وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M / 2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Analyse variationnelle d'un problème viscoplastique avec endommagement

Option : AFA

Par :

1. ***Bazine chaima***
2. **Boulainine khedidja**

Encadré par : S. Benferdi **MCB U. SKIKDA**

Devant le jury :

Président : Z. Belyacine **MCB U. SKIKDA**
Examinateur: Z. Chougui **MCB U. SKIKDA**

Année : 2021/2022

Remerciement

Tout d'abord nous remercierons Dieu de m'avoir donné la force et la capacité de terminer ce travail modeste qui fait ma fierté et ma personnalité.

Mes remerciements s'adressent à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont coopéré à l'élaboration de ce travail et particulièrement:

Mon encadreur *BENFERDI SABRINA* qui m'a guidé à concrétiser travail.

Mon membres de jury: *Z. Belyacine* et *Z. Chougui*

A tous mes enseignants de l'institué de mathématique et Aussi, à tous ceux qui ont de loin ou de près renseignés à élaborer mon humble travail.

Enfin, nous remercierons mes parents pour m'avoir facilité la vie et donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents,

Mon père *Moussa* et ma mère *Djamila* qui m'ont toujours soutenu

Avec leurs encouragement et qui m'ont donné un magnifique modèle

De labeur et de persévérance, en hommage affectueux.

- **ma grande mère *Massouda***
- **mes frère *Elhacene* et *Ali***
- mes sœurs ***Meriem, Soumia, Imane*** et ***Bochra***
- **mes Oncles surtout mon oncle *Djamel* et mon oncle *Cherif***
- **mes tantes et toute ma famille**
- **ma chère *Besma* et mon compagnon, mon partenaire dans le chemin et La vie qui m'ont soutenu dans ma carrière**
- **mes amis et à toutes mes camarades**
- **me encadreur et tous mes enseignant**(e)s.

(Khedidja Boulainine)

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents,

mon père *Djamel* et ma mère *Khadîdja* qui m'ont toujours soutenu

avec leurs encouragement et qui m'ont donné un magnifique modèle

de labeur et de persévérance, en hommage affectueux.

- **ma grande mère *Djamila***
- **mes frère *Sohaib* et *Baha elddin***
- **mes sœurs *Anfal, Ikhlasse, Safaa, Hoyam, Tessnim,* et *Sondos***
- **mes Oncles surtout mon oncle *Samir* et mon oncle *Aze aldin***
- **mes tantes et toute ma famille**
- **ma chère *Besma* et mon compagnon, mon partenaire dans le chemin et La vie qui m'ont soutenu dans ma carrière**
- **mes amis et à toutes mes camarades**
- **me encadreur et tous mes enseignant(e)s**

(Chayma Bazine)

Résumé

L'objet de ce mémoire est d'étudier un problème de contact sans frottement entre corps viscoplastique et une base rigide avec endommagement.

Ici nous considérons une loi de comportement non linéaire dans le processus quasi-statiques. Le problème est étudié suivant les étapes suivantes : nous commençons par la modélisation du problème mécanique. Nous précisons les hypothèses, puis on établit la formulation variationnelle. Les résultats obtenus sont liés à l'existence et l'unicité de la solution faible. Les techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs fortement monotones et des arguments du point fixe de Banach.

Mots-clés: **corps viscoplastique, solution faible, opérateur monotone, équation d'évolution, point fixe, le contact sans frottement, endommagement.**

Abstract

The object of this memory is to study of the frictionless contact problem between a viscoplastic body and a solid base with damage.
Here we consider nonlinear behavior laws in the quasistatic process. For this problem we study the problem following these steps: we start with the modeling of mechanical problem. We specify the hypotheses, and then we establish the variational formulation. The results obtained are related to the existence and uniqueness of the weak solution. The techniques employed are based on the theory of monotone operators and Banach's fixed point arguments.
***Key words*: viscoplastic body, weak solution, monotonous operator, evolution equation fixed point, frictionless contact, dommage.**

الملخص

الغرض من هده المذكرة هو دراسة مسألة تلامس دون احتكاك بين جسم لدن وقاعدة صلبة مع احتساب معيار التآكل. اعتبرنا قوانين السلوك غير خطية في سياقات شبه سكونية.

من اجل دراسة هده المسألة نتبع خطوات: نبدأ أولا بتمثيل المسألة الميكانيكية وتحديد الفرضيات لنتحصل على التمثيل التغيري.

النتائج المتحصل عليها تتعلق بوجود ووحدانية الحل الضعيف تعتمد هده التقنيات على نظرية المؤثرات الرتيبة و النقطة الثابتة.

<u>الكلمات المفتاحية</u> **:** **تلامس دون احتكاك، جسم لدن، التآكل، الحل الضعيف، المؤثر الرتيب، النقطة الثابتة، معادلة التطور.**

Table des matières

Introduction **2**

Notation **4**

1 Rappels de la mécanique des milieux continus **1**

1.1 Géométrie de la déformation 2

1.1.1 Milieu continu 2

1.1.2 Tenseur de déformation et déplacement 2

1.1.3 Tenseur des contraintes et équations du mouvement 5

1.2 Loi de comportement 6

1.3 Loi de comportement viscoplastiques 7

1.3.1 Loi de comportement viscoplastiques avec endommagement 7

1.4 Condition aux limites 8

1.4.1 Conditions aux limites de déplacement-traction 9

1.4.2 Conditions aux limites de contact sans frottement 10

2 Problème quasistatiques d'un matériau viscoplastique avec endommagement **12**

2.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses 13

2.1.1 Hypothèses 15

2.2 Formulation variationnelle 17

2.3 Existence et unicité de la solution 19

3 Annexe **27**

3.1 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces Hilbert 27

3.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert 27
3.2 Opérateur fortement monotones et inéquation variationnelle 28
3.2.1 Opérateurs linéaires 28
3.2.2 Opérateurs non linéaires 29
3.2.3 Théorèmes de point fixe 30
3.3 Inéquations variationnelles et équations d'évolution 32
3.3.1 Inéquations variationnelles elliptiques 32
3.4 Les espaces fonctionnels 34
3.4.1 Espace mesurable 35
3.4.2 Les espaces de distributions 36
3.5 Les espaces de sobolev, opérateurs de déformation et divergence 37
3.6 Théorème de trace,formule de Green et inégalité de Korn 38
3.7 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles 40
3.8 Lemmes de Gronwall 40

Bibliographie **42**

Introduction

L'objectif de cet mémoire est l'analyse variationnelle d'un systèmes d'équations aux dérivées partielles modélisant des phénomènes de contact impliquant des corps déformables. Les phénomènes de contact sont variés, fortement non linéaires et complexes. Ils abondent dans l'industrie et dans la vie de tous les jours et, de ce fait, ils jouent un rôle important dans le comportement des structures mécaniques.

L'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet est celle de Signorini [13], où le problème de contact unilatéral entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide est formulé. Il s'ensuit le travail de Fichera [5] où le problème de Signorini a été résolu, en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Mentionnons aussi la monographie de Duvaut et Lions [3] où les formulations variationnelles de plusieurs problèmes de contact sont présentés, accompagnées de résultats d'existence et d'unicité de la solution. D'autres références dans ce domaine de recherche sont les livres [[10], [11]].

Une étude complète des phénomènes de contact doit prendre en considération leur analyse variationnelle et numérique. L'objectif principal dans l'analyse variationnelle

Concerne l'obtention des résultats d'existence, d'unicité, de stabilité, de régularité et de comportement asymptotique des solutions faibles.

En outre, l'analyse numérique a comme objectif l'étude théorique des schémas discrétisés et l'implémentation des algorithmes numériques de résolution. Ces objectifs demandent des outils mathématiques et numériques spécifiques, nouveaux et innovants.

Dans différents problèmes de contact provenant du secteur industrie, il ya besoin de prendre en considération l'endommagement interne du matériau causé par des contraintes mécaniques. Des modèles généraux pour l'évolution d'endommagement sont dans [[7], [8]] et son tissus du principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes d'endommagement dans le cas unidimensionnels peut être trouvée dans [9]. L'endommagement du matériaux est décrit par une fonction β ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\beta = 0$ le matériau est complètement endommagé, lorsque $\beta = 1$ il n'ya pas d'endommagement et lorsque $0 < \beta < 1$ il ya un endommagement partiel et le système a une capacité réduite.

Dans ce mémoire nous allons proposer une étude mathématique d'un problème de contact entre un matériau viscoplastiques et une fondation rigide dans le cadre des hypothèses de petites transformations (H.P.T).

Ce mémoire est composé de deux chapitres et une annexe. Dans le premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension des problèmes mécaniques, nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des milieux continus, nous définissons les tenseurs des contraintes et des déformations, la loi de comportement viscoplastique et enfin les conditions aux limites.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de contact sans frottement entre un matériau viscoplastiques et une fondation rigide. L'effet d'endommagement est pris en considération dans la loi constitutive.

Les modèles mathématiques correspondants sont formulés en fonction des inéquations variationnelles elliptiques et paraboliques. Les conditions aux limites de contact sont celle de Signorini. Nous donnons, après avoir posé le problème mécanique, une formulation variationnelle ensuite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de cette formulation variationnelle.

Enfin on termine le mémoire par une annexe où on rappelle quelques outils de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats utiles pour l'étude de notre problème.

Notation

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\bar{\Omega}$: l'adhérence de Ω

Γ : La frontière de Ω.

Γ_i : une partie de la frontière, $(1, 2, 3)$.

M_N : l'espace des matrices carrées d'ordre $N \times N$.

S_N : l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^N$ c'est-à-dire : $S_n = \mathbb{R}_s^{N\times N}$.

ε : l'opérateur de déformation.

div : L'opérateur de divergence.

∇u : le gradient de u.

$\partial_i \varphi$: La dérivée partielle de φ par rapport à la $i^{ième}$ composante.

$C([0, T], X)$: espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X.

$C^1([0, T], X)$: espace des fonctions continûmment dérivables sur $[0, T]$ à valeurs dans

$W^{k,p}([0, T], H)$, l'espace de Sobolev de paramètres k et p.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables et de support compact dans Ω.

$\acute{\mathcal{D}}(\Omega)$: espace des distributions sur Ω.

$L^2(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de carré intégrables sur Ω.

$L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions u mesurables sur Ω telle qu'il existe $c > 0$ tel que $|u(x)| \leq c$ p.p. sur Ω.

$H^1(\Omega)$: espace de Sobolev.

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ sur $H^1(\Omega)$.

$D = \mathcal{D}(\Omega)^N$.

$D' = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N}$.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}$.

$H = [L^2(\Omega)]^N$.

$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]_s^{N\times N}$.

$H_1 = \{u \in H : \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$.

$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} : div\sigma \in H\}$.

$L^2(\Gamma)$: l'espace des fonctions définie sur Γ et de carré sommable pour la mesure surfacique.

$H^{1/2}(\Gamma)$: espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.

