

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
Master en Mathématiques

**Etude numérique des équations hyperbolique semi-  
linéaires d'évolution dans un domaine borné**

Option : Analyse Fonctionnelle Appliqué

Par :

BOUHADJAR Nadjet  
BIRA Nadra

Encadré par : Dr. *HAMDI Zakaria*

M.C.B U.SKIKDA

Devant le jury :

Président :Dr. *BOUZETTOTA Lamine*

M.C.A U. SKIKDA

Examineur :Dr. *ATOUI Halim*

M.C.B U. SKIKDA

Année universitaire : 2021/2022

# Dédicace

Tout d'abord. Nous tenons à remercier -Dieu- et des prières pour le bien aimé Mustafa et sa famille et ceux qui sont fidèles, Alors :

Remercier -Dieu- qui soit loué qui m'a permis apprécier cette étape de mon parcours universitaire et de mener à bien cette recherche,

A celui qui m'a donné tout ce qu'il avait pour que je puisse réaliser ses espoirs en lui, à celui qui veillé sur mon éducation, à ma première école dans la vie, mon cher père dans mon coeur qui -Dieu- prolonge sa vie.

A celui qui a accordé la douceur de son foie avec toute la tendresse et la tendresse, à celle qui était patiente avec tout, et sa prétention à moi pour le succès m'a suivi pas à pas, ma mère est la source de la tendresse, qui -Dieu- la récompense avec la meilleure récompense les deux maison, et que -Dieu- prolonge sa vie.

A mes frères qui ont toujours été mon soutien dans apporte le bonheur dans leurs curs et les protège.

Aux compagnons de route qui fait part de ses observations que -Dieu- prenne soin d'eux et leur accorde le succès.

A tous ceux qui m'aiment.

A mon professeur qui m'a aidé à terminer mon mémoire, à lui tous mes remerciements et appréciations le docteur « Hamdi Zakaria » et à tous le département de mathématique, je vous remercie pour vos efforts tout au long de ma carrière école.

Étudiant : Bira Nadra

## Résumé

Dans ce mémoire, notre objectif est de prouver l'existence et l'unicité de la solution pour un problème hyperbolique semi-linéaire dans un domaine borné avec un terme non linéaire monotone. Nous utilisons la régularisation elliptique et un schéma aux différences finies dans le temps pour construire les solutions approchées. L'existence de la solution du problème d'évolution se fait en étudiant la convergence des solutions approchées et en utilisant la méthode standard de Minty, et l'unicité est atteinte.

## Abstract

In this Master thesis, our goal is to prove the existence and uniqueness of solution for a semi-linear hyperbolic equations in a bounded domain with a monotone nonlinear term. We use elliptic regularization and a finite difference scheme in time to build the approximate solutions for the semi-linear hyperbolic equations. The existence of the solution for the evolution problem is done by studying the convergence of the approximate solutions and by using the standard Minty method, and the uniqueness is achieved.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1	Les espace $\mathbb{L}^p(\Omega)$	5
1.2	Les espace de Sobolev	6
1.3	Les inégalités principales	7
1.4	Espace réflexif	8
1.5	convergence faible et faible-*	8
<b>2</b>	<b>Problème de dimension un</b>	<b>10</b>
2.1	Le problème aux limites stationnaire	11
2.2	Problème d'évolution	16
2.2.1	Estimations a priori	16
2.2.2	Passage à la limite	18
2.2.3	Résultat principal de la section 2	21
<b>3</b>	<b>Problème à deux dimension</b>	<b>23</b>
3.1	Estimations à priori	24
3.2	Passage à la limite	25
	Bibliographie	32

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles constituent une branche importante des mathématiques appliquées, elles sont utilisées dans des différents domaines scientifiques. De nombreux problèmes de la physique, chimie, finance et d'autres sciences sont modélisés à l'aide des équations d'évolution de nature hyperbolique et parabolique.

