

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

N° : U.S/F.S/D.M/2022/2023.



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude d'un problème de contact en élasticité.

Option : A.N.E.D.P

Par:

1. *Bougdah Karima*

2. *Lalem Chaima*

Encadré par: Kasri Abderrezak

MCA U. SKIKDA

Devant le jury :

Président: khemis Rabah

MCA U. SKIKDA

Examineur: Lagraf Samira

MCB U. SKIKDA

Année: 2022/2023

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier un problème de contact pour un corps élastique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur l'existence et l'unicité de la solution du problème. On étudie le contrôle optimal du problème. Nous introduisons ensuite un schéma discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d'erreur.

Mots clés : matériaux élastiques, compliance normale, contact avec frottement, une solution faible, contrôle optimal, schéma totalement discret, inéquations variationnelles.

Abstract

The aim of this work is to study a contact problem for an elastic body. First, we focus on the existence and uniqueness of the solution to the problem. We study the optimal control of the problem. We then introduce a discrete scheme for the model and under appropriate smoothness assumptions derive error estimates.

Keywords: elastic materials, normale compliance, contact with friction, a weak solution, optimal control, totally discrete scheme, variational inequalities.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة التلامس لجسم مرن. أولاً ، نركز على وجود ووحداية الحل. ندرس بعد ذلك التحكم الأمثل للمشكلة. ثم نقدم مخططاً منفصلاً للنموذج وتحت افتراضات السلاسة المناسبة ، نشق تقديرات الخطأ.

الكلمات المفتاحية: المواد المرنة ، الاحتكاك ، التحكم الأمثل ، حل ضعيف ، مخطط منفصل ، تفاوت متغير

Remerciements

Nous voudrions remercier **ALLAH** le tout puissant d'avoir nous donner la volonté et la patience de mener à bien ce travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire. Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr : Kasri Abderrezak** pour nous avoir un sujet de mémoire Master aussi intéressant et pour son soutien durant l'élaboration de notre travail.

Nos remerciements vont également aux

- Président de jury : Khemis Rabeh M.C.A U. SKIKDA
 - Examineur : Lagraf Samira M.C.B U. SKIKDA
- d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail.

Bougdah Karima et Lalem Chaima.

Dédicace

Ce travail est dédié à mes chers parents, merci pour votre sacrifice et vos encouragements.

A la source de ma joie et de mon espérance, mes frères et ma sœur chérie.
A mes amis qui m'ont toujours donnée de l'inspiration et de l'espoir, à tous ceux qui m'ont aidé et inspiré à réaliser ce travail.

Bougdah Karima.

Dédicace

Je dédie *cet humble travail* à :

Mes parents chéris ♡, La bougie qui ne s'éteint jamais et qui ne cesse jamais de me guider et soutenir, le symbol d'amour et de la bonté par excellence, qui m'ont appris à ne pas céder devant les difficultés, qui m'ont encouragé et aidé pour atteindre mes buts dans la vie, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit de leur part pour mon éducation et mon bien être.

A mes soeure ♡, frères chacun en son nom ♡ :

Bilal, Rafik, Yasin, Salah, Lamia, Samiha, Iman, Ikram, Qui font des efforts pour m'aider surtout moralement pendant toute la période de mes études et aussi lors de réalisation de ce travail.

Aux bourgeons, aux poussins, mes neveux et nièces♡♡ :

Acil, Arig, Gawad, Rital.

A mes amies ♡, sources d'espoir et de motivation pour leur soutien au long de mon parcours universitaires.

Lalem Chaima.

TABLE DES MATIÈRES

1 Modélisation	1
1.1 Loi de comportement	1
1.1.1 Loi de comportement élastique	2
1.2 Equations de mouvement et d'équilibre	2
1.3 Conditions aux limites	3
1.3.1 Les conditions aux limites des déplacements et des trac-	
tions	4
1.3.2 Condition de compliance normale	4
1.3.3 Conditions de contact avec frottement	5
2 Rappels et préliminaires	6
2.1 Quelques résultats dans les espaces de Banach	6
2.2 Quelques résultats dans les espaces de Hilbert	8
2.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact	9
2.4 Approximation par éléments finis	10
3 Problème de contact avec frottement et compliance normale	13
pour un matériau élastique	13
3.1 Le modèle	13
3.2 Hypothèses et Formulation Variationnelle	15

3.3	Existence et unicité de la solution faible	18
3.4	Le problème du contrôle optimal	21
3.4.1	Existence de la solution	22
3.5	Une technique de régularisation	24
3.6	Approximation numérique	27

Introduction

La mécanique de contact s'intéresse principalement à l'étude de la déformation des solides qui se touchent avec des surfaces en contact en un ou plusieurs points. La première contribution reconnue sur le contact entre solides déformables est celle de Hertz [14] qui se limitait aux surfaces sans frottement et aux corps parfaitement élastiques. Du fait de l'importance du sujet, des applications importantes ont été faites concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution dans l'étude de nombreux problèmes en mécanique de contact voir [6, 7, 15, 16]. Le contrôle optimal des problèmes de contact avec frottement a été étudié dans de nombreux articles voir [1, 8, 11, 17].

Dans ce mémoire, nous considérons un problème de contact statique qui décrit le contact avec frottement entre un corps élastique linéaire et une fondation déformable. Dans la modélisation du contact nous utilisons la loi de frottement sec de Coulomb dans laquelle la borne de frottement dépend du compliance normale.

Le plan de ce travail, composé de trois chapitres, est le suivant. Le Chapitre 1 comprend la description classique des équations, des relations constitutives des matériaux élastiques et des conditions aux limites. Dans le Chapitre 2, on rappelle des notations mathématiques nécessaires à la compréhension de ce travail. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude d'un problème de contact avec frottement statique pour un matériau élastique. Dans un premier temps, nous nous concentrons sur l'existence et l'unicité de la solution du problème. On étudie le contrôle optimal du problème. Pour cela on va appliquer un contrôle sur une portion de la frontière du corps. Nous introduisons ensuite un schéma discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d'erreur.

- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels ;
- \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ;
- \mathbb{R}^+ l'ensemble des nombres non négatifs ;
- $\mathbb{R}^{+,*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;
- \emptyset l'ensemble vide ;
- $[0, T]$ représente l'intervalle de temps, où $T > 0$;
- \mathbb{R}^d l'espace euclidien d -dimensionnel, ($d=2, 3$) ;
- \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$) ;
- I représente l'application d'identité ;
- I_d représente l'application d'identité dans \mathbb{S}^d ;
- c représente une constante positive générique dont la valeur change au cours de ce mémoire ;
- $p.p.$ signifie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représentent les dérivées par rapport au temps ;
- Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$) à frontière Lipschitzienne Γ ;
- $\overline{\Omega}$ est la fermeture (adhérence) de Ω ;
- $C^m(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont continus jusqu'à la frontière Γ ;
- $L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions p -intégrables sur Ω , avec la

modification usuelle si $p = \infty$;

CHAPITRE 1

Modélisation

Nous présentons une description générale de contact entre corps élastique et une fondation, pour plus des détails voir [2, 6, 15, 16].

