

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N^o : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude mathématique d'un problème de Bresse

Option : ANEDP

Par : Douadi Rima & Gharbi Imene

Encadré par : Zitouni Salah

M.C.A

U. Souk Ahrass

Devant le jury:

Présidente : Ghennam Karima

M.C.B

U. SKIKDA

Examineur : Foughali Fouzia

M.C.B

U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements

Tout d'abord, on remercie Allah tous puissant qui nous a donné la volonté et la force pour accomplir ce travail, également nous remercions infiniment nos parents qui modèle d'affection, de patience et de sacrifice constant qui n'ont jamais cessé de nous aider et qui ont tous nous offerts.

Nous tenons aussi à remercier bien notre encadreur

Dr. Zitouni Salah

pour ses précieux conseils et ses aides et pertinents ont grandement amélioré et ses encouragements et nous lui exprimons tout notre reconnaissance pour nous avoir initié et accompagné tout au long de ce travail, vraiment merci beaucoup.

Un grand merci va également aux membres de jury Ghennam Karima et Foughali Fouzia qui seront la pour juger notre travail.

En fin, nous remercions à tout qui ont contribué de près ou loin de ce présent mémoire sans oublier les personnes qui nous avons connus au département de mathématiques à l'université de SKIKDA.

هدايا

﴿بسم الله الرحمن الرحيم﴾

...أهدي هذا العمل المتواضع كدليل على الاحترام والتقدير والشكر:

إلى سندي وملجئي الآمن...داعمي ومشجعي الدائم

إلى الذي لم أسر يوماً في لصيق...إلا ورايته يسبقني يمهد له لي

إلى من رأيت انعكاس فرحي ونجاحي يريق في عينه

"والذي العزيز"

رفيقتي وأمانتي...بصفتي ومعلمتي الوحيدة

من علمتني معنى الحنان والعطاء... معنى الصبر والقوة والحب

من كان دائماً دعائها ورضاها بوصولتي في المسير

"والذي الجميلة"

إلى ذاك الجبل الذي أسند نفسي عليه عند الشدائد كيف لا أحبه ورب الكون

قال "منشع عضدك بأخيك"

"حمزة"

إلى صغيري وقمري ومن يكبر أمام عيني أخي الأصغر

"محمد إسلام"

"نصيرة، إيمان، سارة وشيماء"

إلى أخواتي

"أمينة، قصر الندى وأحلام"

إلى أبناء إخوتي:

ريمة

شكر خاص إلى صديقتي: "رانية"

إهداء

... أهدي ثمرة جهدي هذا:

إلى اعز وأغلي إنسانة في حياتي التي أنارت درسي بنصائحها
وكانت بحرا صافيا يجري يفيض الحب والبسمة إلى من زينت
حياتي بضيء البدر، وشموع الفرح . إلى من منحتني القوة والحريّة
لمواصلة الدرب، وكانت سببا في مواصلة دراستي إلى من علمتني
الصبر والاجتهاد

"إلى الغالية أمي"

إلى من تشقت يداه وسعى وشق لأنعم بالراحة والهناء الذي لم يبخل
بشيء من أجل دفعي في صريق النجاح الذي علمني أن أرتقي سلم
الحياة بحكمة وصبر

"إلى والدي العزيز"

إلى من شاركوني كفولتي وأحبوني بصدق وإخلاص وتعاونوا معي
لإتمام دراستي هذه إخوتي:

"بلال، كريم ورايح"

✍️ إيماز

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier la stabilité d'un système de Bresse avec second son. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du système par la théorie du Semi-groupe, notre résultat principal est d'étudier la stabilité exponentielle du système par la technique des multiplicateurs qui basent sur la construction du fonctionnelle de Lyapunov équivalente à l'énergie.

Mots-clés : système de Bresse, existence et unicité de la solution, théorème du semi-groupe, stabilité exponentielle, fonctionnelle de Lyapunov.

ملخص

ندرس في هذه المذكرة، إستقرار أنظمة تتكون من معادلات تفاضلية جزئية زائدية، معادلات هذا النظام متأثرة بالحرارة، تتمثل هذه الأخيرة في نظام بريس تحت الشروط الابتدائية والحدية. قمنا بدراسة وجود ووحدانية الحل بالإعتماد على نظرية أنصاف الزمر و الإستقرار الآسي باستعمال الطريقة الضربية لبناء دالة ليابونوف التي تكافئ دالة الطاقة.

الكلمات المفتاحية: نظام بريس, وجود الحل وتفرده, نظرية نصف زمرة, الإستقرار الآسي, دالة ليابونوف.

Abstract

The aim of this thesis is to study the stability of Bresse system with second sound. We show the existence and uniqueness of the solution by the Semi-group theory. Our main result is to study the exponential stability of the system by multipliers technique. Also we show the exponential stability of the solution by introducing a suitable Lyapunov functional.

Keywords : Bresse system, existence and uniqueness of the solution, semi-group theory, exponential stability, Lyapunov functional.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1 Préliminaire	6
1.1 Notion d'analyse fonctionnelle	6
1.1.1 Espaces Fonctionnels	6
1.1.2 Espaces de Lebesgue	7
1.1.3 Espace de Sobolev dans \mathbb{R}	7
1.2 Certaines inégalités algébrique	9
1.2.1 Inégalité de Hölder	9
1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz	10
1.2.3 Inégalité de Young	10
1.2.4 Inégalité de Poincaré	10
1.3 Quelques notions sur les opérateurs	11
1.4 Semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaires	11
1.5 Théorème de Lax-Milgram	12
1.6 Théorème de Hille-Yosida	13

1.7	Théorème de Lumer-Phillips	13
2	Existence et unicité	14
3	Décroissance exponentielle	28
	Bibliographie	70

INTRODUCTION

Le système de Bresse prend en compte les déformations d'arc d'un cercle soumis aux déplacements longitudinal, vertical et l'angle de rotation dénotés par ω , φ et ψ respectivement. Le système est donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + l\omega + \psi)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = F_1, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + l\omega + \psi) = F_2, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \rho_3 \omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + l\omega + \psi) = F_3. & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

où F_1, F_2 et F_3 représentent les forces extérieures et les coefficients ρ_i, k, k_0, l et b sont des constantes positives. Le système de Bresse (1) est composé de trois équations des ondes et il a été introduit par Bresse [6]. Lorsque $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, le système (1) est purement conservatif. En d'autres termes, en prenant en compte tous les conditions aux bords, l'énergie du système définie par la fonctionnelle suivante

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_3 \omega_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2] dx,$$

vérifie $E'(t) = 0$. Par conséquent, $E(t) = E(0)$ pour tout $t \geq 0$. Cette identité est appelée la propriété de conservation de l'énergie.

En outre, si $l \equiv 0$, alors le système de Bresse se réduit au système de Timoshenko. Santos et Almeida Júnior [9] ont considéré (1) lorsque $F_1 = \gamma_1 \varphi_t$, $F_2 = \gamma_2 \psi_t$ et $F_3 = \gamma_3 \omega_t$, avec les conditions initiales et les conditions aux bords de type Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, et ils ont montré que le système est exponentiellement stable sans imposer aucune condition sur les coefficients. Le même résultat a été trouvé par Soriano et al [7] lorsque $F_1 = a(x)g_1(\varphi_t)$, $F_2 = g_2(\psi_t)$ et $F_3 = \gamma(x)g_3(\omega_t)$, où $a, \gamma \in L^\infty(0, L)$ et les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont continues et monotones.

Un résultat similaire a été obtenu également par Guesmia et Kafini [1] lorsque

$$F_1 = - \int_0^{+\infty} g_1(s) \varphi_{xx}(x, t - s) ds, \quad F_2 = - \int_0^{+\infty} g_2(s) \psi_{xx}(x, t - s) ds$$

$$\text{et } F_3 = - \int_0^{+\infty} g_3(s) \omega_{xx}(x, t - s) ds,$$

où g_i sont des fonctions différentiables décroissantes satisfaisant certain hypothèses. Précisément, ils ont établi l'existence et l'unicité de la solution et la stabilité asymptotique de ce système, mais sans imposer aucune condition sur les coefficients. Lorsque $F_1 = F_3 = 0$ et $F_2 = \gamma \psi_t$ avec $\gamma > 0$, Alabau Boussouira et al [3] ont montré que le système est exponentiellement stable sous les conditions

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b} \text{ et } k = k_0,$$

sinon le système manque de stabilité exponentielle.

Dans ce mémoire, on étudie l'existence et l'unicité des solutions et le comportement asymp-

totique du système de Bresse suivant, où le flux de chaleur est donnée par la loi de Cattaneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k (\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l (\omega_x - l\varphi) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0 (\omega_x - l\varphi)_x + kl (\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \gamma\psi_{xt} = 0, & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \tau_0 q_t + \beta q + \theta_x = 0. & \text{dans } (0, 1) \times (0, +\infty), \end{array} \right. \quad (2)$$

Avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) = \theta(0, t) = \omega_x(0, t) = \psi_x(0, t) = 0, \\ \varphi_x(1, t) = q(1, t) = \omega(1, t) = \psi(1, t) = 0, \end{aligned} \quad \forall t \geq 0, \quad (3)$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad q(x, 0) = q_0(x). \end{aligned} \quad \forall x \in (0, 1), \quad (4)$$

Ce mémoire est basé sur le travail de Keddi [2], Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Chapitre 1 : Nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.

Chapitre 2 : Nous utilisons la théorème du Semi-groupe pour prouver que le système (2)-(4) est bien posé.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour établir la stabilité exponentielle quand $\zeta = 0$ et $k = k_0$, où.

$$\zeta = \left(1 - \frac{\tau_0 \rho_3 k}{\rho_1} \right) \underbrace{\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right)}_x - \frac{\gamma^2 \tau_0}{b}.$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous collectons plusieurs outils de base qui seront nécessaires tout au long de ce travail. Le lien commun entre tous les résultats de ce chapitre, c'est qu'ils sont préparatoires pour les principaux résultats, qui sont contenues dans les chapitres suivants.

1.1 Notion d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espaces Fonctionnels

voir [5]

Espace Complet

Définition .1 *Un espace normé $(E; \|\cdot\|_E)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .*

Espace de Banach

Définition .2 *Un espace vectoriel normé **complet** s'appelle espace de **Banach**.*

Espace de Hilbert

Définition .3 *Un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel \mathbb{H} muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est **complet** pour la norme*

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.2 Espaces de Lebesgue

Définition .4 [5] *Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^n , nous définissons l'espace $L^p(\Omega)$ comme suivante*

- pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Si $f \in L^p(\Omega)$, on définit la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

- pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f qui sont essentiellement bornées sur Ω .

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_\Omega |f(x)| = \inf\{A \geq 0 : \mu\{x \in \Omega : f(x) > A\} = 0\}.$$

1.1.3 Espace de Sobolev dans \mathbb{R}

[5] Les espaces de Sobolev jouent un rôle fondamental dans le calcul variationnel. Ils doivent leur nom au mathématicien russe Sergueï Lvovitch Sobolev (1908-1989).

Espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$

Définition .5 Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n et $P \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq P \leq \infty$, l'espaces de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,P}(\Omega) = \{u \in L^P(\Omega), \exists g \in L^P(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} u(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx\},$$

on pose

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$

Définition .6 [5] Soient Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n , $m \geq 2$ et un réel p , $1 \leq p \leq \infty$, l'espaces de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m \exists g_{\alpha} \in L^p(\Omega) \\ \text{tel que } \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha} \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \end{array} \right\},$$

où $\alpha \in N^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et $D^{\alpha} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$.

On pose

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0 < \alpha \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Et l'espace \mathbb{H}^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

pour tout $u, v \in \mathbb{H}^m(\Omega)$.

Espace de Sobolev $W_0^{1,P}(\Omega)$

Définition .7 [5] *Étant donné le réel p , $1 \leq p \leq \infty$ on appelle espace de Sobolev, et on note $W_0^{1,P}(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,P}(\Omega)$ (resp $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ si $p = 2$).*

1.2 Certaines inégalités algébrique

Nous allons donner ici quelques inégalités algébrique importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliqués et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

1.2.1 Inégalité de Hölder

[4] Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors le produit $f.g$ est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{1/q},$$

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Remarque 1.1 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.*

1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

[4] Soient f et g deux fonction dans $L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Inégalité de Young

[4] Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall (f, g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_{\Omega} |g^q| dx.$$

Si $p = q = 2$ on a :

$$\forall (f, g) \in (L^2(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |f^2| dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |g^2| dx.$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

[4] Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R} , alors il existe une constante positive c telle que :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|u'\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.3 Quelques notions sur les opérateurs

Définition .8 [5] un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(\mathcal{A}) \subset X$ à valeurs dans X , ($D(\mathcal{A})$ s'appelle le domaine de l'opérateur \mathcal{A}).

Définition .9 [5] Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert et \mathcal{A} un opérateur non borné sur \mathbb{H} de domaine $D(\mathcal{A})$.

On dit que \mathcal{A} est **monotone** (ou **accrétif**) si

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle \geq 0, \forall v \in D(\mathcal{A}).$$

\mathcal{A} est **dissipatif** si

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \leq 0, \forall u \in D(\mathcal{A}),$$

on dit que \mathcal{A} est **maximal monotone** si de plus $\text{Im}(Id + \mathcal{A}) = H$, i.e

$$\forall f \in H, \exists u \in D(\mathcal{A}) \text{ tel que } u + \mathcal{A}u = f.$$

Proposition 1.3.1 [5] Soit \mathcal{A} un opérateur **monotone maximal**, ensuite

- $D(\mathcal{A})$ est dense en \mathbb{H} .
- \mathcal{A} est un opérateur fermé.
- Pour chaque $\lambda > 0$, $(I + \lambda\mathcal{A})$ est **bijjective** de $D(\mathcal{A})$ sur \mathbb{H} , $(I + \lambda\mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur **borné**, et $\| (I + \lambda\mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

1.4 Semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaires

Définition .10 [8] Soit X un espace de Banach, soit $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de X à X , une famille $\{S(t), t \geq 0\}$ dans $\mathcal{L}(X)$ est un **Semi-groupe**

d'opérateur **linéaire borné** sur X si

- 1) $S(0) = I$, (I est l'opérateur d'identité sur x).
- 2) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$ (la propriété **Semi-groupe**).
- 3) Pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue sur $[0, \infty)$.

Définition .11 [8] Le générateur **infinitésimal**, où générateur du **Semi-groupe** d'opérateurs linéaires $\{S(t), t \geq 0\}$. L'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$ défini par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

et défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ pour } x \in D(\mathcal{A}).$$

Dans le générateur **infinitésimal** du **Semi-groupe** $S(t)$, $D(\mathcal{A})$ est le domaine d'un opérateur \mathcal{A} .

1.5 Théorème de Lax-Milgram

[4] soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire. Alors sur un espace de Hilbert H qui est :

- **Continue**, c'est -à-dire $\forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \forall M > 0$.
- **Coercive**, c'est -à-dire $\forall u \in H, |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_H^2, \forall \alpha > 0$.

Soit $l(v)$ une forme linéaire **continue** sur H . Alors il existe une unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v).$$

1.6 Théorème de Hille-Yosida

[4] Soit \mathcal{A} un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$, il existe une fonction

$$u \in C^1([0, \infty], H) \cap C([0, \infty], D(\mathcal{A})),$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur } [0, \infty[\\ u(0) = u_0, & \text{(donnée initiale)} \end{cases}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

1.7 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.7.1 [8] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire défini, et $D(\mathcal{A})$ domaine dense dans X , alors \mathcal{A} génère un C_0 Semi-groupe de contractions sur X si et seulement si

1. \mathcal{A} est dissipatif.
2. il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ

Dans ce chapitre, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du système (2)-(4), en utilisant la théorie de Semi-groupe. Pour cela, en posant $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, \omega, w, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t, v = \psi_t$ et $w = \omega_t$, le système (2)-(4) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \mathcal{A}\Phi(t) = 0, & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'opérateur \mathcal{A} est défini par

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -u \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \\ -v \\ -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) + \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x \\ -w \\ -\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \\ \frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\gamma}{\rho_3}v_x \\ \frac{\beta}{\tau_0}q + \frac{1}{\tau_0}\theta_x \end{pmatrix}.$$

On considère les espaces de Hilbert suivants :

$$H_*^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) : f(0) = 0\},$$

$$\tilde{H}_*^1(0, 1) = \{f \in H^1(0, 1) : f(1) = 0\},$$

$$H_*^2(0, 1) = H^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1),$$

$$\tilde{H}_*^2(0, 1) = H^2(0, 1) \cap \tilde{H}_*^1(0, 1).$$

Et

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (\Phi, \tilde{\Phi})_{\mathcal{H}} &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})dx + \rho_1 \int_0^1 u\tilde{u}dx \\ &\quad + b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \rho_2 \int_0^1 v\tilde{v}dx + \rho_1 \int_0^1 w\tilde{w}dx + \rho_3 \int_0^1 \theta\tilde{\theta}dx + \tau_0 \int_0^1 q\tilde{q}dx. \end{aligned}$$

Alors le domaine de l'opérateur \mathcal{A} est donné par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \Phi \in \mathcal{H} \setminus \varphi \in H_*^2(0, 1), \psi, \omega \in \tilde{H}_*^2(0, 1), \\ u, \theta \in H_*^1(0, 1), v, w, q \in \tilde{H}_*^1(0, 1), \varphi_x(1) = \omega_x(0) = \psi_x(0) = 0. \end{array} \right\}.$$

On montre maintenant que A est un opérateur maximal monotone. \mathcal{A} cet effet, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 *L'opérateur \mathcal{A} est monotone et satisfait, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$, on a*

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx \geq 0. \quad (2.2)$$

Démonstration. En utilisant le produit scalaire. Pour tout $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^1 (u_x + v + l\omega)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k_0 \int_0^1 (w_x - lu)(\omega_x - l\varphi) dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^1 \left(-\frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1} (\omega_x - l\varphi) \right) u dx - b \int_0^1 v_x \psi_x dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^1 \left(-\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi + l\omega) + \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \right) v dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^1 \left(-\frac{k_0}{\rho_1} (\omega_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1} (\varphi_x + \psi + l\omega) \right) w dx \\ &\quad + \rho_3 \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho_3} q_x + \frac{\gamma}{\rho_3} v_x \right) \theta dx + \tau_0 \int_0^1 \left(\frac{\beta}{\tau_0} q + \frac{1}{\tau_0} \theta_x \right) q dx. \end{aligned}$$

Après la simplification, on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^1 u_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k \int_0^1 v (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - kl \int_0^1 w (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ &\quad - k_0 \int_0^1 w_x (\omega_x - l\varphi) dx + k_0 l \int_0^1 u (\omega_x - l\varphi) dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x u dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) u dx - b \int_0^1 v_x \psi_x dx - b \int_0^1 \psi_{xx} v dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) v dx \\ &\quad + \gamma \int_0^1 \theta_x v dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x w dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) w dx + \int_0^1 q_x \theta dx \\ &\quad + \gamma \int_0^1 v_x \theta dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx, \end{aligned}$$

et grâce à la formule d'intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^1 u_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k \int_0^1 v(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - kl \int_0^1 w(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\
 &\quad - k_0 \int_0^1 w_x(\omega_x - l\varphi)dx + k_0 l \int_0^1 u(\omega_x - l\varphi)dx - k[(\varphi_x + \psi + l\omega)u]_0^1 \\
 &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)u_x dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)u dx - b[v\psi_x]_0^1 + b \int_0^1 v\psi_{xx} dx \\
 &\quad - b \int_0^1 \psi_{xx} v dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)v dx + \gamma \int_0^1 \theta_x v dx - k_0[(\omega_x - l\varphi)w]_0^1 \\
 &\quad + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)w_x dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)w dx + [q\theta]_0^1 - \int_0^1 q\theta_x dx + \gamma[v\theta]_0^1 \\
 &\quad - \gamma \int_0^1 v\theta_x dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 \theta_x q dx.
 \end{aligned}$$

Alors, les conditions aux bords impliquent

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx \geq 0.$$

Alors \mathcal{A} est monotone. ■

Lemme 2.2 *L'opérateur $\mathcal{A} + I$ est surjectif.*

Démonstration. Pour tout $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8)^T \in \mathcal{H}$, Il existe $\Phi \in D(\mathcal{A})$ vérifiant

$$(\mathcal{A} + I)\Phi = G. \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} -u + \varphi = g_1, \\ -\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) + u = g_2, \\ -v + \psi = g_3, \\ -\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) + \frac{\gamma}{\rho_2}\theta_x + v = g_4, \\ -w + \omega = g_5, \\ -\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x + \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) + w = g_6, \\ \frac{1}{\rho_3}q_x + \frac{\gamma}{\rho_3}v_x + \theta = g_7, \\ \frac{\beta}{\tau_0}q + \frac{1}{\tau_0}\theta_x + q = g_8. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

En multipliant l'équation (2.4)₂ et (2.4)₆ par ρ_1 et (2.4)₄ par ρ_2 , (2.4)₇ par ρ_3 et l'équation (2.4)₈ par τ_0 , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} -u + \varphi = g_1, \\ -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) + \rho_1 u = \rho_1 g_2, \\ -v + \psi = g_3, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4, \\ -w + \omega = g_5, \\ -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) + \rho_1 w = \rho_1 g_6, \\ q_x + \gamma v_x + \rho_3 \theta = \rho_3 g_7, \\ (\beta + \tau_0)q + \theta_x = \tau_0 g_8. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