Dans ce travail, nous étudions le problème des valeurs initiales et aux limites en dimension un et deux pour une équation convection de réaction semi-linéaire du premier ordre

$$\partial_t u + Au + p(u) = f, \quad (1.1)$$

Ce mémoire comprend trois chapitres. Le premier chapitre est une préliminaire qui contient un ensemble de définitions et des résultats fondamentaux d'analyses fonctionnelles qui seront utilisés dans la suite du travail.

Dans le deuxième chapitre nous allons utiliser la méthode des différences finies en temps pour étudier le problème (1.1). Cette méthode consiste à discrétiser le domaine temporel en sous intervalles et de remplacer la dérivée temporelle dans l'équation aux dérivées partielles par une approximation aux différences finies. Le problème parabolique est ainsi transformé en une séquence de problèmes stationnaires qui peuvent être résolus par les méthodes de Galerkin.

Le problème d'évolution est alors transformé en un problème stationnaire mais qui reste de type hyperbolique. Dans notre cas, les problèmes stationnaires sont hyperboliques semi-linéaires à terme non linéaires monotones. Pour montrer l'existence des solutions à ces problèmes non linéaires, nous utilisons la méthode des perturbations, voir [9,15]. Pour montrer la convergence des solutions approchées, puis on passe à la limite. Pour traiter la non-linéarité, nous utilisons les résultats fondamentaux de la théorie des opérateurs monotones et accréditifs découverts au cours de la seconde moitié du siècle par Minty [12,13], Browder [3], Lions[8], Brezis[2], et de nombreux autres. Nous utilisons également un résultat en analyse convexe, voir le théorème 1.3.2 de [4], pour faire face à des données initiales non nulles tout en conservant la monotonie du problème. A noter que de nombreux problèmes stationnaires ou dépendants du temps de type (1.1) avec une non linéarité monotone sont étudiés dans les dernières références [2,8]. Cependant, une différence majeure avec notre étude est que l'opérateur  $A+P$  n'est pas coercitif contrairement aux références précédentes.

Dans le troisième chapitre nous utilisons les résultats du deuxième chapitre en traitant la variable de temps comme une variable spatiale pour construire les solutions du problème stationnaire en dimension deux. Puis nous réutilisons les techniques similaires à celles du deuxième chapitre pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution pour notre problème.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Les espace $L^p(\Omega)$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable au sensé de Lebesgue :  
Si  $p = 1$  définit les espace :

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f| dx \leq \infty.\}$$

Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  on définit :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

Si  $p = \infty$  on définit L'espace :

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est mesurable et existe } c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$   
muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Si  $p = 2$  l'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$L^1_{loc}$  design l'ensemble des fonction localement intégrable sur  $\Omega$  :

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(k) \text{ pour tout compact } k \subset \Omega\}$$

## 1.2 Les espace de Sobolev

### Les espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et soit  $P \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq P \leq \infty$

**Définition 1.1** *L'espace de Sobolev  $w^{1,p}(\Omega)$  est défini par :*

$$\left. \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = - \int_{\Omega} g_1 \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall t = 1, 2, \dots, N \right\} \end{array} \right\}$$

on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

l'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalent :

$$\left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty$$

l'espace  $H^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}$$

la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

est équivalente à la norme  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Proposition 1.1 :**

- l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
- l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est Réflexif pour  $1 < p < \infty$ .
- l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .
- l'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert séparable.

## Les espace de Sobolev $W^{1,m}(\Omega)$

Soient  $m \geq 2$  un entier et  $P$  un réel avec  $1 \leq P \leq \infty$ , on définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, N\},$$

l'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p} \text{ pour } 1 \leq P < \infty$$

est un espace de Banach.

On pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ;  $H^m(\Omega)$  est muni des produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

## 1.3 Les inégalités principales

### Inégalité Cauchy Schwartz

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel. Soit  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

En effet : en notant  $(x, y)$  l'angle entre les vecteur x et y,

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= |\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(x, y)| \\ &= \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\cos(x, y)| \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\|. \end{aligned}$$

### Inégalité de Young

Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+$  et  $p, q \in ]1, +\infty[$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

### Inégalités de Hölder

Soit  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors :

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Soit  $f \in L^1(\Omega)$  tel que  $i = \overline{1.k}$  avec  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p} \leq 1$

alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L^p} \leq \prod_{i=1}^k \|f\|_{L^{p_i}}$$

### **Théorème 1.1** (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$ , on suppose que :

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p sur  $\Omega$
- il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$  :

$$f_n(x) \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega$$

alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

## 1.4 Espace réflexif

Soit  $F$  un espace de Banach,  $F'$  son dual (topologique) et  $F''$  son bidual (c'est à dire le dual topologique de  $F'$ ). pour  $u \in F$ , on définit  $J_u \in F''$ . on dit que l'espace  $F$  est réflexif si l'application  $J : u \mapsto J_u$  (de  $F$  dans  $F''$ ) est surjective (l'application  $J$  est toujours injective).

### **Proposition 1.2**

Soit  $(E, T, m)$  un espace mesuré et  $1 < p < +\infty$ . Alors, l'espace  $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$  est réflexif.

## 1.5 convergence faible et faible-\*

On limite ce paragraphe au cas des espace de Banach réels. L'extension au cas des Banach complexes ne pose de difficulté importante.

On rappelle que si  $F$  est un espace de Banach (réel) on note  $F'$  son dual topologique ( $F'$  est donc l'ensemble des application linéaires continues de  $F$  dans  $\mathbb{R}$ ). Si  $\|\cdot\|_F$  est la norme dans  $F$ , l'ensemble  $F'$  est aussi un espace de Banach avec la norme définie par

$$\|T\|_{F'} = \sup \left\{ \frac{T(u)}{\|u\|_F}, u \in F \setminus \{0\} \right\}.$$

### **Convergence faible dans un espace de Banach**

Soit  $F$  un espace de Banach (réel) et  $F'$  son dual topologique. On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $u$  (dans  $F$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ ) si pour tout élément  $T$  de  $F'$ , on a :

$$T(u_n) \rightarrow T(u) \text{ (dans } \mathbb{R} \text{) quand } n \rightarrow +\infty.$$

### Proposition 1.3

Soit  $(E, T, m)$  un espace mesuré,  $p \in [1, +\infty[$  et  $q$  le conjugué de  $p$ ,  $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $f \in L^p$ . Alors, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $f$  si et seulement si on a,

$$\forall g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m), \int f_n g dm \longrightarrow \int f g dm \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

### Convergence faible\* dans le dual d'un espace de Banach

Soit  $F$  un espace de Banach (réel) et  $F'$  son dual topologique; soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F'$  et  $T \in F'$ . On dit que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $T$  \*-faiblement dans  $F'$  si pour tout élément  $u$  de  $F$  on a :  $T_n(u) \longrightarrow T(u)$  (dans  $\mathbb{R}$ ) quand  $n \longrightarrow +\infty$ .

#### Remarque 1.1 (convergence fort, faible et faible\*)

Soit  $F$  un espace de Banach (réel)

1. Soient  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F'$  et  $T \in F'$ . les implications suivantes sont alors immédiates :

$$T_n \longrightarrow T \implies T_n \longrightarrow T \text{ faiblement} \implies T_n \longrightarrow T \text{ *-faiblement.}$$

La deuxième implication est une conséquence de l'injection de  $F$  dans  $F''$ .

2. Pour  $u \in F$ , on définit  $J_u \in F''$ . Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$  et  $u \in F$ . on a alors :

$$u_n \longrightarrow u \text{ faiblement dans } F \iff J_{u_n} \longrightarrow J_u \text{ *-faiblement dans } F''.$$

Mais, si  $F$  n'est pas réflexif, l'application  $J : u \mapsto J_u$ , de  $F$  dans  $F''$ , n'est pas surjective et on peut avoir une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non faiblement convergente dans  $F$  alors que suite  $(J_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est \*-faiblement convergente dans  $F''$ .

Dans ce cas, la limite \*-faible (dans  $F''$ ) de  $(J_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est un élément de  $F''$  qui n'appartient pas à l'image de  $J$ .

