

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية

العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

### L'existence des Valeurs Propres Principales pour un Problème Elliptique en dimension 2.

Option : Analyse Fonctionnelle Appliquée.

Par :

1. Bouguerra Cheima.

2. Bouakkaz Kenza.

Encadré par : Z.Beliacine

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : I. Nouri

Examineur: Z. Chougi

MCB U. SKIKDA

MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

---

*L'existence des Valeurs Propres Principales pour  
un Problème Elliptique en dimension 2.*

Bouguerra Cheima

Bouakkaz Kenza

Encadré par :Z.Belyacine

Université 20 Aout 1955 Skikda, Département de Mathématiques.



2021.2022

---

# *Remerciements*

Toute d'abord nous tenons à remercier '**Allah**' la tout puissant m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour effectuer ce mémoire .

Nous tenons remercier très sincèrement mon encadreur Madame **Z.Belyacine** pour proposé le sujet de ce mémoire et nous a aider à réaliser ce travail.

Nous la remercions pour sa disponibilité ses précieux conseils . Nous remercions aussi les membres de jury **Z.Chougui et I.Nouri** d'avoir consacré de leurs précieux temps pour étudier et évaluer ce travail .Nous remercions chef de département de mathématique Monsieur **Bouzetouta.L** .

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciement à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire .

Merci à tous et à toutes



---

# *Dédicaces*

---

**Je dédie ce travail :**

*A*

Ma mère, pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices.

*A*

Mon père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.

*A*

Ma chère grand-mère.

*A*

Tous les membres de ma famille qui je souhaite une bonne santé  
et longue vie .

*A*

Tout mes amis.

Et enfin, à tous ceux qui m'ont appris une lettre.

Merci à tous.

\*\*\*\*\*

***BouguerraCheima***



---

# *Dédicace*

Je dédie ce travail :

À l'être le plus cher de ma vie, ma mère "Djamila".

À celui qui m'a fait de moi une fille, mon père "Achour" .

Je dédie ce travail aussi à ma soeur " Fatima" et mes chers frères "Hecen, Djamal et Mehdi" .

À les enfants " Anfel, Ayhem, Weail, Wissal et Selwa" .

À toute me amies, à toute personne qui occupe une place dans mon coeur .

***BouakkazKenza.***



TABLE DES MATIÈRES
--------------------

<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Notations générales</b>	<b>8</b>
<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>14</b>
1.1 Définitions . . . . .	14
1.2 Espace de Sobolev : . . . . .	18
1.3 Espace de Hilbert . . . . .	18
<b>2 Méthode de résolution des équations aux dérivées partielles linéaires</b>	<b>21</b>
2.1 Formulation variationnelle du problème . . . . .	21
2.2 Condition de Palais - Smale . . . . .	25
2.3 Lemme de déformations . . . . .	25
2.4 Principe de Min-Max . . . . .	26
2.5 Identité de Picone . . . . .	27
<b>3 Existence du solution de problème</b>	<b>28</b>
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence des valeurs propres principales pour un problème elliptique en dimension 2. Nous montrons l'existence des solutions de certains équations faisant intervenir l'opérateur Laplacien, par le principe de Min-Max et l'identité de Picone.

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

$q(x)$  est une fonction positive ou nulle,  $g(x)$  est une fonction de signe non constant dans  $\mathbb{R}^2$ .

**mots clés** : Valeurs Propres Principales, Fonction Propres, Espace de Hilbert, Principe du Min-Max, l'identité de Picone .

The purpose of the present paper is to investigate the existence of principal eigenvalues for linear elliptic problems in  $\mathbb{R}^2$ . We mention the existence of the solution of some equations which has the operator Laplacien, by the principle of Min-Max and identical of Picone .

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

$q(x)$  is the function positiv or zero , $g(x)$  is the function sign changeable in  $\mathbb{R}^2$ .

**Key words** :Eigenvalues, Eigenfunctions, Hilbert Space, Theorem Min-Max, identical of Picone .

## الملخص

في هذه المذكرة، نقوم بدراسة وجود القيم الذاتية الاساسية لمعادلة اهليجية ذات البعد 2. قننا ببرهان وجود الحل لبعض المعادلات ذات المؤثر لابلاص، باستخدام مبدأ Min-Max و متطابقة Picone.

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

الدالة  $q$  موجبة أو معدومة، الدالة  $g$  ذات إشارة غير ثابتة في فضاء  $\mathbb{R}^2$ .  
الكلمات المفتاحية: القيم الذاتية الاساسية، الدوال الذاتية، فضاء هيلبرت، مبدأ Min-Max متطابقة Picone.

## NOTATIONS GÉNÉRALES

Quelques symboles et sa signification qui nous seront utilisés dans ce mémoire

$\Omega$  : ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

$\mathbb{H}$  : espace de Hilbert.

$\mathcal{H}$  : espace de Hilbert complexes séparable.

$T$  : opérateur autoadjoint

$T^{-1}$  : inverse de  $T$ .

$\partial\Omega$  : frontière topologique de  $\Omega$ .

$\nabla u$  : gradient de  $u$ .

$\Delta u$  : laplacien de  $u$ .

$D(\Omega)$  : espace des fonctions différentiable et a support compact dans  $\Omega$ .

$D'$  : l'espace dual de  $D$ .

$\mathcal{D}(T)$  : sous-espace dense dans  $\mathcal{H}$ .

$\|u\|_V$  : norme dans l'espace  $V$ .

$B_R$  : Boule de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R$  centrée à l'origine.

$B_R(x_0)$  : Boule de  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $R$  centrée en  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ .

$L^p$  :  $\{u \in \mathbb{R}^p, \int_{\mathbb{R}^p} |u|^p dx < \infty\}$ .

$L_p^2(\mathbb{R}^2) = \{u, p^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ .

$L^2 : \{u \in \mathbb{R}^2, \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx < \infty\}$ .

$L^2(B_R) : \{u \in B_R, \int_{B_R} |u|^2 dx < \infty\}$ .

$\mathbb{C}^1(\Omega)$  : L'espace de fonction continue et les premières dérivées est continue sur  $\Omega$ .

$\hookrightarrow$  : Injection continue.

$u_n \rightharpoonup u$  : converge faible.

$u_n \longrightarrow u$  : converge fort.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme.

Un grand nombre de problème d'ingénierie se réduit à des équations aux dérivées partielles qui, à cause de leur complexité, doivent être remplacées par des approximations. La théorie concernant les équations aux dérivées partielles (existence, unicité, problème bien posé) ne constitue pas un ensemble aussi complet que celle des équations aux dérivées ordinaires. D'autre part, dans le cas où les solutions analytiques existent, ses solutions sont triviales ou tellement simples qu'elles ne sont utiles en pratique.

Une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation contenant en plus de la variable dépendante ( $u$  dans les cas suivants) des variables indépendantes  $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$  une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots) = 0$$

Exemple : L'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

admet comme solution :

$$u(x, y) = (x + y)^3; u(x, y) = \sin(x - y), \dots$$

L'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en dimension 2 admet aussi au moins deux solutions dont :

$$u(x, y) = x^2 - y^2; u(x, y) = e^x \sin y.$$

Les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire, les problèmes incluent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions.

Pour assurer donc l'unicité de la solution, comme on le fait avec les équations différentielles ordinaires EDO, on tiendra compte des conditions pré-données comme les conditions aux limites et les conditions initiales.

Il n'existe pas de méthodes universelles pour la résolution des EDP, nous allons nous contenter de celles qui sont linéaires et du second ordre.

Quand on pose :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

une équation aux dérivées partielle du second ordre sera de la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial X_i \partial X_j}(X) + \sum_{i=1}^n B_i(X) \frac{\partial u}{\partial X_i}(X) + Cu = G(X)$$

avec  $A_{i,j}, B_j, C$  et  $G$  des fonction indépendantes de  $u$  ne s'annulant pas toutes simultanément dans  $R^n$ .