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$) représentant la configuration de référence d'un corps déformable qui peut entrer en contact avec une fondation. Soit $x \in \bar{\Omega}$ la variable spatiale. On note \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^d . On définit les produits scalaires et les normes correspondantes sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^d u_i v_i, \quad |u| = \sqrt[2]{u \cdot u}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d;$$
$$\sigma \cdot \xi = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sigma_{ij} \xi_{ij}, \quad |\sigma| = \sqrt[2]{\sigma \cdot \sigma}, \quad \forall \sigma, \xi \in \mathbb{S}^d.$$

1.1 Loi de comportement

La loi de comportement caractérise le comportement du corps, elle est donnée par une relation entre le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$, où u est le champ des déplacements.

Les composantes du tenseur de déformation, dans le cadre de petites déformations, sont définies par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

1.1.1 Loi de comportement élastique

L'élasticité est la capacité d'un corps à résister à les forces de déformation et à retrouver sa forme et sa taille d'origine lorsque ces forces sont supprimées. Une loi de comportement élastique linéaire est définie par

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u),$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$, $1 \leq i, j, k, l \leq d$, est un tenseur d'élasticité du quatrième ordre.

Sous la forme de composantes, cette relation constitutive est donnée par

$$\sigma_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq d} \mathcal{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u),$$

où \mathcal{E}_{ijkl} sont les coefficients d'élasticité, $1 \leq i, j, k, l \leq d$.

1.2 Equations de mouvement et d'équilibre

Soit $[0, T]$ un intervalle de temps, soit $t \in [0, T]$ la variable du temps. L'équation dynamique de mouvement qui représente la conservation de la quantité de mouvement et qui régit l'évolution de l'état du corps est donnée par

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{Div} \sigma + f_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T],$$

où ρ est la densité du matériau et f_0 est la densité des forces volumiques appliquées. Dans des situations, où $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, on obtient l'équation d'équilibre statique

$$\text{Div} \sigma + f_0 = 0 \text{ dans } \Omega,$$

où ‘*Div*’ est l’opérateur de divergence, c’est-à-dire

$$Div\sigma = ((Div\sigma)_i)_{1 \leq i \leq d}, \quad (Div\sigma)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

1.3 Conditions aux limites

On suppose que Ω est un domaine, borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$), à frontière Lipschitzienne Γ . Alors, le vecteur normal d’unité extérieure $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ est défini presque par tous sur Γ .

Pour un champ vectoriel v défini sur Γ , nous notons v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielles de v sur la frontière Γ

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu \text{ sur } \Gamma.$$

Aussi, la composante normale σ_ν et la composante tangentielle σ_τ d’un tenseur σ sont données par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu \text{ sur } \Gamma.$$

Dans ce mémoire, nous supposons que la surface Γ est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telle que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$.

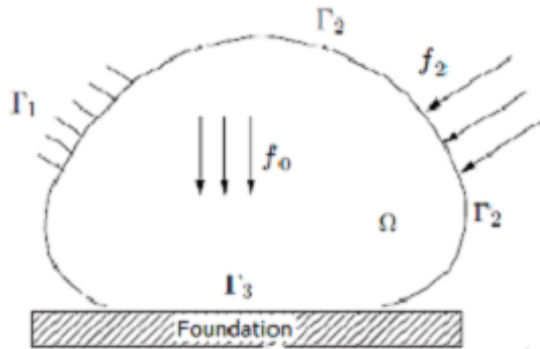


Fig 1. Un corps déformable en contact avec une fondation.

1.3.1 Les conditions aux limites des déplacements et des tractions

Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1 et donc nous utilisons la condition suivante

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

tandis que des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . Ainsi, le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Nous passons maintenant à la description des conditions aux limites sur Γ_3 , que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.3.2 Condition de compliance normale

Dans cette condition, nous supposons que le corps est en contact avec une fondation déformable de sorte que la réaction de la fondation implique la loi de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu), \text{ sur } \Gamma_3,$$

où p est une fonction prescrite non négative qui s'annule pour un argument négatif. Un exemple de la fonction de compliance normale p est

$$p(r) = c_\nu (r)_+,$$

où $(\alpha)_+ = \max\{\alpha, 0\}$ et c_ν est une constante positive. Dans certaines applications, σ_ν ne dépend pas de u_ν et on peut trouver le choix suivant

$$-\sigma_\nu = S,$$

où S est une contrainte normale donnée. Cette condition simplifie considérablement l'analyse et la rend possible.

1.3.3 Conditions de contact avec frottement

On rappelle les conditions de contact avec frottement suivantes

Loi de frottement de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb se traduit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ |\sigma_\tau| < \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = \mu |\sigma_\nu| \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : -\lambda \sigma_\tau = u_\tau, \end{array} \right.$$

qui stipule que s'il y a de contact, le cisaillement tangentiel σ_τ ne peut pas dépasser la contrainte normale $|\sigma_\nu|$ multiplié par la valeur du coefficient de frottement μ . Si l'inégalité stricte est satisfaite, le glissement ne se produit pas, et lorsque l'égalité est satisfaite, la contrainte de frottement s'oppose au taux de glissement.

Condition de contact avec frottement et compliance normale

Plus précisément, le modèle du contact se traduit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu), \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(u_\nu) \Rightarrow u_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(u_\nu) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où p_τ est une fonction prescrite non négative qui s'annule pour un argument négatif.

CHAPITRE 2

Rappels et préliminaires

Dans ce Chapitre on va présenter quelques rappels d'analyse fonctionnelle et donner des notations principales seront utilisées dans ce mémoire, pour plus des détails voir [2, 3, 4, 6, 15, 16].

2.1 Quelques resultats dans les espaces de Banach

Pour un espace de Banach réel X , on note par X^* et $\|\cdot\|_X, \langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ le dual topologique de X , la norme sur X , le produit de dualité entre X et X^* , respectivement. Dans cette Section, X est un espace de Banach réel.

Définition 2.1 *On dit qu'une suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$ et on écrit*

$u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v, u_n \rangle_{X^ \times X} = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \forall v \in X^*$.*

Définition 2.2 *Un espace de Banach X est dit réflexif si $i^*(X) = (X^*)^*$ où i^* est l'application cononique définie par*

$$i^*(X) = (X^*)^*; i^*(u) = f_u \in X^{**}, \forall u \in X; f_u(v) = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \forall v \in X^*.$$

Proposition 2.1 *Soit X un espace de Banach réflexif, si $\{u_n\} \subset X$ est une suite bornée dans X alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans X .*

Définition 2.3 *Soit $\Phi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, une fonction, le domaine effectif de Φ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur ∞ ,*

$$D(\Phi) = \{u \in X : \Phi(u) < \infty\},$$

et on dit que Φ est propre si $D(\Phi) \neq \emptyset$.