$H_\Gamma = H^{1/2}(\Gamma)^N$.

H'_Γ : dual de H_Γ.

ν : la normale extérieure à Γ.

v_ν : la composante normale de v.

σ_τ : la composante tangentielle de v.

$\prec .,. \succ_X$: produit scalaire sur X.

$\prec .,. \succ_{\grave{X}\times X}$: produit de dualité entre $\grave{X}$ et X.

p.p : presque partout.

Ψ_K la fonction indicatrice de $K \subset H$.

$\bigtriangledown u$ le gradient de u.

∂u le sousdiférentiel (classique)de u :

Chapitre 1

Rappels de la mécanique des milieux continus

Ce chapitre est destiné à rappeler quelques principes et résultas essentiels de la théorie des milieux continus dont nous aurons besoin. Ces rappels porteront sur le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes, équations de mouvement, les lois de comportement et les conditions aux limites..
La mécanique concerne en général l'étude dynamique, quasi-statique et statique des corps rigides ou déformables. La théorie de l'élasticité, plasticité et viscoélasticité sont des exemples, en apparence sans relations, des disciplines particulières de la mécanique.

La mécanique des milieux continus fournit le concept principal d'unification des fondements de ces disciplines, ses objectifs sont essentiellement :
(i) La modélisation mathématique du phénomène étudié (formulation mathématique de l'équation de mouvement de la loi de comportement du matériau, des conditions aux limites,...), par un système d'équations aux dèrivées partielles.
(ii) L'étude du modèle mathématique (existence et unicité de la solution, propriétés de la solution,...)
(iii) Fiabilité du modèle mathématique (comparaison de la solution mathématique avec la réalité physique).
Le but de la mécanique des milieux continus est donc de donner des modèles mathématiques pour étudier l'évolution des corps.

1.1 Géométrie de la déformation

1.1.1 Milieu continu

Soit Ω, un domaine borné de $\mathbb{R}^N(N = 2, 3$, pour les applications).

On dit que Ω, est rempli d'un milieu continu si à tout instant t, et en chaque point x de Ω, on peut définir des champs de grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel.

Ces grandeurs Peuvent être mathématiquement représentées par :

Des champs scalaires sur Ω, (masse volumique, température, $\ldots$).

Des champs vectoriels sur Ω, (déplacement, vitesse, accélération, ...).

Des champs tensoriels sur Ω, (tenseur des déformations, tenseur des contraintes,...).

On suppose de plus que ces champs sont différentiables presque partout sur Ω.

Un milieu continu est composé de particules. Les axiomes ou principes de base de la mécanique des milieux continus sont les trois lois de conservation : de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

1.1.2 Tenseur de déformation et déplacement

Considérons un domaine matériel M et deux de ses positions Ω et Ω_t, aux instant $t = 0$ et $t > 0$ et soit p une particule de M, et soient $X = (X_i)$ et $x = (x_i)$, ses coordonnées respectives aux instant $t = 0$ et $t > 0$ (voir fig1.1)

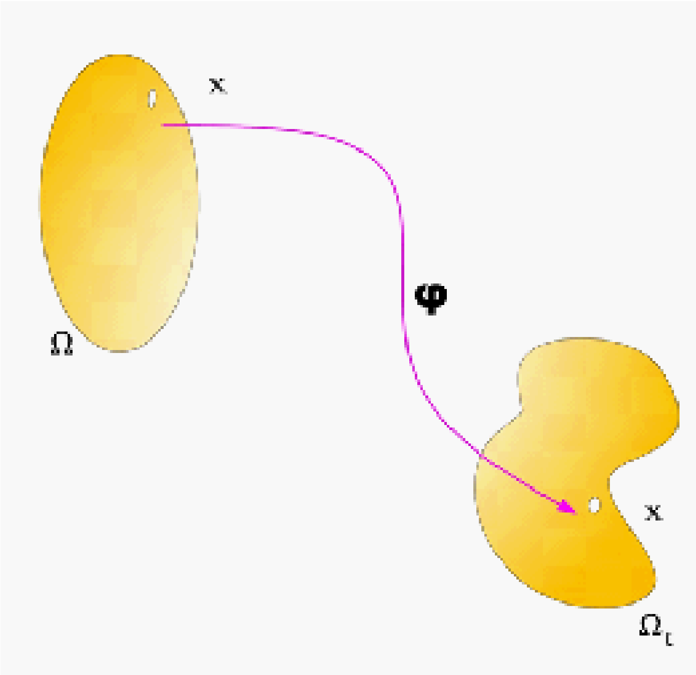


Fig1.1. Visualisation du champ des déplacements.

On définit la transformation Φ de Ω en Ω_t par :

$$(X,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Phi(X,t) = X + u(X,t) = x \in \Omega_t \tag{1.1}$$

Le champ u défini par (1.1) s'appelle champ des déplacements, Ω s'appelle configuration de référence et Ω_t s'appelle configuration déformée du corps.

Nous supposons que pour chaque instant $t > 0$, $\Phi(.,t)$ est une application continue, bijective définie de $\Omega \times \mathbb{R}_+$, dans $\mathbb{R}^N$ et soit $\Phi^{-1}(.,t) : \Omega_t \rightarrow \Omega$, son application réciproque donnée par :

$$X = \Phi^{-1}(x,t) \tag{1.2}$$

Au mouvement Φ, on associe le champ des vitesses et le champ de accélérations définis respectivement par :

$$v = \dot{u} = \frac{d\Phi}{dt}(X,t) \tag{1.3}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{u} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}(X,t) \tag{1.4}$$

Le gradient de Φ, par rapport aux coordonnées de variable X, définit un champs tensoriel sur Ω, noté F.

$$F = (F_{ij}) = \bigtriangledown_X \Phi = I_N + \bigtriangledown_X u \tag{1.5}$$

F, s'appelle *tenseur gradient de la déformation.*

Nous introduisons encore les notations suivantes :

$$C = \bigtriangledown_X \Phi \bigtriangledown_X \Phi^t = FF^t$$

Où F^t, désigne la transposée de F.

C, s'appelle *tenseur de dilatation de Cauchy-Green*

On définit le tenseur de déformation G par :

$$G = \frac{1}{2}(C - I_N) = \frac{1}{2}(\bigtriangledown u + \bigtriangledown u^t + \bigtriangledown u \cdot \bigtriangledown u^t)$$

En composantes on a :

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial X_i})$$

Le tenseur de déformation G, n'est pas linéaire par rapport aux composantes du vecteur de déplacement u. Dans le cas où la déformation est faible, c'est-à-dire le vecteur $u(X,t)$, varie lentement avec X, les termes $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$ seront négligés " c'est l'hypothèse des petites transformations ". Donc G, devient un tenseur linéair ε, défini par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\bigtriangledown_X u + \bigtriangledown_X u^t\right) \tag{1.6}$$

En composantes on a :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

Le tenseur ε, s'appelle *le tenseur des déformations linéarisé.*

Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε, par rapport au champ des déplacements u, on va le noter $\varepsilon(u)$.

1.1.3 Tenseur des contraintes et équations du mouvement

La déformation du corps Ω, peut résulter de l'application de deux types de forces :

- Les forces volumiques $f : \Omega_t \to \mathbb{R}^N$, appliquées sur une partie ou sur la totalité du domaine.

- Les forces surfaciques $h : \Gamma_t \to \mathbb{R}^N$, appliquées sur une partie de la frontière Γ, du domaine Ω.

Le reste de la frontière étant contraint en déplacement ce sont par exemple des forces de pression ou de contact.

D'après le théorème de Cauchy, il existe un champ de tenseurs $\sigma(.,t) : \Omega_t \to M_N$ régulier tel que :

$$\sigma(x,t)\,\nu da = h(x,t)\,da \qquad \forall x \in \Omega_t, t > 0$$

Où M_N, $(N = 2, 3)$ est l'espace des matrices carrées d'ordre N et ν, désigne la normale extérieure à Γ_t, au point x et da, est un élément de surface.

Le tenseur $\sigma(x,t)$, s'appelle tenseur des contraintes de Cauchy au point $x \in \Omega_t$. L'introduction de ce tenseur permet de poser les conditions aux limites .

En utilisant le principe fondamental de la dynamique exprimant l'équivalence du torseur des forces extérieures appliquées au corps matériel Ω et du torseur des accélérations et en utilisant le principe de conservation de la masse, on obtient les équations de mouvement suivantes :

$$Div\sigma + f = \rho\ddot{u} \qquad dans\ \Omega_t \quad \forall t > 0 \tag{1.7}$$

Où $\rho(x,t) : \Omega_t \to \mathbb{R}_+$, est la densité de masse au point x, à l'instant $t > 0$ et $Div\sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}$, pour tout $i, j = 1, 2, 3$, et f, est la densité des forces volumiques.

L'équation (1.7) est valable dans la configuration déformée Ω_t, qui est elle même inconnue. Donc (1.7) ne peut pas être utilisée telle quelle ; d'où la nécessité de la réécrire dans la configuration de référence Ω.

Maintenant on suppose que σ, u et f, sont des fonctions définies sur $\Omega \times [0, T]$.

On prouve avec un changement de notation voir (P.G Ciarlet[]) que l'équation (1.7) devient :

$$Div\sigma + f = \rho\ddot{u} \qquad dans\ \Omega \times [0, T] \tag{1.8}$$

Remarque 1.1

(i) L'équation (1.7) est dite équation du mouvement.

Dons le cas statique (c.à.d $\ddot{u} = 0$), ou quasi-statique (c.à.d $\rho\ddot{u}$, est négligeable), l'équation (1.7) devient :

$$Div\sigma + f = 0 \qquad dans\ \Omega \times [0, T] \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est dite équation d'équilibre.

(ii) Soient $\sigma : \Omega \to S^N$ une fonction régulière (de classe C^1) et $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Le tenseur des contraintes σ sur Γ, peut se décomposer en deux composantes, une composante normale σ_ν et une composante tangentielle σ_τ, (voir fig :1.2) définies par :$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu \quad$ et $\quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu$

Remarque 1.2 La composante normale σ_ν est dite contrainte normale et la composante tangentielle σ_τ est dite contrainte tangentielle.

De la même manière on définit les deux composantes tangentielle u_τ et normale u_ν du champ de déplacement u sur Γ par :

$$u_\nu = u.\nu \qquad \text{et} \qquad u_\tau = u - u_\nu.\nu$$

1.2 Loi de comportement

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériau. Bien qu'elles doivent. respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale. C'est toute one série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement, on cite à titre d'exemple les quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de chargedécharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Les lois de comportements (ou lois constitutives) sont des relations entre le tenseur des contraintes σ, le tenseur des déformations ε et leur dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ Notons que d'autres paramétres, tels que la pression ou la température, peuvent intervenir dans une loi comportement.

1.3 Loi de comportement viscoplastiques

Dans ce cas la déformation dépend essentiellement de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$.