Si nous nous limitons dans  $R^2$ , c'est à dire  $X = (x, y) \in R^2$  l'égalité précédemment posée devient :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x, y) \quad (1)$$

où,  $a, b, c, d, e$  et  $f$  peuvent dépendre de  $x, y$  et même de  $u$ . L'ordre de l'équation est donné par l'ordre de la dérivée la plus élevée intervenant dans l'équation. Alors, si  $a, b$  ou : sont différents de zéro, l'équation est de second ordre. Par contre, lorsque  $a = b = c = 0$  et que  $f$  et  $e$  ne sont pas nuls, l'équation aux dérivées partielles est de premier ordre.

On dit qu'une équation est non linéaire si les coefficients  $a, b, c, d, e$  et  $f$  dépendent de la variable autrement l'équation est homogène, dans le cas contraire elle est non-homogène.

On appelle une solution une fonction des variables indépendantes  $x, y, \dots$  qui vérifie l'équation. Pour le cas simple d'une équation avec deux variables  $x$  et  $y$  on peut interpréter géométriquement la solution comme une surface dont les dérivées partielles vérifient l'équation en chaque point. Comme pour les équations différentielles ordinaires, il existe une infinité de solutions. Contrairement aux équations ordinaires, il existe une infinité de solutions. Une de celles-ci est choisie en imposant certaines conditions aux limites. Contrairement aux équations ordinaires, un nombre de conditions égales à l'ordre de l'équation ne garantit plus l'unicité de la solution. Ceci n'est plus vrai pour des équations aux dérivées partielles. Pour qu'un problème soit bien posé, la solution doit dépendre de façon continue à des conditions initiales et aux frontières. Autrement dit, un problème est bien posé si des petites perturbations dans ces conditions donnent des petites variations dans la solution.

considérons une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre ayant la forme suivante :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x, y)$$

dans laquelle  $u$  est une fonction de deux variables  $x$  et  $y$ . La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de  $\Delta$  telle que :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation (1) s'appelle équation elliptique.

- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation (1) s'appelle équation hyperbolique.
- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation (1) s'appelle équation parabolique.

La terminologie utilisée dans cette définition est basée sur la classification des coniques du plan. On rappelle que la conique d'équation :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

une hyperbole (resp. une parabole, une ellipse) si et seulement si  $b^2 - 4ac$  est positif (resp. nul, négatif).

Si les coefficients  $a, b, \dots, g$  dépendent des variables  $x$  et  $y$ , le type de l'équation (1) est local. L'équation est hyperbolique au point  $(x_0, y_0)$  si et seulement si :

$$b(x_0, y_0)^2 - 4a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0.$$

Selon des caractéristiques des coefficients des équations aux dérivées partielles, qui par sa forme nous rappellent les coniques, on distingue trois cas :

1.  $b^2 - 4ac > 0$  : les deux racines sont réelles et distinctes. L'équation est dite hyperbolique. Un exemple des équations hyperboliques linéaires est l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2.  $b^2 - 4ac = 0$  : la racine est réelle et double. Dans ce cas, l'équation est dite parabolique. L'exemple typique de cette famille est l'équation de la chaleur :

3.  $b^2 - 4ac < 0$  les racines sont imaginaires. L'équation est alors dite elliptique. L'une des équations fondamentales de la physique est l'équation de Laplace •

Des équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné  $J$  de frontière  $K$  sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann. Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = u_0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2)$$

En mécanique des fluides, dans le cas d'un écoulement plan, permanent d'un fluide parfait incompressible, le potentiel des vitesses vérifie une équation de Laplace.

Ce mémoire concernent quelque équation de type elliptique linéaire faisant intervenir l'opérateur laplacien, en mathématique, l'opérateur laplacien ou simplement le laplacien, est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur gradient suivie de l'application de l'opérateur divergence :

$$\Delta u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \Delta u)$$

Avec  $1 < p < +\infty$ , cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque  $p \neq 2$  et pour  $p = 2$  le laplacien coïncide avec le laplacien usuel  $\Delta$ .

Le but de cette mémoire est l'étudier l'existence de solution aux dérivées partielles linéaire gouvernée par l'opérateur Laplacien c'est à dire aux problèmes de la forme :

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (3)$$

$q$  et  $g$  deux fonctions mesurables, qui décroissent vers zéro à l'infini.  $q$  est positive ou nulle,  $g$  est de signe non constant dans  $\mathbb{R}$ . On appelle valeur propre principale du Problème (3), toute valeur du paramètre pour laquelle il existe une solution  $u(x) \geq 0$  et  $u(x) \not\equiv 0$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas  $u$  est appelée fonction propre principale.

Une première étude a été élaborée par A.S.Bonnet [3] quand  $q \equiv 0$  et  $g$  à support compact. Des résultats sur la non existence de valeurs propres principales positives figurent dans le travail de K.J.BrownC.Cosner-J. Fleckinger [4] quand  $q \equiv 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^2} g dx > 0$ .

Nous avons considéré dans A.DJELLIT [9] le cas ou  $\int_{\mathbb{R}^2} g dx \geq 0$  et  $q \equiv 0$ . Nous avons montré que le Problème admet un spectre discret, nous avons rencontré des difficultés techniques quand  $\int_{\mathbb{R}^2} g dx = 0$ . Dans la première section de ce travail, nous considérons le cas  $q \equiv 0$ , nous montrons que le spectre du Problème (2) est purement ponctuel sans aucune considération sur le signe de la quantité  $\int_{\mathbb{R}^2} g dx$ .

Nous donnons ensuite un résultat d'existence d'une seule valeur propre principale de ce problème.

Dans le première chapitre on fait rappel de quelque notations et quelque définition de certaine espaces fonctionnels qui nous seront d'une grande utilité, comme les espace de Hilbert, et quelque outils dans ces espaces comme (la formule de Green, l'inégalité de Cauchy....).

Le deuxième et troisième chapitre sont consacrés à présenter les méthodes variationnelle et leur applications dans la recherche des solutions de certaine problème elliptique linéaire .

Enfin, parmi les nombreuses bibliographiques, nous avons choisis a la fin de ce travail un nombre assez restreint permettant au lecture intéresse d'avoir accès a quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger cette mémoire .

## 1.1 Définitions

Nous donnons dans cette section quelques définitions utiles à la lecture de cette mémoire.

**Définition 1.1.** (*Valeur Propre*) :

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs non linéaires définis sur un espace de Banach  $E$ . On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur  $A$  par rapport à l'opérateur  $B$  s'il existe  $u \in E$ , tel que  $u \neq 0$  :

$$Au = \lambda Bu.$$

**Définition 1.2.** (*Fonction propre*) :

On dit que  $f$  est une fonction propre de l'opérateur  $A$  avec la valeur propre  $\lambda$  si :

$$Af = \lambda f \quad (\lambda \text{ constante}).$$

**Définition 1.3.** (*Valeur Propre Principales*) :

Soit  $\lambda$  une valeur propre du problème.  $\lambda$  est dite valeur propre principale si la fonction propre associée ne change pas de signe.

**Définition 1.4.** (*Point Critique*) :

Soient  $X$  un espace de Banach  $\Omega \subset X$  un ouvert et  $J \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ . On dit que  $u \in \Omega$  est un point critique de  $J$  si  $J'(u) = 0$ .

Si  $u$  n'est pas un point critique, on dit que  $u$  est un point régulier de  $J$ .  
Les valeurs qui ne sont pas critiques sont appelées valeurs régulières •

**Définition 1.5.** (*Point fixe*) :

Soit  $(V, d)$  un espace de Banach et  $M \subset V$  un sous-ensemble non vide et fermé et  $T : M \rightarrow V$  une application. Une solution de l'équation  $Tx = x$  est appelée un point fixe de  $T$ .

