

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de
Skikda

Faculté des Sciences
Département de
Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° :

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Analyse d'un problème de contact avec adhésion.

Option : A. F. A

Par :Karek abderrahmane islame

Encadré par: Kasri Abderrezak

M.C.A U.SKIKDA

Devant le jury :

Président : Bouzettouta Lamine

M.C. A U. SKIKDA

Examineur: Lallouche Abdallah

M.C.B U. SKIKDA

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant d'avoir me donner la volonté et la patience de mener à bien ce travail.

Je teins à remercier mon encadreur **Mr : Kasri Abderrezak** pour son soutien et qui a bien voulu diriger ce travail.

Je remercie également :

- Président de jury : Bouzettouta Lamine M.C.A U. SKIKDA
 - Examineur : Lallouche Abdallah M.C.B U. SKIKDA
- d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail.

Enfin, je teins à remercier mes enseignants, ma famille, mess collègues et tous qui ont contribué à mon parcours académique.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes chers parents, de leurs sacrifices et leurs encouragements.

A mes chers frères et mes chères soeurs sources de joie et de bonheur.

A ma famille, sources d'espoir et de motivation pour son soutien au long de mon parcours universitaire.

TABLE DES MATIÈRES

1	Modélisation	1
1.1	Equations constitutives	1
1.1.1	Loi de comportement élastique	2
1.1.2	Loi de comportement des matériaux électro-élastique	2
1.1.3	Loi de comportement viscoélastique	3
1.1.4	Loi de comportement électro-viscoélastique avec endomagement	3
1.2	Equations du mouvement et déséquilibre	5
1.3	Conditions aux limites	5
1.3.1	Les conditions aux limites de déplacement et de traction	6
1.3.2	Condition de contact bilatéral	6
1.3.3	Conditions aux limites électriques	7
1.3.4	Loi de frottement de Tresca avec adhésion	7
2	Préliminaires mathématiques	10
2.1	Quelques résultats dans les espaces de Banach	10
2.2	Quelques résultats dans les espaces de Hilbert	12
2.3	Espaces de fonctions vectorielles	13
2.4	Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact	15

3	Analyse d'un problème de contact piezoélectrique avec en-	
	dommagement, frottement et adhésion	17
3.1	Enoncé du problème.	17
3.2	Hypothèses.	20
3.3	Existence et unicité d'une solution faible	30

Introduction

L'effet piézoélectrique résulte de l'interaction entre les propriétés mécaniques et électriques dans laquelle le corps a la capacité de produire un champ électrique lorsqu'il est soumis à une contrainte mécanique et inversement, le corps piézoélectrique présente des déformations importantes en réponse à un champ électrique appliqué. Pour cette raison, les matériaux piézoélectriques sont utilisés de manière intensive dans diverses applications. En particulier, ils sont utilisés comme capteurs et actionneurs dans divers équipements de mesure. Modélisation et analyse récentes des problèmes de contact prenant en compte de l'interaction entre les champs électriques et mécaniques peut être trouvées dans [1, 4, 10, 11].

D'autre part, l'endommagement des matériaux est extrêmement important dans de nombreuses applications de la mécanique des solides et en conception. Des modèles généraux d'endommagement ont été dérivés du principe de puissance virtuelle dans [7, 8]. L'étude des problèmes de contact avec endommagement suscite actuellement un intérêt considérable, voir par exemple [10, 11, 12, 15] et leurs références.

Dans ce mémoire, nous étudions un problème dynamique de contact avec la loi de frottement de Tresca dans lequel l'endommagement est pris en compte. Nous supposons que les propriétés mécaniques du corps sont décrites par une loi de comportement électroviscoélastique. Comme dans [5, 6, 11, 12, 15], nous utilisons une variable interne β , le champ de liaison, défini sur la surface de contact, qui a des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\beta = 0$, toutes les liaisons sont rompues et il n'y a pas de liaisons actives ; lorsque $\beta = 1$, toutes les liaisons sont actives ; lorsque $0 < \beta < 1$, cela décrit la densité fractionnaire des liaisons actives et une adhésion partielle a lieu.

Le plan de ce travail, composé de trois chapitres, est le suivant. Le Chapitre 1 comprend la description classique des équations, des relations constitutives et des conditions aux limites. Dans le Chapitre 2, on rappelle des notations mathématiques nécessaires à la compréhension de ce travail. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude d'un problème de contact piezoélectrique avec frottement,

endommagement et adhésion. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique pour lequel nous prouvons l'existence d'une solution faible unique et obtenons des résultats de régularité pour la solution. La preuve est basée sur des arguments de la méthode de régularisation, des équations d'évolution non linéaires avec des opérateurs monotones et le théorème du point fixe de Banach.

- \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels ;
- \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ;
- \mathbb{R}^+ l'ensemble des nombres non négatifs ;
- $\mathbb{R}^{+,*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;
- \emptyset l'ensemble vide ;
- $[0, T]$ représente l'intervalle de temps, où $T > 0$;
- \mathbb{R}^d l'espace euclidien d -dimensionnel, ($d=2, 3$) ;
- \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$) ;
- I représente l'application d'identité ;
- I_d représente l'application d'identité dans \mathbb{S}^d ;
- c représente une constante positive générique dont la valeur change au cours de ce mémoire ;
- p.p.* signifie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représentent les dérivées par rapport au temps ;
- $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ représente la dérivée partielle de la fonction u_i par rapport à la composante x_j ;
- Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2, 3$) à frontière Lipschitzienne Γ ;
- $\bar{\Omega}$ est la fermeture (adhérence) de Ω ;

$C^m(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont continus jusqu'à la frontière Γ ;

$L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions p -intégrables sur Ω , avec la modification usuelle si $p = \infty$;

Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^d ($d=2,3$) représentant la configuration de référence d'un corps déformable susceptible d'entrer en contact avec une fondation dans l'intervalle de temps d'intérêt $[0, T]$. On note \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d . On définit les produits scalaires et les normes correspondantes sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^d u_i v_i, \quad |u| = \sqrt[2]{u \cdot u}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d;$$

$$\sigma \cdot \xi = \sum_{1 \leq i, j \leq d} \sigma_{ij} \xi_{ij}, \quad |\sigma| = \sqrt[2]{\sigma \cdot \sigma}, \quad \forall \sigma, \xi \in \mathbb{S}^d.$$

1.1 Equations constitutives

L'équation de comportement (loi de comportement) caractérise un matériau spécifique du corps. Elle décrit ses déformations résultant de l'action des forces. Elle est donnée par la relation entre le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$, où u est le champ de déplacement. Les composantes du tenseur des déformations, dans le cadre des petites

déformations, sont données par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.1)$$

1.1.1 Loi de comportement élastique

L'élasticité est la capacité d'un corps à résister à une force déformante et à retrouver sa taille et sa forme initiales lorsque cette force est supprimée. Une loi de comportement élastique linéaire est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u),$$

où \mathcal{A} est un tenseur d'élasticité du quatrième ordre. Sous forme de composantes, cette équation constitutive s'écrit sous la forme

$$\sigma_{ij} = \sum_{1 \leq k, l \leq d} \mathcal{A}_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u), \quad 1 \leq i, j \leq d,$$

où les \mathcal{A}_{ijkl} sont les coefficients d'élasticité.

1.1.2 Loi de comportement des matériaux électro-élastique

L'effet piézoélectrique résulte du couplage entre les propriétés électriques et mécaniques dans lesquelles le corps a la capacité de produire un champ électrique lorsqu'il y a une contrainte mécanique, et inversement, sous l'influence d'un champ électrique le corps est soumis à une contrainte mécanique. La loi de comportement des matériaux électro-élastique est de la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{E}^* \nabla(\varphi) \text{ dans } \Omega, \\ D &= \mathcal{C}E(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où \mathcal{A} et \mathcal{E} sont des fonctions constitutives. \mathcal{A} représente l'opérateur d'élasticité. D est le champ des déplacements électriques, \mathcal{E} est le tenseur piézoélectrique, \mathcal{E}^* est sa transposée, \mathcal{C} dénote le champ de la permittivité électrique,

∇ est l'opérateur gradient, $E = -\nabla\varphi$ est le champ électrique, φ est le champ de potentiel électrique.

