par le point $Z^* = 0$.

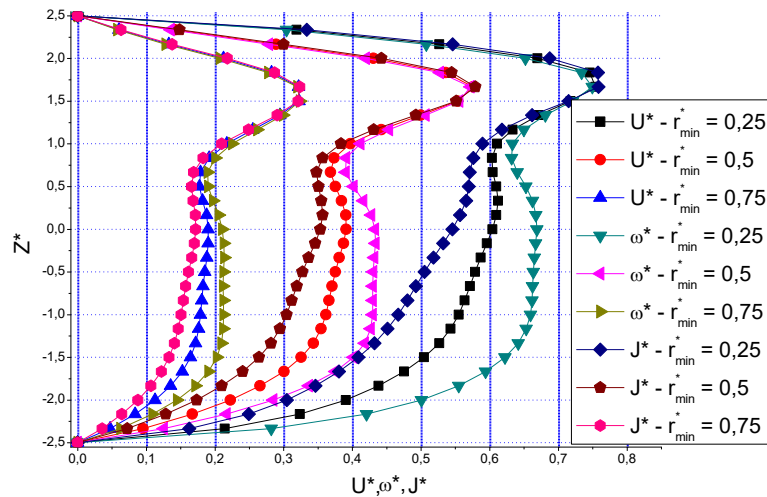


Figure IV. 74 Profils de la vitesse azimutale, de la vitesse angulaire et du moment cinétique pour $T^* = 1.41$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différents rayon $r^* = 0.25, r^* = 0.5$ et $r^* = 0.75$ $\alpha = 15^\circ$

L'angle de conicité joue un rôle important dans le passage d'une onde azimutale à une onde en spirale-hélicoïdale, ainsi qu'il a un impact direct sur le retardement ou l'avancement de l'évolution et l'apparition des cellules en fonction du nombre de Taylor. En outre, la variation de l'angle de conicité fait varier le transport du moment cinétique pour une même valeur de la vitesse angulaire.

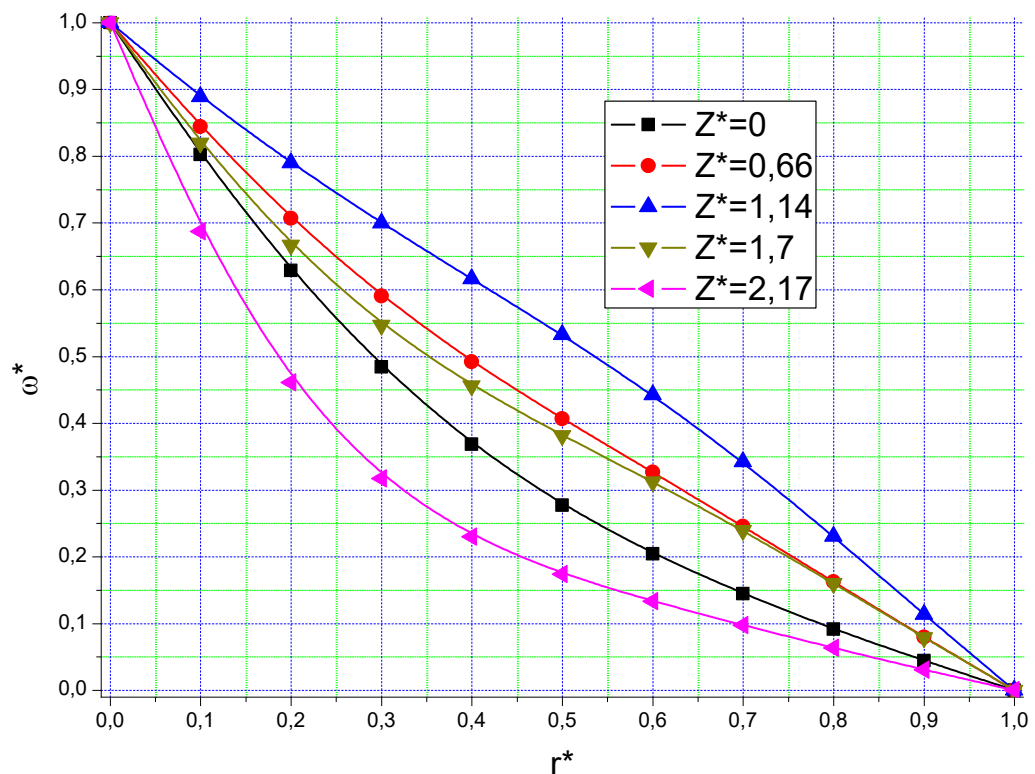


Figure IV. 75 Profils de la vitesse angulaire en fonction du rayon r^* pour $T^* = 1.24$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différentes hauteurs $Z^* = 0, Z^* = 0.66, Z^* = 1.14, Z^* = 1.7, Z^* = 2.17$ et $\alpha = 0^\circ$

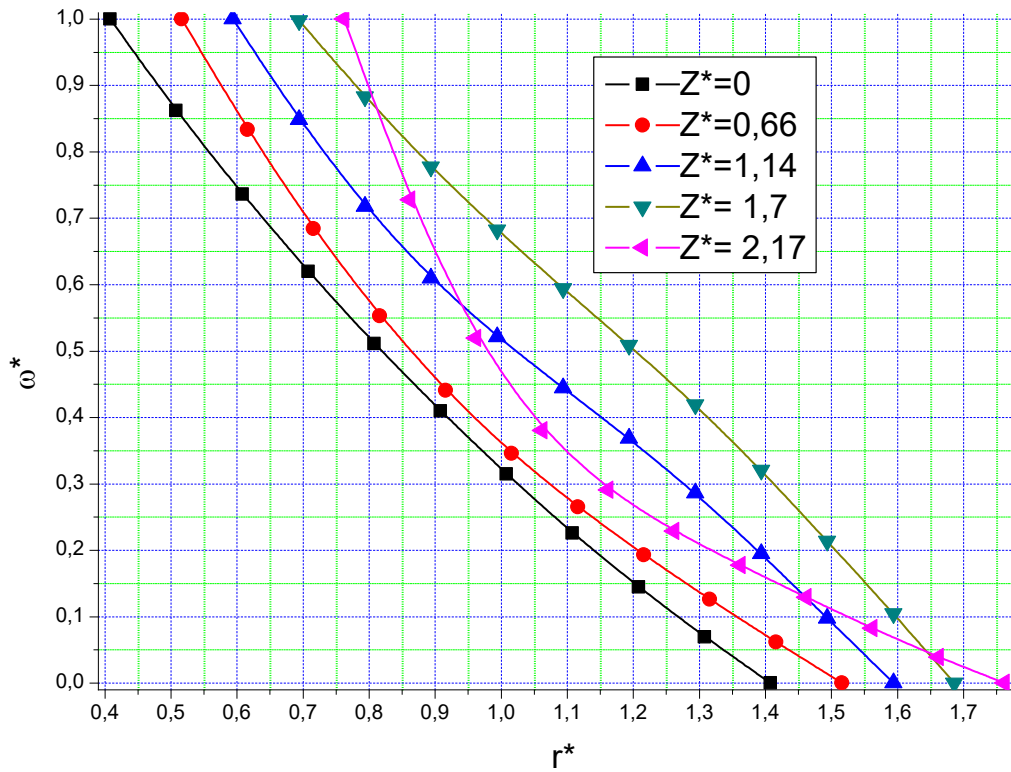


Figure IV. 76 Profils de la vitesse angulaire adimensionnelle ω^* en fonction du rayon r^* pour $T^* = 1.24$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différentes hauteurs $Z^* = 0, Z^* = 0.66, Z^* = 1.14, Z^* = 1.7, Z^* = 1217$ et $\alpha = 15^\circ$