**Définition 1.6.** (Opérateur) :

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normes, on appelle opérateur défini sur  $E$  à valeur dans  $F$  toute application  $T$  d'une partie  $D(T)$  de  $E$  dans  $F$ .

$$T : D(T) \subset E \rightarrow F.$$

$D(T)$  est appelé domaine de définition de l'opérateur  $T$ .

**Définition 1.7.** (Opérateur linéaire) :

$A : D(T) \subset E \rightarrow F$  on dit que cet opérateur est linéaire si  $T$  est linéaire et si  $D(T)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que :

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv.$$

**Définition 1.8.** (Opérateur Linéaire Compact) :

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur le même corps  $K$ , l'opérateur  $T : E \rightarrow F$  est dit compact si l'image de chaque borné de  $E$  par  $T$  est relativement compact dans  $F$ , c'est

$$[T \text{ compact}] \iff [\forall M \subset E, (M \text{ borné} \implies \overline{T(M)} \text{ compact})]$$

On note par  $\mathcal{K}(E, F)$  à l'espace des opérateurs compacts.

**Définition 1.9.** (Opérateur autoadjoint) :

Soit  $T$  un opérateur défini sur un sous-espace dense de  $H$ .

1) On dit que  $T$  est auto-adjoint si  $T = T^*$ , c'est-à-dire si  $D(T) = D(T^*)$  et  $\forall x \in D(T), Tx = T^*x$ .

2) On dit que  $T$  est essentiellement auto-adjoint si  $T$  est auto-adjoint.

**Remarque 1.** Si  $T$  est essentiellement auto-adjoint, alors il n'y a qu'un unique prolongement auto-adjoint :  $\overline{T}$ . Par abus, nous noterons l'opérateur et sa fermeture par le même symbole.

**Définition 1.10.** (Converge Faible) :

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On dit que  $f_n$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$ , et on note  $f_n \rightarrow_{L^p} f$ , si  $f_n, f \in L^p(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

**Définition 1.11.** (Converge Forte) :

Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . On dit que  $f_n$  converge faiblement vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$ , et on note  $f_n \rightharpoonup_{L^p} f$ , si  $f_n, f \in L^p(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

**Définition 1.12.** (Fonction Homéomorphisme) :

Soient  $(E, d)$  et  $(F, d')$  deux espaces métriques, on dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est un homéomorphisme si  $f$  bijection continue dont l'inverse  $f^{-1}$  est continue .

**Définition 1.13.** (Fonction Homotopie) :

Une homotopie entre deux applications continues  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  est une application continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que :

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

$$(x, t) \rightarrow f_t(x) = F(t, x).$$

reliant  $f_0$  à  $f_1$ . On dit que les applications  $f_0$  et  $f_1$  sont homotopies et on écrit  $f_0 \sim f_1$ .

**Définition 1.14.** (L'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. Soit  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée à  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  alors :

$$\forall (x, y) \in E, \|\langle x | y \rangle\| \leq \|x\| \|y\|.$$

Ou

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 1.15.** (L'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ) :

Soit une suite  $(u_n)_n$  dans  $H^1(\Omega)$  t.q  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $(\nabla u_n)$  converge dans  $(L^2(\Omega))^d$ .

Alors  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ .  
est  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  donc  $\forall u \in H^1(\Omega)$  :

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|x - y\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2} \quad p.p \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

**Définition 1.16.** (Fonction Mesurables) :

Soit  $f$  un fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite mesurable si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble :

$$E_\alpha = \{x \in \Omega, f(x) \geq \alpha\}.$$

**Définition 1.17.** (Hermitiennes) :

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et soit  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est une forme hermitienne si :

1.  $f$  est semi-linéaire (ou ante-linéaire) par rapport à la première variable :

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x + \lambda x', y) = f(x, y) + \bar{\lambda} f(x', y).$$

2.  $f$  est linéaire par rapport à la deuxième variable :

$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x, y + \lambda y') = f(x, y) + \lambda f(x, y').$$

$$3. \forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

**Définition 1.18.** (*Spectre Discret*) :

Soit  $T$  un opérateur fermé de  $\mathcal{H}$ . On appelle un spectre discret de  $T$  et note  $\sigma_d(T)$  l'ensemble des valeurs propres de  $T$  multiplicité algébrique finie. l'indice  $d$  correspond à discret spectre en anglais.

**Définition 1.19.** (*Spectre ponctuel*) :

Le spectre ponctuel d'un opérateur linéaire  $T$  est constitué des valeurs propres de  $A$  :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(\lambda - T) \neq \{0\}\} = \{\lambda \in \mathbb{C}, \exists u \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}, (\lambda - A)u = 0\}.$$

**Définition 1.20.** (*Homomorphisme*) :

Soient  $(E, *)$  et  $(F, \cdot)$  deux groupes. Un homomorphisme de groupe  $E \rightarrow F$ , fonction  $f : E \rightarrow F$  pour tout  $x, y \in E$

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y).$$

**Définition 1.21.** (*Espace Séparable*) :

Un espace topologique  $E$  est dite séparable s'il existe  $A \subset E$  est dense dans  $E$  c.à.d ( $\overline{A} = E$ ).

**Définition 1.22.** (*Espace réflexif*) :

Soit  $E$  est un espace de Banach et soit  $J$  l'injection canonique de  $E$  dans  $E''$ . On dit que  $E$  est réflexif si :

$$J(E) = E''.$$

**Définition 1.23.** (*Fonction Test*) :

Soit  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ , on appelle espace des fonctions tests et on  $D(\Omega)$  l'ensemble :

$$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \text{supp}\varphi \subset \Omega\}.$$

$$\text{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

**Théorème 1.1.** (*Théorème de Riesz*) : Soit  $\phi \in H^1$ . Il existe  $u \in H$  unique t.q.

$$v \in H, \phi(v) = \langle u, v \rangle.$$

De plus  $\|u\| = \|\phi\|_{H^1}$ .

## 1.2 Espace de Sobolev :

Dans cette section, nous définissons les espace de Sobolev général, et le cas dans lequel il est Hilbert.

Un espace de Sobolev est un espace vectoriel norme complet.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné ou pas, régulier ou pas et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Définition 1.24.** Soit  $k > 1$  un entier et  $p$  un réel tel que  $1 \leq p \leq \infty$ . On définit

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-index avec } |\alpha| \leq k, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que :}$$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

Notons que par récurrence .On a

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^{k-1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{k-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, 3, \dots, N\}.$$

L'espace  $W^{k,p}(\Omega)$  est muni la neume :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Proposition 1.1.** L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach si  $1 \leq p \leq \infty$  , il est réflexif si  $1 < p < \infty$ , et il est séparable si  $1 \leq p < \infty$ .

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N\}.$$

**Proposition 1.2.** L'espace de Sobolev  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire.

$$H^m(\Omega) = \{u \in H^{m-1}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}.$$

la norme de  $H^m(\Omega)$  est  $\forall u \in H^m(\Omega), \|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2$ .

**Proposition 1.3.** L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire.

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N\}.$$

## 1.3 Espace de Hilbert

Nous avons parlé dans ce partie de chapitre, à l'espace de Hilbert et ses caractéristiques .