Dans le cas où  $F$  est un espace de Banach réflexif, l'application  $J : u \mapsto J_u$  est surjective de  $F$  dans  $F''$  et on a alors :

1. Soient  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F'$  et  $T \in F'$ . Alors :

$$T_n \longrightarrow T \text{ faiblement dans } F' \iff T_n \longrightarrow T \text{ *-faiblement dans } F'.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente dans  $F$  si et seulement si la suite  $(J_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est \*-faiblement convergente dans  $F''$ .

# Chapitre 2

## Problème de dimension un

Dans ce chapitre, notre objectif est de prouver l'existence et l'unicité de la solution d'une équation hyperbolique semi linéaire dans l'espace de dimension un. Nous étudions d'abord le problème aux limites stationnaires, puis nous utilisons les différences finies dans le temps pour étudier le problème d'évolution. L'équation hyperbolique semi linéaire que nous considérons s'écrit

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + P(u(x, t)) = f(x, t), \quad (2.1)$$

où  $x \in \Omega = (0, 1)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $f \in L^{(m+1)/m}(0, T, L^{(m+1)/m}(\Omega))$  et  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est monotone et a une croissance polynomiale à l'infini au sens suivant :

$$(P(u) - P(v))(u - v) \geq 0 \quad (2.2a)$$

$$\alpha_1 u^{m+1} - \beta_1 \leq P(u)u \leq \alpha_2 u^{m+1} + \beta_1 \quad (2.2b)$$

$$|P(u)| \leq \alpha_2 |u|^m + \beta_2 \quad (2.2c)$$

pour certaines constantes positives  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  et un entier impair  $m$ .

Un exemple d'un tel  $P$  serait un polynôme croissant d'ordre impair  $m = 2s - 1$  avec un coefficient positif  $a_{2s-1} > 0$  de la forme

$$P(u) = \sum_{j=0}^{2s-1} a_j u^j \quad (2.3)$$

on voit d'abord que  $P$  satisfait (2.2a) puisque  $P$  est croissante, et les estimations du lemme (2.1) affirment que  $P$  satisfait aussi (2.2b) et (2.2c).

### Lemme 2.1

Supposons que  $P$  est de la forme (2.3) avec le coefficient  $a_{2s-1} > 0$ . Alors

$$\frac{1}{2} a_{2s-1} u^{2s} - b_1 \leq P(u)u \leq \frac{3}{2} a_{2s-1} u^{2s} + b_1, \quad (2.4a)$$

$$\frac{1}{2} a_{2s-1} u^{2s} - b_2 |u| \leq P(u)u \leq \frac{3}{2} a_{2s-1} u^{2s} + b_2 |u|, \quad (2.4b)$$

$$|P(u)| \leq \frac{3}{2} a_{2s-1} |u|^{2s-1} + b_2, \quad (2.4c)$$

où  $b_1, b_2$  ne dépendent que des coefficient  $a'_j s$  et  $s$ .

## Preuve 2.1

En utilisant l'inégalité de Young, nous pouvons trouver  $\mathbf{b}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2 > \mathbf{0}$  tel que

$$\left| \sum_{j=0}^{2s-2} \mathbf{a}_j \mathbf{u}^{j+1} \right| \leq \frac{1}{2} \mathbf{a}_{2s-1} \mathbf{u}^{2s} + \mathbf{b}_1,$$

$$\left| \sum_{j=0}^{2s-2} \mathbf{a}_j \mathbf{u}^{j+1} \right| \leq |\mathbf{u}| \sum_{j=0}^{2s-s} |\mathbf{a}_j| |\mathbf{u}|^j \leq |\mathbf{u}| \left( \frac{1}{2} \mathbf{a}_{2s-1} |\mathbf{u}|^{2s-1} + \tilde{\mathbf{b}}_2 \right).$$

ces deux inégalités impliquent (2.4a) et (2.4b), (2.4c) est un conséquence de (2.4b).

On munit (2.1) des conditions initiales et aux limites suivantes.