C'est le cas de la plupart des matières plastiques. On peut citer les lois de comportements de la forme :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon) \tag{1.10}$$

où $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$, $\mathcal{E}$, est un tenseur d'ordre quatre et G, est une fonction constitutive donnée. On suppose toujours que $\mathcal{E}$ est un tenseur inversible. Donc $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$, jouent des rôles symétriques dans l'équation (1.10) .

Plus précisément (1.10) équivaut à :

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma} + \tilde{G}(\sigma, \varepsilon) \tag{1.11}$$

où $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{-1}$, est l'inverse de $\mathcal{E}$, est $\tilde{G} = -\mathcal{E}^{-1}G(\sigma, \varepsilon)$.

L'équation (1.11) met en évidence une décomposition additive du tenseur $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^E + \dot{\varepsilon}^{AN}$$

où $\dot{\varepsilon}^E = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}^{AN} = \tilde{G}(\sigma, \varepsilon)$.

La partie $\dot{\varepsilon}^E$ s'appelle la partie élastique (réversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$ et la partie $\dot{\varepsilon}^{AN}$ s'appelle la partie anélastique (irréversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$.

Remarque 1.3

1) Si $G \equiv 0$ et à l'instant $t = 0$ on a : $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$. Alors la relation (1.10), aprés intégration, devient $\sigma = \mathcal{E}\varepsilon$, donc une loi élastique.

La loi viscoplastique (1.10) , est donc une perturbation de la loi élastique, cette perturbation est réalisée par le terme non linéaire $G(\sigma, \varepsilon)$.

2) Dans le cas où la fonction G, dans la relation (1.10) est de la forme :

$$G(\sigma, \varepsilon) = -k(\sigma - F(\varepsilon))$$

1.3.1 Loi de comportement viscoplastiques avec endommagement

La loi de comportement la plus courante d'un matériau viscoplastique avec endommagement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\left(\varepsilon\left(\dot{u}\right)\right) + G\left(\sigma, \varepsilon\left(u\right), \beta\right)$$

Ou β est la fonction d'endommagement varie entre 0 et 1. Quand $\beta = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\beta = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 \leq \beta \leq 1$ il y a un endommagement partiel du matériau.
L'équation d'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$\dot{\beta} - k\Delta\beta + \partial\psi\kappa\left(\beta\right) \ \ni \phi\left(\sigma, \varepsilon\left(u\right), \beta\right)$$

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma} + \tilde{G}\left(\sigma, \varepsilon\right) \tag{1.12}$$

où $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{-1}$, est l'inverse de $\mathcal{E}$, est $\tilde{G} = -\mathcal{E}^{-1}G\left(\sigma, \varepsilon\right)$.
L'équation (1.11) met en évidence une décomposition additive du tenseur $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{E} + \dot{\varepsilon}^{AN}$$

où $\dot{\varepsilon}^{E} = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}^{AN} = \tilde{G}\left(\sigma, \varepsilon\right)$.
La partie $\dot{\varepsilon}^{E}$ s'appelle la partie élastique (réversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$ et la partie $\dot{\varepsilon}^{AN}$ s'appelle la partie anélastique (irréversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$.

Remarque 1.4
1) Si $G \equiv 0$ et à l'instant $t = 0$ on a : $\sigma\left(0\right) = \varepsilon\left(0\right) = 0$. Alors la relation (1.10), aprés intégration, devient $\sigma = \mathcal{E}\varepsilon$, donc une loi élastique.
La loi viscoplastique (1.10) , est donc une perturbation de la loi élastique, cette perturbation est réalisée par le terme non linéaire $G\left(\sigma, \varepsilon\right)$.
2) Dans le cas où la fonction G, dans la relation (1.10) est de la forme :

$$G\left(\sigma, \varepsilon\right) = -k\left(\sigma - F\left(\varepsilon\right)\right)$$

1.4 Condition aux limites

On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques sur chaque partie de Γ_3. Ils peuvent être résumés dans les points suivants et ils sont condition aux limites de contact

avec l'endommagement et condition aux limites de contact sans frottement et condition aux limites de déplacement-traction.
Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un milieu continu, donné par l'équation de mouvement (1.8) (ou bien par l'équation d'équilibre (1.9) et la loi de comportement, il faut encore préciser les conditions aux limites. Les principaux types de conditions aux limites étudiées dans ce mémoire sont les conditions aux limites de déplacement-traction, les conditions aux limites de contact sans frottement.

Remarque 1.5
Lorsqu'on s'intéresse à l'évolution temporelle d'un milieu continu il faut également rajouter les conditions initiales.

Soit ν la normale unitaire sortante à Γ. On note par v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel sur Γ.

$$v = v_\nu \nu + v_\tau \quad \text{ou} \quad v_\nu = v.\nu. \tag{1.13}$$

De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ sur Γ :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \quad \sigma_\tau = \quad \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

1.4.1 Conditions aux limites de déplacement-traction

Soit un matériau déformable occupant un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est devisée en deux parties mesurables Γ_1 et Γ_2 telles que $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$.
On note par ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ.
Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

$$u = g \qquad \text{sur } \Gamma_1 \tag{1.14}$$

$$\sigma\nu = h \qquad \text{sur } \Gamma_2 \tag{1.15}$$

La condition (1.14) est appelée condition aux limites de déplacement, sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de sa frontière.
La condition (1.15) est appelée condition aux limites de traction, sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière Γ et h représente la densité des forces appliquées de surface et constituent une donnée du problème.

1.4.2 Conditions aux limites de contact sans frottement

Supposons maintenant que $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{3} \overline{\Gamma_i}$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing \qquad \forall i \neq j$.
Sur les portions Γ_1 et Γ_2 nous imposons respectivement les conditions aux limites de déplacement traction (1.14), (1.15) c'est à dire le champ des déplacements u, est connu sur Γ_1 et le vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$, est connu sur Γ_2. Pour simplifier nous prenons $f_2 = 0$ dans (1.14) , c'est-à-dire le corps est encastré sur la portion Γ_1.
Nous supposons que le matériau déformable est susceptible d'entrer en contact avec une fondation rigide S et la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à S dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $s(x)$, (voir fig.1.3).

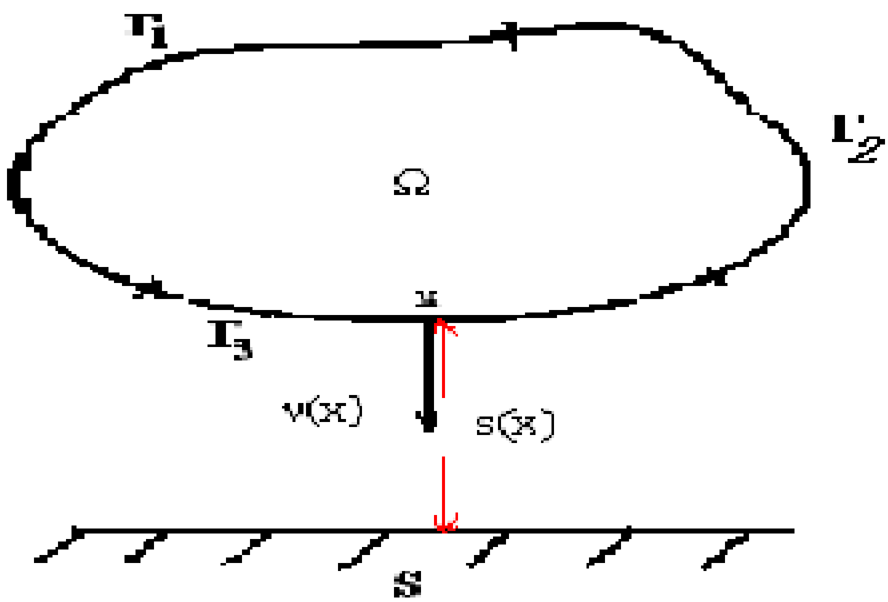


Fig.1.3. Contact d'un matériau déformable avec une fondation rigide

Soit également $u_\nu = u\nu$ la composante du déplacement u dans la direction de ν.

Si $u_\nu = 0$, le matériau est en contact avec la fondation rigide, nous supposons que ce contact se produit sans frottement c'est à dire que les mouvements tangentiels sont libres. Comme S, est un solide rigide, il ne subira pas de déformations donc le matériau ne pourra pas le pénétrer, cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité :

$$u_\nu = u\nu \leq 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \tag{1.16}$$

Dans les points de Γ_3, tels que $u\nu < 0$, il n'existe pas de contact entre Ω, et S, donc le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ s'annule, par conséquent

$$u\nu < 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \tag{1.17}$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, le contact entre Ω et S, se produit, nous supposons pour ces points que la fondation rigide S, exerce une pression suivant la direction de la normale et orientée vers Ω, On a :

$$u_\nu = 0 \Longrightarrow \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \tag{1.18}$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.16)-(1.18) , s'écrivent d'une manière condensée de la façon suivante :

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \tag{1.19}$$

Les conditions aux limites de contact (1.19) , sont appelées les conditions de *Signorini.*

Remarque 1.6

Le contact unilatéral est la relation qui existe, sur la zone de contact, entre les efforts normaux (pression de contact) et le mouvement relatif des deux matériaux dans la direction normale.

Chapitre 2

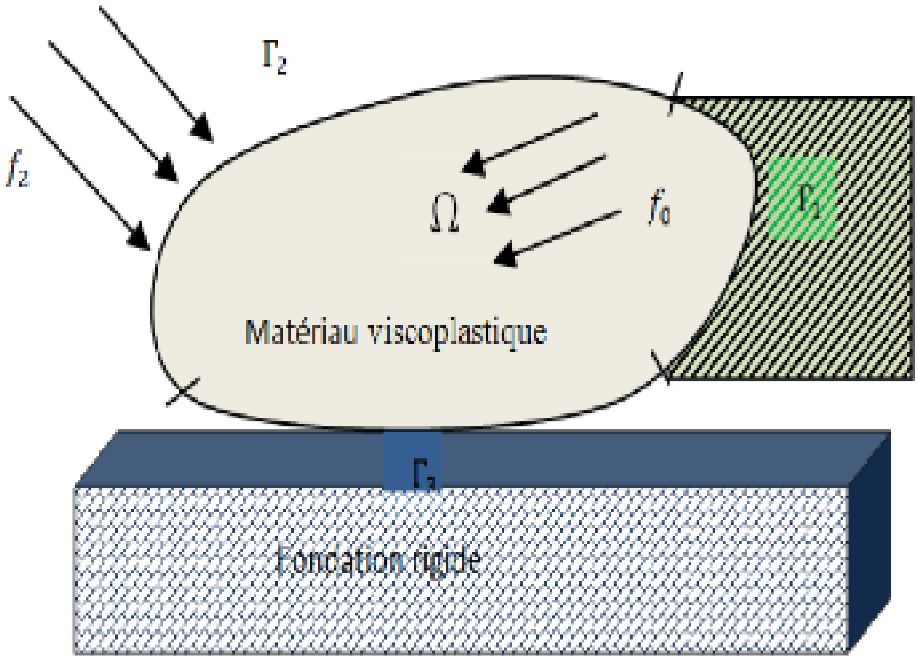
Problème quasistatiques d'un matériau viscoplastique avec endommagement

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact unilatéral sans frottement entre un matériau déformable et une fondation rigide. Nous supposons que le processus est quasi-statique et la loi de comportement de ce corps est viscoplastique avec endommagement :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G\left(\sigma, \varepsilon, \beta\right)$$

Où $\mathcal{E}$ est un tenseur d'ordre quatre. G est une fonction constitutive . Dans la première partie de ce chapitre, on va décrire le modèle mathématique du problème mécanique ensuite nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique et prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible. La preuve est basée sur des arguments concernant les opérateurs fortement monotones et le point fixe de Banach.