D'après l'équation (2.5)₁, (2.5)₃, (2.5)₅ et (2.5)₈, on obtient

$$u = \varphi - g_1 \in H_*^1(0, 1), \quad (2.6)$$

$$v = \psi - g_3 \in \tilde{H}_*^1(0, 1), \quad (2.7)$$

$$w = \omega - g_5 \in \tilde{H}_*^1(0, 1), \quad (2.8)$$

$$\theta_x = -(\beta + \tau_0)q + \tau_0 g_8 \in L^2(0, 1). \quad (2.9)$$

L'intégration de (2.9) donne

$$\theta(x, t) = -(\beta + \tau_0) \int_0^x q(y) dy + \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy, \quad (2.10)$$

et $\theta(0, t) = 0$. A l'aide de (2.6) – (2.10), il est facile de montrer que φ, ψ, ω et q satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) + \rho_1(\varphi - g_1) = \rho_1 g_2, \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma[-(\beta + \tau_0)q + \tau_0 g_8] + \rho_2(\psi - g_3) = \rho_2 g_4, \\ -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) + \rho_1(\omega - g_5) = \rho_1 g_6, \\ q_x + \gamma(\psi_x - g_{3x}) + \rho_3(-(\beta + \tau_0) \int_0^x q(y) dy + \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy) = \rho_3 g_7, \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) + \rho_1 \varphi = \rho_1(g_2 + g_1), \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \rho_2 \psi - \gamma(\beta + \tau_0)q = \rho_2(g_4 + g_3) - \gamma\tau_0 g_8, \\ -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) + \rho_1 \omega = \rho_1(g_6 + g_5), \\ -q_x + \rho_3(\beta + \tau_0) \int_0^x q(y) dy - \gamma\psi_x = -\rho_3(g_7 - \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy) - \gamma g_{3x}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

On multiplie les équations de système (2.11) respectivement par $\varphi_1, \psi_1, \omega_1$ et q_1 et en

intégrant sur $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
 & \bullet -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x \varphi_1 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \varphi_1 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx = \rho_1 \int_0^1 (g_2 + g_1) \varphi_1 dx, \\
 & \bullet -b \int_0^1 \psi_{xx} \psi_1 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_1 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_1 dx - \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 q \psi_1 dx \\
 & \quad = \rho_2 \int_0^1 (g_4 + g_3) \psi_1 dx - \gamma \tau_0 \int_0^1 g_8 \psi_1 dx, \\
 & \bullet -k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x \omega_1 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_1 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega \omega_1 dx = \rho_1 \int_0^1 (g_6 + g_5) \omega_1 dx, \\
 & \bullet -\int_0^1 q_x q_1 dx + \rho_3(\beta + \tau_0) \int_0^1 \int_0^x q(y) q_1 dy dx - \gamma \int_0^1 \psi_x q_1 dx \\
 & \quad = -\rho_3 \int_0^1 (g_7 - \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy) q_1 dx - \gamma \int_0^1 g_{3x} q_1 dx.
 \end{aligned}$$

D'après l'intégration par parties avec les conditions aux bords, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \bullet k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{1x} dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \varphi_1 dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx = \rho_1 \int_0^1 (g_2 + g_1) \varphi_1 dx, \\
 & \bullet b \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_1 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_1 dx - \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 q \psi_1 dx \\
 & \quad = \rho_2 \int_0^1 (g_4 + g_3) \psi_1 dx - \gamma \tau_0 \int_0^1 g_8 \psi_1 dx, \\
 & \bullet k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \omega_{1x} dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_1 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega \omega_1 dx = \rho_1 \int_0^1 (g_6 + g_5) \omega_1 dx, \\
 & \bullet (\beta + \tau_0) \int_0^1 q q_1 dx + \rho_3(\beta + \tau_0)^2 \int_0^1 \left(\int_0^x q(y) dy \right) \left(\int_0^x q_1(y) dy \right) dx + \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 \psi q_1 dx \\
 & \quad = -\rho_3(\beta + \tau_0) \int_0^1 \left(g_7 - \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy \right) \left(\int_0^x q_1(y) dy \right) dx + \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 g_{3x} q_1 dx.
 \end{aligned}$$

Puis en sommant les termes, on trouve la formulation variationnelle suivante

$$B((\varphi, \psi, \omega, q), (\varphi_1, \psi_1, \omega_1, q_1)) = F(\varphi_1, \psi_1, \omega_1, q_1), \quad (2.12)$$

où B est une forme bilinéaire de $[H_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1)]^2$ dans \mathbb{R} définie

par :

$$\begin{aligned}
 B((\varphi, \psi, \omega, q), (\varphi_1, \psi_1, \omega_1, q_1)) &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\varphi_{1x} + \psi_1 + l\omega_1) dx \\
 &+ k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\omega_{1x} - l\varphi_1) dx \\
 &+ \rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega\omega_1 dx \\
 &+ b \int_0^1 \psi_x\psi_{1x} dx - \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 q\psi_1 dx \\
 &+ \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 \psi q_1 dx + (\beta + \tau_0) \int_0^1 q q_1 dx \\
 &+ \rho_3(\beta + \tau_0)^2 \int_0^1 \left(\int_0^x q(y) dy \right) \left(\int_0^x q_1(y) dy \right) dx,
 \end{aligned}$$

et F est une application linéaire de $H_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ dans \mathbb{R} définie

par :

$$\begin{aligned}
 F(\varphi_1, \psi_1, \omega_1, q_1) &= \rho_1 \int_0^1 (g_2 + g_1)\varphi_1 dx + \rho_2 \int_0^1 (g_4 + g_3)\psi_1 dx - \gamma\tau_0 \int_0^1 g_8\psi_1 dx \\
 &+ \rho_1 \int_0^1 (g_6 + g_5)\omega_1 dx + \gamma(\beta + \tau_0) \int_0^1 g_3 q_1 dx \\
 &- \rho_3(\beta + \tau_0) \int_0^1 \left(g_7 - \tau_0 \int_0^x g_8(y) dy \right) \left(\int_0^x q_1(y) dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

On pose $V = H_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times \tilde{H}_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}
 \left((\varphi, \psi, \omega, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}) \right)_V &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega}) dx \\
 &+ k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi}) dx \\
 &+ b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \tau_0 \int_0^1 q \tilde{q} dx,
 \end{aligned}$$

et la norme associée

$$\|(\varphi, \psi, \omega, q)\|_V^2 = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \tau_0 \int_0^1 q^2 dx.$$

Cette norme est équivalente à la norme

$$\|(\varphi, \psi, \omega, q)\|_V^2 = \|(\varphi_x + \psi + l\omega)\|_2^2 + \|(\omega_x - l\varphi)\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|q\|_2^2.$$

Maintenant, en utilisant le fait suivante, on montre la continuité de B et F , et que B est coercive

$$\int_0^1 (\varphi_x^2 + \psi_x^2 + \omega_x^2) dx \leq c \int_0^1 ((\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + (\omega_x - l\varphi)^2 + \psi_x^2) dx. \quad (2.13)$$

1. B continue :

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |B((\varphi, \psi, \omega, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}))| &\leq k \|(\varphi_x + \psi + l\omega)\|_2 \|(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})\|_2 \\ &\quad + k_0 \|(\omega_x - l\varphi)\|_2 \|(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})\|_2 \\ &\quad + \rho_1 \|\varphi\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + \rho_2 \|\psi\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 + \rho_3 \|\omega\|_2 \|\tilde{\omega}\|_2 \\ &\quad + b \|\psi_x\|_2 \|\tilde{\psi}_x\|_2 + \gamma(\beta + \tau_0) \|q\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 \\ &\quad + \gamma(\beta + \tau_0) \|\psi\|_2 \|\tilde{q}\|_2 + (\beta + \tau_0) \|q\|_2 \|\tilde{q}\|_2 \\ &\quad + \rho_3(\beta + \tau_0)^2 \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |q(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En traite le terme comme suite

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |q(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) \left(\int_0^x |q(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 & \leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 |q(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 & \leq \|q\|_2 \|\tilde{q}\|_2.
 \end{aligned}$$

Donc d'après les inégalités de Poincaré, Young et (2.13) on obtient

$$\begin{aligned}
 |B((\varphi, \psi, \omega, q), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}))| & \leq c \left(\|q\|_2^2 + c(\|(\varphi_x + \psi + l\omega)\|_2^2 + \|(\omega_x - l\varphi)\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\|\tilde{q}\|_2^2 + c(\|(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})\|_2^2 + \|(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})\|_2^2 + \|\tilde{\psi}_x\|_2^2) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 & \leq c\|\varphi, \psi, \omega, q\|_V \|\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q}\|_V.
 \end{aligned}$$

2. [B coercive](#) :

Pour certain $c > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 B((\varphi, \psi, \omega, q), (\varphi, \psi, \omega, q)) & = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 & \quad + \rho_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega^2 dx + b \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & \quad + (\beta + \tau_0) \int_0^1 q^2 dx + \rho_3(\beta + \tau_0)^2 \int_0^1 \left(\int_0^x q(y) dy \right)^2 dx, \\
 & \geq k \|(\varphi_x + \psi + l\omega)\|_2^2 + k_0 \|(\omega_x - l\varphi)\|_2^2 + b \|\psi_x\|_2^2 + c \|q\|_2^2, \\
 & \geq \min(k, k_0, b, c) \|(\varphi, \psi, \omega, q)\|_V^2, \\
 & \geq c \|(\varphi, \psi, \omega, q)\|_V^2.
 \end{aligned}$$

3. F continue :

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
 |F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q})| &\leq \rho_1 \|(g_1 + g_2)\|_2 \|\tilde{\varphi}\|_2 + \rho_2 \|(g_4 + g_3)\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 + \gamma \tau_0 \|g_8\|_2 \|\tilde{\psi}\|_2 \\
 &\quad + \rho_1 \|(g_6 + g_5)\|_2 \|\tilde{\omega}\|_2 + \gamma(\beta + \tau_0) \|g_3\|_2 \|\tilde{q}\|_2 \\
 &\quad + \rho_3(\beta + \tau_0) \left[\int_0^1 |g_7|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \tau_0 \rho_3(\beta + \tau_0) \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |g_8(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

En traite les termes comme suite

$$\begin{aligned}
 &\bullet \left[\int_0^1 |g_7|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \|g_7\|_2 \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \|g_7\|_2 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \|g_7\|_2 \|\tilde{q}(y)\|_2. \\
 \\
 &\bullet \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |g_8(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)| dy \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) \left(\int_0^x |g_8(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy \right) \left(\int_0^x |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 |g_8(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy \right) \left(\int_0^1 |\tilde{q}(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \|g_8\|_2 \|\tilde{q}(y)\|_2.
 \end{aligned}$$

Donc d'après les inégalités de Poincaré, Young et (2.13), on obtient

$$\begin{aligned} |F(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q})| &\leq c \left(\|\tilde{q}\|_2^2 + c \left(\|(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{\omega})\|_2^2 + \|(\tilde{\omega}_x - l\tilde{\varphi})\|_2^2 + \|\tilde{\psi}\|_2^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq c \|(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\omega}, \tilde{q})\|_V. \end{aligned}$$

Par conséquent, B est bilinéaire continue et coercive sur V et F linéaire continue sur V .