Définition 2.4 *Une fonction $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe ssi*

$$\Phi((1 - \alpha)u + \alpha v) \leq (1 - \alpha)\Phi(u) + \alpha\Phi(v), \quad \forall u, v \in X, \forall \alpha \in (0, 1).$$

Φ est strictement convexe si,

$$\Phi((1 - \alpha)u + \alpha v) < (1 - \alpha)\Phi(u) + \alpha\Phi(v), \quad \forall u, v \in X, \forall \alpha \in (0, 1).$$

Définition 2.5 *On dit que Φ est semi-continu inférieurement en $u \in X$ si, pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$, telle que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_X = 0,$$

et on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u).$$

Définition 2.6 *On dit que Φ est faiblement semi-continu inférieurement en $u \in X$, si pour chaque suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$ on a*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u).$$

Proposition 2.2 *Soit $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, Φ est faiblement semi-continu inférieurement ssi Φ est semi-continu inférieurement.*

Définition 2.7 Soit $F : X \rightarrow X$ une application. On dit que F admet un point fixe ssi $\exists u \in X$, tel que $F(u) = u$ et on dit que F est contractante ssi il existe une constante $L_F \in [0, 1)$, telle que

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L_F \|u - v\|_X, \forall u, v \in X.$$

Proposition 2.3 Soit X un espace de Banach et soit $F : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors, F admet un unique point fixe. .

2.2 Quelques resultats dans les espaces de Hilbert

Pour un espace de Hilbert réel X , nous notons par $(\cdot, \cdot)_X$ et $\|\cdot\|_X$ le produit scalaire et la norme associée sur X , respectivement. Dans cette section, X est un espace de Hilbert.

Proposition 2.4 (Théorème de représentation de Riesz). Pour tout $\eta \in X^*$, il existe un unique élément $f \in X$ tel que

$$\langle \eta, v \rangle_{X^* \times X} = (f, v)_X, \forall v \in X.$$

De plus, on a

$$\|\eta\|_{X^*} = \|f\|_X.$$

Alors, on peut identifier l'espace de Hilbert X avec son dual X^* et on désigne encore par f l'élément de X qui représente uniquement la forme linéaire η .

Définition 2.8 Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. 1) a est continue sur X s'il existe une constante réelle $L_a > 0$, telle que

$$|a(w_1, w_2)| \leq L_a \|w_1\|_X \|w_2\|_X, \forall w_1, w_2 \in X. \quad (2.1)$$

2) a est coercive (X -elliptique) s'il existe une constante réelle $m_a > 0$, telle que

$$m_a \|w\|_X^2 \leq a(w, w), \forall w \in X. \quad (2.2)$$

3) a est positive si

$$0 \leq a(w, w), \forall w \in X.$$

4) a est symétrique si

$$a(w_1, w_2) = a(w_2, w_1), \forall w_1, w_2 \in X.$$

Proposition 2.5 Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et soit $\Phi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement sur X . Alors, pour tout $\eta \in X^*$, le problème suivant : Trouver un élément $u \in X$, tel que

$$a(u, w - u) + \Phi(w) - \Phi(u) \geq \langle \eta, w - u \rangle_{X^* \times X}, \forall w \in X,$$

admet une unique solution.

Proposition 2.6 Soient X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive et $\{u_n\} \subset X$ une suite qui converge faiblement vers $u \in X$. Alors on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, u_n) \geq a(u, u).$$

2.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact

Soit Ω un domaine borné dans l'espace numérique \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$), de variable $x = (x_1, \dots, x_d)$, avec une frontière de Lipschitz Γ . Nous introduisons les espaces

$$H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \mathcal{Q} = L^2(\Omega; \mathbb{S}^d),$$

$$H_1 = \{u \in H; \varepsilon(u) \in \mathcal{Q}\}, \mathcal{Q}_1 = \{\sigma \in \mathcal{Q}; \text{Div} \sigma \in H\}.$$

H, \mathcal{Q}, H_1 et \mathcal{Q}_1 sont des espaces de Hilbert munis respectivement par des produits scalaires canoniques

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in H, \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q},$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in H_1,$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}_1} = (\text{Div}\sigma, \text{Div}\tau)_H + (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q}_1,$$

où les normes associées sont notées respectivement par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}_1}$. Nous pouvons définir l'application de la trace $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbb{R}^d)$ qui est une application linéaire continue telle que $\tilde{\gamma}(v) = v|_{\Gamma}$ si $v \in H_1 \cap [C(\bar{\Omega})]^d$. Soit $H_{\Gamma} = H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow H_{\Gamma}$ est un opérateur linéaire, continu et surjectif. On rappelle que $\tilde{\gamma}$ est un opérateur compact, c'est-à-dire que pour toute suite bornée $\{v_n\}$ dans H_1 , il existe une sous-suite de $\{v_n\}$ qui est convergente dans $L^2(\Gamma)^d$. Pour chaque élément $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour notée la trace $\tilde{\gamma}(v)$ de v sur Γ . De plus, si $\sigma \in \mathcal{Q}_1$ est régulière, alors on a la formule de Green suivante

$$(\text{Div}\sigma, v)_H + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v ds, \quad \forall v \in H_1, \quad (2.3)$$

où ds est l'élément de mesure de la surface.

2.4 Approximation par éléments finis

On note que l'on peut étendre ces résultats à des domaines de dimensions autres que deux et on suppose que $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ est polygonal et partitionné en un nombre fini de triangles $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h} \mathcal{T}$ et pour $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}^h$, alors $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ soit vide, soit un sommet commun, soit un côté commun.

Pour un élément quelconque $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, on pose

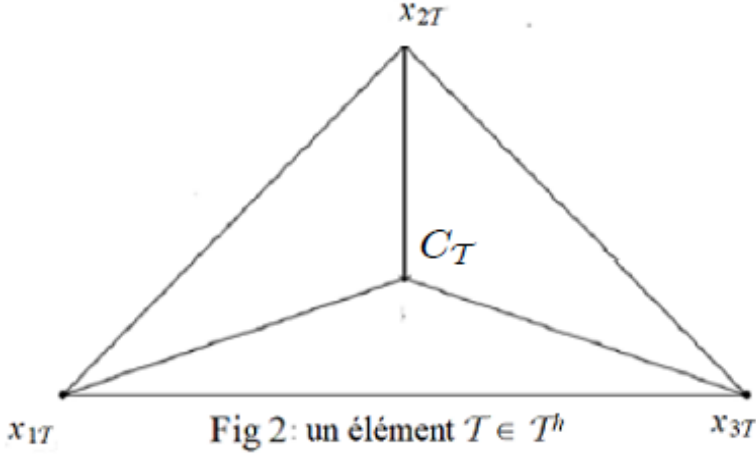
$$h_{\mathcal{T}} = \max \{ \|x - y\| ; x, y \in \mathcal{T} \},$$

alors le paramètre de discrétisation est donné par $h = \max\{h_{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h\}$.
Soit $\rho_{\mathcal{T}}$ le diamètre de la plus grande sphère inscrite dans \mathcal{T} .