1.1.3 Loi de comportement viscoélastique

La viscoélasticité est la propriété des matériaux qui présentent à la fois des caractéristiques visqueuses et élastiques lorsqu'ils subissent une déformation. Une loi de comportement viscoélastique générale est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u), \text{ dans } \Omega \times [0, T].$$

Où \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité et \mathcal{A} l'opérateur de viscosité. Ici et ci-dessous, un point au-dessus d'une variable indique la dérivée par rapport au temps, donc $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ et $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

1.1.4 Loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement

Les dommages matériels, pouvant être causés par la croissance de microfissures internes, apparaissent dans de nombreuses applications de la mécanique des solides. Puisqu'ils réduisent directement l'utilité des structures ou des composants, ce sujet est important en conception. Dans un matériau élastique isotrope et homogène, la fonction d'endommagement est définie par

$$\zeta = \frac{\mathcal{E}_{eff}}{\mathcal{E}_Y},$$

Où \mathcal{E}_Y est le module d'Young du matériau d'origine et \mathcal{E}_{eff} le module actuel. Il en résulte que la fonction d'endommagement ζ a des valeurs comprises entre zéro et un. Dans ce mémoire, nous considérons une loi de comportement électro viscoélastique avec endommagement. De plus, l'évolution des fissures microscopiques à l'origine de l'endommagement est déterminée par une inclusion parabolique. Plus précisément, le modèle se présente comme suit :

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}(\varepsilon(u), \zeta) + \mathcal{E}^*(\nabla\varphi), \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.2)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathcal{C}(\nabla\varphi), \text{ dans } \Omega \times [0, T],$$

$$\dot{\zeta} - \kappa\Delta\zeta + \partial I_{[0,1]}(\zeta) \ni \mathcal{G}(\varepsilon(u), \zeta), \text{ dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

Δ désigne l'opérateur de Laplace, $\kappa > 0$ est la constante de diffusion des microfissures et \mathcal{G} est la fonction source de dommage. Ici, la fonction indicatrice $I_{[0,1]} : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \infty]$ est donnée par

$$I_{[0,1]}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0, 1] \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}. \quad (1.4)$$

Le sous-différentiel de $I_{[0,1]}$ en s est l'ensemble

$$\partial I_{[0,1]}(s) = \begin{cases}]-\infty, 0] & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } s \in]0, 1[\\ [0, \infty[& \text{si } s = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.5)$$

Le terme sous-différentiel $\partial I_{[0,1]}(\zeta)$ dans (1.3) garantit que ζ est limité à des valeurs comprises entre zéro et un ; lorsque $\zeta = 1$, le matériau est intact et possède sa pleine capacité ; lorsque $\zeta = 0$, le matériau est complètement endommagé ; lorsque $0 < \zeta < 1$, il y a un dommage supplémentaire partiel. Prenons comme exemple la fonction source de dommage

$$\mathcal{G}(\varepsilon(u), \zeta) = \left(\frac{1 - \zeta}{\zeta} \right) - \frac{1}{2} \lambda_E \|\varepsilon(u)\|^2 + \lambda_w,$$

où λ_D , λ_E et λ_w sont des paramètres positifs, à déterminer expérimentalement.

1.2 Equations du mouvement et d'équilibre

Les équations dynamiques du mouvement, représentant la conservation de la quantité de mouvement, qui régissent l'évolution de l'état du corps sont

$$\rho \ddot{u} = \text{Div} \sigma + f_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T].$$

Où ρ est la masse volumique du matériau, f_0 est la densité des forces volumique appliquées et Div est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire

$$\text{Div} \sigma = ((\text{Div} \sigma)_i)_{1 \leq i \leq d}, \quad (\text{Div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (1.6)$$

1.3 Conditions aux limites

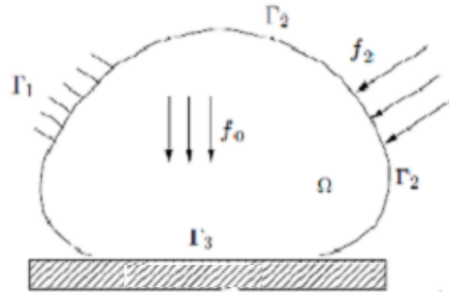
Nous examinons maintenant les conditions aux limites. Pour cela, nous supposons que la surface Γ est lipschitzienne. Ainsi, en presque tout point, le vecteur normal unitaire extérieur $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ est défini. Pour plus de détails sur la régularité de la frontière. Si v est un champ de vecteurs défini sur Γ , alors nous notons v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière Γ :

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu \text{ sur } \Gamma.$$

De même, la composante normale et les composantes tangentielles d'un tenseur σ sont notées σ_ν et σ_τ , et sont données par

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu.$$

Nous supposons que la surface du corps $\Gamma = \partial\Omega$ est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$.



Un corps déformable en contact avec une fondation.

1.3.1 Les conditions aux limites de déplacement et de traction

Nous supposons que le corps est maintenu fixe sur Γ_1 et, par conséquent

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

qui représente la condition de déplacement. Les tractions connues de densité f_2 agissent sur Γ_2 ; nous utilisons donc la condition

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2.$$

qui représente la condition de traction.

1.3.2 Condition de contact bilatéral

Cela signifie que le contact entre le corps et la fondation est maintenu à tout moment et il est modélisé par l'équation

$$u_\nu = 0, \text{ sur } \Gamma_3.$$

Cette condition peut être trouvée dans de nombreuses machines et dans les pièces et composants mobiles des équipements mécaniques.

1.3.3 Conditions aux limites électriques

Pour un corps piézoélectrique, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b telles que $mes(\Gamma_a) > 0$. Nous supposons que la charge électrique surfacique de densité q_2 impose sur Γ_b telle que :

$$D \cdot v = q_2 \text{ sur } \Gamma_b.$$

En outre, nous supposons que le champ potentiel électrique satisfait

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a.$$

1.3.4 Loi de frottement de Tresca avec adhésion

La loi de frottement de Tresca avec adhésion est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| \leq g_b, \\ |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| < g_b \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| = g_b \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Dans (1.7), p_τ est une fonction prescrite générale. On peut notamment considérer le cas

$$p_\tau(\beta, v) = \begin{cases} q_\tau(\beta) v, & 0 \leq |v| \leq L, \\ q_\tau(\beta) L \frac{v}{|v|}, & |v| > L, \end{cases} \quad (1.8)$$

Où $L > 0$ est une constante de borne et q_τ est une fonction de rigidité tangentielle positive. Prenons comme exemple la forme suivante de q_τ

$$q_\tau(\beta) = c_\tau \beta^2, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.9)$$

où c_τ est un paramètre matériel positif donné. Ici et ci-dessous, $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un opérateur de troncature défini par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v, & 0 \leq |v| \leq L, \\ L \frac{v}{|v|}, & |v| > L, \end{cases} \quad (1.10)$$

L'introduction de l'opérateur R_τ est motivée par les arguments mathématiques selon lesquels $L > 0$ est une longueur caractéristique de la liaison, au-delà de laquelle il n'y a plus de traction supplémentaire. De toute évidence, R_τ satisfait

$$\begin{cases} |R_\tau(v)| \leq L, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \\ |(|R_\tau(w)| - |R_\tau(v)|)| \leq |w - v|, \quad \forall w, v \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.11)$$

Le champ de liaison β est modélisé avec une équation différentielle du premier ordre qui décrit l'effet d'adhésion des surfaces de contact

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \theta_\beta, |R_\tau(u_\tau)|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) représente l'évolution du champ de liaison décrit par une fonction générale H_{ad} susceptible de changer de signe. Cette condition implique que des cycles de recollement après décollement peuvent se produire. De plus, le processus dépend de l'historique de liaison, que nous notons par

$$\theta_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

A titre d'exemples de la fonction de taux d'adhérence H_{ad} , considérons

$$H_{ad}(\beta, r) = - (c_\tau \beta r^2 - \epsilon_a)_+, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

ou

$$H_{ad}(\beta, r) = -c_\tau \frac{(\beta)_+}{1 + (\beta)_+} r^2, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

Où c_τ , ϵ_a sont des paramètres matériels positifs. Puisque $\dot{\beta} \leq 0$, le processus est irréversible et, une fois la séparation effectuée, la liaison ne peut être rétablie. Un autre exemple, où H_{ad} dépend des trois variables, est le suivant :

$$H_{ad}(\beta, \theta_\beta, r) = -\gamma_1 \beta r^2 + \gamma_2 \frac{\beta_+ (1 - \beta)_+}{1 + d_* (\theta_\beta)^2},$$

où γ_1 , γ_2 sont des paramètres matériels positifs et $d_* > 0$ est le facteur de pondération de l'historique, pour plus de détails, voir [14, 15].

CHAPITRE 2

Préliminaires mathématiques

Ce chapitre est consacré à revoir le contexte de l'analyse fonctionnelle et des espaces fonctionnels dont nous avons besoin, pour plus de détails, voir [3, 13, 14, 15].

2.1 Quelques resultats dans les espaces de Banach

Dans cette section, X est un espace de Banach et nous notons X^* , $\|\cdot\|_X$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ le dual de X , la norme sur les espaces X et le couple de dualité entre X et X^* , respectivement. Nous notons $X^{**} = (X^*)^*$ le biduel de X .

Définition 2.1 *On dit qu'une suite $\{u_n\} \subset X$ converge faiblement vers $u \in X$ et on écrit $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans X , si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v, u_n \rangle_{X^* \times X} = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \quad \forall v \in X^*.$$

On dit qu'une suite $\{v_n\} \subset X^$ converge faiblement* vers $v \in X^*$ et on écrit $v_n \rightharpoonup^* v$ faiblement*, si*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v_n, u \rangle_{X^* \times X} = \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \quad \forall u \in X.$$

Définition 2.2 *Un espace de Banach X est dit réflexif si $i^*(X) = X^{**}$ où i^* est le plongement canonique défini par*

$$\begin{aligned} i^* & : X \rightarrow X^{**}, \\ \forall u \in X, i^*(u) &= f_u \in X^{**}, \text{ tel que} \\ f_u(v) &= \langle v, u \rangle_{X^* \times X}, \forall v \in X^*. \end{aligned}$$

Définition 2.3 *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach avec $X \subset Y$. On dit que l'espace X est continument plongé dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, s'il existe un espace $c > 0$ tel que*

$$\|w\|_Y \leq c \|w\|_X, \forall w \in X.$$

On dit que l'espace X est compacte dans Y , si X est continument plongé dans Y et pour toute suite dans un tel ensemble borné a une sous-suite qui est de Chauchy dans la norme $\|\cdot\|_Y$.