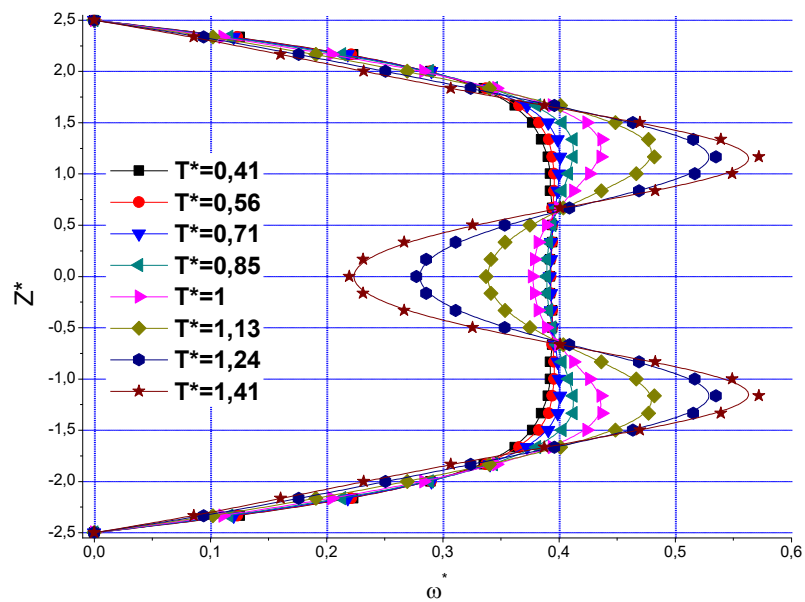


Figure IV. 77 Profils de la vitesse angulaire adimensionnelle ω^* en fonction de la hauteur Z^* pour $r^* = 0.5$ dans le plan (r^*, Z^*) pour différents nombre de Taylor T^* et $\alpha = 0^\circ$

Le mouvement en spirale-hélicoïdal du fluide et la formation des motifs dans le système d'écoulement coniques de type Taylor-Couette formés par deux cylindres coniques coaxiaux finis où le cylindre extérieur est stationnaire. Les résultats rapportés montrent clairement l'effet de l'angle de conicité sur l'écoulement vortex de Taylor (TVF), les tourbillons en spirale et la formation du modèle d'écoulement. Le coefficient de frottement moyen de la peau sur les cylindres coniques intérieur et extérieur est fortement affecté par l'augmentation de l'angle de conicité. Il est nécessaire de poursuivre les investigations pour mieux comprendre les mécanismes à l'origine de la formation des tourbillons spiralés et mettre en évidence les propriétés caractéristiques associées à ce type de régimes d'écoulement.

VII.2.4. Ecoulement dans la configuration géométrique de type Czochralski

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude des champs de pression et d'hydrodynamique tridimensionnels d'un écoulement d'un fluide électriquement conducteur dans la configuration géométrique de croissance cristalline de type Czochralski. Les phénomènes thermo-convectifs du fluide conducteur en mouvement sont soumis à l'effet du champ magnétique externe constant.

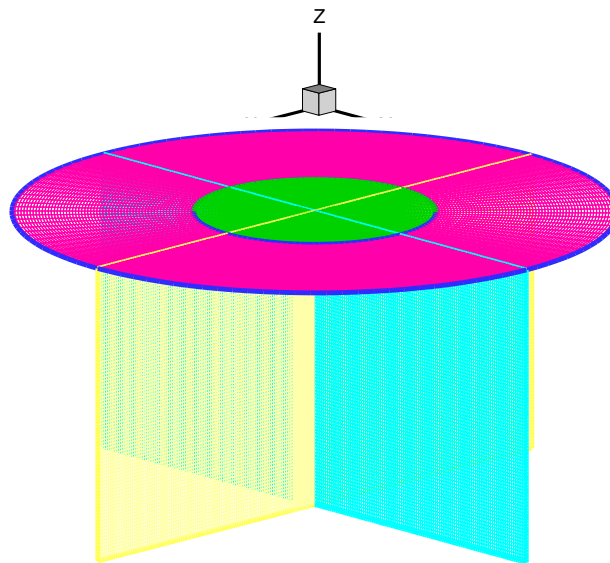


Figure IV. 78 Maillage utilisé dans la simulation dans les systèmes de croissance cristalline de type Cz

Dans ce travail, nous présentons le champ de pression tridimensionnel dans la croissance de Cz dans les cas sans et avec champs magnétiques verticaux et transversaux. Marangoni et la rotation des cristaux sont pris en compte.

Les équations tridimensionnelles de la quantité de mouvement et de la conservation de la chaleur décrivent l'écoulement et la température à l'état fondu. Le métal liquide électriquement conducteur est considéré comme un fluide newtonien visqueux et incompressible. L'approximation de Boussinesq a été supposée pour modéliser la convection naturelle.

Les propriétés thermo-physiques, les caractéristiques géométriques et les paramètres de contrôle considérés sont les suivants :

- le diamètre du creuset : $R_c = 50 \text{ mm}$;
- le diamètre de cristal : $R_s = 20 \text{ mm}$;
- le profondeur du liquide fondu : $h_c = 50 \text{ mm}$;
- la température du fluide : $T_f = 1683 \text{ K}$;
- la tension superficielle : $\sigma = -10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{mK}}$;
- la masse volumique : $\rho = 2.53 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$;
- la conductivité thermique : $\kappa = 64 \text{ W/mK}$;
- la chaleur spécifique : $C_p = 10^3 \text{ J/kgK}$,
- le coefficient de dilation thermique $\beta = 1.4 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
- la conductivité électrique : $\gamma = 1.23 \times 10^6 \text{ 1/m.Ohm}$
- la viscosité cinématique : $\nu = 3. \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$;
- l'intensité du champ magnétique $B = 0.1 \text{ Tesla}$;
- la vitesse de rotation du cristal $\Omega_s = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$;
- la vitesse de rotation du creuset $\Omega_c = -1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$;
- le nombre de Prandtl $\text{Pr} = 0.0113$;
- le nombre de Grashof $\text{Gr} = 5. \cdot 10^6 - 10^8$;
- le nombre de Marangoni : $\text{Ma} = 2.7 \times 10^3 - 2.73 \times 10^4$;
- le nombre de Reynolds magnétique : $\text{Re}_m = 4 \times 10^{-4} - 10^{-3}$;
- le nombre d'interaction magnétique : $\text{N} = 9$;

La valeur du paramètre d'interaction magnétique $\text{N}=9$ est la valeur minimale requise pour homogénéiser les champs de débit et de température. Les conditions de non-glissement ont été appliquées à l'interface cristal-bain fondu et à la surface du creuset. Les températures sur la paroi latérale et le fond du creuset et à l'interface de croissance ont été fixées à une température élevée et au point de fusion, respectivement. L'effet de la force thermo-capillaire à la surface

libre a été pris en compte. Il n'y a donc pas de mouvement vertical vers la surface libre et les contraintes de cisaillement sont équilibrées par les gradients de tension superficielle à la surface libre.

$$\mu \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \text{ à la surface libre.}$$

La condition de Marangoni est donnée par $V_z = V_\theta = 0$ et $\frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial r}$ où $Ma = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} R_c \frac{(T_c - T_f)}{\mu \alpha}$ désigne le nombre de Marangoni mesurant l'effet de la convection thermo-capillaire.

Le courant électrique à la frontière a été mis à zéro ; par conséquent, la masse fondue était électriquement isolée.

Après avoir effectué le test de maillage, nous choisissons un maillage structuré d'environ un million de nœuds pour les systèmes cylindriques et hémisphérique.

Le solveur 3D a été utilisé avec la discrétisation d'« upwind discretization » du second ordre pour la convection, l'algorithme « simple algorithm » pour le couplage pression-vitesse et le schéma PRESTO (PREssure STaggering Option) pour l'interpolation de pression.

La convergence est gérée en surveillant les résidus des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie.

Les résultats de la simulation numérique tridimensionnelle dans le procédé de la croissance cristalline de type Czochralski sans et avec champs magnétiques axial outransversal sont présentées.