2.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses



Fgr 1.4 problème de contact avec endommagement

Considérons un matériau viscoplastique dont les particules occupent un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3$ pour les applications), dont le bord Γ, est partitionné en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3, tels que $mes\,(\Gamma_1) > 0$.

Nous étudions le processus d'évolution de l'état mécanique du matériau dans un intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$.

Le matériau est encastré sur la portion Γ_1, des tractions superficielles de densité f_2, agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent à l'intérieur du matériau. Nous supposons, que les forces et les tractions changent lentement avec le temps, de sorte que l'accélération du système soit négligeable. Le matériau est entré en contact sans frottement avec une fondation rigide. Ainsi on suppose qu'il n'y a pas un écart entre la surface de contact potentielle Γ_3, est la fondation rigide (voir fig 2.1).

Avec ces conditions, le problème mécanique peut être formulé de la façon suivante :

Problème P : *trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$ *et le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}_N$ tels que :

Considérons un matériau viscoplastique dont les particules occupent un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3$ pour les applications), dont le bord Γ, est partitionné en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3, tels que $mes\,(\Gamma_1) > 0$.
Nous étudions le processus d'évolution de l'état mécanique du matériau dans un intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$.
Le matériau est encastré sur la portion Γ_1, des tractions superficielles de densité f_2, agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f_0 agissent à l'intérieur du matériau. Nous supposons, que les forces et les tractions changent lentement avec le temps, de sorte que l'accélération du système soit négligeable. Le matériau est entré en contact sans frottement avec une fondation rigide. Ainsi on suppose qu'il n'y a pas un écart entre la surface de contact potentielle Γ_3, est la fondation rigide (voir fig 2.1)
Avec ces conditions, le problème mécanique peut être formulé de la façon suivante :
Problème P : *trouver le champ des déplacements* $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^N$ *et le champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}_N$ tels que :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon, \beta) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\tag{2.1}$$

$$\dot{\beta} - \kappa\beta + \partial\psi_{\mathcal{K}}(\beta) \ni \phi(\sigma, \varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{2.2}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \tag{2.3}$$

$$\Omega \times]0, T[\;\; u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\tag{2.4}$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\tag{2.5}$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} = 0 \;\; \text{sur } \Gamma \times]0, T[\tag{2.7}$$

$$u(0) = u_0, \qquad \sigma(0) = \sigma_0 \qquad \beta(0) = \beta_0 \text{ dans } \Omega \tag{2.8}$$

L'équation (2.1) , est la loi de comportement du matériau. (2.2) l'équation est l'inclusion différentielle qui décrit l'évolution de l'endommagement ; (2.3) , est l'équation d'équilibre, où f_0, est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable Ω. L'équation (2.4) , indique que le corps est encastré sur la portion Γ_1, l'équation (2.5) , indique que des tractions superficielles f_2, s'appliquent sur Γ_2, les relations (2.6) , indique l'absence de forces tangentielles de frottement et que le matériau ne pourra pas pénétrer dans la fondation rigide. Les conditions de contact (2.6), sont appelée conditions de contact de Signorini sur la partie Γ_3.La relation (2.7) représente une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$ représente la dérivée normale de β. Pour finir, la relation (2.8), représente les conditions initiales.

Pour l'étude du problème mécanique **P** on considère les hypothèses suivantes :

2.1.1 Hypothèses

On suppose que :

$\mathcal{E} : \Omega \times S_N \to S_N$ et $G : \Omega \times S_N \times S_N \to S_N$, satisfont aux hypothèses :

$$\begin{cases} (a)\mathcal{E}_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall i, j, k, h = 1, N \\ (b)\mathcal{E}\sigma\tau = \sigma\mathcal{E}\tau \qquad \forall \sigma, \tau \in S_N \\ (c)\exists \alpha > 0 \text{ telque } \mathcal{E}\sigma\sigma \geq \alpha \left|\sigma\right|^2 \quad \forall \sigma \in S_N \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} G : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R} \to S_N \text{ et} \\ \text{(a) } \exists L > 0 \ \text{ telle que } \ |G(., \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - G(., \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq L(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_{1-}\varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \quad \text{pour tout } \ \sigma_i, \varepsilon_i \in S_N \ \text{ et } \ \beta_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2). \\ \text{(b) } G(., \sigma, \varepsilon, \beta) \ \text{ est une fonction mesurable lebesgue sur } \Omega \text{ pour tout } \sigma, \varepsilon \in S_N \ \text{ et } \ \beta \in \mathbb{R} \\ \text{(c) } G(., 0_N, 0_N, 0) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{2.10}$$

La fonction dommages $\phi : \Omega \times \mathbb{S}_d \times \mathbb{S}_d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfont

$$\begin{cases} (a) \ \text{Il existe } \widetilde{L} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad |\phi(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - \phi(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2)| \leq \widetilde{L}(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|), \\ \qquad\qquad \forall \sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}_d, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \quad \text{a.e. } x \in \Omega \\ \quad (b) \quad x \mapsto \phi(x, \sigma, \varepsilon, \beta) \ \text{ est une fonction mesurable de lebesgue sur } \Omega, \\ \qquad\qquad \forall \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}_N, \ \beta \in \mathbb{R}, \\ (c) \quad x \mapsto \phi(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.11}$$

On suppose que les forces f_0 et les tractions f_2 satisfont

$$f_0 \in W^{1,2}(0,T;H), \qquad f_2 \in W^{1,2}\left(0,T;\left[L^2(\Gamma_2)\right]^d\right), \tag{2.12}$$

et les données initiales satisfont

$$u_0 \in V, \quad \sigma_0 \in \mathcal{H}_1, \tag{2.13}$$

$$(\sigma_0, \varepsilon(v-u_0))_Q \geq (f(0), v-u_0)_{v'} \; \forall v \in U \tag{2.14}$$

$$\beta_0 \in H^1(\Omega), 0 < \beta_* \leq \beta_0 \leq 1 \;\; \text{a.e.dans } \Omega \tag{2.15}$$

On définit le sous-espace fermé V de H_1 :

$$V = \{u \in H_1 : \; \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{2.16}$$

et on le munit du produit scalaire suivant

$$\prec u \, , \, w \succ_V = \; \prec \varepsilon(u), \varepsilon(w) \succ_H \forall u, w \in V \tag{2.17}$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée par $|.|_V$, elle est équivalente à la norme $|.|_{H_1}$ sur V. Danc $(V, |.|_V)$ est un espace de Hilbert réel.
La fonction $v \to \langle f_0(t), v\rangle_H + \langle f_2(t), \gamma v\rangle_{L(\Gamma_2)^N}$ est une forme linéaire et continue sur V, il résulte grâce au théorème de représentation de Riesz-Frèchet l'existence d'un élément $f(t) \in V$, tel que :

$$\prec f(t), v \succ_V = \prec f_0(t), v \succ_H + \; \prec f_2(t), \gamma v \succ_{L(\Gamma_2)^N}$$

la relation (2.12) , entraîne que

$$f \in W^{1,2}(0,T,H) \tag{2.18}$$

En outre on définit respectivement l'ensemble des "déplacements admissibles" et l'ensemble des "contraintes admissibles" suivants :

$$U_{ad} = \{u \in H_1 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \; v_v \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \tag{2.19}$$

Du point de vue mathématique, les hypothèses (2.7) et (2.8), et (2.12) nous permettent de définir deux opérateurs notés encore $\mathcal{E}$ et G ; de la façon suivante :

$$\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ \mathcal{E}\sigma\left(.\right) = \mathcal{E}_{ijkh}\left(.\right)\sigma_{kh}\left(.\right), \forall \sigma \in \mathcal{H}\ \ p.p\ donc\ \Omega$$

$$G : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times L^2\left(\Omega\right)^N \to \mathcal{H} \text{ et } G(\sigma, \varepsilon, \beta) = G(., \sigma\left(.\right), \varepsilon\left(.\right), \beta\left(.\right)) \forall \sigma, \varepsilon \in \mathcal{H},\ \ p.p\ x \in \Omega$$

Remarque 2.1 De plus, d'après (2.7) et (2.8) les deux opérateurs $\mathcal{E}$ et G, vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{c} \left|\mathcal{E}\sigma\right|_{\mathcal{H}} \leq \beta \left|\sigma\right|_{\mathcal{H}}\ \ \forall v \in \mathcal{H} \\ \prec \mathcal{E}\sigma,\tau \succ_{\mathcal{H}} = \prec \sigma,\mathcal{E}\tau \succ_{\mathcal{H}}\ \ \forall \sigma,\tau \in \mathcal{H} \\ \prec \mathcal{E}\sigma,\sigma \succ_{\mathcal{H}} \geq \alpha \left|\sigma\right|^2_{\mathcal{H}}\ \ \forall \sigma \in \mathcal{H} \end{array} \right. \tag{2.20}$$

$$\left. \begin{array}{c} \left|G(., \sigma_1, \varepsilon_1, \beta_1) - G(., \sigma_2, \varepsilon_2, \beta_2)\right| \leq L(\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|_{\mathcal{H}} + \left|\varepsilon_{1-}\varepsilon_2\right|_{\mathcal{H}} + \left|\beta_1 - \beta_2\right|_{\mathcal{H}}) \\ \forall \sigma_1,\sigma_2, \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathcal{H},\ \beta_1,\beta_2 \in L^2\left(\Omega\right)^M \end{array} \right\} \tag{2.21}$$

Nous définissons la forme bilinéaire : $a : H^1\left(\Omega\right) \times H^1\left(\Omega\right) \to \mathbb{R}$ par

$$a\left(\xi, \psi\right) = k \int_\Omega \nabla\xi.\nabla\psi dx\ \forall \xi, \psi \in H^1\left(\Omega\right) \tag{2.22}$$

et soit K l'ensemble des fonctions admissibles de l'endommagement défini par :

$$K = \left\{\beta \in H^1\left(\Omega\right), 0 \leq \beta \leq 1\right\} \tag{2.23}$$

2.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va donner une formulation variationnelle du problème P où l'inconnue principale est le champ des déplacements u. Le résultat conduisant à cette formulation est le suivant :