Proposition 2.1 *Soit X un espace de Banach réflexif alors chaque suite bornée dans X possède une sous-suite faiblement convergente.*

Proposition 2.2 *Soit X un espace de Banach séparable alors chaque suite bornée dans X^* possède une sous-suite faiblement* convergente.*

Proposition 2.3 *(Banach fixed point theorem)*

Soit $F : X \rightarrow X$ une application de contraction, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle $L_F \in [0, 1)$ telle que

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L_F \|u - v\|_X, \forall u, v \in X.$$

Alors, F admet un unique point fixe $u \in X$, c'est-à-dire $F(u) = u$.

2.2 Quelques resultats dans les espaces de Hilbert

Pour un espace de Hilbert réel X , nous notons par $(\cdot, \cdot)_X$ et $\|\cdot\|_X$ le produit scalaire et la norme associée sur X , respectivement. Dans cette section, X est un espace de Hilbert.

Proposition 2.4 (*Théorème de représentation de Riesz*). *Pour tout $\eta \in X^*$, il existe un unique $f \in X$ tel que*

$$(\eta, v)_{X^* \times X} = (f, v)_X, \forall v \in X.$$

De plus, nous avons

$$\|\eta\|_{X^*} = \|f\|_X.$$

Définition 2.4 *Soit $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.*

1) a est coercitif s'il existe une constante réelle $m_a > 0$, telle que

$$m_a \|w\|_X^2 \leq a(w, w), \forall w \in X.$$

2) a est un opérateur continu sur X , s'il existe une constante réelle $L_a > 0$, telle que

$$|a(w_1, w_2)| \leq L_a \|w_1\|_X \|w_2\|_X, \forall w_1, w_2 \in X.$$

Définition 2.5 *L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est un opérateur fortement monotone et Lipschitz continu sur X , c'est-à-dire qu'il existe deux constantes réelles $m_A > 0$ et $L_A > 0$ telles que*

$$m_A \|w_1 - w_2\|_X^2 \leq (Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2)_X, \forall w_1, w_2 \in X.$$

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_X \leq L_A \|w_1 - w_2\|_X, \forall w_1, w_2 \in X.$$

Proposition 2.5 (*Théorème de Minty-Browder*). *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et lipschitzien continu sur X . Alors, pour tout $f \in X$,*

il existe un unique élément $v \in X$ tel que

$$Av = f.$$

Définition 2.6 Une application $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est Gateaux différentiable en $u \in X$ s'il existe un élément $\varphi'(u) \in X$ tel que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + \lambda v) - \varphi(u)}{\lambda} = (\varphi'(u), v)_X, \forall v \in X.$$

L'élément $\varphi'(u)$ qui satisfait la relation ci-dessus est appelé le gradient de φ en u . La fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Gateaux différentiable si elle est Gateaux différentiable en tout point de X .

2.3 Espaces de fonctions vectorielles

Ensuite, pour tout espace de Banach réel $(X, \|\cdot\|_X)$ et $T > 0$, on note $C([0, T]; X)$ et $C^1([0, T]; X)$ les espaces des fonctions continues et continument différentiables de $[0, T]$ dans X et on utilise la notation standard pour les espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$, $p \in [1, \infty]$, $k \geq 1$.

Soient X et Y des espaces de Hilbert réels tels que X soit dense dans Y et que l'application d'injection soit continue ; l'espace Y est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual X^* de X , c'est-à-dire que $X \subset Y \subset X^*$ est un triplet de Gelfand.

Proposition 2.6 Soit $X \subset Y \subset X^*$ un triplet de Gelfand et soit K un ensemble non vide, fermé et convexe de X . Supposons que $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire continue et symétrique et qu'il existe deux constantes réelles $c_2 > 0$ et c_1 telles que

$$a(v, v) + c_1 \|v\|_Y^2 \geq c_2 \|v\|_X^2, \forall v \in X. \quad (2.1)$$

Alors, pour chaque $w_0 \in K$ et chaque $f \in L^2(0, T; Y)$, il existe une unique

fonction w qui satisfait :

$$w \in W^{1,2}(0, T; Y) \cap L^2(0, T; X),$$

$$w(t) \in K, \forall t \in [0, T] : \langle \dot{w}(t), v - w(t) \rangle_{X^* \times X} + a(w(t), v - w(t))$$

$$\geq (f(t), v - w(t))_Y, \forall v \in K, p.p t \in (0, T),$$

$$w(0) = w_0.$$

Nous utiliserons l'inégalité de type Gronwall suivante.

Proposition 2.7 *Supposons que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues qui satisfont*

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^t f(s) ds, \forall t \in [a, b],$$

où $c > 0$ est une constante. Alors,

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^t g(s) \exp(c(t-s)) ds, \forall t \in [a, b].$$

Nous avons besoin du résultat suivant

Proposition 2.8 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) :$*

$X \rightarrow X$ un opérateur défini sur $(0, T)$ qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, z) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|z - y\|_X, \forall z, y \in X, \text{ p.p. } t \in (0, T); \\ (ii) \text{ Il existe } p \in [1, \infty] \text{ tel que} \\ L' \text{ application } t \longmapsto F(t, z) \in L^p(0, T; X), \forall z \in X. \end{array} \right.$$

2.4 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact

Soit Ω un domaine borné dans l'espace numérique \mathbb{R}^d , ($d=2, 3$), de variable $x = (x_1, \dots, x_d)$, avec une frontière de Lipschitz Γ . Nous introduisons les espaces

$$H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{Q} = L^2(\Omega; \mathbb{S}^d),$$

$$H_1 = \{u \in H; \varepsilon(u) \in \mathcal{Q}\}, \quad \mathcal{Q}_1 = \{\sigma \in \mathcal{Q}; \text{Div} \sigma \in H\},$$

$$\mathcal{Z} = \{D \in H; \text{Div} D \in L^2(\Omega)\}.$$

$H, \mathcal{Q}, H_1, \mathcal{Q}_1$ et \mathcal{Z} sont des espaces de Hilbert munis respectivement par des produits scalaires canoniques

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u \cdot v dx, \quad \forall u, v \in H,$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}} = \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q},$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in H_1,$$

$$(\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}_1} = (Div\sigma, Div\tau)_H + (\sigma, \tau)_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{Q}_1,$$

$$(D, B)_{\mathcal{Z}} = (\operatorname{div} D, \operatorname{div} B)_{L^2(\Omega)} + (D, B)_H,$$

Nous pouvons définir l'application de la trace $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbb{R}^d)$ qui est un opérateur linéaire continu tel que $\tilde{\gamma}(v) = v|_{\Gamma}$ si $v \in H_1 \cap [C(\bar{\Omega})]^d$. Soit $H_{\Gamma} = H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{\gamma} : H_1 \rightarrow H_{\Gamma}$ est linéaire, continu et surjectif. On rappelle que $\tilde{\gamma}$ est un opérateur compact, c'est-à-dire que pour toute suite bornée $\{v_n\}$ dans H_1 , il existe une sous-suite de $\{v_n\}$ qui est convergente dans $L^2(\Gamma)^d$.

Pour chaque élément $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour notée la trace $\tilde{\gamma}(v)$ de v sur Γ . De plus, si $\sigma \in \mathcal{Q}_1$ est régulière, alors on a la formule de Green suivante

$$(Div\sigma, v)_H + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v ds, \quad \forall v \in H_1,$$

où ds est l'élément de mesure de la surface.

Aussi, on note φ la trace d'un élément $\varphi \in H^1(\Omega)$ sur Γ et on rappelle que lorsque $D \in \mathcal{Z}$ est une fonction régulière, la formule de Green suivante est vraie :

$$(\operatorname{div} D, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (D, \nabla \varphi)_H = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \varphi da, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

où $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est l'opérateur gradient défini par

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq d}, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

CHAPITRE 3

Analyse d'un problème de contact piezoélectrique avec endommagement, frottement et adhésion

Ce Chapitre est consacré à traiter un problème de contact piezoélectrique dans lequel le frottement, l'adhésion et l'endommagement sont pris en compte. De plus, le champ d'adhérence est décrit par une fonction générale qui peut changer de signe et permet le recollement après le décollement.

3.1 Enoncé du problème.

Le cadre physique est le suivant. Un corps déformable occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (avec $d=2, 3$). Le corps est décrit par une loi de comportement électro-viscoélastique non linéaire avec endommagement et le processus est dynamique dans l'intervalle de temps d'intérêt $[0, T]$. Nous supposons que Γ est partitionné en trois parties mesurables disjointes $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma_a \cup \Gamma_b \cup \Gamma_3$, tels que $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$, $\text{meas}(\Gamma_a) > 0$. Le corps est serré sur Γ_1 et donc le champ de déplacement s'annule, tandis que des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques volumiques de densité q_0 agissent dans Ω et des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2 . De plus, les conditions aux limites de Diriclet homogènes du potentiel électrique sont

considérées sur Γ_a , tandis que les conditions aux limites de Neumann avec une charge électrique de surface de densité q_2 sont prescrites sur Γ_b . Le corps est en contact sur Γ_3 avec une base conductrice d'électricité. Le contact est supposé bilatéral, adhésif et régi par la loi de frottement de Tresca. Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions sur la variable spatiale $x \in \Omega \cup \Gamma$. Sous les hypothèses ci-dessus, la formulation classique de notre problème est la suivante.