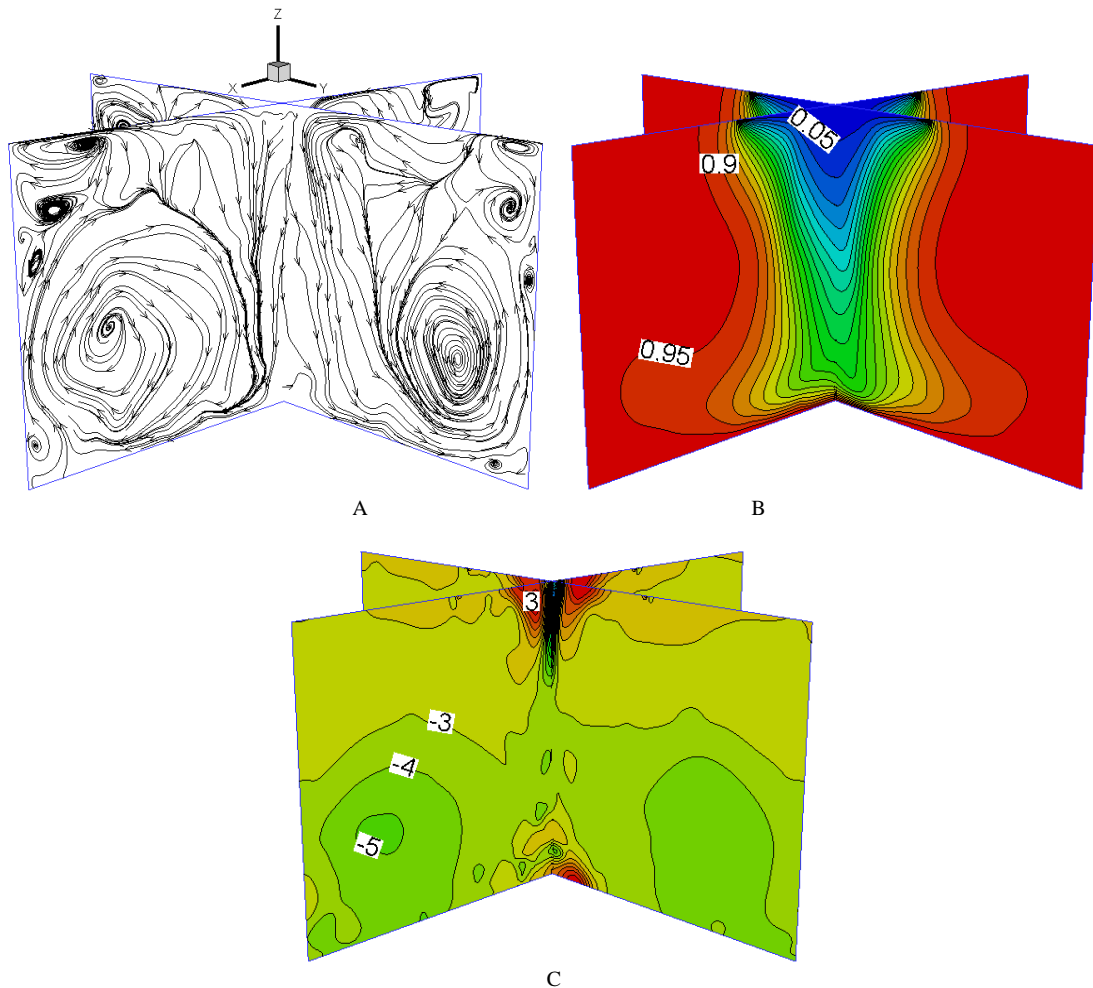


Figure IV. 79 Champ d'écoulement (A) isothermes (B) et isobares (C) dans le cas sans champ magnétique

Il est particulièrement intéressant de comprendre comment la pression change et de saisir sa relation et son couplage avec le débit et la température dans MCZ. La figure. IV 77 représente l'écoulement, les isothermes et les isobares dans le cas sans champ magnétique. La température et la pression d'écoulement sont tridimensionnelles, asymétriques et très compliquées. En raison des effets combinés de la flottabilité et des convections thermo-capillaires, un grand vortex apparaît dans le fluide.

Quatre petits autres tourbillons sont répartis de façon aléatoire dans le bain. Trois tourbillons sont situés près de la paroi latérale du creuset tandis que le quatrième est près du coin du creuset. Le comportement tridimensionnel de la température est plus fort près de l'axe de rotation de l'interface cristal-liquide au fond du creuset. La pression s'avère plus asymétrique que la température. Il est fortement lié au champ de vitesse et en particulier à la vorticité. La flottabilité et les convections thermo-capillaires induisent un grand tourbillon asymétrique dans la fonte au même emplacement que pour le vortex de vitesse. Des pressions plus élevées et des

gradients de pression plus élevés peuvent être observés sous l'interface cristal-liquide. Ils sont causés par la rotation du cristal.

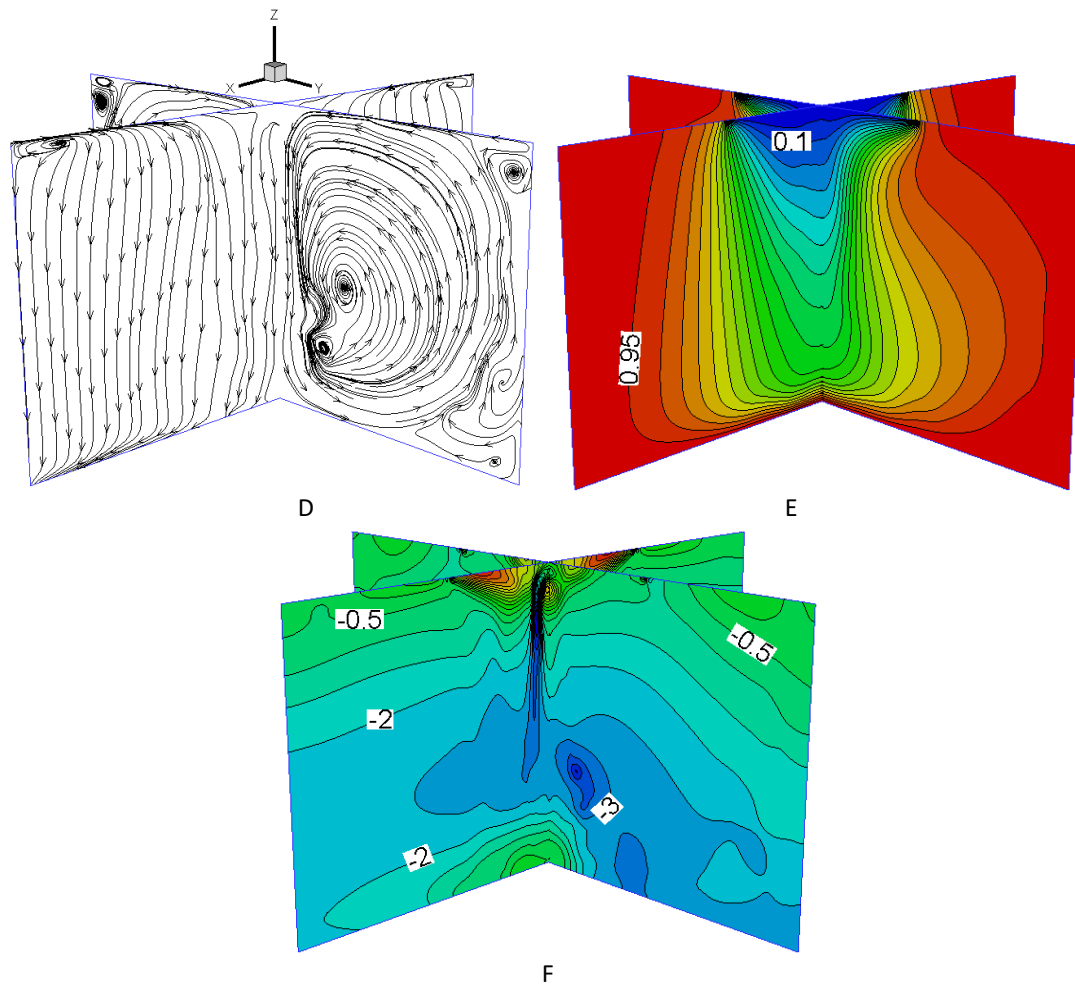


Figure IV. 80 Champ d'écoulement (D) isothermes (E) et isobares (F) dans le cas avec un champ magnétique transversal

La figure IV.78 montre qu'un champ magnétique transverse induit une brisure de symétrie. La température et la vitesse deviennent non axisymétriques. L'intensité du flux est affaiblie dans tout le liquide mais elle est quasi-nulle dans le plan xz car la force de Lorentz est perpendiculaire à ce plan. La température est également homogénéisée et la forme sinueuse des isothermes change en ligne droite. La pression est également très sensible au champ magnétique transverse. Il perd sa symétrie mais devient plus uniforme dans le plan de la normale Oz .