Définition 2.9 Une famille de triangulation $\{\mathcal{T}^h\}_h$ de $\bar{\Omega}$ est dite régulière ssi h tend vers zéro et qu'il existe une constante $\rho^* \geq 1$ telle que

$$\frac{h_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \leq \rho^*, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h, \forall h.$$

Ici, $x_{1\mathcal{T}}, x_{2\mathcal{T}}, x_{3\mathcal{T}}$ sont les sommets et $C_{\mathcal{T}}$ est le barycentre de \mathcal{T} voir Figure 2.



Maintenant, si l'espace $X = H^1(\Omega)$ est à approximer, notons $\{x_i\}_{i=1}^{N_h} \subset \bar{\Omega}$ l'ensemble des sommets des éléments et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ les fonctions de base d'éléments finis correspondantes qui sont linéaires sur chaque élément \mathcal{T} et satisfont

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq N_h. \quad (2.4)$$

Ainsi, l'espace de fonction linéaire par morceaux correspondant est

$$X^h = \text{span} \{\varphi_i, 1 \leq i \leq N_h\}.$$

L'interpolation par éléments finis d'une fonction continue $v \in C(\bar{\Omega})$ est définie par

$$\Pi^h(v) = \sum_{i=1}^{N_h} v(x_i) \varphi_i.$$

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d=2, 3$) un domaine polygonal/polyédrique, sa frontière Γ est divisée en trois parties relativement fermés Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , avec mutuellement intérieurs disjoints. Notons $\mathcal{T}_{\Gamma_3}^h$ la partition de Γ_3 induite par la triangulation \mathcal{T}^h . Pour l'espace V défini par

$$V = \{u \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d), u = 0 \text{ on } \Gamma_1\}.$$

On utilise l'espace des éléments finis

$$V^h = \left\{ w^h \in [C(\bar{\Omega})]^d, w^h|_K \in [P_1(K)]^d, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h, w^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}, \quad (2.5)$$

où $P_1(\mathcal{T})$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré global inférieur ou égal à 1 sur \mathcal{T} . Nous avons les estimations d'erreur suivantes

$$\|v - \Pi^h(v)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq ch^2 \|v\|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad (2.6)$$

$$\|v - \Pi^h(v)\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq ch \|v\|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|v - \Pi^h(v)\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq ch^2 \|v\|_{H^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}, \\ \forall v \in L^2(\Gamma), v|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

CHAPITRE 3

Problème de contact avec frottement et compliance normale pour un matériau élastique

Dans ce Chapitre on va étudier un problème de contact statique avec frottement pour un matériau élastique. Nous nous concentrons sur l'existence et l'unicité de la solution faible du problème. Aussi, on étudie le contrôle optimal du problème qui consiste à amener le tenseur de contraintes au plus près d'une cible donnée. Pour cela on va appliquer un contrôle sur une portion de la frontière du corps. Enfin, nous proposons un schéma numérique discret pour résoudre le problème.

3.1 Le modèle

Le cadre physique est le suivant. Un corps déformable occupe la configuration de référence $\Omega \subset \mathbb{R}^{d=2,3}$ qui est un domaine borné à frontière Lipschitzienne Γ . Le corps est supposé avoir une loi de comportement élastique et le processus est statique. On suppose une partition de Γ en trois parties ouvertes disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Le corps est serré sur Γ_1 et donc le champ de déplacement s'y annule, tandis que des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . Nous supposons que des forces volumiques de

densité f_0 agissent dans Ω . Sur Γ_3 le corps est en contact avec une fondation. Le contact est supposé régi par une version de la loi de frottement sec de Coulomb avec compliance normale. Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions vis-à-vis de la variable spatiale $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Sous les hypothèses ci-dessus, la formulation classique de notre problème est la suivante.

Problème 3.1 *Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0, \text{ dans } \Omega, \quad (3.2)$$

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1, \quad (3.3)$$

$$\sigma\nu = f_2, \text{ sur } \Gamma_2, \quad (3.4)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu), \text{ sur } \Gamma_3, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq p_\tau(u_\nu), \\ \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu) \frac{u_\tau}{|u_\tau|} \text{ si } u_\tau \neq 0 \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_3. \quad (3.6)$$

L'équation (3.1) représente la loi de comportement élastique. Ici \mathcal{A} est l'opérateur d'élasticité et $\varepsilon(u)$ est le tenseur des déformations. (3.2) représente l'équation d'équilibre pour les champs des contraintes. Les conditions (3.3)-(3.4) sont les conditions aux limites de déplacement-traction où $\sigma\nu$ représente le vecteur de contrainte de Cauchy. Les conditions (3.5)-(3.6) caractérisent les conditions aux limites de contact, où (3.5) est la condition de compliance normale sur une fondation déformable. On considère ici la loi de frottement sec de Coulomb statique avec compliance normale. La condition (3.6) stipule que s'il y a de contact, $|\sigma_\tau|$ ne peut pas dépasser la valeur $p_\tau(u_\nu)$. Si l'inégalité stricte est satisfaite, le glissement ne se produit pas, et lorsque l'égalité est satisfaite, la contrainte de frottement s'oppose au glissement.

3.2 Hypothèses et Formulation Variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.6), nous avons besoin des notations supplémentaires. On considère l'espace des champs de tenseurs du quatrième ordre

$$\mathbf{Q}_\infty = \{ \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, d\} \},$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.7)$$

Soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{w \in H_1; w = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vraie

$$C_K \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{Q}}, \quad \forall v \in V, \quad (3.8)$$

où $C_K > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_1 . Une preuve de l'inégalité de Korn peut être trouvée, par exemple, dans [12, page 79]. Sur l'espace V , on considère le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in V, \quad (3.9)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée. Il découle de l'inégalité de Korn (3.8) que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V . Donc $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ est un véritable espace de Hilbert. De plus, d'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe deux constantes positives c_0 dépendant uniquement du domaine Ω , Γ_1 et Γ_3 telles que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (3.10)$$

Dans l'étude du problème mécanique (3.1)-(3.6), on suppose que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{A}\varepsilon \cdot \varepsilon \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(ii) } \mathcal{A} \in \mathbf{Q}_{\infty}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