Problème 3.1 *Trouver un champ de déplacement $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contrainte $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ d'endommagement $\zeta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ de potentiel électrique $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, un champ de déplacement électrique $D : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ de liaison $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}(\varepsilon(u), \zeta) + \mathcal{E}^*(\nabla\varphi), \text{ dans } (0, T) \times \Omega, \quad (3.1)$$

$$D = \mathcal{E}\varepsilon(u) - \mathcal{C}(\nabla\varphi), \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\rho\ddot{u} = \text{Div}\sigma + f_0, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\text{div } D = q_0, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\dot{\zeta} - \kappa\Delta\zeta + \partial I_{[0,1]}(\zeta) \ni \mathcal{G}(\varepsilon(u), \zeta), \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$u = 0, \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\sigma\nu = f_2, \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\varphi = 0, \text{ sur } \Gamma_a \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$D \cdot \nu = q_2, \text{ sur } \Gamma_b \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\nu} = 0, \text{ sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$D \cdot \nu = p_e(\varphi - \varphi_f), \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$u_\nu = 0, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| \leq g_b, \\ |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| < g_b \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ |\sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau)| = g_b \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que :} \\ \sigma_\tau + p_\tau(\beta, u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \theta_\beta, |R_\tau(u_\tau)|), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (3.15)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.16)$$

$$(i) \ u(0) = u_0, \quad (ii) \ \dot{u}(0) = v_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.17)$$

Les équations (3.1)-(3.2) représentent la loi de comportement électro-viscoélastique avec endommagement, telle que l'endommagement n'affecte que le terme élastique et qu'il n'y a pas de couplage entre le champ d'endommagement et le potentiel électrique. Ici, \mathcal{A} est l'opérateur de viscosité, \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité, \mathcal{E} désigne l'opérateur piézoélectrique, \mathcal{E}^* est la transposée de \mathcal{E} , $-\nabla\varphi$ est le champ électrique et \mathcal{C} représente l'opérateur de permittivité électrique. L'équation (3.3) est l'équation dynamique du mouvement où ρ est la masse volumique. L'équation (3.4) représente l'équation d'équilibre des champs de déplacement électrique. (3.5) est une inclusion différentielle parabolique qui décrit l'évolution du champ de dommage, où Δ désigne l'opérateur de Laplace, $\kappa > 0$ est la constante de diffusion des microfissures et \mathcal{G} est la fonction source de dommage. La fonction indicatrice $I_{[0,1]} : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \infty]$ et son terme sous-différentiel $\partial I_{[0,1]}(\zeta)$ sont donnés par (1.4)-(1.5). Les équations (3.6)-(3.7) sont les conditions aux limites de déplacement-traction où $\sigma\nu$ représente le vecteur de contrainte de Cauchy. (3.8)-(3.9) représentent les conditions aux limites électriques sur $\Gamma_a \cup \Gamma_b$. L'équation (3.10) signifie que la dérivée normale de ζ , notée $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}$, s'annule sur Γ . Par conséquent, il n'y a pas d'afflux de microfissures à la frontière. (3.11) est la condition de contact

électrique sur Γ_3 , où φ_f est le potentiel électrique de la fondation et p_e est une fonction continue prescrite à valeurs réelles. A titre d'exemple prenons $p_e(r) = kr$, où $k > 0$ le coefficient de conductivité électrique. Les conditions (3.12)-(3.13) représentent le contact bilatéral avec la loi de frottement de Tresca dans laquelle l'adhésion est prise en compte et g_b est une limite de frottement. Ici, p_τ est une fonction prescrite générale, voir (1.8)-(1.9). L'équation (3.14) représente l'évolution du champ de liaison décrit par une fonction générale H_{ad} susceptible de changer de signe. Cette condition implique que des cycles de recollement après décollement peuvent se produire. De plus, le processus dépend de l'historique de la liaison, que nous notons par

$$\theta_\beta(t, x) = \int_0^t \beta(s, x) ds.$$

Ici et ci-dessous $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un opérateur de troncature défini par(1.10). Enfin, (3.15)-(3.17) sont les conditions initiales.

3.2 Hypothèses.

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.17), nous introduisons l'espace V et l'ensemble convexe \mathcal{K} défini par

$$V = \{v \in H_1, v = 0 \text{ on } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\},$$

$$\mathcal{K} = \{\zeta \in H^1(\Omega) : 0 \leq \zeta \leq 1, p.p. x \in \Omega\}.$$

Puisque $meas(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vraie

$$C_K \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{Q}}, \forall v \in V,$$

où $C_K > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_1 . Une preuve de l'inégalité de Korn peut être trouvée, par exemple, dans [13]. Sur

l'espace V , on considère le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \quad \forall u, v \in V,$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée. D'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe une constante positive c_0 dépendant uniquement des domaines Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^d)} \leq c_0 \|v\|_V, \quad \forall v \in V. \quad (3.18)$$

Nous présentons les espaces fonctionnels

$$W = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_a\},$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Puisque $meas(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs–Poincar est vraie

$$C_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla \varphi\|_H, \quad \forall \varphi \in W,$$

où $C_1 > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_a . Sur l'espace W on considère le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \phi)_W = (\nabla \varphi, \nabla \phi)_H, \quad \forall \varphi, \phi \in W,$$

où la norme associée est notée par $\|\cdot\|_W$. D'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe une constante positive \tilde{c}_0 dépendant uniquement des domaines Ω , Γ_a et Γ_3 telle que

$$\|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0 \|\psi\|_W, \quad \forall \psi \in W. \quad (3.19)$$

Dans l'étude du problème mécanique (3.1)-(3.17), nous considérons les hypothèses suivantes. Nous supposons que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times$

$\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \\ \text{(ii) Il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)| \leq L_{\mathcal{A}} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \\ \text{(iii) L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \\ \text{(iv) L'application } x \mapsto \mathcal{A}(x, 0_{\mathbb{S}^d}) \in \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Nous supposons que l'opérateur $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{B}(x, \varepsilon_1, \xi_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2, \xi_1)| \leq L_{\mathcal{B}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\xi_1 - \xi_2|) \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \\ \text{(ii) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}; \\ \\ \text{(iii) L'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0_{\mathbb{S}^d}, 0_{\mathbb{R}}) \in \mathcal{Q}. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Nous supposons que la fonction source de dommages $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ |\mathcal{G}(x, \varepsilon_1, \xi_1) - \mathcal{G}(x, \varepsilon_2, \xi_2)| \leq L_{\mathcal{G}} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\xi_1 - \xi_2|) \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(ii) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, \varepsilon, \xi) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}; \\ \text{(iii) L'application } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0_{\mathbb{S}^d}, 0_{\mathbb{R}}) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \mathcal{C}(x, w)_i = \sum_{1 \leq j \leq d} \mathcal{C}_{ij}(x) w_j, \\ 1 \leq i \leq d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall w = (w_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(ii) } \mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ji} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j \leq d; \\ \text{(iii) Il existe } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ tel que} \\ \mathcal{C}(x, w) \cdot w \geq m_{\mathcal{C}} |w|^2, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall w \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

L'opérateur $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijk}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \mathcal{E}(x, \varepsilon)_i = \sum_{1 \leq j, k \leq d} \mathcal{E}_{ijk}(x) \varepsilon_{jk}, \\ 1 \leq i \leq d, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \text{(ii) } \mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}_{ikj} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (3.24)$$

L'opérateur $\mathcal{E}^* : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est défini par

$$\varepsilon \cdot \mathcal{E}^*(x, w) = \mathcal{E}(x, \varepsilon) \cdot w, \forall w \in \mathbb{R}^d, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.25)$$

Nous supposons que la fonction $p_e : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } L_e > 0 \text{ tel que} \\ |p_e(x, z_1) - p_e(x, z_2)| \leq L_e |z_1 - z_2|, \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Gamma_3 ; \\ \text{(ii) L'application } x \mapsto p_e(x, z) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \\ \forall z \in \mathbb{R}; \\ \text{(iii) L'application } x \mapsto p_e(x, 0_{\mathbb{R}}) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Nous supposons que la fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) Il existe } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ |p_\tau(x, \beta_1, r_1) - p_\tau(x, \beta_2, r_2)| \leq L_\tau (|\beta_1 - \beta_2| + |r_1 - r_2|), \\ \forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}^d, p.p. x \in \Gamma_3 ; \\ \text{(ii) } r \cdot \nu(x) = 0 \implies p_\tau(x, \beta, r) \cdot \nu(x) = 0, \\ \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}^d, p.p. x \in \Gamma_3 ; \\ \text{(iii) L'application } x \mapsto p_\tau(x, \beta, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}^d; \\ \text{(iv) L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}^d}) \in L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La fonction du taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{(i) Il existe } L_{H_{ad}} > 0 \text{ tel que} \\
 |H_{ad}(x, \beta_1, z, r) - H_{ad}(x, \beta_2, z, r)| \leq L_{H_{ad}} |\beta_1 - \beta_2|, \\
 p.p. x \in \Gamma_3, \forall \beta_1, \beta_2, z \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, L]; \\
 \\
 \text{(ii) } |H_{ad}(x, \beta_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, \beta_2, z_2, r_2)| \leq L_{H_{ad}} (|\beta_1 - \beta_2| + |z_1 - z_2| + |r_1 - r_2|), \\
 \forall \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \forall r_1, r_2 \in [0, L], p.p. x \in \Gamma_3; \\
 \\
 \text{(iii) L'application } x \rightarrow H_{ad}(x, \beta, z, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\
 \forall \beta, z \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, L]; \\
 \\
 \text{(iv) L'application } (\beta, z, r) \rightarrow H_{ad}(x, \beta, z, r) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, L], \\
 p.p. x \in \Gamma_3; \\
 \\
 \text{(v) } H_{ad}(x, 0, z, r) = 0, \forall z \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, L], p.p. x \in \Gamma_3; \\
 \\
 \text{(vi) } H_{ad}(x, \beta, z, r) \geq 0, \forall \beta \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, L], p.p. x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
 H_{ad}(x, \beta, z, r) \leq 0, \forall \beta \geq 1, \forall z \in \mathbb{R}, \forall r \in [0, L], p.p. x \in \Gamma_3.
 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Nous supposons que la densité de masse satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega); \rho_* > 0 \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho_* \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.29)$$