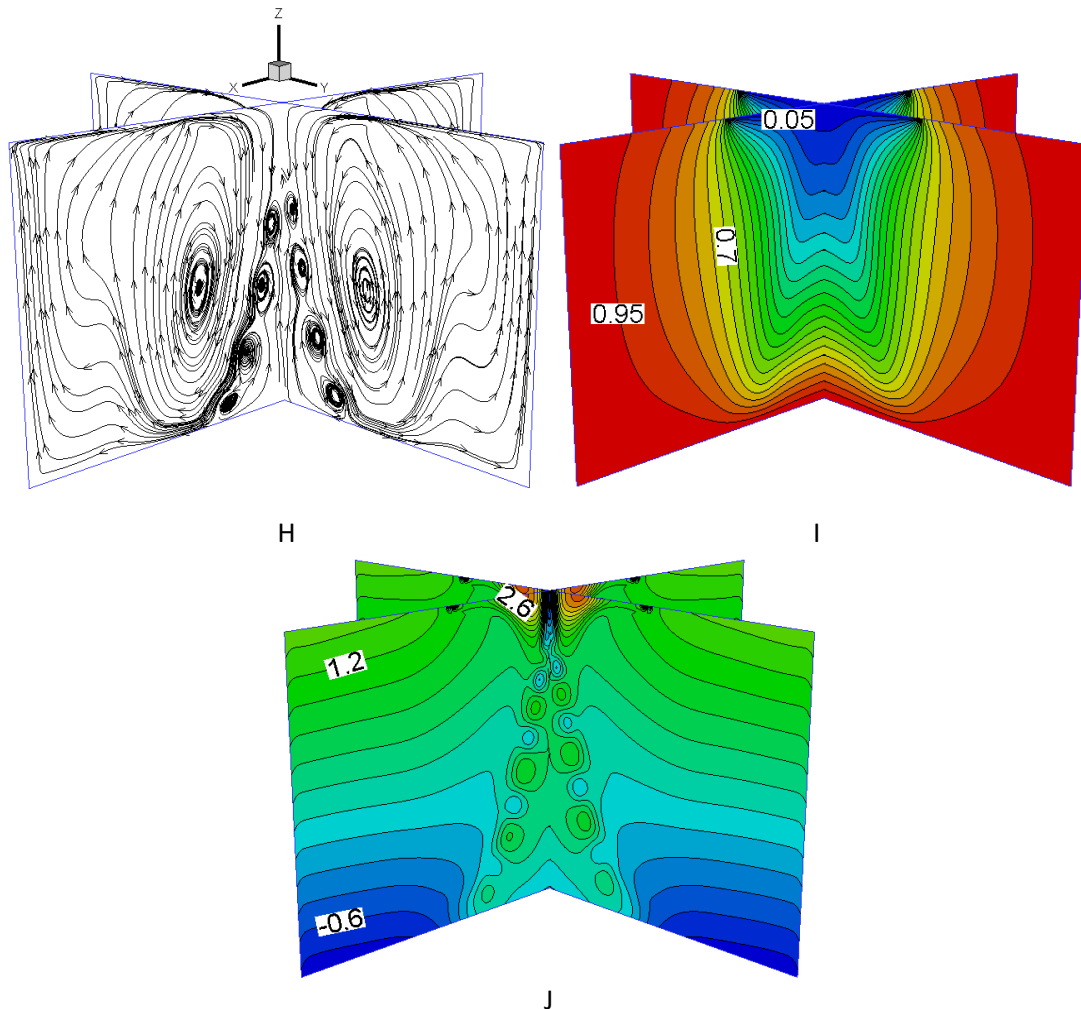


Figure IV. 81 Champ d'écoulement (H) isothermes (I) et isobares (J) en présence du champ magnétique axial

L'effet du champ magnétique axial sur l'écoulement, la température et la pression de la masse fondue est illustré à la figure IV79. Le mouvement radial de fluide conducteur induit un courant électrique dans la direction azimutale. Par conséquent, la force de Lorentz supprime la vitesse radiale du fluide. Grâce au champ magnétique axial, le débit, la température et la pression deviennent axisymétriques. Le centre du grand vortex se déplace vers l'axe et la convection de flottabilité est ainsi affaiblie. Les quatre petits tourbillons sont maintenant alignés et mieux répartis dans un interstice conique. Les particules de fluide à l'intérieur ont une forme conique, ont leur propre modèle d'écoulement. Ils divisent le liquide en deux parties, la première partie est à l'intérieur du cône et la seconde à l'extérieur. Ces tourbillons sont similaires aux tourbillons de Taylor dans l'écoulement entre deux cylindres coniques (l'intérieur tourne et l'extérieur au repos). La température ne reflète pas la présence de ces tourbillons. Cependant, le champ de pression apparaît comme un paramètre très sensible. Les isobares forment des tourbillons dans la même position que pour la vitesse.

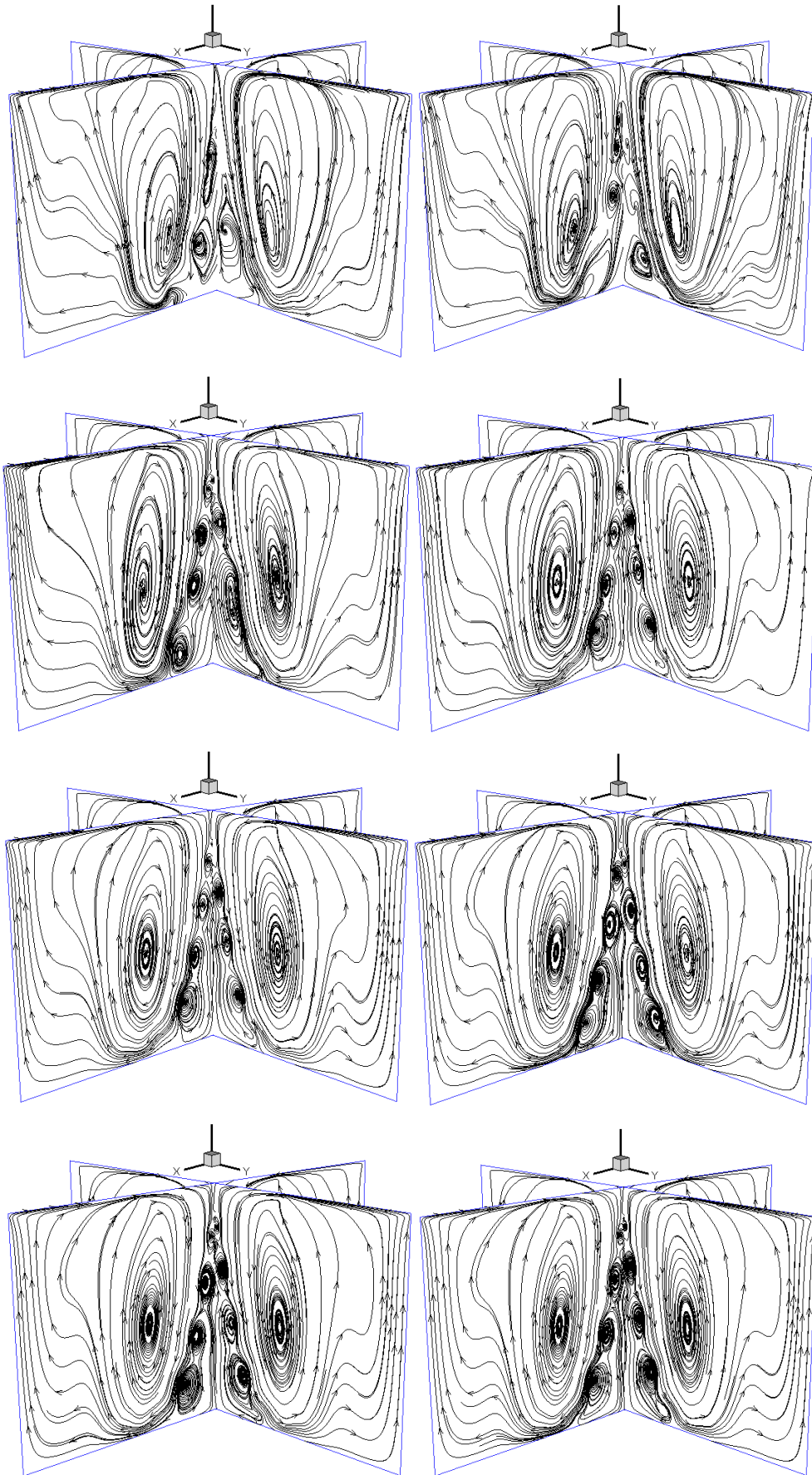


Figure IV. 82 Apparition de tourbillons transitoires à différents stades en présence du champ magnétique axial