Dans la première décennie du XX siècle, des développements parallèles ont conduit à l'émergence des espace de Hilbert. La première d'entre elles remonte à l'étude d'équations intégrales de David Hilbert et Erhard Schmidt, ou ils ont remarqué que les fonction  $f$  et  $g$  ont des valeurs réelles quadratiques intégrables sur  $a, b$  ont un produit interne de la formulaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Il possède de nombreuses propriétés connues du raster euclidien. Plus précisément, la propriété de classe de fonction orthogonales. Schmidt a profité de la similitude de ce produit interne avec le produit scalaire bien connu pour l'existence d'une symétrie entre la différenciation spectrale et opérateur ce la forme suivant :

$$f \mapsto \int_a^b K(x, y)f(y)dy. \quad K(x, y) \text{ fonction continue correspondant à } x, y.$$

L'espace de Hilbert  $H$  est un espace Pré-Hilbertien complet (Banach). par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  induit par le produit scalaire défini, i.e qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et dans lequel toute suite de Cauchy est convergent à la norme  $\|\cdot\|$ .

**Définition 1.25.** (*Produit Scalaire*) : Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $\varphi$  une produit scalaire sur  $E$ .

- $\varphi$  est symétrique si et seulement si  $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ .
- $\varphi$  est positive si et seulement si  $\forall u \in E, \varphi(u, u) > 0$ .
- $\varphi$  est définie si et seulement si  $\forall u \in E, \varphi(u, u) = 0 \implies u = 0$ .

On note généralement un produit scalaire par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $(\cdot, \cdot)$ .

**Définition 1.26.** (*Produit Scalaire Usuel*) : Est un produit scalaire qui se présente de manière naturelle d'après la manière dont l'espace vectoriel est présenté.

On appelle produit scalaire canonique ou usuel de  $\mathbb{R}^n$  l'application qui, aux vecteurs  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , associe la quantité

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

## Pré-Hilbertion

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit Scalaire sur un espace vectoriel  $E$ , on à la .....  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ce appel un espace Pré-Hilbertien.

**Définition 1.27.** Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

**Définition 1.28.** Une norme sur  $E$  est une fonction réel  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les conditions suivant :

- (i)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ .

## Un espace de Banach

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  est espace vectoriel normé, tel que toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente pour la norme  $\|\cdot\|$ .

**Théorème 1.2.** Un espace de Banach  $E$  de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte

**Orthogonalité :**

Soit  $E$  un espace de Hilbert ; On dit que  $x, y \in E$  est Orthogonaux si  $\langle x, y \rangle_E = 0$  .  
On a  $x \in E$  est orthogonal à une partie  $F \subset E$  si :

$$\forall y \in F \langle x, y \rangle_E = 0$$

## CHAPITRE 2

# MÉTHODE DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES

En analyse fonctionnelle linéaire, l'étude des E.D.P linéaires se fait par deux méthodes variationnelles ou topologiques •

### 2.1 Formulation variationnelle du problème

L'approche variationnelle des équations aux dérivées partielles linéaire ou non linéaire est basée sur la notion de solution faible qui est associée à chaque problème. Cette solution est en fait un point critique de la fonctionnelle associée au problème. Les solutions des problèmes différentiels avec une structure variationnelle peuvent être des points critiques autres que les minimums ou maximums.

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des problèmes est de remplacer les équations aux dérivées partielles par des formulations équivalentes, dite variationnelle ou faible, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dit fonction test.

Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.

Dans le cas si la dimension de l'espace  $\geq 2$  on appliquons la formule de Green au lieu de l'intégration par parties.

#### **Théorème 2.1. Formule de Green :**

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $w$  une fonction de  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  à support borné dans le fermé  $\overline{\Omega}$ . Alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} w(x) n_i(x) ds.$$

ou  $n_i$  est la  $i$ -ème composante de la normale extérieure unité de  $\Omega$ .

Pour prouver que la problème variationne.

**Théorème 2.2. La théorème de Lax-Milgrame :**

Soit  $V$  est un espace de Hilbert réel,  $L(\cdot)$  une forme linéaire continue sur  $V$ ,  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $V$ . Alors la formulation variationnelle admet une unique solution  $u \in H$  telle que :

$$a(u, v) = L(v) \forall v \in H$$

Si de plus la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, alors  $u$  est l'unique élément de  $H$  que minimise la fonctionnelle  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \text{ pour tout } v \in H$$

.c.à.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \text{ et } J(u) < J(v) \text{ si } u \neq v.$$

Nous supposons que :  $H$  et  $V$  sont des espaces de Hilbert réels (ou complexes), séparables ( $\cdot, \cdot$ ) et  $((\cdot, \cdot))$  désignant leurs produits scalaires respectifs, et  $|\cdot|_H$  et  $\|\cdot\|_V$  les normes associées.

$$\begin{cases} -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Multiplié par une fonction de test  $v \in L^2$  et on intégré par partié :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta uv + q(x)uv) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda g(x)uv dx$$

D'après la formule de Green :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + q(x)uv) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^2} g(x)uv dx.$$

Donc la formulation variationnelle de problème est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}^2, \text{ tels que } u \neq 0 \\ a(u, v) = \lambda b(u, v) \end{cases}$$

telle que  $a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + q(x)uv) dx$  et  $b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)uv dx$ .

$a(\cdot, \cdot)$  et  $b(\cdot, \cdot)$  sont deux permiers sur  $V$ .

Le problème admet une solution si :

i)  $a(\cdot, \cdot)$  est continue et coercitive sur  $V$  c'est à dire  $\exists M > 0$  et  $\exists C > 0$ , tels que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \text{ et } a(u, v) \geq C \|u\|_V^2; \forall u, v \in V$$

ii)  $b(\cdot, \cdot)$  est continue sur  $V$  c'est à dire  $\exists M' > 0$ , telle que

$$|b(u, v)| \leq M' \|u\|_V \|v\|_V; \forall u, v \in V$$

La résolution du problème aux valeurs propres revient à la résolution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}^2, u \neq 0 \text{ vérifiant :} \\ a(u, v) = \lambda b(u, v), \forall v \in V \end{cases}$$

**Définition 2.1.** On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de (1.3) s'il existe un vecteur  $u \in V$  non nul qui vérifie (1.3).

Il résulte de i) que la forme quadratique  $a(u, u)$  définit sur  $V$  un produit scalaire équivalent à  $((., .))$  et donc, comme la forme  $b(u, v)$  est continue sur  $V$ , nous pouvons appliquer le théorème de représentation de Riesz, on en déduit qu'il existe un opérateur  $T$  défini sur  $V$  par :

$$b(u, v) = a(Tu, v), \forall u, v \in V$$

**Proposition 2.1.** L'opérateur  $T$  ainsi défini est linéaire, continu et auto-adjoint sur  $V$ .

**Démonstration 1.** La linéarité est évidente, il résulte de ((1.2); ii) que :

$$C\|T\|_V^2 \leq a(Tu, Tu) = b(u, Tu) \leq M'\|u\|_V\|Tu\|_V$$

et donc en déduisant la continuité

$$\|Tu\|_V \leq \frac{M'}{C}\|u\|_V$$

Enfin  $T$  est auto-adjoint puisque les formes sont hermitiennes :

$$a(Tu, v) = b(u, v) = \overline{b(v, u)} = \overline{a(Tv, u)} = a(u, Tv).$$

**Remarque 2.** Il est classique d'associer au triplet variationnel  $(V, H, a(., .))$  sa réalisation : l'opérateur  $A$  est auto-adjoint, positif et non borné dans  $H$  de domaine  $D(A)$  défini par :

$$D(A) = \{u \in V, Au \in H\}.$$

$$(Au, v)_H = a(u, v), \forall u \in D(A) \forall v \in V.$$

D'une manière analogue à la forme  $b(., .)$  nous pouvons associer l'opérateur  $B$  auto-adjoint défini sur  $V$  par :

$$(Bu, v)_H = b(u, v); \forall u, v \in V$$

ainsi formellement :

$$T = A^{-1}B.$$

**Remarque 3.** Le problème (1.3) peut s'écrire, en utilisant l'opérateur  $T$ ,

$$\lambda a(Tu, v) = a(u, v); \forall v \in V.$$

Soit

$$a(\lambda Tu - u, v) = 0; \forall v \in V$$

Il résulte de (1.2) que

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u.$$

Ainsi, si  $u$  est un vecteur propre de (1.3) correspondant  $\lambda$  la valeur propre non nulle, alors il est aussi un vecteur propre de (1.6) correspondant la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$  et réciproquement.