D'après le théorème de Lax-Milgram, le système (2.11) admet une solution unique

$$\varphi \in H_*^1(0, 1), \psi \in \tilde{H}_*^1(0, 1), \omega \in \tilde{H}_*^1(0, 1) \text{ et } q \in L^2(0, 1).$$

En remplaçant φ dans (2.6), ψ dans (2.7), ω dans (2.8) et q dans (2.9), on obtient

$$u \in H_*^1(0, 1), v \in \tilde{H}_*^1(0, 1), w \in \tilde{H}_*^1(0, 1) \text{ et } \theta \in H_*^1(0, 1).$$

De (2.11), on déduit

en outre, si $(\psi_1, \omega_1, q_1) = (0, 0, 0)$, alors, pour tout $\varphi_1 \in H_*^1(0, 1)$,

$$k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{1x} dx = - \int_0^1 [-k_0 l (\omega_x - l\varphi) + \rho_1 \varphi - \rho_1 (g_2 + g_1)] \varphi_1 dx. \quad (2.14)$$

Ceci implique que

$$-k\varphi_{xx} = k\psi_x + (k + k_0)l\omega_x - (k_0 l^2 + \rho_1)\varphi + \rho_1(g_2 + g_1) \in L^2(0, 1).$$

Par conséquent, par la théorie de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il en résulte que

$$\varphi \in H_*^2(0, 1).$$

Par ailleurs, (2.14) est également vrai pour tout $\phi \in C^1([0, 1])$ vérifiant $\phi(0) = 0$. En utilisant

l'intégration par parties, on trouve

$$\varphi_x(1)\phi(1) = 0, \forall \phi \in C^1([0, 1]) \text{ vérifiant } \phi(0) = 0.$$

D'où

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De la même manière, si $(\varphi_1, \omega_1, q_1) = (0, 0, 0)$, on trouve

$$-b\psi_{xx} = -k\varphi_x - (k + \rho_2)\psi - kl\omega + \gamma(\beta + \tau_0)q + \rho_2(g_4 + g_3) - \tau_0\gamma g_8 \in L^2(0, 1).$$

Alors

$$\psi \in \tilde{H}_*^2(0, 1) \text{ et } \psi_x(0) = 0,$$

et si $(\varphi_1, \psi_1, q_1) = (0, 0, 0)$, on obtient

$$-k_0\omega_{xx} = -l(k + k_0)\varphi_x - kl\psi - (kl^2 + \rho_1)\omega + \rho_1(g_6 + g_5) \in L^2(0, 1).$$

Donc

$$\omega \in \tilde{H}_*^2(0, 1) \text{ et } \omega_x(0) = 0.$$

De même façon, si $(\varphi_1, \psi_1, \omega_1) = (0, 0, 0)$, on trouve

$$-q_x = -\rho_3(\beta + \tau_0) \int_0^x q(y)dy + \gamma\psi_x - \rho_3(g_7 - \tau_0 \int_0^x g_8(y)dy) - \gamma g_{3x} \in L^2(0, 1).$$

Alors

$$q \in \tilde{H}_*^1(0, 1).$$

■

Enfin, l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit

l'existence d'un unique $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$ tel que (2.5) est satisfaite. Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est maximal.

Finalement, en utilisant le lemme 2.1 et le lemme 2.2, on conclut que A est un opérateur maximal monotone. Ainsi, par le théorème de Lumer-Phillips, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.0.2 *Soit $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe une solution unique $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ du système (2.1). De plus, si $\Phi_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.*

CHAPITRE 3

DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs pour démontrer la stabilité exponentielle du système (2)-(4), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par :*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + \rho_1 \omega_t^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 [k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2] dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

satisfait

$$E'(t) = -\beta \int_0^1 q^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

Démonstration. *En multipliant l'équation (2)₁, (2)₂, (2)₃, (2)₄ et (2)₅ par $\varphi_t, \psi_t, \omega_t, \theta$ et q*

respectivement, et intègre sur $(0, 1)$, et en les sommant nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi_{tt} dx - k \int_0^1 \varphi_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k_0 l \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^1 \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx + k \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0, \\ \rho_1 \int_0^1 \omega_t \omega_{tt} dx - k_0 \int_0^1 \omega_t (\omega_x - l\varphi)_x dx + kl \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0, \\ \rho_3 \int_0^1 \theta \theta_t dx + \int_0^1 \theta q_x dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_{xt} dx = 0, \\ \tau_0 \int_0^1 q q_t dx + \beta \int_0^1 q^2 dx + \int_0^1 q \theta_x dx = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On fait l'intégration par partie et d'après les conditions aux bords, nous trouvons

- $-k \int_0^1 \varphi_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx = -k [\varphi_t (\varphi_x + \psi + l\omega)]_0^1 + k \int_0^1 \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx$
 $= k \int_0^1 \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx,$
- $-b \int_0^1 \psi_t \psi_{xx} dx = -b [\psi_t \psi_x]_0^1 + b \int_0^1 \psi_{xt} \psi_x dx = b \int_0^1 \psi_{xt} \psi_x dx,$
- $-k_0 \int_0^1 \omega_t (\omega_x - l\varphi)_x dx = -k_0 [\omega_t (\omega_x - l\varphi)]_0^1 + k_0 \int_0^1 \omega_{xt} (\omega_x - l\varphi) dx$
 $= k_0 \int_0^1 \omega_{xt} (\omega_x - l\varphi) dx,$
- $\gamma \int_0^1 \theta \psi_{xt} dx = \gamma [\theta \psi_t]_0^1 - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = -\gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx,$
- $\int_0^1 q \theta_x dx = [q \theta]_0^1 - \int_0^1 q_x \theta dx = -\int_0^1 q_x \theta dx.$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k_0 l \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx = 0, \\ \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_t \theta_x dx = 0, \\ \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + k_0 \int_0^1 \omega_{xt} (\omega_x - l\varphi) dx + kl \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx = 0, \\ \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \int_0^1 \theta q_x dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0, \\ \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx - \int_0^1 q_x \theta dx = 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

De (3.4)₅, on déduit que :

$$\int_0^1 q_x \theta dx = \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx. \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.5) dans (3.4)₄, on obtient

$$\frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = 0. \quad (3.6)$$

Alors

$$\gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx = \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx. \quad (3.7)$$

Puis, on remplace (3.7) dans (3.4)₂, on trouve :

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx = 0. \quad (3.8)$$

Par addition (3.4)₁, (3.4)₃ et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 \varphi_{xt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k_0 l \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx \\ & + \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + k_0 \int_0^1 \omega_{xt} (\omega_x - l\varphi) dx + kl \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ & + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ & + \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx = 0, \end{aligned}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ & + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_t (\omega_x - l\varphi) dx \\ & + \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 q^2 dx + \beta \int_0^1 q^2 dx = 0, \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + \rho_1 \omega_t^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau_0 q^2] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2] dx \\ &= -\beta \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$E'(t) = -\beta \int_0^1 q^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Remarque 3.1 *Donc la fonction énergétique est décroissante. Cependant, cette inégalité n'implique pas la décroissance exponentielle vers l'équilibre. Nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov appropriée afin d'établir une estimation de décroissance exponentielle de l'énergie.*

Lemme 3.2 *Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors la fonctionnelle*

$$F_1(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx + \omega_t \omega dx,$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_1 > 0$,

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Démonstration. Dérivons $F_1(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_1 \left(\int_0^1 \varphi_t \varphi dx + \omega_t \omega dx \right)_t, \\ &= -\rho_1 \int_0^1 (\varphi_t \varphi)_t dx - \rho_1 \int_0^1 (\omega_t \omega)_t dx, \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx, \end{aligned}$$

on utilise $(2)_1$ et $(2)_3$

$$\begin{cases} -\rho_1 \varphi_{tt} = -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi), \\ -\rho_1 \omega_{tt} = -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega), \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -k \int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx - k_0 l \int_0^1 \varphi(\omega_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad - k_0 \int_0^1 \omega(\omega_x - l\varphi)_x dx + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx, \end{aligned}$$

on intègre par partie :

- $-k \int_0^1 \varphi(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx = -k [\varphi(\varphi_x + \psi + l\omega)]_0^1 + k \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx$
 $= k \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx,$
- $-k_0 \int_0^1 \omega(\omega_x - l\varphi)_x dx = -k_0 [\omega(\omega_x - l\varphi)]_0^1 + k_0 \int_0^1 \omega_x(\omega_x - l\varphi) dx$
 $= k_0 \int_0^1 \omega_x(\omega_x - l\varphi) dx.$

Donc

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ &\quad + k_0 \int_0^1 \omega_x(\omega_x - l\varphi) dx - k_0 l \int_0^1 \varphi(\omega_x - l\varphi) dx, \end{aligned}$$

on pose :

$$\begin{aligned} k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx, \\ &= k \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ &\quad + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx. \end{aligned}$$

Alors :

$$k \int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + kl \int_0^1 \omega(\varphi_x + \psi + l\omega) dx = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx,$$

on pose :

$$k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx = k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\omega_x - l\varphi) dx.$$

Alors :

$$k_0 \int_0^1 \omega_x(\omega_x - l\varphi) dx - k_0 l \int_0^1 \varphi(\omega_x - l\varphi) dx = k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,$$

donc :

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx, \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Young :

$$\bullet -k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \frac{k}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{k}{2\varepsilon} = \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{k}{2\varepsilon_1} \text{ donc } \frac{k\varepsilon}{2} = \frac{k^2}{4\varepsilon_1}.$$

Alors :

$$-k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{k^2}{4\varepsilon_1} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$$

Par l'inégalité de Poincaré :

$$\varepsilon_1 \int_0^1 \psi^2 dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

donc :

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{k^2}{4\varepsilon_1} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx, \\ &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \left(k + \frac{k^2}{4\varepsilon_1}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.3 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors la fonctionnelle

$$F_2(t) = -\frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx,$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Démonstration. Dérivons $F_2(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx \right)_t, \\ &= -\frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta_t \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx - \frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_{tt}(s, t) ds dx, \\ &= -\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 \rho_3 \theta_t \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx - \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \rho_2 \psi_{tt}(s, t) ds dx, \end{aligned}$$

on utilise $(2)_2$ et $(2)_4$

$$\begin{cases} \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x, \\ \rho_3 \theta_t = -q_x - \gamma\psi_{xt}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 (-q_x - \gamma\psi_{xt}) \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx - \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x)(s, t) ds dx, \\ &= \frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q_x \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx - \frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_{xx}(s, t) ds dx \\ &\quad + \frac{k\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x(s, t) ds dx, \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q_x \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx = -\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q \psi_t dx,$
- $\rho_2 \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx = -\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx,$

on a

- $-\frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_{xx}(s, t) ds dx = -\frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \psi_x dx,$
- $\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x(s, t) ds dx = \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx.$

Donc

$$F_2'(t) = -\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q \psi_t dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \psi_x dx \\ + \frac{k\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx,$$

on utilise l'inégalité de Young :

- $-\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2\varepsilon\gamma} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2\varepsilon}{2\gamma} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$

on pose : $\frac{\rho_2}{2\varepsilon\gamma} = \frac{\rho_2}{2\gamma^2} \Rightarrow \varepsilon = \gamma$ donc $\frac{\rho_2\varepsilon}{2\gamma} = \frac{\rho_2}{2}.$

Alors

$$-\frac{\rho_2}{\gamma} \int_0^1 q \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2\gamma^2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

- $-\frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \psi_x dx \leq \frac{b\rho_3}{2\varepsilon\gamma} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b\rho_3\varepsilon}{2\gamma} \int_0^1 \psi_x^2 dx,$

on pose : $\frac{b\rho_3\varepsilon}{2\gamma} = 2\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{4\gamma\varepsilon_2}{b\rho_3}$ donc $\frac{b\rho_3}{2\varepsilon\gamma} = \frac{1}{8\varepsilon_2} \left(\frac{b\rho_3}{\gamma}\right)^2.$

Alors

$$-\frac{b\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \psi_x dx \leq \frac{1}{8\varepsilon_2} \left(\frac{b\rho_3}{\gamma}\right)^2 \int_0^1 \theta^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx,$$

- $\frac{k\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds dx \leq \frac{k\rho_3}{2\gamma\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{k\rho_3\varepsilon}{2\gamma} \int_0^1 \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds \right)^2 dx,$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds \right)^2 dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)^2 dx, \\ &\leq \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx, \end{aligned}$$

on pose $\frac{k\rho_3\varepsilon}{2\gamma} = \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\gamma\varepsilon_2}{k\rho_3}$ donc $\frac{k\rho_3}{2\gamma\varepsilon} = \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\frac{k\rho_3}{\gamma} \right)^2$.