Nous supposons également que la fonction limite de frottement $g_b : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

$$g_b \in L^\infty(\Gamma_3). \quad (3.30)$$

Les densités forces ont la régularité

$$(i) f_0 \in L^2(0, T; H), \quad (ii) f_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^d)). \quad (3.31)$$

De plus, nous supposons que les densités de charges électriques satisfont

$$(i) \ q_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \ (ii) \ q_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_b)). \quad (3.32)$$

Le potentiel de la fondation satisfait

$$\varphi_f \in L^2(\Gamma_3). \quad (3.33)$$

Enfin, nous supposons que les données initiales satisfont

$$\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3), \ 0 \leq \beta_0(x) \leq 1, \ p.p. \ x \in \Gamma_3, \quad (3.34)$$

$$\zeta_0 \in \mathcal{K}, \quad (3.35)$$

$$(i) \ u_0 \in V, \ (ii) \ v_0 \in H. \quad (3.36)$$

Ensuite, nous définissons un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert H donné par

$$((u, w))_H = (\rho u, w)_H, \ \forall u, w \in H, \quad (3.37)$$

et soit $|||\cdot|||_H$ la norme associée, c'est-à-dire

$$|||w|||_H = [(\rho w, w)_H]^{1/2}, \ \forall w \in H. \quad (3.38)$$

Il résulte de (3.29) et (3.38) que $|||\cdot|||_H$ et $\|\cdot\|_H$ sont des normes équivalentes sur H . De plus, l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, |||\cdot|||_H)$ est continue et dense. On note V^* l'espace dual de V . En identifiant H à son propre dual, on peut écrire le triplet de Gelfand.

$$V \subset H \subset V^*.$$

Ensuite, on utilise la relation suivante

$$\langle v, w \rangle_{V^* \times V} = ((v, w))_H, \ \forall v \in H, \ \forall w \in V. \quad (3.39)$$

En utilisant le théorème de Riesz, à partir de (3.31) nous pouvons définir

$f \in L^2(0, T; V)$ par

$$(f(t), w)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot w da, \quad \forall w \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T). \quad (3.40)$$

De plus, de (3.32) il existe une fonction $q : [0, T] \rightarrow W$ telle que

$$(q(t), \varphi)_Z = \int_{\Omega} q_0(t) \varphi dx - \int_{\Gamma_b} q_2(t) \varphi da, \quad \forall \varphi \in W, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.41)$$

qui satisfait

$$q \in C(0, T; W). \quad (3.42)$$

De plus, sous les hypothèses (3.23)-(3.25), nous en déduisons qu'il existe deux constantes réelles $L_C > 0$ et $L_{\mathcal{E}} > 0$ telles que

$$\|Cw\|_H \leq L_C \|w\|_H, \quad \forall w \in H. \quad (3.43)$$

$$\|\mathcal{E}\varepsilon\|_H \leq L_{\mathcal{E}} \|\varepsilon\|_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{Q}. \quad (3.44)$$

$$\|\mathcal{E}^*w\|_{\mathcal{Q}} \leq L_{\mathcal{E}} \|w\|_H, \quad \forall w \in H. \quad (3.45)$$

Dans la suite, nous utilisons les fonctionnelles $j_{\tau} : V \rightarrow \mathbb{R}$, $j_e : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ et $j_{ad} : L^{\infty}(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définies, respectivement, par

$$j_{\tau}(w) = \int_{\Gamma_3} g_b |w_{\tau}| da, \quad \forall w \in V, \quad (3.46)$$

$$j_e(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma_3} p_e (\varphi - \varphi_f) \psi da, \quad \forall \varphi, \psi \in W, \quad (3.47)$$

$$j_{ad}(\beta, v, w) = \int_{\Gamma_3} q_{\tau}(\beta) R_{\tau}(v_{\tau}) \cdot w_{\tau} da, \quad \forall (\beta, v, w) \in L^{\infty}(\Gamma_3) \times V \times V. \quad (3.48)$$

Grâce à (3.27), la fonctionnelle j_{ad} satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } L_{ad} > 0 \text{ tel que} \\ |j_{ad}(\beta_1, u_1, w) - j_{ad}(\beta_2, u_2, w)| \\ \leq L_{ad} \left(\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|u_1 - u_2\|_V \right) \|w\|_V, \quad \forall u_1, u_2, w \in V, \\ \forall \beta_1, \beta_2 \in L^\infty(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_1 \leq 1, \quad 0 \leq \beta_2 \leq 1, \quad p.p. \ x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Grâce à (3.19), (3.26) et (3.47), la fonctionnelle j_e satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} j_e(\varphi_1, \psi) - j_e(\varphi_2, \psi) \leq \tilde{c}_0^2 L_e \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \|\psi\|_W \\ \forall \varphi_1, \varphi_2, \psi \in W. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Nous nous tournons maintenant vers la formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.17) à cette fin, supposons que $(u, \sigma, \varphi, D, \zeta, \beta)$ sont des fonctions lisses satisfaisant (3.1)-(3.17) et soit $w \in V$, $t \in [0, T]$. Nous obtenons alors la formulation variationnelle suivante du problème (3.1)-(3.17) en termes de champs de déplacement, potentiel électrique, endommagement et adhésion.

Problème 3.2 *Trouver un champ de déplacement $u : [0, T] \rightarrow V$, un champ de potentiel électrique $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, un champ d'endommagement $\zeta :$*

$[0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \ddot{u}(t), w - \dot{u}(t) \rangle_{V^* \times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} + \\ + (\mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \zeta(t)) + \mathcal{E}^* \nabla(\varphi(t)), \varepsilon(w - \dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ + j_{ad}(\beta(t), u(t), w - \dot{u}(t)) \\ + j_\tau(w) - j_\tau(\dot{u}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}(t))_V, \\ \forall w \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(t) \in \mathcal{K}, \quad (\dot{\zeta}(t), \psi - \zeta(t))_{L^2(\Omega)} \\ + \kappa(\nabla \zeta(t), \nabla \psi - \nabla \zeta(t))_H \geq (\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \zeta(t)), \psi - \zeta(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \forall \psi \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.52)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{C} \nabla(\varphi(t)), \nabla \psi)_H + j_e(\varphi(t), \psi) = (\mathcal{E}(\varepsilon(u(t))), \nabla \psi)_H + (q(t), \psi)_Z, \\ \forall \psi \in Z, t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.53)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), \theta_\beta(t), |R_\tau(u_\tau(t))|), \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.54)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad (3.55)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0, \quad (3.56)$$

$$(i) u(0) = u_0, \quad (ii) \dot{u}(0) = v_0. \quad (3.57)$$

Pour étudier le problème (3.51)-(3.57), nous faisons l'hypothèse de petitesse suivante

$$L_e < \frac{m_{\mathcal{C}}}{\tilde{c}_0^2}, \quad (3.58)$$

où \tilde{c}_0 , $m_{\mathcal{C}}$ et L_e sont respectivement donnés dans (3.19), (3.23) et (3.26).

Notez que si l'on suppose que les fondations sont isolées, alors

$$D \cdot \nu = 0, \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

cette condition peut être récupérée à partir de (3.26) en prenant $p_e \equiv 0$. Ainsi, l'hypothèse de petitesse (3.58) est satisfaite dans ce cas.

3.3 Existence et unicité d'une solution faible

Le théorème suivant est le résultat principal de ce Chapitre.

Théorème 3.1 *Supposons que (3.20)-(3.36) soient satisfaites. Alors le problème (3.51)-(3.57) a une solution unique $\{u, \beta, \varphi, \zeta\}$. De plus, la solution satisfait*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1([0, T]; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V^*), \quad (3.59)$$

$$\varphi \in C([0, T]; W), \quad (3.60)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.61)$$

$$\zeta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.62)$$

La démonstration du théorème 3.1 se déroulera en plusieurs étapes. Dans la suite, la même lettre c sera utilisée pour désigner différentes constantes positives indépendantes de $t \in (0, T)$.

Etape 1. Considérons le problème suivant.

Problème 3.3 *Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, trouver une fonction $\zeta_\eta : [0, T] \rightarrow$*

$H^1(\Omega)$, telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_\eta(t) \in \mathcal{K}, \\ \left(\dot{\zeta}_\eta(t), \psi - \zeta_\eta(t) \right)_{L^2(\Omega)} + \kappa (\nabla \zeta_\eta(t), \nabla \psi - \nabla \zeta_\eta(t))_H \\ \geq (\mathcal{G}(\varepsilon(\eta(t)), \zeta_\eta(t)), \psi - \zeta_\eta(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \forall \psi \in \mathcal{K}, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.63)$$

$$\zeta_\eta(0) = \zeta_0. \quad (3.64)$$

Lemme 3.1 *Supposons que (3.22) et (3.35) soient vraies. Alors le problème (3.63)-(3.64) a une solution unique ζ_η qui satisfait*

$$\zeta_\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.65)$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$,

$$\|\zeta_{\eta_1}(t) - \zeta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.66)$$

où ζ_{η_i} ($i = 1, 2$) est une solution correspondant à η_i .