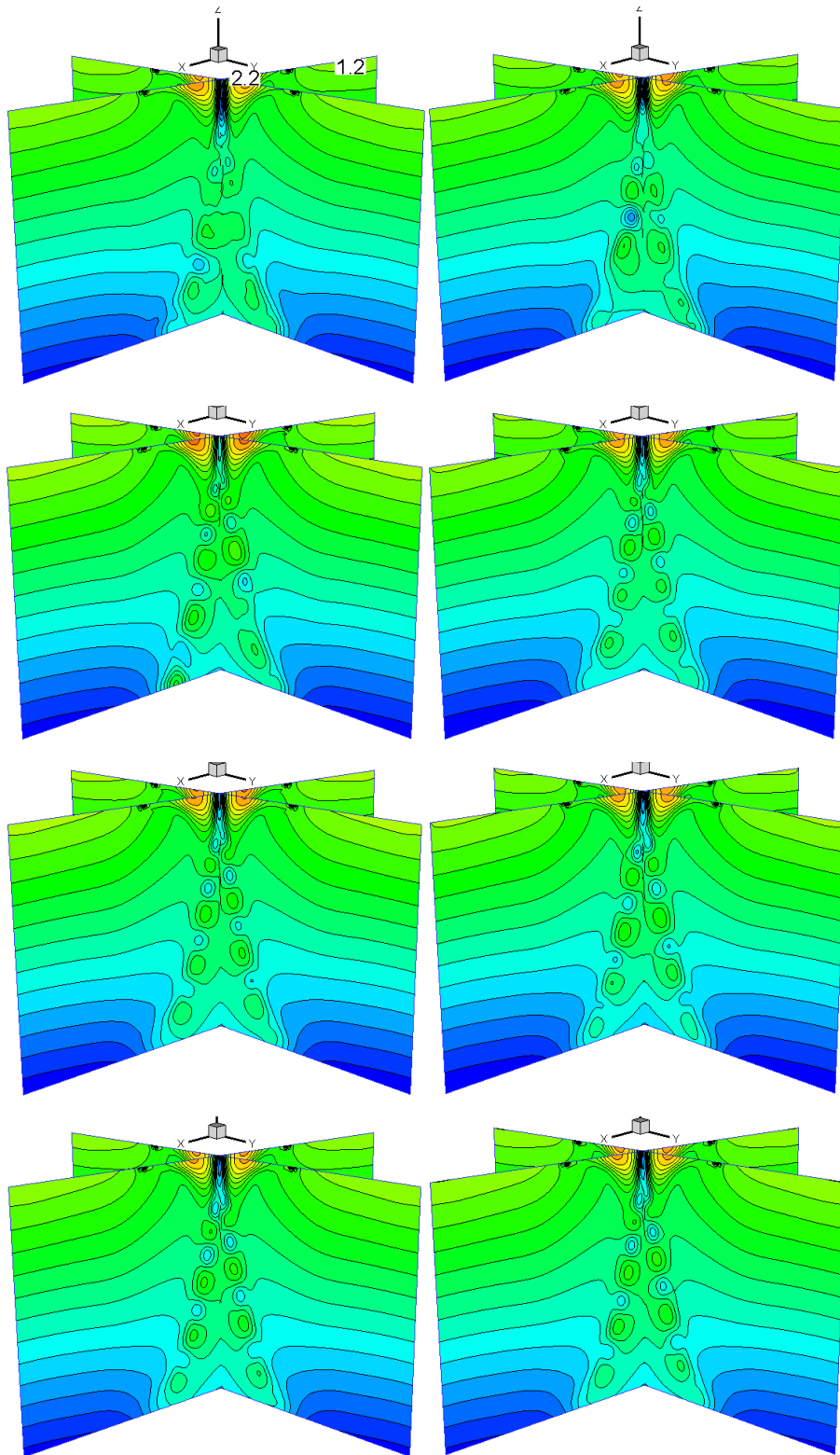


Figure IV. 83 Apparition des zones d'isobares ressemblantes aux tourbillons hydrodynamique en présence du champ magnétique axial

Huit tourbillons de pression sont formés par des isobares de chaque côté. Chaque tourbillon de vitesse correspond à deux tourbillons isobares. Sous champ magnétique axial, la forme sinueuse des isothermes disparaît et la température devient plus homogène. Les isothermes deviennent symétriques et aplatis sous l'interface cristal-fluide indiquant ainsi que la forme de l'interface cristal-liquide est moins incurvée que dans le cas sans champ magnétique.

La figure IV.80 représente l'apparition et l'évolution transitoire des tourbillons de Taylor au cours de huit étapes. Au premier stade, un seul tourbillon est présent de chaque côté. Les autres tourbillons seront générés après, aux troisième et quatrième phases. Les trois dernières étapes sont très similaires indiquant ainsi que le régime de l'écoulement est bien établi.

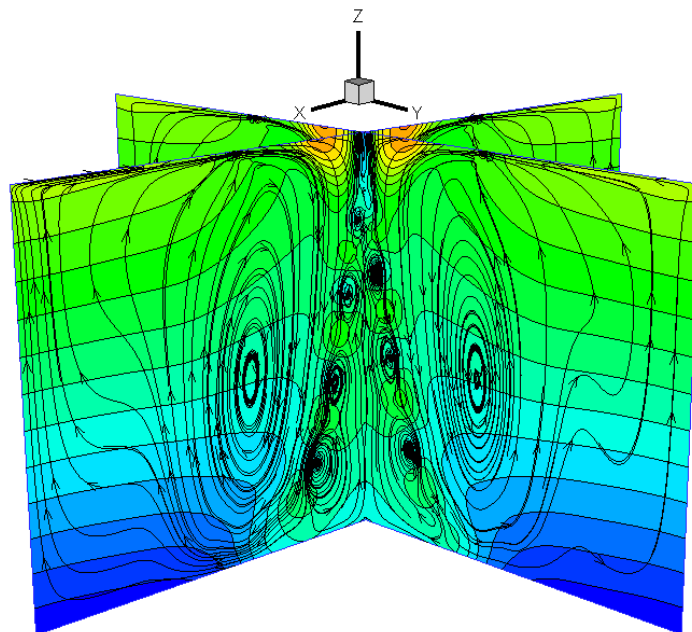


Figure IV. 84 Superposition des isobares sur les vortex de Taylor

La pression donne plus d'informations ; il prédit l'apparition de presque tous les tourbillons et leurs positions plus tôt au premier stade, comme le montre la figure IV.81.

La figure IV. 82 montre une superposition quasi-parfaite des isobares sur les vortex de Taylor, contrairement à la figure IV. 83 montre que le champ de température n'est pas lié à la croissance de ces tourbillons car les isothermes restent les mêmes de la première à la dernière étape.

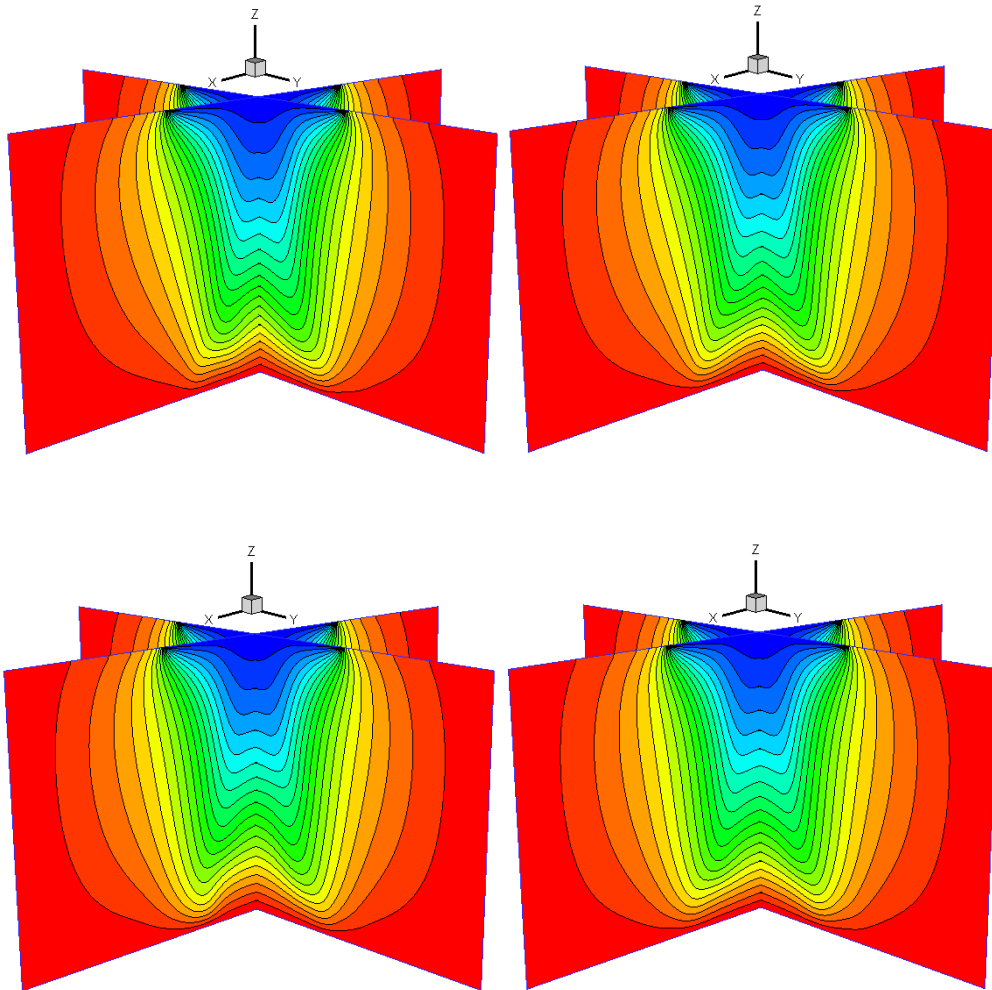


Figure IV. 85 Isothermes avec champ magnétique pour quatre premières étapes

La pression s'avère être une fonction dynamique très importante qui est fortement liée aux paramètres de croissance comme les nombres de Grashof et Marangoni et Reynolds La pression est plus sensible que la température.