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, 0) = \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.5)$$

Notre plan est le suivant : Nous étudions d'abord dans la section (2.1) le problème stationnaire correspondant à (2.1) ; voir aussi (2.27). Nous utilisons ensuite ce résultat pour montrer l'existence d'une solution à un schéma aux différences finies en temps de (2.1), (2.27). L'existence de la solution de (2.1), (2.27) dans  $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{0}, \mathbf{T}; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap \mathbf{L}^{m+1}(\Omega_{\mathbf{T}})$  est obtenue en étudiant la propriété de convergence des solutions aux différences finies. Dans la section 2.2. Puisque la solution est dans un sens faible, nous développons un théorème de trace et un résultat d'intégration par parties comme outils pour obtenir le résultat d'existence. Ces résultats sont présentés dans l'annexe A. L'unicité de la solution se fait par la monotonie de  $\mathbf{P}$  et un argument d'intégration par parties. Tout au long de ce travail, nous utiliserons indifféremment la notation  $\Omega_{\mathbf{T}} = \Omega \times (\mathbf{0}, \mathbf{T})$  à notre convenance.

Nous étudions maintenant le problème stationnaire qui nous aidera à construire des solutions approchées au problème dépendant du temps (2.1). Nous posons également que  $\mathbf{V} = \mathbf{L}^{m+1}(\Omega)$  et  $\mathbf{V}' = \mathbf{L}^{(m+1)/m}(\Omega)$  sont des espaces dual un de l'autre. Dans la suite, on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le crochet de dualité entre  $\mathbf{L}^r(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^{r'}(\Omega)$  ou  $1 < r < +\infty$ , et  $r'$  est les exposants conjugués de  $r$  vérifiant que  $1/r + 1/r' = 1$ . On utilise aussi les notations  $\|\cdot\|$  pour la norme en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

## 2.1 Le problème aux limites stationnaire

Dans cette sous section, nous utilisons une méthode de régularisation et de la formulation variationnelle pour étudier le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}(0) \end{cases} \quad (2.6)$$

pour un constant  $\lambda > \mathbf{0}$  et  $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{R}$ . La raison pour laquelle nous introduisons un terme supplémentaire  $\lambda \mathbf{u}$  dans (2.6) est de nous préparer à utiliser le schéma aux différences finies pour le problème d'évolution. Afin de montrer l'existence, nous introduisons le problème de régularisation elliptique suivant

$$-\epsilon \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon + \partial_x \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{P}(\mathbf{u}^\epsilon) + \lambda \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{g}_0, \quad \mathbf{u}_x^\epsilon(1) = 0. \quad (2.7b)$$

Nous allons appliquer le théorème (3.2) pour obtenir une solution unique  $\mathbf{u}^\epsilon$  de (2.7a)-(2.7b). Remarque que par l'injection de Sobolev, on a  $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ . On pose  $\mathbf{X} = H^1(\Omega)$  avec la norme usuelle  $\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\partial_x \mathbf{u}\|^2$ , et  $\mathbf{K} = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u}(0) = \mathbf{g}_0\}$ . On définit alors la forme  $\mathbf{a}_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ ,

$$\mathbf{a}_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \epsilon \int_{\Omega} \partial_x \mathbf{u} \partial_x \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \mathbf{u}_x \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} p(\mathbf{u}) \mathbf{v} dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} dx, \quad (2.8)$$

et l'opérateur  $\mathbf{A}_\epsilon : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ , pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)$ ,

$$\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a}_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Par définition, il est facile de vérifier que  $\mathbf{K}$  est un fermé convexe non vide ( $\mathbf{u} \equiv \mathbf{g}_0 \in \mathbf{K}$ ) et que  $\mathbf{A}_\epsilon$  est faiblement continu sur des sous espaces de dimension finie de  $\mathbf{X}$  et borné. Pour  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{K}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u} - \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \epsilon \int_{\Omega} (\partial_x \mathbf{u} - \partial_x \mathbf{v})^2 dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v})_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (P(\mathbf{u}) - P(\mathbf{v})) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dx + \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{v})_x (\mathbf{u} - \mathbf{v}) dx = \frac{1}{2} (\mathbf{u}(1) - \mathbf{v}(1))^2 \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

et l'égalité est vrai si et seulement si  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . On en déduit que  $\mathbf{A}_\epsilon$ , est strictement monotone.