Si nous supposons de plus que l'injection de  $V$  dans  $H$  est compact, alors  $T$  est compact, et nous pouvons appliquer les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs autoadjoints-compacts sur les espaces de Hilbert. Nous avons (Voir [3], [13])

**Proposition 2.2.** (i) Les valeurs propres de  $T$  sont réelles et (sauf peut être 0). sont de multiplicités finies.

(ii) Si  $\mu_i$  et  $\mu_j$  sont deux valeurs propres distinctes de  $T$  avec  $\varphi_i$  et  $\varphi_j$  les fonctions propres associées, alors :

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \text{ et } b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$$

(iii) Le spectre de  $T$  est constitué par (au plus) deux infinités dénombrables de valeur propres, une positive et l'autre négative, tendant vers zéro :

$$\mu_1^- < \mu_2^- \leq \dots \mu_j^- \leq \mu_{j+1}^- \leq \dots \leq 0 \leq \dots \leq \mu_{j+1}^+ \leq \mu_j^+ \leq \dots \leq \mu_2^+ < \mu_1^+. \quad (2.2)$$

On répète chaque valeur propre selon sa multiplicité (on rappelle que la multiplicité de la valeur propre est la dimension du sous espace propre).

(iv) Les valeurs propres de  $T$  sont caractérisées par le principe du Min-Max :

$$\mu_{j+1}^+ = \min_{V_j \in U_j} \max_{u \perp V_j} \frac{b(u, u)}{a(u, u)} = 1. \quad (2.3)$$

$$\mu_{j+1}^- = \max_{V_j \in U_j} \min_{u \perp V_j} \frac{b(u, u)}{a(u, u)} = 1 \quad (2.4)$$

$U_j$  étant l'ensemble de tous les sous espaces de  $V$  de dimension  $j$ .

En particulier

$$\mu_1 = \max_{0 \neq u \in V_j} \frac{b(u, u)}{a(u, u)}$$

**Remarque 4.** Les valeurs propres de (2.2) notées  $\lambda_j(a, b, V)$  sont égales à  $\frac{1}{\mu_j}$  et sont réelles, de plus nous pouvons leur associer des fonctions propres réelles.

Il en résulte de (2.8) les lemmes suivants :

**Lemme 2.1.** Si  $a_1(u, v)$  et  $a_2(u, v)$  sont deux formes hermitiennes continues, coercive sur  $V$  telles que  $a_1(u, u) \geq a_2(u, u), \forall u \in V$  et si  $b(u, v)$  est une forme hermitienne continue sur  $V$ , alors :

$$\lambda_j^+(a_1, b, V) \geq \lambda_j^+(a_2, b, V).$$

**Lemme 2.2.** Si  $b_1(u, v)$  et  $b_2(u, v)$  sont deux formes hermitiennes continues sur  $V$  telles que  $b_1(u, u) \leq b_2(u, u), u \in V$  et si  $a(u, v)$  est une forme hermitienne continue, coercive sur  $V$ , alors :

$$\lambda_j^+(a, b_1, V) \geq \lambda_j^+(a, b_2, V)$$

**Lemme 2.3.** Si  $(V_1, H, a)$  et  $(V_2, H, a)$  sont deux triplets variationnels tels que  $V_1 \hookrightarrow V_2$  alors :

$$\lambda_j^+(a, b, V_1) \geq \lambda_j^+(a, b, V_2)$$

## 2.2 Condition de Palais - Smale

Un outil essentiel dans le calcul de la variation est la compacité des suites minimisantes. La condition de Palais-Smale joue un rôle assez semblable pour des suites sur lesquelles la fonctionnelle prend des valeurs tendant vers une valeur critique potentielle, et pas seulement vers la borne inférieure. C'est une condition a priori, à vérifier pour chaque fonctionnelle, indépendamment de l'existence ou non des valeurs critiques. Elle sera par contre un outil essentiel pour montrer cette existence dans plusieurs cas

**Définition 2.2.** (*Condition de Palais-Smale*)

Soit  $X$  un espace de Banach et  $j : X \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  : On dit que  $j$  vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau  $c \in \mathbb{R}$ ) si de toute suite  $(u_n)$  de  $X$  telle que

$$j(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } j'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X'$$

on peut extraire une sous-suite convergente.

**Remarque 5.** — La condition de Palais-Smale tence d'une valeur critique. Elle dit seulement que si on a une telle suite, celle-ci est nécessairement relativement compacte. Pour l'utiliser effectivement de façon utile, il faudra pouvoir démontrer par un autre biais qu'une telle suite existe.

— Les deux hypothèses sont indépendantes. En effet, même si  $c = \inf_X J$ , on peut parfaitement avoir une suite minimisante un telle que  $J'(u_n) \not\rightarrow 0$ . Il suffit de prendre  $X = \mathbb{R}$ ,  $j(u) = \sin u^2$ ,  $c = -1$  et  $u_n = (\frac{3\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{2n\pi}})^{\frac{1}{2}}$ .

On a  $J(u_n) \rightarrow -1$  et  $J'(u_n) \rightarrow 2$ .

## 2.3 Lemme de déformations

Soit  $X$  un espace de Banach  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  une fonction nom constant on pose pour  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\{J \leq c\} = \{u \in X, J(u) \leq c\}.$$

De façon analogue on définit les ensembles,  $\{J < c\}$ ,  $\{J \geq c\}$ ,  $\{J > c\}$  est les ensembles de niveau  $\{J = a\}$ .

Le point crucial dans l'existence des points critiques est la différence topologique entre les ensembles  $\{J < c\}$  et  $\{J \geq c + \varepsilon\}$  pour certains valeurs de  $c \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 2.4** (Lemme de déformation). : Soit  $X$  un espace de Banach  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  une fonctions nom constant satisfaisant les conditions de Palais Smale, et  $c \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $J$  Alors on peut trouver tel que pour, il existe une applications  $\eta \in C^1(X, X)$  appelle la flot associé a  $J$ , satisfaisant le conditions suivants :

- i)  $\eta(\cdot)$  est un homéomorphisme de  $X$  dans  $X$ .
- ii) Pour tout  $u \in \{J \geq c - \varepsilon_0\} \cup \{J \geq c + \varepsilon_0\}$  on a  $\eta(u) = u$ .
- iii) On a  $\eta(\{J \geq c + \varepsilon\}) \subset \{J \geq c - \varepsilon\}$ .

**Remarque 6.** a) On a démontré un peu plus que ce qui est affirmé dans le lemme de déformation il s'agit non seulement d'un homéomorphisme, mais d'un homotopie ( $\eta_t$  dépend continument de  $t$ ).

b) Il existe de nombreuses variantes du lemme de déformation. Par exemple, on peut imposer que  $\eta(\{J \geq c + \varepsilon\}) = \{J \geq c - \varepsilon\}$ .

imposer que  $\eta(\{J \geq c + \varepsilon\}) = \{J \geq c - \varepsilon\}$ .

c) Le lemme de déformation dépend de façon cruciale de la condition de Palais Smale. Considérons la fonction  $J(x) = \frac{x}{1+x}$  sur  $E = \mathbb{R}$ . Elle ne satisfait pas la condition de Palais Smale en  $c = 0$ . De plus  $c = 0$  est une valeur régulière, mais  $\{J \leq \varepsilon\}$  n'est certainement pas homéomorphe à un sous-ensemble de  $\{J \leq \varepsilon\}$  car ce dernier est compact, alors que  $\{J \leq \varepsilon\}$  ne l'est pas.