On suppose que la fonction $p_{\alpha} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($\alpha = \tau, \nu$) satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\alpha} > 0 \text{ tel que} \\ |p_{\alpha}(x, r_1) - p_{\alpha}(x, r_2)| \leq L_{\alpha} |r_1 - r_2|, \\ \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(b) l'application } x \rightarrow p_{\alpha}(x, r) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \forall r \in \mathbb{R}^+; \\ \text{(c) l'application } x \rightarrow p_{\alpha}(x, 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Les densités de forces satisfont

$$(i) f_0 \in H, (ii) f_2 \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d). \quad (3.13)$$

On suppose que

$$L_{\tau} + L_{\nu} < \frac{m_{\mathcal{A}}}{c_0^2}. \quad (3.14)$$

Soit $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire définie par

$$a(w, v) = (\mathcal{A}\varepsilon(w), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \forall w, v \in V. \quad (3.15)$$

On va utiliser la fonctionnelle $j_{f_r} : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j_{f_r}(w, v) = \int_{\Gamma_3} p_{\nu}(w_{\nu}) v_{\nu} ds + \int_{\Gamma_3} p_{\tau}(w_{\nu}) |v_{\tau}| ds, \forall w, v \in V. \quad (3.16)$$

Nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir l'élément $f \in V$ par

$$(f, w)_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot w ds, \forall w \in V. \quad (3.17)$$

De (3.10), (3.12) et (3.16), on déduit que la fonction j_{fr} satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{fr}(v_1, w_2) - j_{fr}(v_1, w_1) + j_{fr}(v_2, w_1) - j_{fr}(v_2, w_2) \\ \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|v_1 - v_2\|_V \|w_1 - w_2\|_V, \\ \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Maintenant, supposons que u et σ sont des fonctions assez régulières satisfaisant (3.1)-(3.6). Soit $w \in V$. En utilisant la formule de Green (2.3) et (3.1), on trouve

$$(\sigma, \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} - \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot w ds, \quad (3.19)$$

et on a

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot w ds = \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot w ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot w_\nu ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot w_\tau ds, \forall w \in V,$$

ce qui avec (3.4)-(3.5), (3.19) et (3.17) nous donne

$$(\sigma, \varepsilon(w) - \varepsilon(u))_{\mathcal{Q}} - \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (w_\tau - u_\tau) ds + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) \cdot (w_\nu - u_\nu) ds = (f, w - u)_V. \quad (3.20)$$

D'autre part, on a

$$- \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot w_\tau ds \leq \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |w_\tau| ds,$$

et de la condition (3.6), on conclut que

$$-\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot w_\tau ds \leq \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |w_\tau| ds \leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu) |w_\tau| ds,$$

et

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot u_\tau ds = - \int_{\Gamma_3} |\sigma_\tau| |u_\tau| ds = - \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu) |u_\tau| ds,$$

ce qui implique

$$-\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau \cdot (w_\tau - u_\tau) ds \leq \int_{\Gamma_3} p_\tau(u_\nu) (|w_\tau| - |u_\tau|) ds. \quad (3.21)$$

Ainsi, de (3.16), (3.20) et (3.21), on trouve que

$$(\sigma, \varepsilon(w - u))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(w, u) - j_{fr}(u, u) \geq (f, w - u)_V, \quad \forall w \in V. \quad (3.22)$$

Finalement, en utilisant (3.1), (3.15) et (3.22), on obtient la formulation variationnelle suivante en terme de champ des déplacements uniquement.

Problème 3.2 (\mathcal{P}) *Trouver un champ des déplacements $u \in V$ tel que*

$$a(u, w - u) + j_{fr}(w, u) - j_{fr}(u, u) \geq (f, w - u)_V, \quad \forall w \in V. \quad (3.23)$$

Une solution u qui satisfait (3.23) s'appelle solution faible du problème (3.1)-(3.6).

3.3 Existence et unicité de la solution faible

Notre résultat principal d'existence et d'unicité dans cette Section est le suivant.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.11)-(3.14), le problème (3.23) admet une unique solution. De plus, soient u_1 et u_2 deux solutions qui correspondent*

aux données $f = f_1, f_2$. Alors on a

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{(m_{\mathcal{A}} - c_0^2(L_\nu + L_\tau))} \|f_1 - f_2\|_V.$$

Preuve. On utilise (3.11) et (3.15), on trouve que a satisfait

$$m_{\mathcal{A}} \|w\|_V^2 \leq a(w, w)_V, \quad \forall w \in V. \quad (3.24)$$

D'autre part (3.11) et (3.7) implique qu'il existe $L_a > 0$ tel que

$$|a(w_1, w_2)| \leq L_a \|w_1\|_V \|w_2\|_V, \quad \forall w_1, w_2 \in V. \quad (3.25)$$

Ainsi, a une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $\eta \in V$, il résulte de (3.10), (3.12) et (3.16) que la fonctionnelle $\Psi_\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi_\eta(v) = j_{fr}(\eta, v), \quad \forall v \in V,$$

est propre, convexe et continue.

On considère le problème suivant. Soit $\eta \in V$. Trouver $u_\eta \in V$ tel que

$$a(u_\eta, v - u_\eta) + j_{fr}(\eta, v) - j_{fr}(\eta, u_\eta) \geq (f, v - u_\eta)_V, \quad \text{for all } v \in V. \quad (3.26)$$

Ainsi, en utilisant Proposition 2.5, on en déduit que le problème (3.26) admet une unique solution $u_\eta \in V$.

Pour continuer, on définit l'opérateur $\Lambda : V \rightarrow V$ par

$$\Lambda(\eta) = u_\eta. \quad (3.27)$$

Soit $\eta_1, \eta_2 \in V$, en utilisant la notation $u_1 = u_{\eta_1}$ et $u_2 = u_{\eta_2}$, alors de (3.26), on obtient

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &\leq j_{fr}(\eta_1, u_2) - j_{fr}(\eta_1, u_1) \\ &\quad + j_{fr}(\eta_2, u_1) - j_{fr}(\eta_2, u_2), \end{aligned}$$

et en utilisant (3.24) et (3.18), on obtient

$$m_{\mathcal{A}} \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|\eta_1 - \eta_2\|_V \|u_1 - u_2\|_V,$$

ce qui, avec (3.27) donne

$$\|\Lambda\eta_2 - \Lambda\eta_1\|_V \leq \frac{c_0^2(L_\nu + L_\tau)}{m_{\mathcal{A}}} \|\eta_1 - \eta_2\|_V.$$

et comme

$$\frac{c_0^2(L_\nu + L_\tau)}{m_{\mathcal{A}}} < 1,$$

on en déduit que Λ est une contraction dans l'espace de Banach V . Alors, d'après Proposition 2.3, il existe un unique élément $\eta^* \in V$, tel que $\eta^* = \Lambda\eta^* = u_{\eta^*}$. Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le Théorème 3.1. Soit η^* l'unique point fixe de Λ , soit u_{η^*} l'unique solution du problème (3.26) pour $\eta = \eta^*$ alors u_{η^*} est une solution du problème (3.23). L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , l'unicité de la solution du Problème (3.26). Donc, on en déduit que u_{η^*} est une solution unique du problème (3.23).