Pour montrer que  $\mathbf{A}_\epsilon$  est coercitif, on note d'abord que  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}_0 + \int_0^x \partial_x \mathbf{u}(x') dx'$ , ce qui implique que

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq 2\mathbf{g}_0^2 + 2\|\partial_x \mathbf{u}\|^2 \quad (2.10)$$

puis pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ , en utilisant (2.2b), (2.10) et par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \epsilon \int_{\Omega} (\partial_x \mathbf{u})^2 dx + \frac{1}{2} \mathbf{u}(1)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{u}(0)^2 + \int_{\Omega} P(\mathbf{u}) \mathbf{u} dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 dx \\ &\geq \epsilon \int_{\Omega} (\partial_x \mathbf{u})^2 dx - \frac{1}{2} \mathbf{g}_0^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u}(1)^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} \mathbf{u}^{m+1} dx - \beta_1 + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 dx \\ &\geq \frac{\epsilon}{4} \|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 - \frac{1+\epsilon}{2} \mathbf{g}_0^2 - \beta_1 + \frac{1}{2} \mathbf{u}(1)^2 + \alpha_1 \int_{\Omega} \mathbf{u}^{m+1} dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi, pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$

$$\frac{\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} = \frac{\mathbf{a}_\epsilon(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{H^1}} \geq \frac{\epsilon}{4} \|\mathbf{u}\|_{H^1} - \frac{(1+\epsilon)\mathbf{g}_0^2 + 2\beta_1}{2\|\mathbf{u}\|_{H^1}} \rightarrow +\infty \quad (2.12)$$

quand  $\|\mathbf{u}\|_{H^1} \rightarrow +\infty$ , en appliquant le théorème (3.3) à  $\mathbf{A}_\epsilon$ , on trouve que pour tout  $\mathbf{f} \in L^{(m+1)/m}(\Omega) (\subset \mathbf{X}' = (H^1(\Omega))')$  il existe un unique  $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{K}$  tel que

$$\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^\epsilon \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \quad (2.13)$$

## Lemme 2.2

Supposons que  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^{(m+1)/m}(\Omega)$ . Alors il existe un unique  $\mathbf{u}^\epsilon$  qui vérifie (2.7a)-(2.7b), et les estimations d'énergie suivantes sont fournies indépendantes de  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\epsilon &\text{ est borné dans } \mathbf{L}^{m+1}(\Omega), \\ \sqrt{\epsilon} \partial_x \mathbf{u}^\epsilon &\text{ est borné dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{u}^\epsilon &\text{ est borné dans } \mathbf{W}^{1,(m+1)/m}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.14)$$

## Preuve 2.2

Nous avons déjà montré l'existence de  $\mathbf{u}^\epsilon$  satisfaisant (2.13), et nous prouvons maintenant que  $\mathbf{u}^\epsilon$  satisfait (2.7a)-(2.7b). Pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$  avec  $\mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , choisir  $\mathbf{v} = \mathbf{u}^\epsilon \pm \mathbf{w} \in \mathbf{K}$  dans (2.13) donne

$$\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{f}, \pm \mathbf{w} \rangle \geq 0, \quad (2.15)$$

qui donne

$$\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle. \quad (2.16)$$

Si nous supposons en outre que  $\mathbf{w} \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega)$ , alors l'intégration par parties dans (2.16) donne

$$\int_{\Omega} (-\epsilon \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{u}_x \mathbf{u}^\epsilon + P(\mathbf{u}^\epsilon) + \lambda \mathbf{u}^\epsilon) \mathbf{w} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} dx, \quad (2.17)$$

ce qui implique que (2.7a) est vérifiée au sens des distributions sur  $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ .

On a  $\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{0}) = \mathbf{g}_0$  depuis  $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{K}$ , et il reste à récupérer la condition aux limites  $\mathbf{u}_x(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ . De (2.7a), on obtient que  $\partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon$  appartient à  $\mathbf{L}^{(m+1)/m}(\Omega)$ , ce qui montre que  $\mathbf{u}$  appartient à  $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  par l'injection de Sobolev  $\mathbf{W}^{(m+1)/m} \subset \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ . La trace  $\mathbf{u}_x|_{x=1}$  donc a un sens, et l'intégration par parties dans (2.16) donne

$$\int_{\Omega} (-\epsilon \partial_{xx} \mathbf{u}^\epsilon + \partial_x \mathbf{u}^\epsilon + P(\mathbf{u}^\epsilon) + \lambda \mathbf{u}^\epsilon) \mathbf{w} dx + \epsilon \mathbf{u}_x^\epsilon(\mathbf{1}) \mathbf{w}(\mathbf{1}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w} dx. \quad (2.18)$$

La combinaison de (2.17) et (2.18) conduit à  $\epsilon \mathbf{u}_x^\epsilon(\mathbf{1}) \mathbf{w}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ , ce qui implique que  $\mathbf{u}_x^\epsilon = \mathbf{0}$ . Par conséquent,  $\mathbf{u}^\epsilon$  satisfait (2.7a)-(2.7b).

Maintenant nous passons à la démonstration des estimations d'énergie (2.14). Choisir  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{g}_0 \in \mathbf{K}$  dans (2.13) donne

$$\langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon \rangle \leq \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^\epsilon \rangle + \langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle. \quad (2.19)$$

En utilisant l'inégalité de Holder et l'inégalité de Young, on obtient

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}^\epsilon \rangle \leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_{\mathbf{V}} \leq c \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}'}^{(m+1)/m} + \frac{\alpha_1}{4} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_{\mathbf{V}}^{m+1}. \quad (2.20)$$

Et en utilisant (2.2c) pour  $P(\mathbf{u}^\epsilon)$  et l'inégalité de Young pour le terme  $\mathbf{p}(\mathbf{u}^\epsilon) \mathbf{g}_0$ , on trouve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_x^\epsilon \mathbf{g}_0 dx + \int_{\Omega} P(\mathbf{u}^\epsilon) \mathbf{g}_0 dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u}^\epsilon \mathbf{g}_0 dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{g}_0 dx \\ &= \mathbf{g}_0(\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{1}) - \mathbf{g}_0) + \int_{\Omega} P(\mathbf{u}^\epsilon) \mathbf{g}_0 dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{u}^\epsilon \mathbf{g}_0 dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{g}_0 dx \\ &\leq \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{1}))^2 - \frac{1}{2} \mathbf{g}_0^2 + \int_{\Omega} \frac{\alpha_2}{4} (\mathbf{u}^\epsilon)^{m+1} + c(\mathbf{g}_0^{m+1} + \mathbf{g}_0^{(m+1)/m}) dx \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{2} ((\mathbf{u}^\epsilon)^2 + \mathbf{g}_0^2) dx + \int_{\Omega} \left( \frac{m}{m+1} \mathbf{f}^{(m+1)/m} + \frac{1}{m+1} \mathbf{g}_0^{m+1} \right) dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

pour un constant  $c > 0$ .

En combinant (2.19)-(2.21), on trouve avec (2.11) que

$$\frac{1}{4} \|\sqrt{\epsilon} \partial_x u^\epsilon\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|u^\epsilon\|_V^{m+1} \leq c(\|f\|_{V'}^{(m+1)/m} + g_0^{m+1} + g_0^{(m+1)/m}) + \frac{1}{2} \lambda g_0^2.$$

Par conséquent, nous avons établi les deux premières estimations dans (2.14). La dernière estimation dans (2.14) suit en appliquant le lemme (3.1) avec  $\lambda(x) = 1$ ,  $g^\epsilon = f - P(u^\epsilon) - \lambda u^\epsilon$ , (2.7a) et la première estimation.