## 2.4 Principe de Min-Max

Le lemme de déformation permet donc d'avoir une caractérisation topologique des valeurs régulières exprimée seulement en termes des valeurs prises par la fonctionnelle et non à l'aide de sa différentielle. On le met en œuvre à travers le principe du Min-Max qui suit. Pour tout  $c \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon_0 > 0$ , on introduit un ensemble d'homéomorphisme.

$D_c^{\epsilon_0} = \eta$  homéomorphisme de  $V$  satisfaisant la propriété de lemme de déformation .

**Théorème 2.3.** Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de parties de  $V$  non vide et

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u).$$

On suppose que  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale au niveau  $c$  tel que  $c \in \mathbb{R}$  et qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\mathcal{A}$  soit stable par  $D_c^{\epsilon_0}$  pour tout  $\alpha \geq \epsilon_0 > 0$ , c'est-à-dire que si  $A \in \mathcal{A}$ , alors  $\eta(A) \in \mathcal{A}$  pour tout  $\eta \in D_c^{\epsilon_0}$ . Alors  $c$  est une valeur critique de  $J$ .

**Démonstration 2.** On raisonne par l'absurde et on suppose que  $c$  soit une valeur régulière de  $J$ . En vu de la façon dont le paramètre  $E$  est introduit dans le lemme de déformation, on peut toujours supposer que celui-ci est inférieur à  $\alpha$ . Soit  $\epsilon$  un valeur associée au lemme de déformation. Par définition de la borne inférieure, il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que

$$\sup_{u \in A} J(u) \leq c + \epsilon$$

soit encore  $A \subset J \leq c + \epsilon$ . Par le lemme de déformation, il existe  $\eta \in D_c^{\epsilon_0}$  tel que  $\eta(J \leq c + \epsilon) \subset J \leq c - \epsilon$ , d'où a fortiori  $A' = \eta(A) \subset J \leq c - \epsilon$  ce qui implique que  $\sup_{u \in A'} J(u) \leq c - \epsilon$ , par hypothèse,  $A' \in \mathcal{A}$  ce qui contredit la définition de  $c$  en tant que borne inférieure.

**Remarque 6.** i ) Si  $J$  vérifie la condition de Palais-Smale,  $-J$  aussi. On a donc un résultat analogue pour les quantités

$$d = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} J(u).$$

ii ) Si on prend  $\mathcal{A} = \{u, u \in V\}$ , alors on retrouve le fait qu'une fonction nulle qui vérifie la condition de Palais-Smale et qui est minorée atteint sa borne inférieure .

iii ) L'utilisation du principe du min-max dépend du choix de  $\mathcal{A}$ . On prend en général des classes d'ensembles qui partagent un même invariant topologique (genre, catégorie, classe d'homotopie, etc.) susceptible d'être conservé par le flot  $\eta_t$ .

## 2.5 Identité de Picone

Identité de Picone classiques affirme que, pour des fonctions différentiables  $u \geq 0, v > 0$ , on a

$$|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{v^2} |\nabla v|^2 - 2 \frac{u}{v} \nabla u \nabla v = |\nabla u|^2 - \nabla \left( \frac{u^2}{v} \right) \nabla v > 0 \quad (2.5)$$

Pour l'identité de Picone généralisé dans le cadre non linéaire on peut traiter des types :

$$\begin{cases} \Delta u = u(x)f(x) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il prouvé que pour des fonctions différentiables  $u \geq 0, v > 0$

$$|\nabla u|^2 + \frac{|\nabla u|^2}{f'(v)} + \left( \frac{u\sqrt{f'(v)\nabla v}}{f(v)} - \frac{\nabla u}{\sqrt{f'(v)}} \right)^2 = |\nabla u|^2 - \nabla \frac{u^2}{f(v)} \nabla v \geq 0. \quad (2.6)$$

$\nabla u = 0$  est vrai si seulement si  $u = cv$  pour  $c$  est une constante Nous généralisons le résultat principal de Tyagi pour l'opérateur p-Laplacien, c'est-à-dire que nous donnons un analogue non linéaire de l'identité de Picone

Nous supposons les hypothèses suivantes :

- $\Omega$  désigne tout domaine de  $R^N$
- $1 < p < \infty$
- $f : (0, \infty) \text{ vers } (0, \infty)$  soit un fonction de  $C^1$

Nous commençons d'abord par l'identité de Picone de pour de p-Laplacienne

**Théorème 2.4.** *Soit  $v > 0$  et  $u \geq 0$  deux fonctions différentiables non constantes dans  $\Omega$  Supposons que  $f'(y) \geq (p-1)(f(y))^{\frac{p-2}{p-1}}$  pour tout  $y$  Définir*

$$J(u, v) = |\nabla u|^p - \frac{pu^{p-1}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v}{f(v)} + \frac{u^p f'(v)|\nabla v|^p}{f(v)^2}$$

$$G(u, v) = |\nabla u|^p - \nabla \left( \frac{u^p}{f(v)} \right) |\nabla v|^{p-2} \nabla v$$

Si  $J(u, v) = G(u, v) \geq 0$  de plus  $J(u, v) = 0$  p p en  $\Omega$  si seulement si  $\nabla(u, v) = 0$  p,p en  $\Omega$

Si  $J(u, v) = G(u, v) \geq 0$  de plus  $J(u, v) = 0$  p p en  $\Omega$  si seulement si  $\nabla(u, v) = 0$  p,p en  $\Omega$

**Remarque 7.** *Lorsque  $p = 2$  et  $f(y) = y$  nous obtenons l'identité de Picone classique (2.5) pour le Laplacienne et lorsque  $p = 2$  nous obtenons sa version non linéaire (2.6)*

## CHAPITRE 3

### EXISTENCE DU SOLUTION DE PROBLÈME

Dans ce chapitre, nous mentionnons les étapes prises pour trouver leurs valeurs propres principales lorsque ( $q \equiv 0$ ) et ( $q \geq 0$  et  $q \not\equiv 0$ ).

On étudie l'existence des valeurs propres principales du problème.

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

$q$  et  $g$  deux fonctions mesurables, qui décroissent vers zéro à l'infini.  $q$  est positive ou nulle,  $g$  est de signe non constant dans  $\mathbb{R}$ . On appelle valeur propre principale du Problème (3.1), toute valeur du paramètre pour laquelle il existe une solution  $u(x) \geq 0$  et  $u(x) \not\equiv 0$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas  $u$  est appelée fonction propre principale.

L'étude de tels problèmes intervient dans l'investigation des solutions des équations non linéaires.

$$\begin{cases} Lu = -\Delta u + q(x)u = \lambda g(x)u + f(\lambda, x, u), x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

sous certaines conditions sur  $q, g$  et  $f$  une branche de solutions positives du Problème peut bifurquer à partir de la solution nulle, précisément, quand  $\lambda$  est une valeur propre principale du problème linéaire associé.

Nous introduisons les notations suivantes.

Soit  $h$  une fonction réelle mesurable, on note  $h^\pm = \max(\pm h, 0)$  la partie positive et négative de  $h$ , i.e  $h = h^+ - h^-$ .

Nous introduisons aussi les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\rho(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

pour  $\alpha > 0$  fixé, on note

$$p_\alpha(x) = \rho^{2\alpha}(x)(1 + \log \sqrt{1 + |x|^2})^{-2}.$$

On définit les espaces

$$V = \{u \in D'(\mathbb{R}^2), (p_1)^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^2), |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

$V$  muni de la norme

$$\|u\|_V = \left( \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + p_1|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est un espace de Hilbert (voir Hanouzet [11] p.230).

$$L_p^2(\mathbb{R}^2) = \{u, p^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

$p$  étant une fonction positive définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$V_+ = \{u \in V : \int_{\mathbb{R}^2} g|u|^2 dx \geq 0\}.$$

**Définition 3.1.** On appelle solution du problème (3.1) tout couple  $(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$  qui vérifie (3.1).  $\lambda$  est dit valeur propre du problème(3.1) s'il existe un vecteur  $u \in V$  non nul qui vérifie (3.1).  $u$  est alors appelé fonction propre associée à la valeur propre principale  $\lambda$ .