Le champ de pression est fortement lié à la vitesse du tourbillon : un vortex dans le sens des aiguilles d'une montre induit par convection forcée est présent dans le fluide. La distorsion des isobares révèle l'emplacement, la forme et la position centrale de ce vortex.

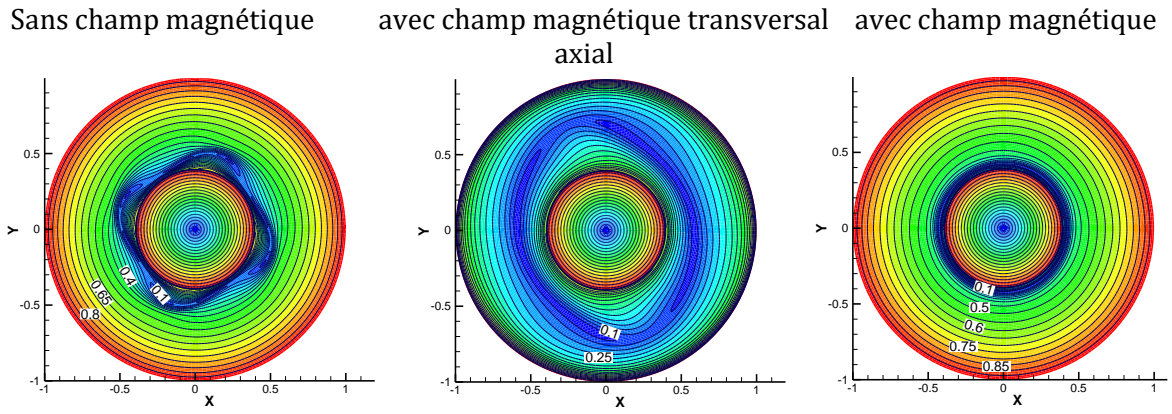


Figure IV. 86 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vitesse à la surface libre

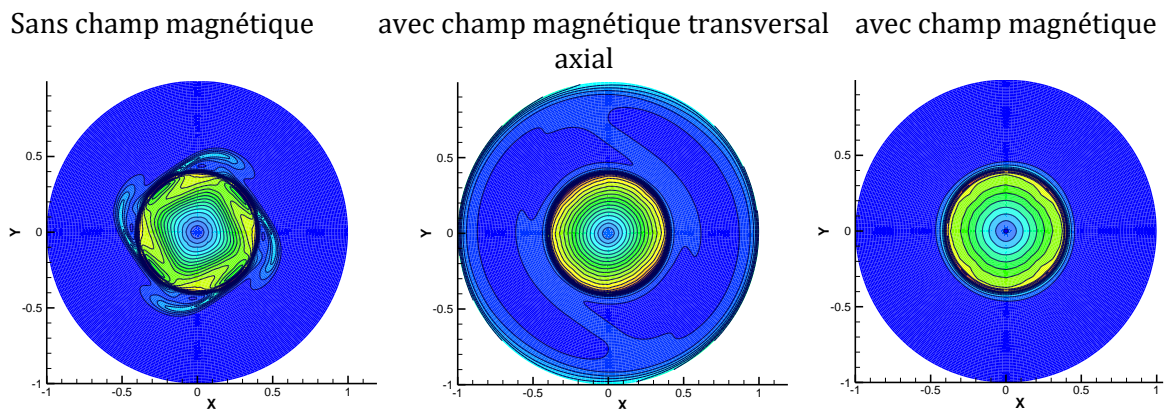


Figure IV. 87 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vorticité à la surface libre

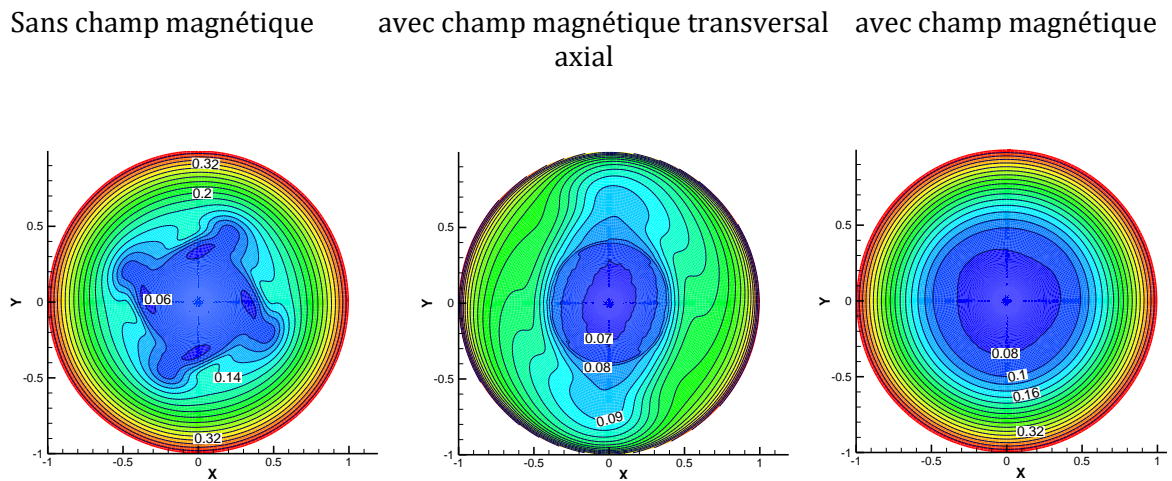


Figure IV. 88 Effet du champ magnétique axial et transversal sur le champ de vitesse de la pression à la surface libre

La combinaison de la rotation du cristal et du creuset et de l'application de champs magnétiques est une méthode efficace pour contrôler l'écoulement dans le creuset et donc la qualité du cristal, car la qualité des monocristaux produits par la méthode Cz dépend principalement de l'état de l'écoulement de liquide avant solidification. Le comportement de l'écoulement et le champ de pression sont significativement différents dans le liquide, à la surface libre et à l'interface cristal-liquide, lorsque les champs magnétiques externes axiaux et transversaux sont appliqués.

Conclusion

En raison de l'action de suppression de la force de Lorentz, l'écoulement dans le liquide devient plus faible. Le champ magnétique transversal joue un rôle clé dans l'apaisement de la convection de fusion dans le creuset sphérique, mais il conduit à une rupture de symétrie dans les champs de vitesse et de pression. L'application du champ magnétique axial remet la structure de l'écoulement et la pression beaucoup plus simples sans brisure de symétrie.

**CONCLUSION
GENERALE ET
PERSPECTIVES**

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur les écoulements dans deux types de cavités, à savoir les cavités 2D et les cavités 3D. Le choix de la géométrie des cavités est basé sur les domaines d'application notamment la croissance des cristaux, sachant que les effets de la rotation et des gradients de température jouent un grand rôle sur le comportement de fluide, par conséquent sur la qualité du cristal produit.

Les métaux liquides sont opaques, d'où l'importance de la simulation numérique pour capturer le comportement de fluide à l'intérieure des cavités fermées.