Alors

$$\frac{k\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(s, t) ds dx \leq \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\frac{k\rho_3}{\gamma} \right)^2 \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq \frac{\rho_2}{2\gamma^2} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{1}{8\varepsilon_2} \left(\frac{b\rho_3}{\gamma} \right)^2 \int_0^1 \theta^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{4\varepsilon_2} \left(\frac{k\rho_3}{\gamma} \right)^2 \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx, \\ &\leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_2}{2\gamma^2} \int_0^1 q^2 dx \\ &\quad + \left[\rho_3 + \left(\frac{b^2\rho_3^2}{8\gamma^2} + \frac{k^2\rho_3^2}{4\gamma^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_2} \right] \int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.4 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors la fonctionnelle

$$F_3(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Démonstration. Dérivons $F_3(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= \rho_2 \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t, \\ &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_{tt} dx, \end{aligned}$$

on utilise (2)₂

$$\rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\theta_x,$$

donc

$$F_3'(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + b \int_0^1 \psi \psi_{xx} dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \gamma \int_0^1 \psi \theta_x dx,$$

on intègre par partie

- $b \int_0^1 \psi \psi_{xx} dx = b [\psi \psi_x]_0^1 - b \int_0^1 \psi_x \psi_x dx = -b \int_0^1 \psi_x^2 dx,$
- $-\gamma \int_0^1 \psi \theta_x dx = -\gamma [\psi \theta]_0^1 + \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx = \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx.$

Donc

$$F_3'(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx,$$

utiliser l'inégalité de Young et Poincaré

$$\begin{aligned} \bullet -k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx &\leq \frac{k}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi^2 dx + \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx, \\ &\leq \frac{k}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k\varepsilon}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx, \end{aligned}$$

on pose : $\frac{k\varepsilon}{2} = \frac{k^2}{b} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2k}{b}$ donc $\frac{k}{2\varepsilon} = \frac{b}{4}$.

Alors

$$\begin{aligned} -k \int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi + l\omega) dx &\leq \frac{b}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx, \\ \bullet \gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx &\leq \frac{\gamma}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma\varepsilon}{2} \int_0^1 \theta^2 dx, \end{aligned}$$

on pose : $\frac{\gamma\varepsilon}{2} = \frac{\gamma^2}{b} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\gamma}{b}$ donc $\frac{\gamma}{2\varepsilon} = \frac{b}{4}$.

Alors

$$\gamma \int_0^1 \psi_x \theta dx \leq \frac{b}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{b} \int_0^1 \theta^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} F'_3(t) &\leq \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{b}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \frac{b}{4} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{b} \int_0^1 \theta^2 dx, \\ &\leq \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(-b + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{b} \int_0^1 \theta^2 dx, \\ &\leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\gamma^2}{b} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$F_3'(t) \leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx.$$

■

Lemme 3.5 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors la fonctionnelle

$$F_4(t) = \tau_0 \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s, t) ds dx,$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_4 > 0$,

$$F_4'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^1 q^2 dx. \quad (3.12)$$

Démonstration. Dérivons $F_4(t)$, on trouve

$$\begin{aligned} F_4'(t) &= \tau_0 \rho_3 \left(\int_0^1 \theta \int_0^x q(s, t) ds dx \right)_t, \\ &= \tau_0 \rho_3 \int_0^1 \theta_t \int_0^x q(s, t) ds dx + \tau_0 \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q_t(s, t) ds dx, \\ &= \tau_0 \int_0^1 \rho_3 \theta_t \int_0^x q(s, t) ds dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \tau_0 q_t(s, t) ds dx, \end{aligned}$$

on utilise $(2)_4$ et $(2)_5$

$$\begin{cases} \rho_3 \theta_t = -q_x - \gamma \psi_{xt}, \\ \tau_0 q_t = -\beta q - \theta_x, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_4'(t) &= \tau_0 \int_0^1 (-q_x - \gamma \psi_{xt}) \int_0^x q(s, t) ds dx + \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x (-\beta q - \theta_x)(s, t) ds dx, \\
 &= -\tau_0 \int_0^1 q_x \int_0^x q(s, t) ds dx - \tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x q(s, t) ds dx \\
 &\quad - \beta \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s, t) ds dx - \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x(s, t) ds dx,
 \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $-\tau_0 \int_0^1 q_x \int_0^x q(s, t) ds dx = \tau_0 \int_0^1 q^2 dx,$
- $-\tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_{xt} \int_0^x q(s, t) ds dx = \tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_t q dx,$

on a

- $-\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x(s, t) ds dx = -\rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx.$

Donc

$$F_4'(t) = \tau_0 \int_0^1 q^2 dx + \tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_t q dx - \beta \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s, t) ds dx - \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx,$$

on utilise l'inégalité de Young :

$$\bullet \tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_t q dx \leq \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\tau_0 \gamma \varepsilon}{2} \int_0^1 q^2 dx,$$

on pose $\frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon} = \varepsilon_4 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\tau_0 \gamma}{2\varepsilon_4}$ donc $\frac{\tau_0 \gamma \varepsilon}{2} = \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4}.$

Alors

$$\tau_0 \gamma \int_0^1 \psi_t q dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx.$$

- $-\beta \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx \leq \frac{\beta \rho_3}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\beta \rho_3 \varepsilon}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x q ds \right)^2 dx,$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^x q ds \right)^2 \leq \left(\int_0^1 q dx \right)^2 \leq \int_0^1 q^2 dx,$$

on pose $\frac{\beta\rho_3}{2\varepsilon} = \frac{\rho_3}{2} \Rightarrow \varepsilon = \beta$ donc $\frac{\beta\rho_3\varepsilon}{2} = \frac{\beta^2\rho_3}{2}$.

Alors

$$-\beta\rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q ds dx \leq \frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\beta^2\rho_3}{2} \int_0^1 q^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} F_4'(t) &\leq \tau_0 \int_0^1 q^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \\ &\quad + \frac{\beta^2\rho_3}{2} \int_0^1 q^2 dx - \rho_3 \int_0^1 \theta^2 dx, \\ &\leq \left(-\rho_3 + \frac{\rho_3}{2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\tau_0 + \frac{\beta^2\rho_3}{2} + \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx, \\ &\leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\tau_0 + \frac{\beta^2\rho_3}{2} + \frac{\tau_0^2 \gamma^2}{4\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$F_4'(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx.$$

■

Lemme 3.6 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors, sous la condition $k = k_0$, la fonctionnelle

$$F_5(t) = -\rho_1 \int_0^1 [\varphi_t(\omega_x - l\varphi) + \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)] dx,$$

vérifie

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 &\quad + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Démonstration. Dérivons $F_5(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\rho_1 \left(\int_0^1 [\varphi_t(\omega_x - l\varphi) + \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)] dx \right)_t, \\
 &= -\rho_1 \left(\int_0^1 \varphi_t(\omega_x - l\varphi) dx \right)_t - \rho_1 \left(\int_0^1 \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t, \\
 &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(\omega_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t(\omega_x - l\varphi)_t dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx,
 \end{aligned}$$

on utilise $(2)_1$ et $(2)_3$

$$\begin{cases} -\rho_1 \varphi_{tt} = -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi), \\ -\rho_1 \omega_{tt} = -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x (\omega_x - l\varphi) dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)(\omega_x - l\varphi) dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t(\omega_x - l\varphi)_t dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx,
 \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $-k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x (\omega_x - l\varphi) dx = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\omega_x - l\varphi)_x dx.$

Donc

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)(\omega_x - l\varphi)_x dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi)_t dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx.
 \end{aligned}$$

En exploitant la condition $k = k_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi)_t dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx \\
 &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \omega_{xt} dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_{xt} dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \\
 &\quad - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t \omega_t dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $-\rho_1 \int_0^1 \omega_t \varphi_{xt} dx = -\rho_1 [\omega_t \varphi_t]_0^1 + \rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \varphi_t dx = \rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \varphi_t dx.$

Donc

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \omega_{xt} dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \varphi_t dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \\
 &\quad - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx, \\
 &= \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \\
 &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

utilise l'inégalité de Young :

$$\bullet -\rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx,$$

on pose $\frac{\rho_1}{2\varepsilon} = \frac{\rho_1}{2l} \Rightarrow \varepsilon = l$ donc $\frac{\rho_1 \varepsilon}{2} = \frac{\rho_1 l}{2}$.

Alors

$$-\rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} F'_5(t) &\leq \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 l \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx \\ &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx, \\ &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \left(-\rho_1 l + \frac{\rho_1 l}{2}\right) \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx, \\ &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} F'_5(t) &\leq -k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.7 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors, sous la condition

$k = k_0$, la fonctionnelle

$$F_6(t) = -\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx \\ - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx,$$

vérifie

$$F_6'(t) \leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx. \quad (3.14)$$

Démonstration. Dérivons $F_6(t)$, on trouve

$$F_6'(t) = -\rho_1 \left(\int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx \right)_t - \rho_1 \left(\int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \right)_t, \\ = -\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_t \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_{tt} ds \right) dx \\ - \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)_t ds \right) dx,$$

on utilise $(2)_1$ et $(2)_3$

$$\begin{cases} -\rho_1 \varphi_{tt} = -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi), \\ -\rho_1 \omega_{tt} = -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F'_6(t) &= -\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_t \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx \\
 &\quad + \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x -k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \\
 &\quad + \int_0^1 -k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0l(\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)_t ds \right) dx,
 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 F'_6(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx \\
 &\quad - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\omega_x - l\varphi)_x ds \right) dx + kl \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \\
 &\quad - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx - k_0l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \varphi_{xt} ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx - \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx.
 \end{aligned}$$

En exploitant la condition $k = k_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
 F'_6(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\omega_x - l\varphi)_x ds \right) dx \\
 &\quad - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \varphi_{xt} ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx,
 \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $-\rho_1 \int_0^1 \omega_{xt} \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx = \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx,$
- $-k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx = k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx,$

on a

- $-k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x (\omega_x - l\varphi)_x ds \right) dx = -k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,$
- $-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \varphi_{xt} ds \right) dx = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$

Donc

$$F'_6(t) = \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx,$$

on utilise l'inégalité de Young

$$\bullet -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x \psi_t ds \right)^2 dx,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^x \psi_t ds \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \psi_t dx \right)^2 \leq \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on pose $\frac{\rho_1 \varepsilon}{2} = \frac{\rho_1}{2} \Rightarrow \varepsilon = 1$ donc $\frac{\rho_1}{2\varepsilon} = \frac{\rho_1}{2}$.