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F\left(t\right), v - u\left(t\right) \succ_V\ \forall v \in U_{ad}$$

Soient $v \in U_{ad}$ et $t \in [0, T]$.

en utilisant la loi d'équilibre (2.3)et la formule de Green, on obtient

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} = \prec f_0\left(t\right), v - u\left(t\right) \succ_V + \int_\Gamma \sigma v\left(v - u\left(t\right)\right) ds$$

Comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ alors on a :

$$\int_\Gamma \sigma v\left(v - u\left(t\right)\right) ds = \int_{\Gamma_1} \sigma v\left(v - u\left(t\right)\right) ds + \int_{\Gamma_2} \sigma v\left(v - u\left(t\right)\right) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma v\left(v - u\left(t\right)\right) ds$$

En utilisant (2.4) , (2.5) et (2.18)

$$\int_{\Gamma} \sigma v \left(v - u\left(t\right)\right) ds = \prec f_2\left(t\right), \gamma_{v-u(t)} \succ_{L^2(\Gamma_2)^N} + \int_{\Gamma_3} \sigma v \left(v - u\left(t\right)\right) ds$$

Ainsi on a :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma v \left(v - u\left(t\right)\right) ds = \int_{\Gamma_3} \sigma_v\left(t\right) v_v ds$$

En effe, on a

$$\sigma v = \sigma_v v$$

Donc

$$\sigma v \left(v - u\right) = \sigma_v v \left(v - u\right) = \sigma_v \left(v_v - u_v\right) = \sigma_v v_v - \sigma_v u_v$$

En utilisant maintenant (2.6) on obtient

$$\sigma v \left(v - u\right) = \sigma_v v_v$$

Par conséquent

$$\int_{\Gamma_3} \sigma v \left(v - u\left(t\right)\right) ds = \int_{\Gamma_3} \sigma_v\left(t\right) v_v ds$$

Moyennant (2.16) (2.23) on obtient

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} = \prec F\left(t\right), v - u\left(t\right) \succ_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_v\left(t\right) v_v ds \tag{2.24}$$

d'après (2.6) et (2.18) , on a

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} - \prec f_0\left(t\right), v - u\left(t\right) \succ_V \geq 0$$

d'où l'inégalités (2.21) d'après (2.4) (2.6) et (2.18) on trouve que $u\left(t\right) \in U_{ad}$ Nous montrons maintenant que (u, σ) satisfait (2.22) pour cela, en prenant $v = 2u\left(t\right)$ puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (2.21), on obtient

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} = \prec F\left(t\right), u\left(t\right) \succ_V \tag{2.25}$$

On a d'après (2.21) :

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) - \varepsilon\left(u\left(t\right)\right) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F\left(t\right), v - u\left(t\right) \succ_V$$

En utilisant (2.25) on trouve :

$$\prec \sigma\left(t\right), \varepsilon\left(v\right) \succ_{\mathcal{H}} \geq F\left(t\right), v \succ_V$$

Enfin soit $\beta(t) \in \mathcal{K}$, et pour tout $t \in [0;T]$. De la définition (1 :8 :13) de $\partial\psi_{\mathcal{K}}(\beta)$ et de(2.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\prec \ \dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \succ_{L^2(\Omega)} + a \prec \beta(t), \xi - \beta(t) \succ \geq \\ &\prec \ \phi(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t) \succ_{L^2(\Omega)} \forall u(t) \in U_{ad} \quad \forall\, t \in [0,T] \end{aligned}$$

De (2.1) , (2 :1 :8) ; (2 :1 :10) ; (2 :1 :11), (2 :1 :32) et (2 :1 :33) on obtient la formulation variationnelle du problème P1.

Problème.PV : Trouver le champ des contraintes $\sigma : [0,T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ et le champ des déplacement $u : [0,T] \rightarrow V$ et et le champ endommagement $\beta : [0,T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + G(\sigma(t), \varepsilon(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \tag{2.26}$$

$$u(t) \in U_{ad}, \prec \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(t), v - u(t) \succ_V \qquad \forall v \in V, \forall t \in [0,T] \tag{2.27}$$

$$\beta(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. } t \in [0,T] \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} &\prec \ \dot{\beta}(t), \xi - \beta(t) \succ_{L^2(\Omega)} + a \prec \beta(t), \xi - \beta(t) \succ \geq \\ &\prec \ \phi(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t) \succ_{L^2(\Omega)} \forall \xi \in \mathcal{K} \quad \text{P.P. } t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \beta(0) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{2.30}$$

L'existence d'une solution unique de problème PV est déclaré et prouvé dans la section suivante.

2.3 Existence et unicité de la solution

Le problème PV, est formellement équivalent au problème P, d'où pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème mécanique P, il suffit de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel PV

La démonstration du théorème 2.1.1 sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations d'évolutions avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixexe, *Le résultat suivant garantit l'existence et l'unicité de solution du problème variationnel PV.*

Théorème 2.1

Sous les hypothèses (2.9) − (2.15) et (2.16) le problème variationnel PV admet une solution unique (u, σ, β) *, ayant la régularité*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;H_1), \qquad \sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1), \qquad \beta \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{H}_1) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

Démonstration :

La démonstration de ce théorème est basée sur des arguments concernant les inéquations variationnelles elliptiques et le point fixe de Banach. Pour cela, supposons dans la suite que les hypothèses (2.7) − (2.9) et (2.17) , sont satisfaites.

pour tout $\eta \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$, soit $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H})$ la fonction définie par :

$$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s)\,ds + \sigma_0 - \mathcal{E}\varepsilon(u_0) \qquad \forall t \in [0,T] \tag{2.31}$$

On considère maintenant le problème elliptique suivant

Problème PV$_\eta$1 : Trouver $u_\eta : [0,T] \to H_1$ et $\sigma_\eta : [0,T] \to \mathcal{H}_1$ tel que :

$$\sigma_\eta = \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta) + Z_\eta \tag{2.32}$$

$$u_\eta(t) \in U_{ad}, \quad \prec \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(t), v - u_\eta(t) \succ_V \qquad \forall v \in U_{ad},\ t \in [0,T] \tag{2.33}$$

Lemme 2.1 *Le problème variationnel* **PV**$_\eta$ *admet une solution unique* (u_η, σ_η) *ayant la régularité :*

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;H_1), \qquad \sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1) \tag{2.34}$$

De plus

$$u_\eta(0) = u_0, \qquad \sigma_\eta(0) = \sigma_0 \tag{2.35}$$

Démonstration :

Soit $t \in [0, T]$.

On définit l'opérateur $\mathcal{B}$:$V \to V$, par :

$$\prec \mathcal{B}w, v \succ_V = \prec \mathcal{E}\varepsilon(w), \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} + \prec Z_\eta(t), \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant (2.9), et l'inégalité de Korn, on trouve que

$$\begin{aligned} &\prec \mathcal{B}w_1 - \mathcal{B}w_2, w_1 - w_2 \succ_V = \prec \mathcal{E}\varepsilon(w_1) - \mathcal{E}\varepsilon(w_2), \varepsilon(w_1) - \varepsilon(w_2) \succ_{\mathcal{H}} \\ + &\prec Z_\eta(t) - Z_\eta(t), \varepsilon(w_1) - \varepsilon(w_2) \succ_{\mathcal{H}} \geq \alpha |w_1 - w_2|_{H_1}^2 \qquad \forall w_1, w_2 \in V \end{aligned}$$

d'où

$$\prec \mathcal{B}w_1 - \mathcal{B}w_2, w_1 - w_2 \succ_V \geq \alpha |w_1 - w_2|_V^2$$

Car $|.|_V$ et $|.|_{H_1}$ sont équivalentes sur V.

Donc $\mathcal{B}$ est fortement monotone.

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}w_1(v) - \mathcal{B}w_2(v)| &= |\langle \mathcal{E}\varepsilon(w_1) - \mathcal{E}\varepsilon(w_2), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq M |\mathcal{E}\varepsilon(w_1) - \mathcal{E}\varepsilon(w_2)|_{\mathcal{H}} |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq m |w_1 - w_2|_V |v|_V \end{aligned}$$

D'où

$$|\mathcal{B}w_1 - \mathcal{B}w_2|_V \leq m |w_1 - w_2|_V \qquad \forall w_1, w_2 \in V$$

Donc $\mathcal{B}$, est de Lipschitz.

En utilisant maintenant le théorème **7** et (2.14) on obtient l'existence d'un élément $u_\eta(t)$ tel que :

$$\begin{aligned} u_\eta(t) &\in U_{ad}, \ \prec \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v - u_\eta(t)) \succ_{\mathcal{H}} + \prec Z_\eta(t), \varepsilon(v - u_\eta(t)) \succ_{\mathcal{H}} \\ &\geq \prec F(t), v - u_\eta(t) \succ_V \qquad \forall v \in U_{ad} \end{aligned}$$

En prenant maintenant $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}$, défini par (2.29), on obtient (2.30),

En prenant ensuit $v = u_\eta(t) + \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, dans (2.30), on trouve

$$\prec \sigma_\eta(t), \varepsilon(\varphi) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(t), \varphi \succ_V$$

Et grâce à (2.12), on trouve

$$\prec \sigma_\eta(t), \varepsilon(\varphi) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec f_0(t), \varphi \succ_H + \prec f_2(t), \gamma_\varphi \succ_{L^2(\Gamma_2)^N}$$

D'où

$$\prec div\sigma_\eta(t), \varphi \succ_H \leq - \prec f_0(t), \varphi \succ_H$$

Car $\overline{\mathcal{D}(\Omega)^N} = H_0^1(\Omega)^N$.

Et pour $v = u_\eta(t) - \varphi$ dans (2.30), on obtient :

$$\prec div\sigma_\eta(t), \varphi \succ_H \geq - \prec f_0(t), \varphi \succ_H$$

En faisant la somme entre les deux relations (2.33) et (2.34), on obtient :

$$div\sigma_\eta(t) + f_0(t) = 0 \qquad \text{dans } H.$$

Sachant que $f \in H$, on $div\sigma_\eta(t) \in H$, d'où $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}_1$.

L'existence et l'unicité du couple (u_η, σ_η) solution du problème $\mathbf{PV}_\eta$, est donc établie.

La condition initiale $u_\eta(0) = u_0$, $\sigma_\eta(0) = \sigma_0$, provient directement de (2.16) et de l'unicité du problème $\mathbf{PV}_\eta$, à l'instant $t = 0$

Montrons maintenant que

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;H_1) \text{ et } \sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$$

Soient $t_1,\ t_2 \in [0,T]$.