D'autre part, soient u_1 et u_2 deux solutions qui correspondent aux données $f = f_1, f_2$. Alors, de (3.23), on obtient

$$\begin{aligned} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) &\leq j_{f_r}(u_1, u_2) - j_{f_r}(u_1, u_1) \\ &\quad + j_{f_r}(u_2, u_1) - j_{f_r}(u_2, u_2) + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V, \end{aligned}$$

et en utilisant (3.24) et (3.18), on trouve

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A}} \|u_1 - u_2\|_V^2 &\leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u_1 - u_2\|_V^2 \\ &\quad + \|f_1 - f_2\|_V \|u_1 - u_2\|_V, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{1}{(m_{\mathcal{A}} - c_0^2(L_\nu + L_\tau))} \|f_1 - f_2\|_V.$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1. ■

3.4 Le problème du contrôle optimal

Maintenant, on voudrait exercer un contrôle donné f_2 sur Γ_2 pour que la contrainte résultante

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u), \quad (3.28)$$

soit la plus proche possible d'une cible donnée

$$\sigma_c = \mathcal{A}\varepsilon(u_c). \quad (3.29)$$

Ici dans (3.29) u_c est un élément donné dans V .

Soi $l \in V$ qui satisfait

$$(l, w)_V = \int_{\Omega} f_0 \cdot w dx, \quad \forall w \in V. \quad (3.30)$$

Soit $F : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \rightarrow V$ la fonction définie par

$$(F(z), w)_V = \int_{\Gamma_2} z \cdot w da, \quad \forall (z, w) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V. \quad (3.31)$$

Considérons maintenant le problème d'état suivant.

Problème 3.3 (\mathcal{P}_S) Soit $f_2 \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$ un contrôle donné. Trouver un élément $u \in V$ tel que

$$\begin{cases} a(u, w - u) + j_{fr}(u, w) - j_{fr}(u, u) \\ \geq (l + F(f_2), w - u)_V, \quad \forall w \in V. \end{cases} \quad (3.32)$$

En utilisant le théorème 3.1, on en déduit que pour tout $f_2 \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)$ le Problème \mathcal{P}_S a une unique solution $u \in V$.

Soit $\mathcal{L} : L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle coût définie par

$$\begin{cases} \mathcal{L}(z, w) = \frac{\gamma}{2} \|w - u_c\|_V^2 + \frac{\delta}{2} \|z\|_{L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d)}^2, \\ \forall (z, w) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V, \end{cases} \quad (3.33)$$

où $\gamma, \delta > 0$ sont deux constantes positives.

On considère le problème de contrôle optimal suivant.

Problème 3.4 (\mathcal{P}_{OC}) *Trouver $(z^*, u^*) \in \mathcal{W}$ tel que*

$$\mathcal{L}(z^*, u^*) = \min_{(z, u) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(z, u) \}, \quad (3.34)$$

où

$$\mathcal{W} = \left\{ (f_2, u) / (f_2, u) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V, \text{ tel que } \boxed{3.32} \text{ soit vrai} \right\}.$$

3.4.1 Existence de la solution

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Le problème \mathcal{P}_{OC} admet au moins une solution $(z^*, u^*) \in \mathcal{W}$.*

Preuve. De $\boxed{3.33}$, on déduit qu'il existe une suite $\{(z_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{W}$ telle que

$$0 \leq \inf_{(z, u) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(z, u) \} \leq \mathcal{L}(z_n, u_n) \leq \inf_{(z, u) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(z, u) \} + \frac{1}{n},$$

ce qui montre que $\{(z_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V$. De plus, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(z_n, u_n) = \inf_{(z, u) \in \mathcal{W}} \{ \mathcal{L}(z, u) \}. \quad (3.35)$$

Alors, par des arguments de compacité standard, voir Proposition 2.1 et la définition de l'application de trace, il s'ensuit qu'il existe $(z^*, u^*) \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \times V$ et une sous-suite de $\{(z_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, à nouveau notée par $\{(z_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, telle que les convergences suivantes soient satisfaites

$$u_n \rightharpoonup u^* \text{ faiblement dans } V \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.36)$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.37)$$

$$u_n \rightarrow u^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.38)$$

$$z_n \rightarrow z^* \text{ fortement dans } L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^d) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty, \quad (3.39)$$

De (3.32), (3.36) et (3.39) nous obtenons

$$\mathcal{L}(z^*, u^*) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(z_n, u_n), \quad (3.40)$$

ce qui, avec (3.35) montre que

$$\mathcal{L}(z^*, u^*) \leq \inf_{(z, u) \in \mathcal{W}} \{\mathcal{L}(z, u)\}. \quad (3.41)$$

De plus, voir Proposition 2.6, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, u_n - w) \geq a(u^*, u^* - w)_V. \quad (3.42)$$

D'autre part, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [j_{fr}(u_n, w) - j_{fr}(u_n, u_n)] = j_{fr}(u^*, w) - j_{fr}(u^*, u^*). \quad (3.43)$$

De plus, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (l + F(z_n), w - u_n)_V = (l + F(z^*), w - u^*)_V. \quad (3.44)$$

et puisque $\{(z_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{W}$ nous avons

$$\begin{cases} a(u_n, w - u_n)_V + j_{fr}(u_n, w) - j_{fr}(u_n, u_n) \\ \geq (l + F(z_n), w - u_n)_V, \forall w \in V. \end{cases} \quad (3.45)$$

Passant au limsup lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans (3.45), on trouve que (z^*, u^*) est une solution du problème \mathcal{P}_{OC} . ■

3.5 Une technique de régularisation

On va appliquer une technique de régularisation au problème \mathcal{P} afin d'obtenir des problèmes lisses. Ces problèmes ont un certain intérêt en eux-mêmes et fournissent une approximation de la solution du problème initial. Fixons $\alpha > 0$, on introduit la fonction régularisée $j_\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z, w \in V$, on a

$$j_\alpha(z, w) = \int_{\Gamma_3} p_\tau^\alpha(z_\nu) \times \left(\sqrt{|w_\tau|^2 + \alpha^2} - \alpha \right) ds. \quad (3.46)$$

Nous supposons (voir [11]) qu'il existe $c > 0$ tel que

$$|j_\alpha(z, w) - j_{fr}(z, w)| \leq c\alpha, \forall z, w \in V. \quad (3.47)$$

Maintenant, nous énonçons le problème régularisé suivant.