Alors

$$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx \leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
 F'_6(t) &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx, \\
 &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \left(-\rho_1 + \frac{\rho_1}{2}\right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx, \\
 &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 F'_6(t) &\leq \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

■

Lemme 3.8 Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). Alors, sous la condition $k = k_0$, la fonctionnelle

$$\begin{aligned}
 F_7(t) &= \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx \\
 &\quad + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \int_0^1 \theta \varphi_t dx - \frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_t dx + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_t dx,
 \end{aligned}$$

vérifie, pour tout $\varepsilon, \varepsilon_6, \varepsilon_7 > 0$,

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &\leq \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad + c \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Démonstration. Dérivons $F_7(t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &= \rho_2 \left(\int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \right)_t + \frac{b\rho_1}{k} \left(\int_0^1 \psi_x \varphi_t dx \right)_t + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \\
 &\quad - \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \right)_t - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t, \\
 &= \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx \\
 &\quad + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t - \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \right)_t \\
 &\quad - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t,
 \end{aligned}$$

on utilise $(2)_1$ et $(2)_2$

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma \theta_x, \end{cases}$$

on a

$$\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)_t = \psi_t \varphi_{xt} + \psi_t(\psi + l\omega)_t,$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &= b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &+ \rho_2 \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\psi + l\omega)_t dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx \\
 &+ b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx + bl \int_0^1 \psi_x(\omega_x - l\varphi) dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \\
 &- \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t,
 \end{aligned}$$

on intègre par partie :

- $\rho_2 \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx = \rho_2 [\psi_t \varphi_t]_0^1 - \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx = -\rho_2 \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx,$
- $b \int_0^1 \psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx = b [\psi_x(\varphi_x + \psi + l\omega)]_0^1 - b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx$
 $= -b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx.$

Ce que implique

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &= b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &- \rho_2 \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\psi + l\omega)_t dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx \\
 &- b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + bl \int_0^1 \psi_x(\omega_x - l\varphi) dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \\
 &- \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &= -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\psi + l\omega)_t dx \quad (3.16) \\
 &+ b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx + bl \int_0^1 \psi_x(\omega_x - l\varphi) dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \\
 &- \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t.
 \end{aligned}$$

De (2)₄, on déduit que

$$\psi_{xt} = -\frac{\rho_3}{\gamma}\theta_t - \frac{1}{\gamma}q_x,$$

donc

$$\begin{aligned} b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx &= b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \left[\frac{1}{\gamma} \int_0^1 (-\rho_3\theta_t - q_x)\varphi_t dx \right], \\ &= b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q_x\varphi_t dx \right], \end{aligned}$$

et intègre par partie avec les conditions aux bords, on trouve :

$$\bullet -\frac{1}{\gamma} \int_0^1 q_x\varphi_t dx = -\frac{1}{\gamma} [q\varphi_t]_0^1 + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q\varphi_{xt} dx = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q\varphi_{xt} dx.$$

Alors

$$b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx = b\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b}\right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q\varphi_{xt} dx \right],$$

on a

$$\left(\int_0^1 \theta\varphi_t dx \right)_t = \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx + \int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx.$$

Alors

$$-\frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta_t\varphi_t dx = -\frac{\rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta\varphi_t dx \right)_t + \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta\varphi_{tt} dx,$$

on a

$$\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx = \int_0^1 q\varphi_{xt} dx + \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx.$$

Alors

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^1 q\varphi_{xt} dx = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx,$$

donc

$$b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx = b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t + \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx \right], \quad (3.17)$$

en utilisant (2)₁, nous obtenons :

$$\varphi_{tt} = \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi + l\omega)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1} (\omega_x - l\varphi).$$

Alors

$$\frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx = \frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta (\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta (\omega_x - l\varphi) dx,$$

en intégrant par parties et utilisant les conditions aux bords, on déduit que

$$\frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \varphi_{tt} dx = \frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1} [\theta(\varphi_x + \psi + l\omega)]_0^1 - \frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta (\omega_x - l\varphi) dx, \\ = -\frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta (\omega_x - l\varphi) dx, \quad (3.18)$$

on a

$$\left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t = \int_0^1 q_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx.$$

Alors

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx = \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx,$$

en utilisant l'équation (2)₅, on trouve

$$q_t = -\frac{\beta}{\tau_0}q - \frac{1}{\tau_0}\theta_x = \frac{1}{\tau_0}(-\beta q - \theta_x),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx &= \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{1}{\gamma\tau_0} \int_0^1 (-\beta q - \theta_x)(\varphi_x + \psi + l\omega) dx, \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t + \frac{\beta}{\gamma\tau_0} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ &\quad + \frac{1}{\gamma\tau_0} \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En remplaçant (3.18) et (3.19) dans (3.17), on obtient

$$\begin{aligned} b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx &= b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \right. \\ &\quad - \frac{k\rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma\rho_1} \int_0^1 \theta(\omega_x - l\varphi) dx \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t + \frac{\beta}{\gamma\tau_0} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma\tau_0} \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx \right], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^1 \psi_{xt} \varphi_t dx &= b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t + \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\gamma \tau_0} - \frac{k \rho_3}{\gamma \rho_1} \right) \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad + \frac{\beta}{\gamma \tau_0} \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma \rho_1} \int_0^1 \theta(\omega_x - l\varphi) dx \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx \right]. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les conditions aux bords et l'intégration par parties, on voit que :

$$\begin{aligned}
 \bullet bl \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx &= bl [\psi(\omega_x - l\varphi)]_0^1 - bl \int_0^1 \psi (\omega_x - l\varphi)_x dx \\
 &= -bl \int_0^1 \psi (\omega_x - l\varphi)_x dx.
 \end{aligned}$$

De (2)₃, on déduit que

$$(\omega_x - l\varphi)_x = \frac{1}{k_0} [\rho_1 \omega_{tt} + kl(\varphi_x + \psi + l\omega)].$$

Alors

$$\begin{aligned}
 bl \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx &= -\frac{bl}{k_0} \int_0^1 \psi [\rho_1 \omega_{tt} + kl(\varphi_x + \psi + l\omega)] dx, \\
 &= -\frac{bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi [k(\varphi_x + \psi + l\omega)] dx - \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_{tt} dx.
 \end{aligned}$$

De (2)₂, on déduit que

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega) = -\rho_2 \psi_{tt} + b\psi_{xx} - \gamma \theta_x,$$

on a

$$\left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t = \int_0^1 \psi_t \omega_t dx - \int_0^1 \psi \omega_{tt} dx.$$

Alors

$$-\frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_{tt} dx = -\frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx,$$

donc

$$\begin{aligned} bl \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx &= -\frac{bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi [-\rho_2 \psi_{tt} + b\psi_{xx} - \gamma\theta_x] dx \\ &\quad - \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx, \\ &= \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_{tt} dx - \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_{xx} dx + \frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi \theta_x dx \\ &\quad - \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx, \end{aligned}$$

on intègre par partie

- $-\frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_{xx} dx = -\frac{b^2 l^2}{k_0} [\psi \psi_x]_0^1 + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \psi_x dx = \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx,$
- $\frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi \theta_x dx = \frac{\gamma bl^2}{k_0} [\psi \theta]_0^1 - \frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx = -\frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx.$

On a

$$\frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_{tt} dx = \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

donc

$$\begin{aligned} bl \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx &= \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad - \frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx - \frac{\rho_1 bl}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En remplaçant (3.20) et (3.21) dans (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 F'_7(t) = & -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\psi + l\omega)_t dx \\
 & + b \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \left[-\frac{\rho_3}{\gamma} \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t + \frac{1}{\gamma} \left(\int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t \right. \\
 & + \left(\frac{1}{\gamma \tau_0} - \frac{k \rho_3}{\gamma \rho_1} \right) \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{\beta}{\gamma \tau_0} \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 & + \frac{k_0 l \rho_3}{\gamma \rho_1} \int_0^1 \theta (\omega_x - l\varphi) dx - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 q (\psi + l\omega)_t dx \left. \right] + \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t \\
 & - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\gamma b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx - \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t \\
 & + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx + \frac{b \rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t - \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t \\
 & - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t,
 \end{aligned}$$

ensuit

$$\begin{aligned}
 F'_7(t) = & -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{b}{\gamma \tau_0} \left[\left(1 - \frac{\tau_0 \rho_3 k}{\rho_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) - \frac{\gamma^2 \tau_0}{b} \right] \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 & + \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\psi + l\omega)_t dx - \frac{b \rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t + \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t \\
 & + \frac{b \beta}{\gamma \tau_0} \chi \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l b \rho_3}{\gamma \rho_1} \chi \int_0^1 \theta (\omega_x - l\varphi) dx - \frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q (\psi + l\omega)_t dx \\
 & + \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\gamma b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx \\
 & - \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx + \frac{b \rho_3}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 \theta \varphi_t dx \right)_t \\
 & - \frac{b}{\gamma} \chi \left(\int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \right)_t - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \psi_t dx \right)_t + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \left(\int_0^1 \psi \omega_t dx \right)_t,
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &= \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
 &+ \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\psi + l\omega)_t dx + \frac{b\beta}{\gamma\tau_0}\chi \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\
 &+ \frac{b\rho_3 k_0 l}{\gamma\rho_1}\chi \int_0^1 \theta(\omega_x - l\varphi)dx - \frac{b}{\gamma}\chi \int_0^1 q(\psi + l\omega)_t dx \\
 &- \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx - \frac{\gamma b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx \\
 &+ \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx,
 \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Young

$$\bullet \rho_2 l \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{\rho_2 l}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 l \varepsilon}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{\rho_2 l \varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon_6}{3} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\varepsilon_6}{3\rho_2 l} \text{ donc } \frac{\rho_2 l}{2\varepsilon} = \frac{3(\rho_2 l)^2}{4\varepsilon_6}.$$

Alors

$$\rho_2 l \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{3(\rho_2 l)^2}{4\varepsilon_6} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx.$$

$$\bullet \frac{b\beta}{\gamma\tau_0}\chi \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \leq \frac{b\beta}{2\varepsilon\gamma\tau_0}\chi \int_0^1 q^2 dx + \frac{b\beta\varepsilon}{2\gamma\tau_0}\chi \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx$$

$$\text{on pose : } \frac{b\beta\varepsilon}{2\gamma\tau_0}\chi = \frac{k}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\gamma\tau_0 k}{b\beta\chi} \text{ donc } \frac{b\beta}{2\varepsilon\gamma\tau_0}\chi = \frac{(b\beta\chi)^2}{2(\gamma\tau_0)^2 k}.$$