Preuve. Soit $(\eta, \phi) \in C([0, T]; V) \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$, à partir de (3.22) nous pouvons définir $f_{\eta\phi} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ par

$$f_{\eta\phi}(t) = \mathcal{G}(\varepsilon(\eta(t)), \phi(t)), \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

D'autre part, soit $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$a(\varphi, \psi) = \kappa (\nabla \varphi, \nabla \psi)_H, \quad \forall \varphi, \psi \in H^1(\Omega).$$

Après quelques calculs algébriques, on constate que $a(\cdot, \cdot)$ satisfait (2.1) et est continue et symétrique sur $H^1(\Omega)$. Par conséquent, en appliquant la proposition 2.6 avec $X = H^1(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega)$, on constate que, pour tout

$(\eta, \phi) \in C([0, T]; V) \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$, le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{\eta\phi}(t) \in \mathcal{K}, \\ \left(\dot{\zeta}_{\eta\phi}(t), \psi - \zeta_{\eta\phi}(t) \right)_{L^2(\Omega)} + \kappa \left(\nabla \zeta_{\eta\phi}(t), \nabla \psi - \nabla \zeta_{\eta\phi}(t) \right)_H \\ \geq \left(\mathcal{G}(\varepsilon(\eta(t)), \phi(t)), \psi - \zeta_{\eta\phi}(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \\ \forall \psi \in \mathcal{K}, p.p. t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.67)$$

$$\zeta_{\eta\phi}(0) = \zeta_0, \quad (3.68)$$

a une solution unique $\zeta_{\eta\phi}$ qui satisfait

$$\zeta_{\eta\phi} \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.69)$$

Pour continuer, supposons que $\zeta_{\eta\phi_1}, \zeta_{\eta\phi_2}$ sont deux solutions du système (3.67)-(3.68), correspondant à $(\eta, \phi) = (\eta, \phi_1)$ et $(\eta, \phi) = (\eta, \phi_2)$, respectivement, alors nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \left(\dot{\zeta}_{\eta\phi_1}(s) - \dot{\zeta}_{\eta\phi_2}(s), \zeta_{\eta\phi_1}(s) - \zeta_{\eta\phi_2}(s) \right)_{L^2(\Omega)} ds \\ + \kappa \int_0^t a \left(\zeta_{\eta\phi_1}(s) - \zeta_{\eta\phi_2}(s), \zeta_{\eta\phi_1}(s) - \zeta_{\eta\phi_2}(s) \right) ds \\ \leq \int_0^t \left(\mathcal{G}(\varepsilon(\eta(s)), \phi_1(s)) - \mathcal{G}(\varepsilon(\eta(s)), \phi_2(s)), \zeta_{\eta\phi_1}(s) - \zeta_{\eta\phi_2}(s) \right)_{L^2(\Omega)} ds, \end{array} \right.$$

et en utilisant l'inégalité

$$\lambda\delta \leq \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\delta^2, \quad \forall \lambda, \delta \in \mathbb{R},$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \left\| \zeta_{\eta\phi_1}(t) - \zeta_{\eta\phi_2}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \int_0^t \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + c \int_0^t \left\| \zeta_{\eta\phi_1}(s) - \zeta_{\eta\phi_2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\left\| \zeta_{\eta\phi_1}(t) - \zeta_{\eta\phi_2}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.70)$$

Maintenant, pour chaque $\eta \in C([0, T]; V)$, considérons l'opérateur $\Phi_\eta : L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$ défini par

$$\Phi_\eta\phi = \zeta_{\eta\phi}, \quad \forall \phi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.71)$$

Où $\zeta_{\eta\phi}$ est l'unique solution, satisfaisant (3.67)-(3.68). En utilisant (3.67)-(3.68), on obtient

$$\|\Phi_\eta\phi_1(t) - \Phi_\eta\phi_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant la dernière inégalité n fois, nous en déduisons que

$$\left\| \Phi_\eta^n\phi_1 - \Phi_\eta^n\phi_2 \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \|\phi_1 - \phi_2\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2,$$

ce qui implique que, pour n suffisamment grand, une puissance Φ_η^n de Φ_η est une contraction dans l'espace de Banach $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Par conséquent, nous en déduisons que Φ_η a un unique point fixe $\phi_\eta^* \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Maintenant, soit $\eta \in C([0, T]; V)$, soit ϕ_η^* le point fixe de Φ_η , soit $\zeta_\eta = \zeta_{\eta\phi_\eta^*}$ et en gardant à l'esprit (3.67)-(3.69), il est simple de voir que ζ_η est une solution

unique au problème (3.63)-(3.64) telle que (3.65) soit vraie. Enfin, supposons que ζ_{η_1} , ζ_{η_2} sont deux solutions au problème (3.63)-(3.64), correspondant respectivement à η_1 et η_2 , alors nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \zeta_{\eta_1}(t) - \zeta_{\eta_2}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t \left\| \eta_1(s) - \eta_2(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + c \int_0^t \left\| \zeta_{\eta_1}(s) - \zeta_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons (3.66). ■

Considérons maintenant le problème suivant.

Problème 3.4 Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, trouver une fonction $\beta_\eta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$, telle que

$$\dot{\beta}_\eta(t) = H_{ad} \left(\beta_\eta(t), \theta_{\beta_\eta}(t), |R_\tau(\eta_\tau(t))| \right), \quad p.p. t \in (0, T), \quad (3.72)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0, \quad (3.73)$$

où

$$\theta_{\beta_\eta}(t) = \int_0^t \beta_\eta(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.74)$$

Lemme 3.2 Supposons que (3.28) and (3.34) soient satisfaites. Alors le problème (3.72)-(3.74) a une solution unique qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \beta_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)), \\ (ii) \quad 0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T], \quad p.p. x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$,

$$\|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.76)$$

où β_{η_i} ($i = 1, 2$) est une solution correspondant à η_i .

Preuve. Soit $(\eta, \theta) \in C([0, T]; V) \times L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ fixé et considérons l'application $F : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ défini par

$$F(t, \beta) = H_{ad}(\beta, \theta(t), |R_\tau(\eta_\tau(t))|), \quad \forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3), \quad p.p. \quad t \in (0, T). \quad (3.77)$$

Soit $\beta_1, \beta_2 \in L^\infty(\Gamma_3)$. De (3.77) et (3.28) on obtient

$$\begin{aligned} |F(t, \beta_1) - F(t, \beta_2)| &\leq |H_{ad}(\beta_1, \theta(t), |R_\tau(\eta_\tau(t))|) - H_{ad}(\beta_2, \theta(t), |R_\tau(\eta_\tau(t))|)| \\ &\leq L_{H_{ad}} |\beta_1 - \beta_2|, \quad p.p. \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|F(t, \beta_1) - F(t, \beta_2)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq L_{H_{ad}} \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\Gamma_3)}, \quad p.p. \quad t \in (0, T).$$

Par conséquent, F est lipschitzienne continue par rapport au deuxième argument, uniformément en temps. De plus, l'application $t \rightarrow F(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$, $\forall \beta \in L^\infty(\Gamma_3)$. Ainsi, en utilisant la proposition 2.8, on déduit qu'il existe une unique fonction $\beta_{\eta\theta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ telle que

$$\dot{\beta}_{\eta\theta}(t) = H_{ad}(\beta_{\eta\theta}(t), \theta(t), |R_\tau(\eta_\tau(t))|), \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (3.78)$$

$$\beta_{\eta\theta}(0) = \beta_0. \quad (3.79)$$

De plus, à partir de (3.78)-(3.79), (3.28), (3.34) et en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans [2], nous déduisons que

$$0 \leq \beta_{\eta\theta}(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad p.p. \quad x \in \Gamma_3. \quad (3.80)$$

Now, let $\beta_{\eta\theta_1}, \beta_{\eta\theta_2}$ be two solutions, satisfying (3.78)-(3.79). It follows from (3.28) that Soient maintenant $\beta_{\eta\theta_1}, \beta_{\eta\theta_2}$ deux solutions satisfaisant (3.78)-(3.79). Il résulte de (3.28) que

$$\begin{aligned} \|\beta_{\eta\theta_1}(t) - \beta_{\eta\theta_2}(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} &\leq c \int_0^t \|\beta_{\eta\theta_1}(s) - \beta_{\eta\theta_2}(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\|\beta_{\eta\theta_1}(t) - \beta_{\eta\theta_2}(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds. \quad (3.81)$$