Problème 3.5 (\mathcal{P}^α) Soient $\alpha > 0$, . Trouver un élément $u^\alpha \in V$ tel que

$$a(u^\alpha, w - u^\alpha) + j_\alpha(u^\alpha, w) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \geq (f, w - u^\alpha)_V, \text{ for all } w \in V. \quad (3.48)$$

Théorème 3.3 Le problème \mathcal{P}^α admet une unique solution $u^\alpha \in V$. De plus on a

$$\|u^\alpha\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \|f\|_V.$$

Preuve. La preuve l'existence et l'unicité de la solution du problème peut être obtenue par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.1. D'autre part en choisissant en (3.48) $w = 0_V$, on trouve

$$a(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, 0_V) + j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \leq (f, u^\alpha)_V,$$

ce qui donne

$$a(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, 0_V) + j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \leq (f, u^\alpha)_V,$$

et comme

$$j_\alpha(u^\alpha, 0_V) = 0,$$

et

$$0 \leq j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha)$$

on trouve

$$\|u^\alpha\|_V \leq \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \|f\|_V.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Nous étudions maintenant la relation entre les solutions du problème \mathcal{P}^α et du problème \mathcal{P} lorsque α tend vers zéro. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.4 *on a la convergence suivant*

$$u^\alpha \rightarrow u \text{ fortement dans } V \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

Preuve. En utilisant (3.48) et (3.23), on obtient

$$\begin{cases} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j_\alpha(u^\alpha, u) - j_{fr}(u, u) \\ + j_{fr}(u, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha), \end{cases}$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u^\alpha - u, u^\alpha - u) \leq j_{fr}(u, u^\alpha) - j_{fr}(u, u) \\ + j_{fr}(u^\alpha, u) - j_{fr}(u^\alpha, u^\alpha) + j_\alpha(u^\alpha, u) - j_{fr}(u^\alpha, u) \\ + j_{fr}(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha). \end{array} \right.$$

Par conséquent, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\mathcal{A}} \|u^\alpha - u\|_V^2 \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau) \|u^\alpha - u\|_V^2 + \\ j_\alpha(u^\alpha, u) - j_{fr}(u^\alpha, u) + j_{fr}(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha) \end{array} \right.$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} (m_{\mathcal{A}} - c_0^2(L_\nu + L_\tau)) \|u^\alpha - u\|_V^2 &\leq |j_\alpha(u^\alpha, u) - j_{fr}(u^\alpha, u)| \\ &\quad + |j_{fr}(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha)|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (m_{\mathcal{A}} - c_0^2(L_\nu + L_\tau)) \|u^\alpha - u\|_V^2 &\leq |j_\alpha(u^\alpha, u) - j_{fr}(u^\alpha, u)| \\ &\quad + |j_{fr}(u^\alpha, u^\alpha) - j_\alpha(u^\alpha, u^\alpha)|, \end{aligned}$$

En gardant à l'esprit (3.47) et (3.14) et en passant à la limite comme $\alpha \rightarrow 0$ dans la dernière inégalité on obtient

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u^\alpha - u\|_V = 0. \quad (3.50)$$

■

3.6 Approximation numérique

Soit $\{\mathcal{T}^h\}_h$ une famille de triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ voir Section 2.4. Nous allons approcher l'espace V par la famille $\{V_h\}$ des sous-espaces de V donnés par (2.5). On va donner une estimation de l'erreur pour le problème (3.23) dans le cadre des éléments finis.

Dans la suite c désigne une constante générique strictement positive dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre et qui ne dépend pas de h . On considère le problème discret suivant

Problème 3.6 *Trouver un élément $u_h \in V_h$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(w_h - u_h))_{\mathcal{Q}} \\ + j_{fr}(w_h, u_h) - j_{fr}(u_h, u_h) \geq (f, w_h - u_h)_V, \forall w_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Sous les hypothèses du théorème 3.1, le problème (3.51) admet une solution unique $u_h \in V_h$. On a le résultat suivant.

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_V \leq c \inf_{w_h \in V_h} (\|u - w_h\|_V \\ + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|u\|_V^{1/2} \|u - w_h\|_V^{1/2} \\ + (\|p_\nu(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2}, \end{array} \right. \quad (3.52)$$

pour une constante $c > 0$

Preuve. On utilise alors (3.23) avec $v = u_h$ et (3.51) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - u_h))_{\mathcal{Q}} \\ \leq (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - w_h))_{\mathcal{Q}} + (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} \\ \quad + j_{fr}(u, u_h) - j_{fr}(u, u) \\ + j_{fr}(u_h, w_h) - j_{fr}(u_h, u_h) + (f, w_h - u_h)_V, \forall w_h \in V_h, \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(u - u_h)\|_V^2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4, \quad (3.53)$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= (\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(u_h), \varepsilon(u - w_h))_{\mathcal{Q}}, \\ R_2 &= (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(w_h - u))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(u, u_h) - j_{fr}(u, u) - (f, w_h - u)_V, \\ R_3 &= j_{fr}(u, u_h) - j_{fr}(u_h, u_h) + j_{fr}(u_h, u) - j_{fr}(u, u), \\ R_4 &= j_{fr}(u_h, w_h) - j_{fr}(u, w_h) + j_{fr}(u, u) - j_{fr}(u_h, u). \end{aligned}$$

Estimons chacun des quatre termes. Pour le premier terme, nous avons

$$|R_1| \leq M_1 \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|_V. \quad (3.54)$$

Le second terme R_2 par une simple estimation, on trouve

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \|\mathcal{A}\varepsilon(u)\|_{\mathcal{Q}} \|u - w_h\|_V \\ &+ (\|p_\nu(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

D'autre part, on a

$$R_3 = \int_{\Gamma_3} [(p_\nu(u_\nu) - p_\nu(u_{h\nu})) (u_{h\nu} - u_\nu)] ds \\ + \int_{\Gamma_3} [(p_\tau(u_\nu) - p_\tau(u_{h\nu})) (|u_{h\tau}| - |u_\tau|)] ds,$$

ce qui donne

$$|R_3| \leq c(L_\nu + L_\tau) \|u - u_h\|_V^2. \quad (3.56)$$

De la même manière, on a

$$|R_4| \leq c \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \quad (3.57)$$

En utilisant les bornes (3.54)-(3.57) dans (3.53) et en appliquant l'inégalité suivante

$$\lambda_1 \lambda_2 \leq \lambda_3 \lambda_1^2 + \frac{1}{4\lambda_3} \lambda_2^2, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0,$$

on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_V^2 \leq c(\|u - w_h\|_V^2 \\ + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^2 + \|u\|_V \|u - w_h\|_V \\ + (\|p_\nu(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}) \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}. \end{array} \right.$$

donc l'inégalité (3.52) est satisfaite. ■

On peut améliorer l'estimation (3.52) sous l'hypothèse de régularité

$$\sigma_\tau \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d). \quad (3.58)$$

Dans ce cas, on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir

$$R_2 = \int_{\Gamma_3} [\sigma_\tau \cdot (v_{h\tau} - u_\tau) + p_\tau(u_\nu) (|v_{h\tau}| - |u_\tau|)] da. \quad (3.59)$$

Nous pouvons donc utiliser

$$|R_2| \leq \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \|u_\tau - v_{h\tau}\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \quad (3.60)$$

Il en résulte le théorème suivant.