Les phénomènes thermo-convectifs sont intimement liés à la dynamique des fluides, sachant dans le cadre de cette thèse, le fluide considéré est un métal liquide caractérisé par un nombre de Prandtl faible, d'où le comportement hydrodynamique est très important par rapport au comportement d'origine thermique car la diffusivité thermique des métaux liquides est relativement élevée et le champ de température a une tendance d'être uniforme et homogène, cependant la masse volumique est quasi-uniforme. Par conséquent, le fluide résiste à la déstabilisation par gradient de température.

Le système de d'écoulement de Taylor-couette est un modèle type pour l'étude des régimes d'écoulement, dû à sa géométrie qui est simple, il est toujours un outil primordial pour les scientifiques pour bien comprendre les différents régimes de transition laminaire-turbulent. En outre, l'analogie entre le système de Taylor-Couette et les écoulements convectifs en termes de formation des vortex de Taylor et rouleaux de Bénard a induit les chercheurs à faire un jumelage de deux types de phénomènes.

L'étude présentée dans cette thèse porte sur les phénomènes de convection, plusieurs configurations étaient proposées et étudiées, à savoir les cavités carrées, cavités de type Kyloupolous et de Czockralski. Ainsi que l'écoulement hydrodynamique de type Taylor-

Couette. Nous avons imposé des hypothèses simplificatrices et des conditions aux limites pour faciliter les calculs numériques. L'étude numérique en code Matlab est basé sur la méthode des différences finies pour discrétiser les équations de la fonction du courant, de la température et de la vorticité.

Pour étudier l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection, Nous avons procédé à la variation de Ra de 10 jusqu'à 10^6 , les résultats montrent que pour des faibles valeurs de nombre de Rayleigh $Ra \leq 10^3$ le régime est visqueux et pour des grandes valeurs de Rayleigh le régime convectif est le plus dominant, et par conséquent le nombre de Nusselt, les vitesses d'écoulement, ainsi la fonction de courant augmentent aussi.

Les résultats montrent que la convection naturelle est très sensible à l'influence du champ magnétique, qui a un grand effet sur la qualité du cristal. Les tourbillons de Taylor sont générés par la force de Lorentz lorsqu'un champ magnétique externe axial ou transversal est appliqué. La pression est très sensible à cette instabilité mais la température est moins affectée. Une distribution d'isobares non axisymétriques est observée dans le cas d'un champ magnétique transversal.

En perspectives, nous projetons d'aller à des nombres de Rayleigh plus élevés pour étudier le passage vers la turbulence, d'étudier d'autres géométries et leurs influences sur la distribution des champs thermiques, hydrodynamiques et de pression en interaction avec le champ magnétique. Ainsi que d'étudier l'impact de l'électro-convection ou la force de Coulombe sur l'augmentation des échanges thermiques.

**REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. Abdulkadhim, I.B. Mejbel Abed, N. M. Said, "Review of Natural Convection Within Various Shapes of Enclosures," *Arab J Sci Eng* 46, pp11543–11586, 2021.
- [2] G. Ahlers and D. S. Cannell, "Vortex –front propagation in rotating Couette – Taylor flow," *Physical Review Letters*, 50, 1583-1586, 1983.
- [3] G. Ahlers , D.S. Cannell, M.A. Dominguez-Lerma, "Possible mechanism for transitions in wavy Taylor-vortex flow," *Physical Review*, A 27, pp. 1225-1227, 1983.
- [4] G. Barakos, E. Mitsoulis and D. Assimacopoulos, "Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions," *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 18(7), pp. 695 – 719, 1994.
- [5] A. Bejan, "Convection Heat Transfer," 3ed Ed. John Wiley and Sons, New-York, 2004.
- [6] A. Bejan, T. Chang-Lin, "Natural convection in horizontal space bounded by two concentric cylinders with different end temperatures," *International Journal of Heat and Mass Transfer* 22, 6, pp 919-927, 1979.
- [7] H. Bénard, "Etude expérimentale du mouvement des liquides propageant la chaleur par convection. Régime permanent: tourbillons cellulaires," *C. r. hebd. Séances Acad. Sci. Paris*, 130, pp. 1004-1007, 1900.
- [8] H. Bénard, "Mouvements tourbillonnaires à structure cellulaire. Etude optique de la surface libre," *C. r. hebd. Séances Acad. sci. Paris*, 130, pp. 1065-1068, 1900.
- [9] H. Bénard, D. Avsec, "Travaux récents sur les tourbillons cellulaires et les tourbillons en bandes. Applications à l'astrophysique et à la météorologie," *J. Phys. Radium*, 9, pp. 486-500, 1938.
- [10] G. Bo, L. Ren, X. Xu, Y. Du, S. X. Dou, "Recent progress on liquid metals and their applications," *Australian Institute for Innovative Materials*, 3145, 2018.
- [11] J. Boussinesq, "Théorie analytique de la chaleur," Vol. II. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [12] S. Chandrasekhar, "The stability of non dissipative Couette flow in hydromagnetics," *Proceedings of the national academy of Science of USA*, 46, 253-257, 1960.
- [13] S. Chen, J. Liu "Liquid metal printed electronics towards ubiquitous electrical engineering," *The japan society of applied physics*, 61 SE0801, 2022.
- [14] T. Cole, S.Y. Tang, "Liquid metals as soft electromechanical actuators," *Materials advances*, 3, 173-185, 2022.
- [15] F. Corvaro, M. Paroncini, "An experimental study of natural convection in a differentially heated cavity through a 2D-PIV system," *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, pp. 355–365, 2009.
- [16] F. Corvaro, M. Paroncini, "Experimental analysis of natural convection in square cavities heated from below with 2D-PIV and holographic interferometry techniques," *Experimental Thermal and Fluid Science* 31, pp. 721–739, 2007.
- [17] M. Couette, "La viscosité des liquids," *Bulletin des Sciences Physiques*, vol. 4, pp. 40-62, (1888).
- [18] D. Das, M. Roy, T.Basak, Studies on natural convection within enclosures of various (non-square) shapes – A review, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 106, pp. 356-406 (2017).
- [19] Y.Deng, J. Liu, "Liquid metals for advanced energy applications," AIP Publishing, 2191-1363, 2022.

- [20] M. Duan, X. Zhu, X. Shan, H. Wang, S. Chen, J. Liu, " Responsive liquid metal droplets: From bulk to nano," 12, 1289-1316. *Nanomaterials* 2022.
- [21] S. A. Ellingsen, H.I. Andersson, "Mixing layer between two co-current Taylor-Couette flows," *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 37, pp. 23-28, 2013.
- [22] [19] F. S. Gourari, F. Mebarek-Oudina, A. K. Hussein, L. Kolsi, W. Hassen, O. Younis, "Numerical Study of Natural Convection Between Two Coaxial Inclined Cylinders," *International Journal of Heat and Technology* 37 (3) pp. 779-786, 2019.
- [23] R. Guo, Y. Zhen, X. Huang, J. Liu, "Spatially selective adhesion enabled transfer printing of liquid metal for 3D electronic circuits," *Applied materials today*, , 25, 2352-9407, 2021.
- [24] F.J. Hamady, J.R. Lloyd, H.Q. Yang, K.T. Yang, "Study of Local Natural Convection Heat Transfer in an Inclined Enclosure," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 32(9), pp. 1697 -1708, 1989.
- [25] X. He, D. Funfschilling, H. Nobach, E. Bodenschatz, and G. Ahlers, "Transition to the ultimate state of turbulent Rayleigh-Bénard convection," *Phys. Rev. Lett.* 108, 024502, 2012.
- [26] F.H., Hoffmann, N.P. Busse, "Instabilities of shear flows between two coaxial differentially rotating cones," *Physics of Fluids*, 11, p. 1676, 1999.
- [27] S. G. Huisman, D. P. M. van Gils, S. Grossmann, C. Sun, and D. Lohse, "Ultimate Turbulent Taylor-Couette Flow," *Phys. Rev. Lett.* 108, 024501, 2012.
- [28] P. Kandaswamy, N. Nithyadevi and C. O. Ng, "Natural convection in enclosures with partially thermally active side walls containing internal heat sources," *Physics of Fluids*, 20, 097104, 2008.
- [29] J. L. Lage et A. Bejan "The Ra-Pr domain of laminar natural convection in an enclosure heated from the side," *Numerical Heat Transfer, Part A*, 19, pp. 21-41, 1991.
- [30] A. Lalaoua, "Transition to Taylor vortex flow between combinations of circular and conical cylinders," *European Physical Journal Applied Physics*, 77(1), pp. 11101-11108, (2017).
- [31] H. Laouira, F. Mebarek-Oudina, A. K. Hussein, L. Kolsi, A. Merah, O. Younis "Heat transfer inside a horizontal channel with an open trapezoidal enclosure subjected to a heat source of different lengths," *Heat Transfer-Asian Res.* pp.1-18, 2019.
- [32] J. Liu, L. Sheng, Z.Z. He, "Metal soft machines, principales and applications," *Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*, Series Editor: Carlos P. Bergmann, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil, 2191-1363, 2020.
- [33] H. M. Malakooti, M. R. Bockstaller, K. Matyjaszewski, C. Majidi, "Liquid metal nanocomposites," 2, 7, 2613–3052, 2020.
- [34] A. Mallock, "Determination of the viscosity of water," *Proceedings Royal Society. London*, 45, pp. 126-132, 1888.
- [35] F. Mebarek-Oudina, "Numerical modeling of the hydrodynamic stability in vertical annulus with heat source of different lengths. *Engineering Science and Technology*, 20(4): 1324-1333, 2017.
- [36] A. Merah, R. Kelaiaia, F. Mokhtari "A liquid metal flow between two coaxial cylinders system," *Acta Universitatis Sapientiae, Electrical and Mechanical Engineering*, pp.79-86, 2019.
- [37] E. Miyako, "Convergence of liquid metal biotechnologies for our health," *Accounts of materials Research*, 2, 10, 858–862, 2021.
- [38] T. Mullin, "Finite-dimensional dynamics in Taylor-Couette flow," *Journal of Applied Mathematics*, 46, 109-119, 1991.