Pour continuer, pour chaque $\eta \in C([0, T]; V)$, considérons l'opérateur $\Theta_\eta : L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) \rightarrow L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ défini par

$$\Theta_\eta \theta(t) = \int_0^t \beta_{\eta\theta}(s) ds, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \theta \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3)), \quad (3.82)$$

où $\beta_{\eta\theta}$ est l'unique solution, satisfaisant (3.78)-(3.79). En utilisant (3.81)-(3.82), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Theta_\eta \theta_1(t) - \Theta_\eta \theta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} &\leq \int_0^t \left\| \beta_{\eta\theta_1}(s) - \beta_{\eta\theta_2}(s) \right\|_{L^\infty(\Gamma_3)} ds \\ &\leq c \int_0^t \int_0^s \|\theta_1(r) - \theta_2(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} dr ds \\ &\leq c \int_0^t \|\theta_1(r) - \theta_2(r)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} dr, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En réitérant cette inégalité n fois, nous obtenons

$$\|\Theta_\eta \theta_1 - \Theta_\eta \theta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))} \leq \frac{(cT)^n}{n!} \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))},$$

ce qui implique que, pour n suffisamment grand, une puissance Θ_η^n de Θ_η est une contraction dans l'espace de Banach $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Par conséquent, on en déduit que Θ_η possède un unique point fixe $\theta_\eta^* \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ donné par

$$\theta_\eta^*(t) = \int_0^t \beta_{\eta \theta_\eta^*}(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Maintenant, soit $\eta \in C([0, T]; V)$, soit θ_η^* le point fixe de Θ_η , soit $\beta_\eta = \beta_{\eta \theta_\eta^*}$, soit $\theta_{\beta_\eta} = \theta_\eta^*$ et en gardant à l'esprit (3.78)-(3.80), il est simple de voir que β_η est une solution unique au problème (3.72)-(3.74) telle que (3.75) soit vraie. Enfin, supposons que $\beta_{\eta_1}, \beta_{\eta_2}$ sont deux solutions au problème (3.72)-(3.74), correspondant respectivement à η_1 et η_2 , alors à partir de (3.28) et (1.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 &\leq c \int_0^t \|\beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds + c \int_0^t \|\theta_{\eta_1}^*(s) - \theta_{\eta_2}^*(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \\ &\quad + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)}^2 ds \\ &\leq c \int_0^t \|\beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds \\ &\quad + c \int_0^t \int_0^s \|\beta_{\eta_1}(r) - \beta_{\eta_2}(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr ds \\ &\quad + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)}^2 ds, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 &\leq c \int_0^t \|\beta_{\eta_1}(r) - \beta_{\eta_2}(r)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 dr \\ &\quad + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3, \mathbb{R}^d)}^2 ds, \end{aligned}$$

ce qui, avec l'inégalité de Gronwall, donne (3.76). ■

Considérons maintenant le problème suivant.

Problème 3.5 Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, trouver une fonction $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$, telle que

$$\begin{cases} (\mathcal{C}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\eta(t)), \nabla\psi)_H + \\ + j_e(\varphi_\eta(t), \psi) = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W, \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3.83)$$

Lemme 3.3 Le problème (3.83) a une solution unique qui satisfait

$$\varphi_\eta \in C([0, T]; W). \quad (3.84)$$

De plus, soient φ_{η_k} les deux solutions correspondant à η_k , $k = 1, 2$, alors

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W \leq c\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.85)$$

Preuve. Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, soit $t \in [0, T]$ et soit $A_t : W \rightarrow W$, l'opérateur défini par

$$(A_t\varphi, \psi)_W = (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\eta(t)), \nabla\psi)_H + j_e(\varphi, \psi), \quad \forall \varphi, \psi \in W.$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} (A_t\varphi_1 - A_t\varphi_2, \psi)_W &= (\mathcal{C}\nabla\varphi_1 - \mathcal{C}\nabla\varphi_2, \nabla\psi)_H + j_e(\varphi_1, \psi) \\ &\quad - j_e(\varphi_2, \psi), \forall \varphi_1, \varphi_2, \psi \in W, \end{aligned}$$

et en utilisant (3.25) et (3.50), nous trouvons que

$$\|A_t\varphi_1 - A_t\varphi_2\|_W \leq (L_C + \tilde{c}_0^2 L_e) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in W, \quad (3.86)$$

avec $L_C > 0$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}\nabla\varphi_1 - \mathcal{C}\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2)_H &= (A_t\varphi_1 - A_t\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W + \\ &\quad j_e(\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) - j_e(\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

ce qui, avec (3.25) et (3.50), implique que

$$(m_C - \tilde{c}_0^2 L_e) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_W^2 \leq (A_t\varphi_1 - A_t\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_W, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in W. \quad (3.87)$$

Il résulte de (3.58), (3.86) et (3.87) que A_t est un opérateur fortement monotone et lipschitzien continu sur W , pour tout $t \in [0, T]$. Ainsi, par Proposition 2.5, il existe une fonction unique $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$

$$A_t\varphi_\eta(t) = q(t), \forall t \in [0, T],$$

qui satisfait l'équation variationnelle (3.83).

Supposons maintenant que $t_1, t_2 \in [0, T]$. Il résulte de (3.23), (3.50), (3.44) et (3.83) que

$$(m_C - \tilde{c}_0^2 L_e) \|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq L_E \|\eta(t_1) - \eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W,$$

Pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$. Cette inégalité, combinée à la régularité $\eta \in C([0, T]; V)$, aux hypothèses de petitesse (3.58) et (3.42), montre que (3.84) est vraie. De plus, soit φ_{η_k} les deux solutions correspondant à $\eta_k \in C([0, T]; V)$, $k = 1, 2$, il résulte de (3.23), (3.50), (3.44) and (3.83) que

$$(m_C - \tilde{c}_0^2 L_e) \left\| \varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t) \right\|_W \leq L_E \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V,$$

pour tout $t \in [0, T]$, ce qui, avec l'hypothèse de petitesse (3.58), donne (3.85).

■

Etape 2. Soit $\alpha > 0$, on définit une fonctionnelle régularisée $j_\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_\alpha(w) = \int_{\Gamma_3} g_b \sqrt{|w_\tau|^2 + \alpha^2} da, \quad \forall w \in V,$$

qui représente une approximation de j_τ . Plus précisément, nous avons

$$|j_\alpha(w) - j_\tau(w)| \leq \alpha \|g_b\|_{L^1(\Gamma_3)}, \quad \forall w \in V. \quad (3.88)$$

De plus, j_α a une dérivée de Gateaux $j'_\alpha : V \rightarrow V^*$ donnée par

$$\langle j'_\alpha(y), w \rangle_{V^* \times V} = \int_{\Gamma_3} \frac{g_b}{\sqrt{|y_\tau|^2 + \alpha^2}} y_\tau \cdot w_\tau da, \quad \forall w, y \in V. \quad (3.89)$$

Puisque j_α est une fonction convexe, il s'ensuit que j'_α est un opérateur hémicontinu et satisfait

$$\langle j'_\alpha(y), w - y \rangle_{V^* \times V} \leq j_\alpha(w) - j_\alpha(y), \quad \forall w, y \in V, \quad (3.90)$$

ce qui conduit à

$$\langle j'_\alpha(y) - j'_\alpha(w), y - w \rangle_{V^* \times V} \geq 0, \quad \forall w, y \in V. \quad (3.91)$$

Pour continuer, soit $\alpha > 0$, soit $\eta \in C([0, T]; V)$, soit β_η l'unique solution du problème (3.72)-(3.74), soit ζ_η l'unique solution du problème (3.63)-

(3.64), soit φ_η l'unique solution du problème (3.83), nous pouvons définir $f_\eta \in L^2(0, T; V^*)$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f_\eta(t), w \rangle_{V^* \times V} = (f(t), w)_V - (\mathcal{B}(\varepsilon(\eta(t)), \zeta_\eta(t)), \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} \\ \quad - (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_\eta(t), \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} - j_{ad}(\beta_\eta(t), \eta(t), w), \\ \quad p.p. t \in (0, T), \forall w \in V. \end{array} \right. \quad (3.92)$$

et nous considérons le problème régularisé suivant.

Problème 3.6 Soit $\alpha > 0$ et $\eta \in C([0, T]; V)$. Trouver une fonction $v_\eta^\alpha : [0, T] \rightarrow V$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{v}_\eta^\alpha(t), w \rangle_{V^* \times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(v_\eta^\alpha(t))), \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} \\ \quad + \langle j'_\alpha(v_\eta^\alpha(t)), w \rangle_{V^* \times V} = \langle f_\eta(t), w \rangle_{V^* \times V}, \\ \quad \forall w \in V, p.p. t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.93)$$

$$v_\eta^\alpha(0) = v_0. \quad (3.94)$$

Lemme 3.4 Le problème (3.93)-(3.94) a une solution unique v_η^α qui satisfait

$$v_\eta^\alpha \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \dot{v}_\eta^\alpha \in L^2(0, T; V^*). \quad (3.95)$$

Preuve. Voir [12]. ■

Nous introduisons ensuite l'espace $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V}, \dot{v} \in \mathcal{V}^*\}$ qui est un espace de Banach séparable et réflexif muni de la norme.

$$\|v\|_{\mathcal{W}} = \|v\|_{\mathcal{V}} + \|\dot{v}\|_{\mathcal{V}^*},$$

où $\mathcal{V} = L^2(0, T; V)$ et $\mathcal{V}^* = L^2(0, T; V^*)$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.5 Il existe une fonction $v_\eta \in \mathcal{W}$ et une sous-suite de $\{v_\eta^\alpha\}$, encore notée par $\{v_\eta^\alpha\}$, telles que lorsque $\alpha \rightarrow 0$, les convergences suivantes sont

vraies

$$v_\eta^\alpha \rightharpoonup v_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V). \quad (3.96)$$

$$\dot{v}_\eta^\alpha \rightharpoonup \dot{v}_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V^*). \quad (3.97)$$

$$v_\eta^\alpha(t) \rightharpoonup v_\eta(t) \text{ faiblement dans } H, \forall t \in [0, T]. \quad (3.98)$$