### Hypothèses

Nous considérons aussi les hypothèses suivantes

i)  $g$  et  $q$  sont deux fonctions mesurables,  $g$  est de signe non constant sur  $\mathbb{R}^2$ , telles que  $\exists \alpha > 1, \exists \beta \geq 1, \exists K > 0, \exists C > 0$  satisfaisant

$$|g(x)| \leq Kp_\alpha(x) \text{ et } q(x) \leq Cp_\beta(x)$$

ii)  $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2, g(x) = 0\}$  est de mesure nulle, i.e  $|\Omega_0| = 0$ .

## 1. CAS $q \equiv 0$

Nous commençons par donner deux remarques.

**Remarque 8.** La fonction constante appartient à  $V$  et par conséquent la forme bilinéaire  $\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \nabla v dx$  ne peut pas définir un produit scalaire sur  $V$ .

**Remarque 9.** On voit bien que  $\lambda = 0$  est valeur propre du Problème (3.1) associée à la fonction unité, nous cherchons alors les autres fonctions propres correspondantes à des valeurs propres non nulles, si elles existent, sur l'orthogonal dans  $V$  de la fonction unité.

Compte tenu des deux remarques précédentes, nous considérons le problème complètement défini dépendant d'un paramètre  $\tau > 0$  de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + \tau g_-(x)u = \lambda g_+(x)u, x \in \mathbb{R}^2 \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Notons  $a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + \tau g_- uv) dx$  et  $b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} g_+ uv dx$ . Une formulation variationnelle du problème (3.2) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}^*, u \neq 0 \text{ tels que} \\ a(u, v) = \lambda b(u, v) \end{cases} . \quad (3.3)$$

Il est évident que la forme bilinéaire  $a(u, v)$  est continue sur  $V$ . Nous montrons à l'aide d'un raisonnement par l'absurde qu'elle est aussi coercive sur  $V$ . Nous supposons donc qu'il existe une suite  $(u_n)_n$  de  $V$  telle que :

- 1)  $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 + \tau g_- u_n^2 dx < \frac{1}{n}$
- 2)  $\|u_n\|_V = 1$

Comme la suite  $(u_n)_n$  est bornée dans  $V$  nous pouvons extraire une sous suite, notée encore  $(u_n)_n$ , qui converge faiblement vers un élément  $u$  de  $V$ .

En vertu de (1)  $|\nabla u_n| \rightarrow 0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  alors  $|\nabla u_n| = 0$  et par conséquent  $u$  est une constante.

D'autre part, la restriction de la suite  $(u_n)$  sur le support de  $g_-$  noté  $\Omega_{g_-}$ , est une suite fortement convergente vers zéro. En effet, nous avons

$$|\nabla u_n| \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_{g_-}) \text{ et } u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_{g_-})$$

par suite  $u_n \rightarrow 0$  dans  $L^2_{p_1}(\mathbb{R}^2)$

En vertu de l'unicité de la limite, la restriction de  $u$  sur  $(\Omega_{g_-})$  est identiquement nulle. Il en résulte donc que  $u$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^2$  (puisque  $u$  est constant). Ceci est en contradiction avec (2).

Par conséquent la forme bilinéaire  $a(u, v)$  définit un produit scalaire sur  $V$  équivalent au produit scalaire usuel. Comme la forme bilinéaire  $b(u, v)$  est continue sur  $V$ , il existe d'après le théorème de représentation de Riesz, un opérateur linéaire  $T$  continu dans  $V$  tel que :

$$a(Tu, v) = b(u, v), \forall u, v \in V.$$

Les valeurs propres du Problème (3.3) sont exactement les inverses des valeurs propres de  $T$ , associées aux mêmes fonctions propres.

**Proposition 3.1.** *L'opérateur  $T$  est compact.*

**Démonstration 3.** *Soit  $(u_n)_n$  une suite bornée dans  $V$ , alors  $(u_n)_n$  reste bornée sur  $H^1(B_R)$ , mais comme l'injection de  $H^1(B_R)$  dans  $L^2(B_R)$  est compacte, alors  $(u_n)_n$  est de Cauchy dans  $L^2(B_R)$ . Pour tout  $m, n$  on a*

$$\|T(u_n - u_m)\|_V^2 \leq \gamma a(T(u_n - u_m), T(u_n - u_m)) \quad (3.4)$$

$$\leq \gamma' \int_{\mathbb{R}^2} p_\alpha |u_n - u_m| |T(|u_n - u_m|)| dx \quad (3.5)$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy on obtient

$$\|T(u_n - u_m)\|_V^2 \leq \gamma'^2 \int_{\mathbb{R}^2} p_{2\alpha-1} |u_n - u_m|^2 dx \quad (3.6)$$

$$\leq \gamma_1 \|u_n - u_m\|_{L^2(B_R)} + \gamma_2 \frac{1}{(1 + R^2)^{2(\alpha-1)}} \|u_n - u_m\|_V^2 \quad (3.7)$$

La première quantité du membre de droite tend vers zéro. Par hypothèse  $\|u_n - u_m\|_V$  est bornée et  $\frac{1}{(1 + R^2)^{2(\alpha-1)}}$  tend vers zéro quand  $R$  tend vers l'infini. Par conséquent la suite  $(Tu_n)_n$  est de Cauchy dans  $V$  et  $u$  converge. On peut alors appliquer à  $T$  les résultats de la théorie spectrale classique des opérateurs autoadjoints compacts.

**Proposition 3.2.** *Le Problème (3.2) admet une infinité dénombrable de valeurs propres positives tendant vers l'infini*

$$0 < \lambda_1^+(\tau) \leq \lambda_2^+(\tau) \leq \dots \leq \lambda_j^+(\tau) \leq \dots$$

Ces valeurs propres sont caractérisées par le principe du Min-Max

$$\lambda_j^+(\tau) = \inf_{A \in V_j} \sup_{u \in A, u \neq 0} \frac{a(u, u)}{b(u, u)}$$

**Remarque 10.** *Compte tenu de la remarque 7, toute fonction propre du Problème (3.1) correspondante à une valeur propre non nulle doit changer de signe. Par suite, zéro est la seule valeur propre principale du Problème (3.1).*

## 2. CAS $q \geq 0$ et $q \not\equiv 0$

Nous considérons le Problème (au sens faible)

$$\begin{cases} -\Delta + q(x)u = \lambda g(x)u, x \in \mathbb{R}^2; \lambda \in \mathbb{R} \\ u \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

Le Problème (3.12) admet une double infinité dénombrable de valeurs propres l'une positive et tend vers  $+\infty$  et l'autre négative et tend vers  $-\infty$  (voir [8]).

$$\lambda_J^+ = \inf_{A \in V_j} \sup_{u \in A \cap V_+} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + qu^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} gu^2 dx} \right\} \quad (3.8)$$

$$\lambda_J^- = \inf_{A \in V_j} \sup_{u \in A \cap V_-} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + qu^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} gu^2 dx} \right\} \quad (3.9)$$

**Proposition 3.3.** *Les deux premières valeurs propres  $\lambda_1^+$  et  $\lambda_1^-$  sont les uniques valeurs propres principales du Problème (3.8). De plus, elles sont simples.*

**Démonstration 4.** Remarquons tout d'abord que si est valeur propre du Problème(3.8) avec le poids  $g$  alors  $(-\lambda)$  est valeur propre du Problème (3.8) avec le poids  $(-g)$ . De ce fait, il suffit de montrer que  $\lambda_1^+$  est principale.