En appliquant (2.32), pour $\{t = t_1,\ v = u_\eta(t_2)\}$ et pour $\{t = t_2,\ v = u_\eta(t_1)\}$, puis en faisant la somme entre les deux expressions obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned} \prec\ & \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)), \varepsilon(u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)) \succ_{\mathcal{H}} + \prec Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2), \varepsilon(u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)) \succ_{\mathcal{H}} \\ \leq\ & \prec F(t_1) - F(t_2), u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2) \succ_V \end{aligned}$$

Il résulte moyennant (2.7) et l'énégalité de Korn

$$|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_{H_1} \leq c\left(|F(t_1) - F(t_2)|_V + |Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}}\right) \tag{2.36}$$

En utilisant à présent (2.29), (2.35), (2.36), il vient

$$|\sigma_\eta(t_1) - \sigma_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}_1} \leq c\left(|F(t_1) - F(t_2)|_V + |Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}}\right) \tag{2.37}$$

De (2.37) , (2.36) , (2.13) et tenant compte la régularité $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H})$, il résulte que

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;H_1), \text{ et } \sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$$

Problème.PV2 :Trouver le champ d'endommagement :$\beta : [0,T] \to H^1(\Omega)$ tels que :

$$\beta_\eta(t) \in \mathcal{K} \text{ p.p. t} \in [0,T],$$

$$\prec \dot{\beta}_\eta(t), \xi - \beta(t) \succ_{L^2(\Omega)} + a \prec \beta_\eta(t), \xi - \beta_\eta(t) \succ \geq \prec \eta^2(t), \xi - \beta_\eta(t) \succ_{L^2(\Omega)} \forall \xi \in \mathcal{K} \quad \text{P.P. } t \in [0,T]$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0$$

Dans l'étude du problème de PV2 , nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.2 *Il existe une solution unique du problème PV2 , et qui satisfait*

$$\beta_\eta \in W^{1,2}(0,T;\mathcal{H}_1) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

L'application d'inclusion de $\left(H^1(\Omega), |.|_{H^1(\Omega)}\right)$ *dans* $\left(L^2(\Omega), |.|_{L^2(\Omega)}\right)$ *est continue et à image dense. Notant par* $(H^1(\Omega))'$ *l'espace dual de* $H^1(\Omega)$ *et identifiant le dual de* $L^2(\Omega)$

avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \left(H^1(\Omega)\right)'$$

Nous utilisons la notation $\prec .,. \succ_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, nous avons :

$$\prec \beta, \xi \succ_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = \prec \beta, \xi \succ_{L^2(\Omega)} \forall \beta \in L^2(\Omega) \quad \forall \xi \in H^1(\Omega)$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles $\mathcal{K}$ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\beta_0 \in \mathcal{K}$; dans (2.15) Maintenant, en utilisant la définition (2.22) de la forme bilinéaire a, pour tout β, ξ de $H^1(\Omega)$, on a :

$$a(\xi, \beta) = a(\beta, \xi)$$

et

$$|a(\xi,\beta)| \leq 3k\,|\nabla\beta|_H\,|\nabla\xi|_H \leq c\,|\nabla\beta|_{H^1(\Omega)}\,|\nabla\xi|_{H^1(\Omega)}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout β de $H^1(\Omega)$, nous avons :

$$a(\beta,\beta) = k\,|\nabla\beta|_H^2$$

alors

$$a(\beta,\beta) + (k+1)\,|\nabla\beta|^2_{L^2(\Omega)} \geq k\left(|\nabla\beta|_H^2 + |\nabla\beta|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

et d'où

$$a(\beta,\beta) + c_0\,|\nabla\beta|^2_{L^2(\Omega)} \geq c_1\,|\beta|^2_{H^1} \text{ avec } c_0 = (k+1) \text{ et } c_1 = k$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème (1; 8; 24) sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme .3.

Considérons l'espace de Banach $X = L^2(0,T;\mathcal{H}\times L^2(\Omega))$ muni de la norme $|.|_X$ donnée pars :

$$|\eta|_X^2 = \int_0^T \left(\left|\eta^1(s)\right|^2_{\mathcal{H}} + \left|\eta^2(s)\right|^2_{L^2(\Omega)}\right) ds \quad \forall\eta = \left(\eta^1,\eta^2\right) \in X$$

et nous considérons l'opérateur $\Lambda : X \to X$ par :

$$\Lambda\eta(t) = \left\langle G\left(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\eta(t)\right), \phi\left(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\eta(t)\right)\right\rangle \tag{2.38}$$

Où pour tout $\eta \in X$, le couple $(u_\eta(t), \sigma_\eta(t))$, représente la solution du problème variationnel $\mathbf{PV}_\eta 1$, donnée par le lemme 2.

et $\beta_\eta(t)$ représente la solution du problème variationnel $\mathbf{PV}_\eta 2$ donnée par le lemme 3;

On a le résultat suivant.

Lemme 2.3

L'opérateur Λ, admet un point fixe unique $\eta^* \in X$.

et utilisant les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $\sigma_{\eta_i} = \sigma_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$; mettant dans (2.38) ; En faisant la somme des deux expressions obtenues, on obtient

$$\prec \mathcal{E}\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\right), \varepsilon\left(u_{\eta_2}(t) - u_{\eta_1}(t)\right) \succ_{\mathcal{H}} + \prec Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t), \varepsilon\left(u_{\eta_2}(t) - u_{\eta_1}(t)\right) \succ_{\mathcal{H}} \geq 0$$

Donc

$$\prec \mathcal{E}\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right),\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)\succ_{\mathcal{H}}\leq\prec Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t),\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)\succ_{\mathcal{H}}$$

Moyennant (2.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left|\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)\right|_{\mathcal{H}}\leq c\left|Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}. \tag{2.39}$$

Et on a d'après (2.29)

$$\begin{aligned}\left|\sigma_{\eta_1}(t)-\sigma_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}} &= \left|\mathcal{E}\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)+Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}\\ &\leq \alpha\left|\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)\right|_{\mathcal{H}}+\left|Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

D'où d'après (2.39) on obtient

$$\left|\sigma_{\eta_1}(t)-\sigma_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}\leq c\left|Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}} \tag{2.40}$$

A partir de (2.38), (2.39) et (2.40), on a :

$$\begin{aligned}\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_{\mathcal{H}} &\leq \left|G\left(\sigma_1(t),u_1(t),\beta_1(t)\right)-G\left(\sigma_2(t),u_2(t),\beta_2(t)\right)\right|_{\mathcal{H}}\\ &\quad+\left|\phi\left(\sigma_1(t),u_1(t),\beta_1(t)\right)-\phi\left(\sigma_2(t),u_2(t),\beta_2(t)\right)\right|\\ &\leq c\left(\left|\sigma_{\eta_1}(t)-\sigma_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}+\left|\varepsilon\left(u_{\eta_1}(t)-u_{\eta_2}(t)\right)\right|_{\mathcal{H}}+\left|Z_{\eta_1}(t)-Z_{\eta_2}(t)\right|_{\mathcal{H}}\right)\end{aligned}$$

où c est une constante positive. Moyennant (2.28), on en déduit :

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_X\leq c\int_0^t\left|\eta_1^1(s)-\eta_2^1(s)\right|_{\mathcal{H}}+\left|\eta_1^2(s)-\eta_2^2(s)\right|_{L^2(\Omega)}ds \tag{2.41}$$

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_X\leq c\left(\left|\eta_1^1-\eta_2^1\right|_{L^2(0,T;\mathcal{H})}+\left|\eta_1^2(s)-\eta_2^2(s)\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)$$

$$\left|\Lambda\eta_1(t)-\Lambda\eta_2(t)\right|_X\leq c\left|\eta_1-\eta_2\right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

En réitérant cette dernière inégalité pour p temps donnés dans $[0,T]$, on obtient :

$$\left|\Lambda^p\eta_1(t)-\Lambda^p\eta_2(t)\right|_{\mathcal{H}}\leq c^p\underbrace{\int_0^t\int_0^v...\int_0^q}_{p\ integrales}\left|\eta_1(r)-\eta_2(r)\right|_{\mathcal{H}}dr...ds$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cette inégalité donne alors.

$$|\Lambda^p \eta_1 - \Lambda^p \eta_2|_X \leq \frac{c^p T^P}{p!} |\eta_1 - \eta_2|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \quad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

et comme $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{c^p T^P}{p!} = 0$, alors (2.42) entraîne, pour p assez grand, que l'opérateur Λ est contractant, donc il existe un élément $\eta^* \in L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ unique tel que

$$\Lambda^p \eta^* = \eta^*$$

D'autre part on a :

$$\Lambda^p (\Lambda \eta^*) = \Lambda^{p+1} \eta^* = \Lambda (\Lambda^p \eta^*) = \Lambda \eta^*$$

et comme η^* est l'unique point fixe de Λ^p, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il résulte donc que η^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ.

On va maintenant démontrer le théorème 2.1.

Démonstration : Soit $\eta^* = (\eta^{*1}, \eta^{*2}) \in X$ le point fixe de Λ et $u = u_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0,T,H_1)$, $\sigma = \sigma_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0,T,\mathcal{H}_1)$ et $\beta = \beta_{\eta^*}$. tell que $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ est la sulution de probleme $PV_\eta 1$ pour $\eta = \eta^*$et β_{η^*}est la solution de $PV_\eta 2$ $\eta = \eta^*$. On a donc $\left(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*}, \beta_{\eta^*}\right)$ est la solution de notre problème PV

Chapitre 3

Annexe

3.1 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces Hilbert

3.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques fondamentales sur les espaces de Hilbert.

Définition 3.1 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ et complet pour la norme associée :

$$\|u\|_H = \langle u, v \rangle_H^{\frac{1}{2}}$$

Nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante :

$$|\langle u, v \rangle| \leqslant \|u\|_H \cdot \|v\|_H$$

Soit H un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K}$.
On appelle dual de H noté H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H

Définition 3.2 Soit H un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Si $\eta \in H'$. On a

$$\|\eta\|_{H'} = \frac{\left|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}\right|}{\|v\|_H}$$

Théorème 3.1 ***(Théorème de représentation de Risez-Fréchet)***

Soient H un espace de Hilbert et $\eta \in H'$, alors il existe un élément unique $f \in H$, tel que :

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \, \forall v \in H$$

i.e toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert s'exprime comme le produit scalaire par un vecteur $f \in H$

De plus on a :

$$\|f\|_H = \|\eta\|_{H'}$$

3.2 Opérateur fortement monotones et inéquation variationnelle

3.2.1 Opérateurs linéaires

Soient $(X, |.|_X)$ et $(Y, |.|_Y)$ deux espaces normés et soit $L : X \to Y$ un opérateur.

Un opérateur $L : X \to Y$ est linéaire si

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) \ .\forall u, v \in X \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Un opérateur linéaire est continu si et seulements'il est borné,c'est-à-dire il existe une constante $M > 0$ telleque

$$|L(v)|_Y \leq M \, |v|_X \ \ \forall v \in X.$$

Nous utiliserons la notation $L(X, Y)$ pour l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y. Pour $L^2 L(X, Y)$, la quantité

$$|L|_{L(X,Y)} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|Lv|_Y}{|v|_X}$$

est appelée l'opérateur norme de L et $L \to |L|_{L(X,Y)}$ définit une norme surl'espace $L(X, Y)$.