Alors

$$\frac{b\beta}{\gamma\tau_0}\chi \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \leq \frac{(b\beta\chi)^2}{2(\gamma\tau_0)^2 k} \int_0^1 q^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$$

$$\bullet \frac{b\rho_3 k_0 l}{\gamma\rho_1}\chi \int_0^1 \theta(\omega_x - l\varphi)dx \leq \frac{b\rho_3 k_0 l}{2\varepsilon\gamma\rho_1}\chi \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b\rho_3 k_0 l \varepsilon}{2\gamma\rho_1}\chi \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{b\rho_3 k_0 l \varepsilon}{2\gamma\rho_1} \chi = \varepsilon_7 \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\gamma\rho_1 \varepsilon_7}{b\rho_3 k_0 l \chi} \text{ donc } \frac{b\rho_3 k_0 l}{2\varepsilon\gamma\rho_1} \chi = \frac{(b\rho_3 k_0 l \chi)^2}{4(\gamma\rho_1)^2 \varepsilon_7}.$$

Alors

$$\frac{b\rho_3 k_0 l}{\gamma\rho_1} \chi \int_0^1 \theta(\omega_x - l\varphi) dx \leq \frac{(b\rho_3 k_0 l \chi)^2}{4(\gamma\rho_1)^2 \varepsilon_7} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx.$$

$$\bullet -\frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q\psi_t dx \leq \frac{b}{2\varepsilon\gamma} \chi \int_0^1 q^2 dx + \frac{b\varepsilon}{2\gamma} \chi \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{b}{2\varepsilon\gamma} \chi = \frac{b^2}{2\gamma} |\chi| \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{b} \text{ donc } \frac{b\varepsilon}{2\gamma} \chi = \frac{|\chi|}{2\gamma}.$$

Alors

$$-\frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q\psi_t dx \leq \frac{b^2}{2\gamma} |\chi| \int_0^1 q^2 dx + \frac{|\chi|}{2\gamma} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

$$\bullet -\frac{bl}{\gamma} \chi \int_0^1 q\omega_t dx \leq \frac{bl}{2\varepsilon\gamma} \chi \int_0^1 q^2 dx + \frac{bl\varepsilon}{2\gamma} \chi \int_0^1 \omega_t^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{bl\varepsilon}{2\gamma} \chi = \frac{\varepsilon_6}{3} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\gamma\varepsilon_6}{3bl\chi} \text{ donc } \frac{bl}{2\varepsilon\gamma} \chi = \frac{3\left(\frac{bl}{\gamma}\chi\right)^2}{4\varepsilon_6}.$$

Alors

$$-\frac{bl}{\gamma} \chi \int_0^1 q\omega_t dx \leq \frac{3\left(\frac{bl}{\gamma}\chi\right)^2}{4\varepsilon_6} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx.$$

$$\bullet -\frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx \leq \frac{\gamma bl^2}{2\varepsilon k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\gamma bl^2 \varepsilon}{2k_0} \int_0^1 \theta^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{\gamma bl^2}{2\varepsilon k_0} = \varepsilon \text{ donc } \frac{\gamma bl^2 \varepsilon}{2k_0} = \frac{(\gamma bl^2)^2}{4k_0^2 \varepsilon}.$$

Alors

$$-\frac{\gamma bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x \theta dx \leq \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{(\gamma bl^2)^2}{4k_0^2 \varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx.$$

$$\bullet \frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{\rho_1 bl}{2\varepsilon k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_1 bl \varepsilon}{2k_0} \int_0^1 \omega_t^2 dx,$$

$$\text{on pose : } \frac{\rho_1 bl \varepsilon}{2k_0} = \frac{\varepsilon_6}{3} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2k_0 \varepsilon_6}{3\rho_1 bl} \text{ donc } \frac{\rho_1 bl}{2\varepsilon k_0} = \frac{3(\rho_1 bl)^2}{4k_0^2 \varepsilon_6}.$$

Alors

$$\frac{\rho_1 bl}{k_0} \int_0^1 \psi_t \omega_t dx \leq \frac{3(\rho_1 bl)^2}{4k_0^2 \varepsilon_6} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx.$$

Ensuit

$$\begin{aligned} F_7'(t) &\leq \frac{b}{\gamma \tau_0} \xi \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+ \frac{3(\rho_2 l)^2}{4\varepsilon_6} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{(b\beta\chi)^2}{2(\gamma\tau_0)^2 k} \int_0^1 q^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &+ \frac{(b\rho_3 k_0 l \chi)^2}{4(\gamma\rho_1)^2 \varepsilon_7} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \frac{b^2}{2\gamma} |\chi| \int_0^1 q^2 dx + \frac{|\chi|}{2\gamma} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+ \frac{3\left(\frac{bl}{\gamma}\chi\right)^2}{4\varepsilon_6} \int_0^1 q^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &+ \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{(\gamma bl^2)^2}{4k_0^2 \varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{3(\rho_1 bl)^2}{4k_0^2 \varepsilon_6} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\varepsilon_6}{3} \int_0^1 \omega_t^2 dx, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_7'(t) &\leq \frac{b}{\gamma \tau_0} \varepsilon \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \left(-k + \frac{k}{2}\right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &+ \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{\varepsilon_6}{3} + \frac{\varepsilon_6}{3} + \frac{\varepsilon_6}{3}\right) \int_0^1 \omega_t^2 dx \\ &+ \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \left(\rho_2 + \frac{3(\rho_2 l)^2}{4\varepsilon_6} + \frac{|\chi|}{2\gamma} - \frac{\rho_2 bl^2}{k_0} + \frac{3(\rho_1 bl)^2}{4k_0^2 \varepsilon_6}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &+ \left(\frac{(b\rho_3 k_0 l \chi)^2}{4(\gamma\rho_1)^2 \varepsilon_7} + \frac{(\gamma bl^2)^2}{4k_0^2 \varepsilon}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + \left(\frac{(b\beta\chi)^2}{2(\gamma\tau_0)^2 k} + \frac{b^2}{2\gamma} |\chi| + \frac{3\left(\frac{bl}{\gamma}\chi\right)^2}{4\varepsilon_6}\right) \int_0^1 q^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 F_7'(t) &\leq \frac{b}{\gamma\tau_0}\xi \int_0^1 \theta_x(\varphi_x + \psi + l\omega)dx - \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 &\quad + \varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 &\quad + c \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7}\right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6}\right) \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned}$$

Maintenant, on introduit la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L} = NE + F_1 + N_2 F_2 + N_3 F_3 + N_4 F_4 + \frac{1}{l} F_5 + F_6 + N_7 F_7, \quad (3.22)$$

où N, N_2, N_3, N_4 et N_7 sont des constantes strictement positives à déterminer convenablement. ■

Lemme 3.9 *Pour $N > 0$ assez grand, il existe $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tels que*

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.23)$$

Autrement dit, les fonctions E et \mathcal{L} sont équivalentes.

Maintenant, on est prêt à citer et de prouver le résultat principal de ce chapitre.

Démonstration.

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = \left| F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + N_4 F_4(t) + \frac{1}{l} F_5(t) + F_6(t) + N_7 F_7(t) \right|. \quad (3.24)$$

Si on remplace par

on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| = & \left| -\rho_1 \int_0^1 (\varphi_t \varphi + \omega_t \omega) dx + N_2 \left[-\frac{\rho_2 \rho_3}{\gamma} \int_0^1 \theta \int_0^x \psi_t(s, t) ds dx \right] + N_3 \left[\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx \right] \right. \\
 & + N_4 \left[\tau_0 \rho_3 \int_0^1 \theta \int_0^x q(s, t) ds dx \right] + \frac{1}{l} \left[-\rho_1 \int_0^1 [\varphi_t(\omega_x - l\varphi) + \omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)] dx \right] \\
 & + \left[-\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \right] \\
 & + N_7 \left[\rho_2 \int_0^1 A_t(\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx + \frac{b\rho_3}{\gamma} \chi \int_0^1 \theta \varphi_t dx \right. \\
 & \left. - \frac{b}{\gamma} \chi \int_0^1 q(\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \frac{\rho_2 b l^2}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_t dx + \frac{\rho_1 b l}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_t dx \right] \Big|,
 \end{aligned}$$

d'après Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq & \rho_1 \int_0^1 |\varphi_t \varphi| dx + \rho_1 \int_0^1 |\omega_t \omega| dx + \frac{\rho_2 \rho_3 N_2}{\gamma} \int_0^1 \left| \theta \int_0^x \psi_t(s, t) ds \right| dx \\
 & + \rho_2 N_3 \int_0^1 |\psi \psi_t| dx + \tau_0 \rho_3 N_4 \int_0^1 \left| \theta \int_0^x q(s, t) ds \right| dx \\
 & + \frac{\rho_1}{l} \int_0^1 |\varphi_t(\omega_x - l\varphi)| dx + \frac{\rho_1}{l} \int_0^1 |\omega_t(\varphi_x + \psi + l\omega)| dx \\
 & + \rho_1 \int_0^1 \left| (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_t ds \right) \right| dx + \rho_1 \int_0^1 \left| \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) \right| dx \\
 & + \rho_2 N_7 \int_0^1 |\psi_t(\varphi_x + \psi + l\omega)| dx + \frac{b\rho_1 N_7}{k} \int_0^1 |\psi_x \varphi_t| dx + \frac{b\rho_3 N_7}{\gamma} \chi \int_0^1 |\theta \varphi_t| dx \\
 & + \frac{bN_7}{\gamma} \chi \int_0^1 |q(\varphi_x + \psi + l\omega)| dx + \frac{\rho_2 b l^2 N_7}{k_0} \int_0^1 |\psi \psi_t| dx + \frac{\rho_1 b l N_7}{k_0} \int_0^1 |\psi \omega_t| dx.
 \end{aligned}$$

Exploiter les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz

- $\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx.$
- $\rho_1 \int_0^1 \omega_t \omega dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \omega^2 dx.$
- $\frac{\rho_2 \rho_3 N_2}{\gamma} \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \psi_t(s, t) ds \right) dx \leq \frac{\rho_2 \rho_3 N_2}{2\varepsilon \gamma} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\rho_2 \rho_3 N_2 \varepsilon}{2\gamma} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$
- $\rho_2 N_3 \int_0^1 \psi \psi_t dx \leq \frac{\rho_2 N_3}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 N_3 \varepsilon}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx.$
- $\tau_0 \rho_3 N_4 \int_0^1 \theta \left(\int_0^x q(s, t) ds \right) dx \leq \frac{\tau_0 \rho_3 N_4}{2\varepsilon} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\tau_0 \rho_3 N_4 \varepsilon}{2} \int_0^1 q^2 dx.$
- $\frac{\rho_1}{l} \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx.$
- $\frac{\rho_1}{l} \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$
- $\rho_1 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \left(\int_0^x \omega_t ds \right) dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx.$
- $\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega) ds \right) dx \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$
- $\rho_2 N_7 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \frac{\rho_2 N_7}{2\varepsilon} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 N_7 \varepsilon}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$
- $\frac{b\rho_1 N_7}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx \leq \frac{b\rho_1 N_7}{2\varepsilon k} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{b\rho_1 N_7 \varepsilon}{2k} \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$
- $\frac{b\rho_3 N_7}{\gamma} \chi \int_0^1 \theta \varphi_t dx \leq \frac{b\rho_3 N_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{b\rho_3 N_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \int_0^1 \varphi_t^2 dx.$
- $\frac{bN_7}{\gamma} \chi \int_0^1 q (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \frac{bN_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \int_0^1 q^2 dx + \frac{bN_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.$
- $\frac{\rho_2 b l^2 N_7}{k_0} \int_0^1 \psi \psi_t dx \leq \frac{\rho_2 b l^2 N_7}{2\varepsilon k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2 b l^2 N_7 \varepsilon}{2k_0} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$
- $\frac{\rho_1 b l N_7}{k_0} \int_0^1 \psi \omega_t dx \leq \frac{\rho_1 b l N_7}{2\varepsilon k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{\rho_1 b l N_7 \varepsilon}{2k_0} \int_0^1 \omega_t^2 dx.$