Preuve. See [12]. ■

Lemme 3.6 Pour tout $z \in L^2(0, T; V)$, les propriétés suivantes sont vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^T \langle \dot{v}_\eta^\alpha(s), v_\eta^\alpha(s) - z(s) \rangle_{V^* \times V} ds \geq \\ \int_0^T \langle \dot{v}_\eta(s), v_\eta(s) - z(s) \rangle_{V^* \times V} ds. \end{array} \right. \quad (3.99)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^T [j_\alpha(v_\eta^\alpha(s)) - j_\alpha(z(s))] ds \geq \\ \int_0^T [j_\tau(v_\eta(s)) - j_\tau(z(s))] ds. \end{array} \right. \quad (3.100)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^T (\mathcal{A}(\varepsilon(v_\eta^\alpha(s))), \varepsilon(v_\eta^\alpha(s) - z(s)))_{\mathcal{Q}} ds \geq \\ \int_0^T (\mathcal{A}(\varepsilon(v_\eta(s))), \varepsilon(v_\eta(s) - z(s)))_{\mathcal{Q}} ds. \end{array} \right. \quad (3.101)$$

Preuve. Voir [12]. ■

Etape 3. Dans cette étape, nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème 3.7 Soit $\eta \in C([0, T]; V)$. Trouver une fonction $v_\eta \in \mathcal{W}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \dot{v}_\eta(s), w - v_\eta(s) \rangle_{V^* \times V} + (\mathcal{A}(\varepsilon(v_\eta(s))), \varepsilon(w - v_\eta(s)))_{\mathcal{Q}} + \\ + j_\tau(w) - j_\tau(v_\eta(s)) \geq \langle f_\eta(s), w - v_\eta(s) \rangle_{V^* \times V}, \\ \forall w \in V, p.p. s \in (0, T), \end{array} \right. \quad (3.102)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (3.103)$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 3.7 Le problème (3.102)-(3.103) a une solution unique v_η qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V^*). \quad (3.104)$$

Preuve. Voir [12]. ■

Etape 4. Soit $\eta \in C([0, T]; V)$, soit v_η l'unique solution du problème (3.102)-(3.103), soit β_η l'unique solution du problème (3.72)-(3.74), soit ζ_η l'unique solution du problème (3.63)-(3.64), soit φ_η l'unique solution du problème (3.83) et soit $\Lambda : C([0, T]; V) \rightarrow C([0, T]; V)$ l'opérateur défini par

$$\Lambda \eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0, \quad \forall \eta \in C([0, T]; V), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.105)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.8 L'opérateur Λ possède un unique point fixe $\eta^* \in C([0, T]; V)$.

Preuve. Soit $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$, alors par (3.102) and (3.92), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \langle \dot{v}_{\eta_1}(s) - \dot{v}_{\eta_2}(s), v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s) \rangle_{V^* \times V} ds + \\ \int_0^t (\mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta_1}(s))) - \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta_2}(s))), \varepsilon(v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)))_{\mathcal{Q}} ds \\ \leq \int_0^t j_{ad}(\beta_{\eta_1}(s), \eta_1(s), v_{\eta_2}(s) - v_{\eta_1}(s)) ds + \\ - \int_0^t j_{ad}(\beta_{\eta_2}(s), \eta_2(s), v_{\eta_2}(s) - v_{\eta_1}(s)) + \\ \int_0^t (\mathcal{B}(\varepsilon(\eta_1(s)), \zeta_{\eta_1}(s)) - \mathcal{B}(\varepsilon(\eta_2(s)), \zeta_{\eta_2}(s)), \varepsilon(v_{\eta_2}(s) - v_{\eta_1}(s)))_{\mathcal{Q}} ds \\ + \int_0^t (\mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\eta_1}(s) - \mathcal{E}^* \nabla \varphi_{\eta_2}(s), \varepsilon(v_{\eta_2}(s) - v_{\eta_1}(s)))_{\mathcal{Q}} ds, \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| \|v_{\eta_1}(t) - v_{\eta_2}(t)\| \right\|_H^2 + \int_0^t \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \leq \\ c \int_0^t \left\| \beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V ds + \\ + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V ds \\ + c \int_0^t \left\| \zeta_{\eta_1}(s) - \zeta_{\eta_2}(s) \right\|_V \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V ds \\ + c \int_0^t \left\| \varphi_{\eta_1}(s) - \varphi_{\eta_2}(s) \right\|_W \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V ds, \end{array} \right.$$

ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \leq c \int_0^t \left\| \beta_{\eta_1}(s) - \beta_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds + \\ + c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds + c \int_0^t \left\| \zeta_{\eta_1}(s) - \zeta_{\eta_2}(s) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c \int_0^t \left\| \varphi_{\eta_1}(s) - \varphi_{\eta_2}(s) \right\|_W^2 ds. \end{array} \right.$$

Par conséquent, par (3.76), (3.66) et (3.85), nous trouvons que

$$\int_0^t \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds. \quad (3.106)$$

Maintenant, en utilisant (3.105), nous obtenons

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|v_{\eta_1}(s) - v_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds,$$

ce qui, avec (3.106), implique que

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

En réitérant la dernière inégalité n fois, nous en déduisons que

$$\|\Lambda^n \eta_1 - \Lambda^n \eta_2\|_{C([0, T]; V)}^2 \leq \frac{(cT)^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0, T]; V)}^2,$$

ce qui implique que, pour n suffisamment grand, une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $C([0, T]; V)$. Par conséquent, nous en déduisons que Λ a un unique point fixe $\eta^* \in C([0, T]; V)$. ■

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour démontrer le théorème 3.1. Soit Λ l'opérateur défini par (3.105), soit η^* le point fixe de Λ , soit $\beta = \beta_{\eta^*}$ l'unique solution du problème (3.72)-(3.74), soit $\zeta = \zeta_{\eta^*}$ l'unique solution du problème (3.63)-(3.64), soit $\varphi = \varphi_{\eta^*}$ l'unique solution du problème (3.83), soit $u : [0, T] \rightarrow V$ le champ de déplacement défini par

$$u(t) = \eta^*(t) = \int_0^t v_{\eta^*}(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.107)$$

où v_{η^*} est l'unique solution du problème (3.102)-(3.103) correspondant à η^* . Nous concluons que $\{u, \beta, \varphi, \zeta\}$ est une solution au problème (3.51)-(3.57) et qui satisfait la régularité (3.59)-(3.62) découle de (3.75), (3.65), (3.104) et (3.107). L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité de la solution du problème (3.72)-(3.74), (3.63)-(3.64), (3.83) et problème (3.102)-(3.103).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. C. Batra and J. S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, *J. Elasticity* 38 (1995), 209–218.
- [2] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *J. Appl. Math. Phys.* 55 (2004), 32–47.
- [3] G. Duvaut et J.-L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [4] El-H. Essoufi and M. Sofonea, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Math. Model. Anal.* 9 (2004), 229–242.
- [5] M. Frémond, Adhérence des solides, *J. Mécanique Théor. Appl.* 6 (1987), 383–407.
- [6] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [7] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon, *Nuclear Engrg. Design* 156 (1995), 323–335.
- [8] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, *Int. J. Solids Struct.* 33 (1996), 1083–1103
- [9] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1990.

- [10] Abderrezak Kasri, A piezoelectric contact problem with slip dependent friction and damage. *J. Appl. Anal.* 27, 73–86 (2021).
- [11] Abderrezak Kasri, A bilateral contact problem with nonlocal friction, damage and adhesion, *Applicationes Mathematicae* 48 (2021), 37-63.
- [12] Abderrezak Kasri, Arezki Touzaline, Analysis of a dynamic contact problem with friction, damage and adhesion, *Applicationes Mathematicae* 46 (2019), 127-153.
- [13] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies :An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [14] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Springer, Berlin, 2004.
- [15] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, *Pure Appl. Math.* 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

ملخص

في هذا البحث، قمنا بدراسة نموذج مشكلة الاتصال الديناميكي مع قانون احتكاك تريسكا حيث تم أخذ الضرر والالتصاق في الاعتبار. نفترض أن الخصائص الميكانيكية للجسم موصوفة بقانون تكويني كهرولزوجي مرن. في ظل الافتراضات المناسبة، نقدم صياغة متغيرة للمشكلة. ثم نثبت وجود الحل الضعيف ووحده.

الكلمات المفتاحية: مادة كهروضغطية، تلف، عملية ديناميكية، قانون الاحتكاك، الالتصاق، التلامس، الصياغة المتغيرة، الحل الضعيف.

Abstract

In this thesis, we study a dynamic contact problem model using Tresca's friction law, in which damage and adhesion are taken into account. We assume that the mechanical properties of the body are described by an electroviscoelastic constitutive law. Under appropriate assumptions, we provide a variational formulation of the problem. We then demonstrate the existence and uniqueness of the weak solution.

Keywords: Piezoelectric material, damage, dynamic process, friction law, adhesion, contact, variational formulation, weak solution.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions un modèle de problème dynamique de contact avec la loi de frottement de Tresca dans lequel l'endommagement et l'adhésion sont pris en compte. Nous supposons que les propriétés mécaniques du corps sont décrites par une loi de comportement électroviscoélastique. Sous des hypothèses appropriées, nous donnons une formulation variationnelle du problème. Nous démontrons ensuite l'existence et l'unicité de la solution faible.

Mots clés : : Matériau piézoélectrique, endommagement, processus dynamique, loi de frottement, adhésion, contact, formulation variationnelle, solution faible.