- [39] B. O'Mara, M. S. Miesch, A. N. Featherstone, K. C. Augustson, "Velocity amplitudes in global convection simulations: The role of the Prandtl number and near-surface driving," *Advances in Space Research*, 58, 8, pp 1475-1489, 2016.
- [40] R. J. Orvedahl, M. A. Calkins, Nicholas A. Featherstone, and Bradley W. Hindman, "Prandtl-number Effects in High-Rayleigh-number Spherical Convection," *The Astrophysical Journal*, 856 (13), (9pp), 2018.
- [41] A. Prigent, B. Dubrulle, O. Dauchot, I. Mutabazi,. "The Taylor-Couette Flow: The Hydrodynamic Twin of Rayleigh-Bénard Convection," In: Mutabazi, I., Wesfreid, J.E., Guyon, E. (eds) *Dynamics of Spatio-Temporal Cellular Structures*. Springer Tracts in Modern Physics, vol 207. Springer, New York, NY, 2006.
- [42] P. L. Quéré, C. Weisman, H. Paillère, J. Vierendeels, E. Dick, R. Becker, M. Braack and J. Locke, "Modelling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low mach number solvers. PART 1. Reference Solutions," *Mathematical modelling and numerical analysis*. 39, N° 3, pp. 609–616, 2005.
- [43] V. R. K. Raju, "Taylor vortices in the flow between two coaxial cylinders one of which has a step change in radius," *Fluid Dynamics Research*, 46, N°1, pp. 015506 - 015525. 2014.
- [44] J. W. S. Rayleigh, "On convection currents in horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside," *Philos. Mag. Ser. 6*, 32(192), 529–546, 1916.
- [45] J. Shintake, Y. Piskarev, "Liquid metal-based soft actuators and sensors for biomedical applications," *Metal oxides for biomedical and biosensor applications*, 585-594, 2022.
- [46] S. Sivasankan and M. Bhuvaneshwar, "effect of thermally active zones and direction of magnetic field on hydrodynamics," *Thermal Science*, 15, Suppl. 2, pp. S367-S382, 2011.
- [47] C.Y. Soong, P.Y. Tzeng, D.C. Ching and T.S. Sheu, "Numerical Study on Mode Transient of Natural Convection in Differentially Heated Inclined Enclosures," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(14), pp. 2869 - 2882, 1996.
- [48] M.A. Sprague, P.D., Weidman, "Continuously tailored Taylor vortices", *Physics of Fluids*, 21 pp. 014106-014114, 2009.
- [49] M. A. Sprague, P. D. Weidman, S. Macumber, & P.F. Fischer: Tailored Taylor Vortices, *Physics of Fluids*, 20, 1-9, 2008.
- [50] R. Tag, "The Taylor Couette problem. *Nonlinear Science Today*," vol. 4: pp. 1-25, 1994
- [51] G. I. Taylor, "Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders," *Philos. Trans. Royal. Soc. London, Ser. A* 223: pp. 289-343, 1923.
- [52] A. Valencia, , R.L. Frederick, Heat transfer in square cavities with partially active vertical walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 32 (8), pp. 1567-1574, 1989.
- [53] Y. Varol, H.F. Oztop, A. Koca, F. Ozgen, "Natural convection and fluid flow in inclined enclosure with a corner heater," *Appl. Therm. Eng.* 29 340–350, 2009.
- [54] E.P.Velikhov, "Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field," *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 36, pp.1398-1404, 1959.
- [55] E. Wang, J. Shu, H. Jin, Z. Tao, J. Xie, S.Y. Tang, X.Li, W. Li, M. D. Dickey, S. Zhang, "Liquid metal motor," *iScience* 24, 101911, 2021.
- [56] C. Wei L. Tan, Y. Zhang, Z. Wang, B. Xi, S. Xiong, J. Feng, Y. Qian, "Review of room-temperature liquid metals for advanced metal anodes in rechargeable batteries," *Energy Storage Materials*, In Press, Journal Pre-proof, 2022.
- [57] M. Wimmer, "An experiment investigation of Taylor vortex flows between conical cylinders," *Journal of Fluid Mechanics*, 292, pp. 205-227, 1995.

- [58] M. Wimmer, "Taylor vortices at different geometries," *Physics of Rotating Fluids*, vol. 549: pp. 194-212, 2000.
- [59] W. Wu, C.Y. Ching, "The effect of the top wall temperature on the laminar natural convection in rectangular cavities with different aspect ratios," *J. Heat Transfer* 131, pp.1–11, 052501, 2009.
- [60] W. Wu, D. Ewing, C.Y. Ching, "The effect of the top and bottom wall temperatures on the laminar natural convection in an air-filled square cavity," *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49, pp. 1999–2008, 2006.
- [61] S. Zhang, Y. Liu, Q. Fan, C.Zhang, T. Zhou, K. Kalantar-zadeh, Z.Guo, "Liquid metal batteries for future energy storage," *Energy & Environmental Science*, 4177-4202, 2021.
- [62] T. Zürner, F. Schindler, T. Vogt, S. Eckert, and J. Schumacher, "Combined measurement of velocity and temperature in liquid metal convection" *J. Fluid Mech.*, 876, pp. 1108-1128, 2019,

ANNEXE

PUBLICATIONS DANS LE CADRE DE CETTE THESE

Conférences nationales et internationales

1. **A. Merah**, F. Mokhtari, R. Klaiiaia, A. Hamrani, A. Lalaoua. *A Numerical Investigation of the Flow Pattern Between Finite-Length Conical Cylinders*. In Proceedings Topical Problems of Fluid Mechanics 2017, Prague, 2017 Edited by David Šimurda and Tomáš Bodnár, pp. 229-234. ISBN 978-80-87012-61-1. ISSN 2336-5781. DOI: <https://doi.org/10.14311/TPFM.2017.029>
2. **Abdelkrim Merah**, Faiza Mokhtari, Ridha Kelaiaia, Adel Lalaoua. *3D CFD study of the MHD liquid sodium flow between two rotating conical cylindes system*. Numerical techniques in MHD simulations August 16-18, 2017. University of Cologne, Germany. http://mhdsim.uni-koeln.de/assets/mhd-sim_abstract_booklet_20170728.pdf
3. **A. Merah**, F. Mokhtari, R. Kelaiaia, A. Lalaoua, H. Baghli, A. Hamrani, Z. Chaieb. *Effect of the Half End-Wall on Velocity and Taylor Vortices Flow*. In Proceedings Topical Problems of Fluid Mechanics 2018, Prague, 2018 Edited by David Šimurda and Tomáš Bodnár, pp. 203-208 ISBN 978-80-87012-65-9. ISSN 2336-5781. DOI: <https://doi.org/10.14311/TPFM.2018.027>

Publications

1. **Merah, Abdelkrim**, Kelaiaia, Ridha and Mokhtari, Faiza. "A Liquid Metal Flow Between Two Coaxial Cylinders System" *Acta Universitatis Sapientiae, Electrical and Mechanical Engineering*, vol.11, no.1, 2019, pp.79-86. <https://doi.org/10.2478/auseme-2019-0007>