Donc

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq & \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{b\rho_1 N_7 \varepsilon}{2k} + \frac{b\rho_3 N_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_2 \rho_3 N_2 \varepsilon}{2\gamma} + \frac{\rho_2 N_3}{2\varepsilon} + \frac{\rho_2 N_7}{2\varepsilon} + \frac{\rho_2 b l^2 N_7 \varepsilon}{2k_0} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_2 N_3 \varepsilon}{2} + \frac{b\rho_1 N_7}{2\varepsilon k} + \frac{\rho_2 b l^2 N_7}{2\varepsilon k_0} + \frac{\rho_1 b l N_7}{2\varepsilon k_0} \right) \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} + \frac{\rho_1 b l N_7 \varepsilon}{2k_0} \right) \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_2 \rho_3 N_2}{2\varepsilon \gamma} + \frac{\tau_0 \rho_3 N_4}{2\varepsilon} + \frac{b\rho_3 N_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \right) \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & + \left(\frac{\tau_0 \rho_3 N_4 \varepsilon}{2} + \frac{b N_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \right) \int_0^1 q^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} + \frac{\rho_2 N_7 \varepsilon}{2} + \frac{b N_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
 & + \left(\frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \right) \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx,
 \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{b\rho_1 N_7 \varepsilon}{2k} + \frac{b\rho_3 N_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \right) &= \gamma_1, \\
 \left(\frac{\rho_2 \rho_3 N_2 \varepsilon}{2\gamma} + \frac{\rho_2 N_3}{2\varepsilon} + \frac{\rho_2 N_7}{2\varepsilon} + \frac{\rho_2 b l^2 N_7 \varepsilon}{2k_0} \right) &= \gamma_2, \\
 \left(\frac{\rho_2 N_3 \varepsilon}{2} + \frac{b\rho_1 N_7}{2\varepsilon k} + \frac{\rho_2 b l^2 N_7}{2\varepsilon k_0} + \frac{\rho_1 b l N_7}{2\varepsilon k_0} \right) &= \gamma_3, \\
 \left(\frac{\rho_1}{2\varepsilon} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon l} + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} + \frac{\rho_1 b l N_7 \varepsilon}{2k_0} \right) &= \gamma_4, \\
 \left(\frac{\rho_2 \rho_3 N_2}{2\varepsilon \gamma} + \frac{\tau_0 \rho_3 N_4}{2\varepsilon} + \frac{b\rho_3 N_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \right) &= \gamma_5, \\
 \left(\frac{\tau_0 \rho_3 N_4 \varepsilon}{2} + \frac{b N_7}{2\varepsilon \gamma} \chi \right) &= \gamma_6, \\
 \left(\frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} + \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} + \frac{\rho_2 N_7 \varepsilon}{2} + \frac{b N_7 \varepsilon}{2\gamma} \chi \right) &= \gamma_7, \\
 \left(\frac{\rho_1 \varepsilon}{2l} + \frac{\rho_1}{2\varepsilon} \right) &= \gamma_8.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq \max(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8) \int_0^1 [\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \psi_x^2 + \omega_t^2 + \theta^2 + q^2 \\ &\quad + (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + (\omega_x - l\varphi)^2] dx, \\ &\leq cE(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t),$$

ce qui implique

$$-cE(t) \leq \mathcal{L}(t) - NE(t) \leq cE(t),$$

qui donne

$$(N - c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c)E(t).$$

On prend $(N - c) = \alpha_1$, $(N + c) = \alpha_2$ et choisir N assez grand.

Nous obtenons une estimation (3.23). ■

Théorème 3.0.3 *Soit $(\varphi, \psi, \theta, \omega, q)$ une solution du système (2)-(4). On suppose que $\xi = 0$ et $k = k_0$. Alors, pour l assez petit, le système (2)-(4) est exponentiellement stable, c'est à dire, il existe deux constantes strictement positives R et r telle que la solution du système (2)-(4) vérifie*

$$E(t) \leq Re^{-rt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration. Dérivons (3.22)

$$\mathcal{L}'(t) = NE'(t) + F_1'(t) + N_2F_2'(t) + N_3F_3'(t) + N_4F_4'(t) + \frac{1}{l}F_5'(t) + F_6'(t) + N_7F_7'(t),$$

en combinant (3.1), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) et (3.15), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & N \left[-\beta \int_0^1 q^2 dx \right] \\
 & - \left[\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \right. \\
 & \left. + \varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \right] \\
 & + N_2 \left[-\frac{\gamma}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + 2\varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \right. \\
 & \left. + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \int_0^1 q^2 dx \right] \\
 & + N_3 \left[-\frac{b}{2} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{b} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx \right] \\
 & + N_4 \left[-\frac{\rho_3}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 q^2 dx \right] \\
 & + \frac{1}{l} \left[-k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx \right. \\
 & \left. + c \int_0^1 \psi_t^2 dx + c \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \right] \\
 & + \left[\rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \right. \\
 & \left. + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx \right] \\
 & + N_7 \left[\frac{b}{\gamma\tau_0} \xi \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \varepsilon_7 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \right. \\
 & \left. + \frac{b^2 l^2}{k_0} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6} \right) \int_0^1 \psi_t^2 dx \right. \\
 & \left. + c \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7} \right) \int_0^1 \theta^2 dx + c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6} \right) \int_0^1 q^2 dx \right].
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & - \left[\beta N - cN_2 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) N_4 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6} \right) N_7 \right] \int_0^1 q^2 dx \\
 & - \left[\frac{\rho_1}{2} + \rho_1 - \rho_1 \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 & - \left[\frac{\gamma}{2} N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6} \right) N_7 - \frac{\rho_1}{2} - c \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & - \left[\frac{b}{2} N_3 - \frac{b^2 l^2}{k_0} N_7 - \varepsilon N_7 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 N_2 \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & - \left[\frac{\rho_3}{2} N_4 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) N_2 - cN_3 - c \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_7} \right) N_7 \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & - \left[\rho_1 - \rho_1 + \frac{\rho_1}{2} - \varepsilon_6 N_7 \right] \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
 & - [k_0 - k_0 + k_0 - \varepsilon_7 N_7] \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 & - \left[\frac{k}{2} N_7 - \frac{k^2}{b} N_3 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) - N_2 \varepsilon_2 - k - c \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.
 \end{aligned}$$

A ce point, on prend d'abord $\varepsilon_6 = \frac{\rho_1}{4N_7}$, $\varepsilon_7 = \frac{k_0}{2N_7}$, $\varepsilon = \frac{1}{N_7}$ et $N_3 = \frac{b}{4k} N_7$, et on peut fixer ε_1 tel que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & - \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_1}{4} \int_0^1 \omega_t^2 dx - \frac{k_0}{2} \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 & - \left[\left(\frac{1}{2} - 4l^2 \right) bN_3 - 2\varepsilon_2 N_2 - c \right] \int_0^1 \psi_x^2 dx \\
 & - \left[\frac{k}{4} N_7 - N_2 \varepsilon_2 - c \right] \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\
 & - \left[\frac{\gamma}{2} N_2 - \varepsilon_4 N_4 - \rho_2 N_3 - cN_7 - c \right] \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & - \left[\frac{\rho_3}{2} N_4 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) N_2 - cN_3 - c \right] \int_0^1 \theta^2 dx \\
 & - \left[\beta N - cN_2 - c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) N_4 - cN_7 \right] \int_0^1 q^2 dx.
 \end{aligned}$$

Maintenant, on choisit $\varepsilon_2 = \frac{1}{N_2}$, après on fixe N_7 tel que

$$\frac{k}{4}N_7 - N_2\varepsilon_2 - c > 0.$$

Pour l assez petit, on peut fixe N_3 tel que

$$\left(\frac{1}{2} - 4l^2\right) bN_3 - 2\varepsilon_2N_2 - c > 0.$$

En choisissant $\varepsilon_4 = \frac{1}{N_2}$ et N_2 assez grand on déduit

$$\frac{\gamma}{2}N_2 - \varepsilon_4N_4 - \rho_2N_3 - cN_7 - c > 0.$$

En plus, on prend N_4 assez grand tel que

$$\frac{\rho_3}{2}N_4 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)N_2 - cN_3 - c > 0.$$

Finalement, on choisit N assez grand tel que

$$\beta N - cN_2 - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right)N_4 - cN_7 > 0.$$

Et (3.23) reste vrai. Par conséquent, pour un certain $\rho > 0$,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\rho E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.25}$$

Combinons (3.25) et (3.23) pour obtenir

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\rho E(t) \leq -\frac{\rho}{\alpha_2}\mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.26}$$

Une intégration simple de (3.26) mène à

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\frac{\rho}{\alpha_2}t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.27)$$

Alors (3.27) et (3.23) impliquent que

$$E(t) \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{\alpha_1} e^{-\frac{\rho}{\alpha_2}t} = \text{Re}^{-rt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Guesmia and M. Kafini, *Bresse system with infinite memories*, *Math. Methods Appl. Sci.*, 38(11)(2015), 2389-2402.
- [2] A. Keddi, These de doctora, *comportement asymptotique de quelques systémes thermoélastique*, université Djilali Liabes Sidi Bel Abbas, (2018).
- [3] F. Alabau-Boussouira , J. E. Muñoz Rivera and D. S. Almeida Júnior , *Stability to weak dissipative Bresse system*, *J. Math. Anal. Appl.*, 347(2011), 481-498 .
- [4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Membre de l'institut Professeur à l'université pierre-et-Marie Curie.
- [5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science + Business Media,LLC 2011.
- [6] J. A. C. Bresse, *Cours de Méchanique Appliquée*, Mallet Bachelier, Paris, 1859.
- [7] J. A. Soriano , W. Charles and R. Schulz, *Asymptotic stability for Bresse systems*, *J. Math.Anal. Appl.*, 412 (1)(2014), 369-380 .
- [8] L. I. Vrabie, *C_0 -Semi-groups and applications*, Elsevier Science B. V. 2003.
- [9] M. L. Santos and D.S. Almeida Junior, *Numerical Exponential Decay to Dissipative Bresse System*, *J. Appl. Math.* Article (2010), 17 pages.