Théorème 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, supposons en plus $\sigma_\tau \in (L^2(\Gamma_3))^d$. Alors pour une constante $c > 0$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_V \leq c \inf_{w_h \in V_h} (\|u - w_h\|_V \\ \quad + \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}) \\ \quad + \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \right) \|u - w_h\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Pour dériver une estimation d'erreur, nous devons faire des hypothèses supplémentaires sur la régularité de la solution. Nous présentons un exemple de résultat. On suppose que

$$u \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad u|_{\Gamma_3} \in H^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d). \quad (3.62)$$

Nous utilisons des éléments linéaires pour l'espace des éléments finis V_h . Soit $\Pi^h u \in V_h$ l'interpolant de la solution u . Alors de (3.61), on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq c \left\| u - \Pi^h u \right\|_V + \left\| u - \Pi^h u \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + c \left(\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)}^{1/2} \right)^{1/2} \left\| u - \Pi^h u \right\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{aligned}$$

La théorie standard de l'interpolation par éléments finis, voir Section 2.4,

nous donne

$$\begin{aligned} \|u - \Pi^h u\|_V &\leq ch |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}, \\ \|u - \Pi^h u\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} &\leq ch^2 |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse de régularité (3.62), nous avons l'estimation d'erreur suivante

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_V \leq ch(|u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} + |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)} \\ + (\|\sigma_\tau\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} + \|p_\tau(u_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)})^{1/2} |u|_{H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{cases} \quad (3.63)$$

Le système d'éléments finis (3.51) peut être approché par une méthode d'itération de point fixe. En choisissant une estimation initiale $u_h^0 \in V_h$, on définit une suite $\{u_h^n\} \subset V_h$ par

$$\begin{cases} (\mathcal{A}(\varepsilon(u_h^{n+1})), \varepsilon(w_h) - \varepsilon(u_h^{n+1}))_{\mathcal{Q}} + j_{fr}(u_h^n, w_h) - j_{fr}(u_h^n, u_h^{n+1}) \\ \geq (f, w_h - u_h^{n+1})_V \quad \forall w_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.64)$$

On a le résultat de convergence suivant.

Théorème 3.7 *Sous les hypothèses du théorème 3.1. la méthode d'itération (3.64) converge :*

$$\|u_h^n - u_h\|_V \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

De plus, pour une constante $0 < \beta < 1$, nous avons l'estimation suivante

$$\|u_h^n - u_h\|_V \leq c\beta^n. \quad (3.65)$$

Preuve. On prend $w_h = u_h^{n+1}$ dans (3.51), on obtient

$$\begin{cases} (\mathcal{A}(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(u_h^{n+1}) - \varepsilon(u_h))_{\mathcal{Q}} + j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) \\ \geq (f, u_h^{n+1} - u_h)_V, \end{cases} \quad (3.66)$$

et on prend $w_h = u_h$, dans (3.51), on trouve

$$\begin{cases} (\mathcal{A}(\varepsilon(u_h^{n+1})), \varepsilon(u_h) - \varepsilon(u_h^{n+1}))_{\mathcal{Q}} + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}) \\ \geq (f, u_h - u_h^{n+1})_V. \end{cases} \quad (3.67)$$

En additionnant (3.66) et (3.67), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\varepsilon(u_h)) - \mathcal{A}(\varepsilon(u_h^{n+1})), \varepsilon(u_h) - \varepsilon(u_h^{n+1}))_{\mathcal{Q}} &\leq j(u_h, u_h^{n+1}) - j(u_h, u_h) \\ &\quad + j(u_h^n, u_h) - j(u_h^n, u_h^{n+1}). \end{aligned}$$

Alors, on peut dériver l'estimation suivante

$$\|u_h - u_h^{n+1}\|_V \leq \frac{c_0^2(L_\nu + L_\tau)}{m_{\mathcal{A}}} \|u_h - u_h^n\|_V,$$

ce qui donne

$$\|u_h - u_h^n\|_V \leq \left(\frac{c_0^2(L_\nu + L_\tau)}{m_{\mathcal{A}}}\right)^n \|u_h - u_h^0\|_V.$$

On prend

$$\beta = \frac{c_0^2(L_\nu + L_\tau)}{m_{\mathcal{A}}} < 1.$$

Alors, nous avons l'estimation (3.65). ■

Conclusion et Perspectives

Conclusion : Dans ce mémoire nous avons étudié un problème de contact avec compliance normale et une version statique de la loi de frottement de Coulomb pour un corps élastique. Nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible. On a étudié le contrôle optimal du problème, de plus l'approximation numérique a été réalisé dan le cadre des éléments finis.

Perspectives :

1. On pourrait considérer la loi de comportement électro-élastique ou thermo-élastique dans les travaux future, ce qui représente une continuité naturelle de ce mémoire.
2. On pourrait aussi considérer le cas dynamique ou le cas quasistatique avec d'autre lois de contact.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Amassad, D. Chenais and C. Fabre, Optimal control of an elastic contact problem involving Tresca friction law, *Nonlinear Analysis*, 48(2002), 1107-1135.
- [2] K. Atkinson, endall, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, DOI : 10.1007/978-1-4419-0458-4.
- [3] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [5] Fichera G (1964), Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, mem. Accas. Naz. Lincei, S. N VIII, Vol. VII, Sez. I, 5, 91–140.
- [6] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity* (American Mathematical Society–International Press 2002).
- [7] W. Han and M. Sofonea, Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance, *Applicaciones Muthematicae* 26, 415-435, (1999).

- [8] Abderrezak Kasri and Arezki Touzaline, Optimal control of a contact problem with slip dependent friction, *Annals of West University of Timisoara Mathematics and Computer Science* 58, 1, (2022), 18– 38.
- [9] J. L. Lions, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [10] J. L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod et Gauthier-Villars.
- [11] A. Matei and S. Micu, Boundary optimal control for a frictional contact problem with normal compliance, *Applied Mathematics and Optimization* (2017).
- [12] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [13] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris, (1967).
- [14] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di elastostatica*, *Atti della Societ'a Italiana per il Progresso delle Scienze* (1933).
- [15] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Springer, Berlin, 2004.
- [16] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, *Pure Appl. Math.*, vol. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.
- [17] A. Touzaline, Optimal control of a frictional contact problem, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, vol. 31. No. 4 (2015), 1-10, DOI : 10. 1007/s10255-015-0519-8.