De plus,Si Y est un espace de Banach alors $L(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.

Pour un espace normé X, l'espace $L(X, \mathbb{R})$ est appelé l'espace dual de X et il est désigné par X'. Les élémentsde X' sont des fonctionnelles continues et linéaires sur X.

Le produit de dualité entre X' et X est généralement désigné par $l(v)$ ou $\langle v', v\rangle$, ou $\langle v', v\rangle_{X' \times X}$ pour $v' \in X$' et $v \in X$. Il résultede (1.5) qu'une norme sur X' est donnée par

$$|l|_{X'} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{|lv|_Y}{|v|_X}$$

et $(X', |.|_X)$ est toujours un espace de Banach.

3.2.2 Opérateurs non linéaires

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $\langle ., . \rangle_X$ et de la norme associée $|.|_X$.

Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 3.3 L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq 0 \qquad \forall u, v \in X$$

(2) fortement monotone s'il existe $m \succ 0$ tel que

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq m \|u - v\|_X^2 \qquad \forall u, v \in X$$

(3) de Lipschitz s'il existe $M \succ 0$ telque :

$$\|Au - Av\|_X \leqslant M \|u - v\| \qquad \forall u, v \in X$$

Soit maintenant $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Définition 3.4 La forme bilinéaire a(., .) est dite

– continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$a(u, v) \leq M |u|_X |u|_X \quad \forall u, v \in X.$$

– X-elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq m |v|_X^2 \quad \forall u, v \in X$$

– symétrique si

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in X.$$

Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateure, $f \in H$ et K une partie non-vide de H.un nombre considérable de problémes aux limites ainsi qu'en mécanique des milieux continus on un lien avec le problème mathématique suivant :

Trouver u tel que :

$$u \in K, \langle Au, v-u \rangle_H \geqslant \langle f, v-u \rangle_H \quad \forall v \in K \tag{3.1}$$

Le problème (3.1) est appelé inéquation variationnelle elliptique de premier espèce sur H.

Théorème 3.2 *Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $K \subset H$ un ensemble convexe, fermé et non-vide.*

Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique élément u tel que :

$$u \in K, \langle Au, v-u \rangle_H \geq \langle f, v-u \rangle_H \forall v \in K.$$

Lemme 3.1 *Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse A^{-1} est également fortement monotone et de Lipschitz.*

Théorème 3.3 ***(théorème de Minty-Browder)***

Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in H$ il existe un élément unique :

$$u \in H \quad \text{tel que} \quad Au = f$$

3.2.3 Théorèmes de point fixe

Le théorème de point fixe de Banach sera utilisé pour prouver l'existence des solutions aux problèmes variationnels en mécanique du contact.

Théorème 3.4 ***(Théorème du point fixe)***

Soit $(X, |.|_X)$ un espace de Banach.Soit K un sous-ensemble non vide fermé de X Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ une contraction, c'est-à-dire il existe un réel α vérifiant $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$|\Lambda(u) - \Lambda(v)|_H \leq \alpha |x_1 - x_2|_H \qquad \forall u, v \in K$$

alors il existe unique u tels que :Différentiabilité et sous différentiabilité

Nous rappelons maintenant la définition des fonctions Gâteaux-différentiables.

Définition 3.5 : Soient$(X, (.,.)_X)$ un espace préhilbertien, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ et $u \in X$. Alors φ est Gâteaux-différentiable au point u s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in X$ tel que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} = (\nabla\varphi(u), v)_X \quad \forall v \in X \tag{3.2}$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ qui satisfait(3.2) est unique et s'appelle le gradient de φ en u La fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de X. Dans ce cas, l'opérateur $\nabla : X \to X$ qui associe chaque élément $u \in X$ par l'élément $\nabla\varphi(u)$ est appelé l'opérateur gradient de φ.
La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée comme suit.

Proposition 3.1 *Soit $(X, (.,.)_X)$ un espace préhilbertien et Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux-différentiable. Les énoncés suivants sont équivalents :*
(i) φ est une fonction convexe
(ii) φ satisfait l'inégalité

$$\varphi(v)-\varphi(u) \geq (\nabla\varphi(u), v-u)_X \quad \forall u, v \in X. \tag{3.3}$$

(iii) le gradient de φ est un opérateur monotone

$$(\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v), u-v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X \tag{3.4}$$

Corollaire 3.1 *Soit $(X, (.,.)_X)$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est semi-continue inférieurement*

Définition 3.6 Soit $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ et soit $u \in X$ Le sous-différentiel de φ en u est l'ensemble

$$\partial\varphi(u) = \{f \in X : \varphi(v)-\varphi(u) \geq (f, v-u)_X \quad \forall v \in X\}.$$

On note

$$D(\partial\varphi) = \{u \in X : \partial\varphi(u) \neq 0\}$$

La Fonction φ est dite sous-différentiable en $u \in X$ si $u \in D(\partial\varphi)$, et chaque élément $f \in \partial\varphi(u)$ s'appelle sous-gradient de φ en u. La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point de X, c'est-à-dire si $D(\partial\varphi) = X$.

On peut montrer qu'une fonction $\varphi : X \to (-\infty, \ +\infty]$ sous-différentiable est convexe et semi-continue inférieurement. En outre, pour les fonctions convexes, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par le résultat suivant.

Proposition 3.2 *Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et Gâteau différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in X$.*

Exemple 3.1 : (Sous-différentiel de la fonction indicatrice) Soit X un espace normé réel et Soit $K \subset X$ un ensemble convexe. Considérons le sous-différentiel de la fonction d'indicateur ψ_K définie dans l'exemple 1.1, et on suppose que $u \in K$. Alors $u' \in \partial\psi_K$ si et seulement si

$$\psi_K(u) \geq \langle u', v - u\rangle \quad \forall v \in K,$$

c'est-à-dire

$$\langle u', v - u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

Ainsi, pour $u \in K$ nous avons

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X' : \langle u', v - u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et pour $u \notin K$, nous avons $\partial\psi_K(u) = \varnothing$.

Nous avons toujours $0 \in \partial\psi_K(u)$ pour $u \in K$. On voit facilement que si $u \in int(K)$ (l'intèrieur de K) alors $\partial\psi_K(u) = \{0\}$.

3.3 Inéquations variationnelles et équations d'évolution

3.3.1 Inéquations variationnelles elliptiques

Dans cette section nous présentons des résultats d'existence et d'unicité des solutions concernant les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce.

Inéquations variationnelles de première espèce

Étant donné un opérateur $A : X \to X$, un sous-ensemble $K \subset X$ et un élément $f \in X$, nous considérons le problème de trouver un élément u tel que,

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K \tag{3.5}$$

Une inéquation de la forme(3.5). s'appelle inéquation variationnelle elliptique de première espèce.

Nous avons le résultat standard suivant d'existence et d'unicité de la solution.

Théorème 3.5 (A1) *Théorème Soit X un espace de Hilbert et Soit $K \subset X$ un sous-ensemble fermé non vide et convexe. Supposons que $A : K \to K$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$. l'inéquation variationnelle admet une solution unique. Supposons maintenant que $K = X$. Puis, en prenant $v + u \pm w$, il est facile de voir que l'inéquation variationnelle est équivalente à l'équation variationnelle*

$$(Au, u)_X = (f, v)_X \qquad \forall w \in X, \tag{3.6}$$

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant dans l'étude des équations non linéaires impliquant des opérateurs monotones.

Théorème : Soit X un espace de Hilbert et Soit $A : X \to X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$, il existe un élément unique $u \in X$ tel que : $Au = f$.

Inéquations variationnelles paraboliques

Soient V et H des espaces de Hilbert réels tels que V est dense dans H et l'injection de V dans H est continue, H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V, c'est-à-dire

$$V \subset H \subset V'$$

cette inclusion définit un triplet de Gelfand. Les notations $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$ et $\langle .,. \rangle V \times V'$ sentent les normes sur les espaces V et V' et la dualité entre V' et V, respectivement. Un résultat standard pour les inéquations variationnelles paraboliques est donné par le théorème suivant, pour plus de détails sur le sujet voir par exemple [60].

Théorème 3.6 (A2) *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit K un ensun ensemble non vide, fermé et convexe de V. Supposons que $\alpha(.,.)$ $:V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique telle que pour certaines constantes $\alpha > 0$ et C_0*

$$\alpha\left(v,v\right)+C_0\left|v\right|_H^2\geq\alpha\left|v\right|_V^2\qquad\forall v\in V$$

Alors, pour tout $U_0\in K$ *et* $f\in L^2\left(0,T;H\right)$ *, il existe une fonction unique* $U\in H^1\left(0,T;H\right)\cap L^2\left(0,T;V\right)$ *telle que*

$$u\left(t\right)\in K\qquad\forall t\in\left[0,T\right],$$

$$\left\langle\dot{u}\left(t\right),v-u\left(t\right)\right\rangle_{V\times V\backslash}+\alpha\left(u\left(t\right),v-u\left(t\right)\right)\geq\left(f\left(t\right),v-u\left(t\right)\right)_H\qquad\forall v\in K,\quad p.p.t\in\left(0,T\right),$$

$$u\left(0\right)=u_0.$$

Ce théorème sera utilisé dans l'étude du problème de contact avec endommagement

$$u\in K:\Lambda(u)=u.$$

3.4 Les espaces fonctionnels

Dans cette section nous rappelons les notions essentielles sur les espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude mathématique de notre problème mécanique.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note :

$$C(\Omega)=\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R};u\text{ continue}\}$$

$C^m(\Omega)$ est l'espace de fonction m fois continument differentiables sur Ω.

$$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{m\in\mathbb{N}}C^m(\Omega)$$

$C_c(\Omega)=\{u\in C(\Omega)\text{ telle que : }u(x)=0,\text{pour tout }x\in\Omega:K\text{ ou }K\text{ est un compact}\}$

$$\operatorname{supp}u=\overline{\{v\in\Omega\text{ tq : }u(v)\neq0\}}$$

Le support de u le plus petit fermé sur lequel $u(v)\neq0$

3.4.1 Espace mesurable

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, on définit :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u|^p \, d\mu \prec \infty \right\}$$

On définit la norme de u dans $L^P(\Omega)$ par :

$$\|u\|_p = (\int_\Omega |u|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$, on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que : } u \text{ mesurable et } \exists c \geqslant 0 : |u(x)| \leqslant c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

$$\|u\|_\infty = inf \{c \geqslant 0 : |u(x)| \leqslant c \text{ p.p}\}$$

Est la norme de u dans $L^\infty(\Omega)$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u; v \rangle_H = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Proposition 3.3 *L'espace* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est de Banach pour* $1 \preceq p \preceq \infty$

L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est séparable pour $1 \preceq p \prec \infty$
L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p\right)$ est réflexif pour $1 \preceq p \prec \infty$
On définit :

$$D(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \text{supp } \varphi \subset \Omega, \text{supp } \varphi \text{ compact}\}$$