D'après la caractérisation variationnelle de  $\lambda_1^+$  on a

$$\lambda_1^+ = \inf_{A \in V_j} \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + qu^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} gu^2 dx}, u \in V, \int_{\mathbb{R}^2} gu^2 dx > 0 \right\}.$$

Soit  $\phi$  la fonction propre associée à  $\lambda_1^+$ , donc  $\phi$  réalise le minimum, i.e.

$$\lambda_1^+ = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \phi|^2 + q\phi^2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} g\phi^2 dx}.$$

Supposons que  $\phi$  change de signe, alors  $\phi = \phi^+ - \phi^-$ . Posons

$$\begin{aligned} J(\phi, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \phi|^2 + q\phi^2) dx \\ G(\phi, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} g\phi^2 dx \end{aligned}$$

Puisque les supports de  $\phi^+$  et  $\phi^-$  sont disjoints on a

$$\begin{aligned} J(\phi, \phi) &= J(\phi^+, \phi^+) + J(\phi^-, \phi^-) \\ G(\phi, \phi) &= G(\phi^+, \phi^+) + G(\phi^-, \phi^-) \end{aligned}$$

Il est clair qu'au moins l'une des fonctions  $\phi^+$  ou  $\phi^-$  appartient à  $V_+$  car  $\phi \in V_+$ . On peut alors distinguer deux cas

$$G(\phi^+, \phi^+) \cdot G(\phi^-, \phi^-) > 0$$

ou

$$G(\phi^+, \phi^+) \cdot G(\phi^-, \phi^-) \leq 0$$

Le premier cas implique que  $\phi^+$  ainsi que  $\phi^-$  sont dans  $V_+$  et donc

$$\lambda_1^+ \leq \min \left\{ \frac{J(\phi^+, \phi^+)}{G(\phi^+, \phi^+)}, \frac{J(\phi^-, \phi^-)}{G(\phi^-, \phi^-)} \right\} \leq \frac{J(\phi, \phi)}{G(\phi, \phi)} = \lambda_1^+$$

ce qui implique que

$$\lambda_1^+ = \frac{J(\phi^+, \phi^+)}{G(\phi^+, \phi^+)} = \frac{J(\phi^-, \phi^-)}{G(\phi^-, \phi^-)}$$

Cette dernière équation prouve que  $\phi^+$  et  $\phi^-$  sont toutes les deux des fonctions propres associées à  $\lambda_1^+$ .

Dans le deuxième cas on obtient

$$\lambda_1^+ \leq \min \left\{ \frac{J(\phi^+, \phi^+)}{G(\phi^+, \phi^+)}, \frac{J(\phi^-, \phi^-)}{G(\phi^-, \phi^-)} \right\} \leq \frac{J(\phi, \phi)}{G(\phi, \phi)}$$

donc

$$\lambda_1^+ \leq \min \left\{ \frac{J(\phi^+, \phi^+)}{G(\phi^+, \phi^+)}, \frac{J(\phi^-, \phi^-)}{G(\phi^-, \phi^-)} \right\}$$

Ceci veut dire que l'une des fonctions  $\phi^+$  ou  $\phi^-$  est fonction propre associée à  $\lambda_1^+$ . Sans restriction de la généralité, supposons que  $\phi^+$  est fonction propre associée à  $\lambda_1^+$ . Appliquons l'identité de Picone à  $\phi, \phi^+$  (voir [1], [2] )

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\phi|^2 |\nabla(\frac{\phi^+}{\phi})|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\phi^+|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\phi^+)^2 \frac{\Delta\phi}{\phi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda_1 g - q)(\phi^+)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} (q - \lambda_1^+ g)(\phi^+)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\phi = c\phi^+$ .

Montrons que  $\lambda_1^+$  est la seule valeur propre principale positive du problème (3.8). Soit  $\lambda$  une valeur propre positive du problème (3.12) et soit  $\varphi$  la fonction propre associée à  $\lambda_1^+$ . Supposons que  $\lambda$  est principale c'est à dire que  $\varphi$  est strictement positive. En appliquant l'identité de Picone à  $\varphi$  et  $\phi$  on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 |\nabla(\frac{\phi}{\varphi})|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\phi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \phi^2 \frac{\Delta\varphi}{\varphi} dx = (\lambda_1^+ - \lambda) \int_{\mathbb{R}^2} g\phi^2 dx. \quad (3.10)$$

Comme  $\lambda$  est valeur propre positive du problème) nécessairement  $\lambda_1^+ \leq \lambda$  (d'après le principe du Min-Max). De l'égalité (3.10) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 |\nabla(\frac{\phi}{\varphi})|^2 dx - (\lambda_1^+ - \lambda) \int_{\mathbb{R}^2} g\phi^2 dx = 0$$

ce qui implique que  $\phi = c\varphi$  et  $\lambda = \lambda_1^+$ .

Enfin, montrons que  $\lambda_1^+$  est simple. Pour cela on suppose l'existence de deux fonctions propres  $u, v$  associées à  $\lambda_1^+$ .

En appliquant l'identité de Picone à  $u, v$  on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^2 |\nabla(\frac{u}{v})|^2 dx = 0$$

d'où  $v = cu$ .

## CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons trouvé les valeurs propres principales des problèmes elliptiques en  $\mathbb{R}^2$  dans les cas  $(q \equiv 0)$ ,  $(q \not\equiv 0 \text{ et } q > 0)$ .

Nous avons appliqué le principe de Min-Max et l'identité de Picone, ce qui nécessitait que le problème remplisse des conditions et des hypothèses.

Les perspectives restent nombreuses, on compte faire un travail dans Est-il possible de trouver des cas  $(q < 0)$ ?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.Allegretto. *Principal eigenvalues for indefinite weight elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$*  .To appear in *Aner.Math.Soc.*
- [2] W.Allegretto and B.Mingarelli. *On the non-existence of positive solutions for a schrodinger eqation with an indefinite weight function*, *C.C.Math. Rep.Sci.Canda (1986)*.
- [3] A.S.Bonnet . *Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques*, 1988 *Rapport de Recherche 229*.
- [4] K.J.Bronn-C.Cosnes and J.Fleckincer *Principal eigenvalae for problems with indefinite weight functions on  $\mathbb{R}^n$* .*Proc .A.M.S 109(199)*
- [5] Z.Belyacine. *Étude d'un Équation aux Dérivées partielles complément non linéaire avec résonance dans  $\mathbb{R}^n$* ,*Badje Mokhter Annaba 2013*
- [6] C.Dubuisson. *Étude du spectre discret dr perturbations d'opérateurs de la physique mathématique* . *Université de Bordeaux , 2014*
- [7] A.Djellit and J.Flickinger *Valeurs Propre de Problème Elliptiques*,*B.U.M 17(1993)*.
- [8] A.Djellit. *Existence de Valeurs Propres Principales pour un Problème Elliptique en Dimension 2*.*Université de Annaba.*

- [9] O.Gharbi. *Étude de l'existence de solution d'une classe de systèmes d'équations elliptique non linéaires* , *Badje Mokter Annaba*.
- [10] B.Hanouzet . *Espaces de Sobolev avec poids.Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace* , *Rend .Sem.Met Univ .Padova 56 (1971),227-272*.
- [11] O.Kavion. *Introduction à la théorie des point critique et application aux problèmes elliptique* *Spsinger-Verlage Nancy 1993*.
- [12] G.Stampacchia *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*.*Ann.Inst.Fuorier 15(1965),189-258*.
- [13] M.Reed ,B.Simon. *Method of modern mathematical physics.IV Academic press ,New York 1978*.