Remarque 3.1 L'espace des fonction C^∞ sur Ω à support compact dans Ω (dit aussi espace des fonctions test)

Définition 3.7 (A3) (La convergence dans $D(\Omega)$)

On dit que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ converge vers φ de $D(\Omega)$ si et seulement si :
$\exists$ K compact telle que :$\forall n \in \mathbb{N}$ supp $\varphi_n \subset K$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|\partial^n \varphi_n - \partial^n \varphi\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

3.4.2 Les espaces de distributions

Définition 3.8 (A4) Une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$ est appellée une distribution sur Ω l'ensemble des distributions sur Ω est noté $D'(\Omega)$ (dual topologique de $D(\Omega)$)

Proposition 3.4 *1.*$D(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset D'(\Omega)$
2. Si $p < \infty$ *alors* $D(\Omega)$ *est dense dans* L^p *c'est-à-dire* $\overline{D(\Omega)} = L^p(\Omega)$

Définition 3.9 (A6) (**La convergence faible**) i.e La convergente dans $D'(\Omega)$)

On dit qu'une suite de distribution $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D'(\Omega)$ converge dans $D(\Omega)$ si et seulement si elle converge simplement c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in D(\Omega), \int_\Omega u(x).\partial_i \psi(x) dx = -\int_\Omega \partial_i u.\psi(x) dx$$

Si un tel $\partial_i u$ existe, il est unique, néanmoins il existe pas toujours.
Nous introduisons également les espaces suivants :

$$D = \left\{ \varphi = (\varphi_i) | \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi = (\phi_{ij}) | \phi_{ij} = \phi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N}$$

$$D'(\Omega) = \left\{ u = (u_i) | u_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D}' = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) | \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), i, j = \overline{1, N} \right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}$$

Définition 3.10 (A7) Les produits de dualité entre D et D , $\mathcal{D}$et $\mathcal{D}'$seront définis par :

$$\langle u, \varphi \rangle_{D'\times D} = \langle u_i, \varphi_i \rangle$$

$$\langle \sigma, \phi \rangle_{D'\times D} = \left\langle \sigma_{ij}, \phi_{ij} \right\rangle$$

Soit ∂_i l'opérateur $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour les fonctions et pour les distribution On a :

$$\langle \partial_i \theta, \psi \rangle = -\langle \theta, \partial_i \psi \rangle, \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On peut également introduire les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

$$\varepsilon : D' \to \mathcal{D}', \varepsilon(\varphi) = \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \qquad \forall i, j = \overline{1, N}, \forall \varphi \in D$$

$$\operatorname{div} : \mathcal{D} \to D, \operatorname{div}(\phi) = \partial_i \phi_{ij} \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall \phi \in D$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\varepsilon : D' \longrightarrow \mathcal{D}', \varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \ \forall i, j = \overline{1, N}, \forall u \in D'$$

$$\operatorname{div} : \mathcal{D}' \to D', \operatorname{div} \sigma = \partial_j \sigma_{ij} \ \ \forall i = \overline{1, N}, \forall \sigma \in \mathcal{D}'$$

En utilisant, on obtient facilement :

$$\langle \varepsilon(u), \phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle u, \operatorname{div} \phi \rangle_{D' \times D} \quad \forall u \in D', \forall u \in D', \ \forall \phi \in$$

$$\langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in, \varphi \in D$$

L'opérateur pour les fonctions et pour les distributions s'appelle opérateur déformation. L'opérateur div pour les fonctions et pour les distributions s'appelle opérateur divergence.

3.5 Les espaces de sobolev, opérateurs de déformation et divergence

La modélisation de problèmes de mécaniques nécessite la plupart du temps l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous donnons dans ce paragraphe les espaces ainsi que quelques unes de leurs propriétés.

On introduit les espaces suivants :

$$\begin{gathered} H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}, \\ H_1 = \{u = (u_i) \mid u_i \in H^1(\Omega)\}, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} \mid \sigma_{ij,j} \in H\}. \end{gathered}$$

Les espaces H, $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{gathered} (u, v)_H = \int_\Omega u_i v_i dx, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ (u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \\ (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (Div\sigma, Div\tau)_H, \end{gathered}$$

respectivement ,où $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \to H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par :

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij,i).}\ 1 < i,\ j < d$$

Les normes sur les espaces $H, H_1, \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $|.|_H$, $|.|_{\mathcal{H}}$, $|.|_{H_1}$ et $|.|_{\mathcal{H}_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur v à la frontière est défini p.p.pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ.

3.6 Théorème de trace,formule de Green et inégalité de Korn

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N (N = 1, 2, 3)$ de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.7 (A8) ***(Théorème de trace)***

Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérfiant l'égalité

$$\gamma v = v|_\Gamma \qquad \forall v \in C(\bar{\Omega})^N$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, on écrit v au lieu de $v|_\Gamma$. En autre, il existe une constante de c, strictement positive dépend seulement de Ω, vérifant :

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)^N} \leq c \|v\|_{H_1} \qquad \forall v \in H_1$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$, n'est pas surjective.
L'image de H_1, par cette application est notée H_Γ, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^N$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ et $\langle , \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ.
Pour tout $\sigma \in H'_\Gamma$ et H_Γ, il existe un élément noté $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u \rangle_H \qquad \forall u \in H_1 \ , \ \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$$

Et si

$$\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), i, j = \overline{1, N} \right\}$$

Nous avons la formule.

$$\langle \sigma\nu, \gamma u\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma v u ds \qquad \forall u \in H_1$$

Donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante **(Formule de Green)** :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u)\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Div\sigma, u\rangle_H = \int_\Gamma \sigma v u ds \qquad \forall u \in H_1 \ \forall \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

Théorème 3.8 (A9) ***(Inégalité de Korn) :***

Soit $mes\Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $C_K > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que :

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geqslant C_K \|u\|_{H_1} \qquad \forall u \in V. \tag{3.7}$$

On rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) | \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1,d}\right\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Soit V le sous espace fèrmé de $H^1(\Omega)$ défini par :

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \ sur \ \Gamma_1\right\}.$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par :

$$\langle u, v\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V.$$

Et soit $\|.\|_V$ la norme associée, c'est à dire

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall v \in V \quad .$$

Remarque 3.2 par l'inégalité de korn, il vient que $\|.\|_{H^1}$ et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|.\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, par le théorème de trace de Sobolev et l'inégalité de Korn , il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1, Γ_3 telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \|u\|_V \qquad \forall u \in V$$

3.7 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $K \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0,T,H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in \mathcal{D}'(0,T,H)$
telles que $D_j u \in L^p(0,T,H)$ pour $j = \overline{0,k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.
Si $1 \leq p < +\infty, W^{K\,,\,p}(0,T;H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{K\,,\,p}(0,T,H)} = (\sum_{j=0}^{k} \int_0^T \|\mathbf{D}_j u(x)\|^p \, dx)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall u \in W^{k,p}(0,T,H)$$

En particulier, $W^{k\,,\,2}(0,T,H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$\langle u, v \rangle_{W^{k\,,\,2}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^{k} \int_0^T \langle D_j u(t)dt, D_j v(t) \rangle_H \, dt \qquad \forall u, v \in W^{k\,,\,2}(0,T,H)$$

D'autre part $W^{k\,,\,+\infty}(0,T;H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par :

$$\|u\|_{W^{K\,,\,p}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^{k} \sup \|\mathbf{D}_j u(t)\|_H \qquad \forall u \in W^{k,+\infty}(0,T,H)$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remaque que $W^{0,p}(0,T,H) = L^p(0,T,H)$ et on note alors la norme de $L^p(0,T,H)$ par $|.|_{L^p(0,T,H)}$ pour tout $p \geq 1$.

3.8 Lemmes de Gronwall

Nous présentons ici deux lemmes de Gronwall.

Lemme 3.2 (A10) *soient* $m,\ n \in C(0,T,\mathbb{R}_+)$ *et* $a \in \mathbb{R}_+$.

Soit également $\varphi \in C(0,T,\mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s m(t)dt + \int_0^s n(t)\varphi(t)dt \qquad \forall s \in [0,T]$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivante.

$$\varphi(s) \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt \right) \exp \int_0^s n(t)dt \qquad \forall s \in [0,T] \tag{3.8}$$

Pour le cas particulier $m \equiv 0$, ce lemme devient :

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s n(t)\varphi(t)dt \qquad \forall s \in [0, T]$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivante.

$$\varphi(s) \leq a \exp \int_0^s n(t)dt \qquad \forall s \in [0, T] \tag{3.9}$$

Lemme 3.3 *Soit* $m \in W^{1,\infty}(0, T, \mathbb{R}_+)$ *telle que* $m(0) = 0$ *et* $m(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0, T]$ *et* $a > 0, b > 0$.

Si $\varphi \in L^\infty(0, T, \mathbb{R}_+)$ est telle que

$$\varphi(s) \leq a + m(s) + b\int_0^s \varphi(t)dt \qquad \forall s \in [0, T] \tag{3.10}$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivants.

$$\varphi(s) \leq m(s) + \left(a + b\int_0^s m(t)dt\right) \exp bs \qquad \forall s \in [0, T] \tag{3.11}$$

Bibliographie

[1] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1987.

[2] P. G. Ciarlet, Elasticité Tridimension.nelle, Masson, Paris1986.

[3] Duvaut, G. and Lions, J.L. Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[4] I. Hlavaček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovišek, Solutionof Variational Inequalitiesin Mechanics, NewYork, Springer-Verlag, 1988.

[5] G. Fichera, Problemi elastostatici convincoli nuilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei, S.VIII, Vol.VII, Sez. I, 5, 91-140(1964).

[6] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjarand, M. Shillor, One-dimensional models of damage. Adv. Math. Sci. Appl. 8 (2), 541-570(1998).

[7] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon. Nuclear Engng. Design 156, 323-335(1995).

[8] J. R. Fernnde and M. Sofonea Variational and numerical analysis of the Signorini's contact problem in viscoplasticity with damage, Appl. Math. 137 (2000), no. 2, 377–398.

[9] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimension al models ofdamage. Adv. Math. Sci. Appl. 8 (2), 541-570(1998).

[10] Ionescu, I. R. and Sofonea, M. Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[11] P. D. Panagiotopoulos, Inequality Problems in Mechanics and Applications, Birkhäuser, Boston, 1985.

[12] S. Latreche, Analyse variationnelle de différents problèmes aux limites en mécanique du contact, thèse de doctorat, LMD, Université Ferhat Abbas - Setif 1, 2018 .

[13] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti della Società Italiana peril Progresso delle Scienze, 1933.

[14] M. Sofonea, Modélisation mathématique en Mécanique du Contact, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume32, 2005, PP. 67-74ISSN :1223-6934

[15] B. Teniou. Etude Fonctionnelle des Problèmes Elasto-plastiques de Contact, Thèse de Doctorat D'Etat en Mathématiques, Université Frères Mentouri Constantine, 2000.