La premier et la dernière estimations de (2.14) montrent qu'il existe une sous-suite de  $u$  encore notée  $u^\epsilon$ , qui converge faiblement vers un certain  $u$  in  $L^{m+1}(\Omega)$  et dans  $W^{1,m+1/m}(\Omega)$ . Par l'injection de Sobolev dans un compact  $W^{1,m+1/m}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$  pour  $0 < \alpha < 1/4$ , on obtient que  $u^\epsilon$  converge fortement vers  $u$  in  $C(\Omega)$ , ce qui avec le théorème de convergence dominée, implique que  $P(u^\epsilon)$  converge faiblement vers  $P(u)$  in  $L^{m+1/m}(\Omega)$ . Par conséquent, en passant à la limite dans (2.7a), on conclut que la limite  $u$  résout (2.6)<sub>1</sub> (au moins dans le sens de distribution). Il reste à montrer que  $u$  vérifie la condition au limite (2.6)<sub>2</sub>. En utilisant la borne uniforme de (2.14), (2.7a) donne

$$-\epsilon \partial_x x u^\epsilon + \partial_x u^\epsilon \text{ est uniformément borné dans } L_x^{(m+1)/m}(\mathbf{0},1).$$

On applique le lemme A.1 à  $u^\epsilon$  avec  $P = (m+1)/m$  et  $X = \mathbb{R}$ , on voit que les  $\partial_x u^\epsilon$  sont uniformément bornée dans  $L_x^{(m+1)/m}(\mathbf{0},1)$ , et les trace correspondantes convergent, soit  $U(\mathbf{0}) = g_0$ . On trouve ainsi une solution  $U$  vérifiant (2.6).

Par conséquent, nous avons le résultat suivant.

### Lemme 2.3

Supposant que  $f \in L_x^{(m+1)/m}$  et  $\lambda > 0$ . Alors il existe un unique  $u \in L_x^{(m+1)}(\Omega) \cap W^{1,(m+1)/m}(\Omega)$  satisfaisant (2.6)

### Preuve 2.3

Il suffit de prouver l'unicité. Supposons que  $u_1, u_2$  vérifient (2.6) et appartiennent à  $L_x^{(m+1)}(\Omega) \cap W^{1,(m+1)/m}(\Omega)$  et soit  $w = u_1 - u_2$ . Alors  $w$  satisfait

$$\begin{aligned} w_x + P(u_1) - P(u_2) + \lambda w &= 0, \\ w(\mathbf{0}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Puisque  $w \in L^{m+1}(\Omega)$  et  $P(u_1), P(u_2) \in L^{m+1/m}(\Omega)$ ,  $w_x \in L^{m+1/m}(\Omega)$ , et il s'ensuit que  $w, w_x$  appartient à  $L^1(\Omega)$  par l'inégalité de Holder, et que

$$\int_{\Omega} w w_x dx = \frac{1}{2} |w(1)|^2 - \frac{1}{2} |w(\mathbf{0})|^2 = \frac{1}{2} |w(1)|^2. \tag{2.24}$$

Nous multiplions maintenant (2.23)<sub>1</sub>, par  $w$  et utilisons (2.24), nous trouvons

$$\frac{1}{2} w(1)^2 + \int_{\Omega} (P(u_1) - P(u_2))(u_1 - u_2) dx + \lambda \int_{\Omega} w^2 dx = 0. \tag{2.25}$$

Le membre de gauche de (2.25) est toujours positif grâce à la monotonie (2.2a) de  $P$ . On doit donc avoir  $w = 0$  si (2.25) est vérifiée. Nous ainsi compléte la preuve.

## Remarque 2.1

- *Le même résultat serait vrai sans unicité  $\lambda = 0$ . L'unicité peut être récupérée si  $\lambda = 0$  et  $\mathbf{p}$  est strictement monotone*
- *De la même méthode on pourrait remplacer (2.6)<sub>1</sub> par*

$$\mathbf{a}(x) \frac{\partial u}{\partial x} + P(u) + \lambda u = \mathbf{f}, \quad (2.26)$$

*avec  $\mathbf{a} \in C^1(\Omega)$  tel que  $\mathbf{a}(0) \neq 0$ ,  $\mathbf{a}(1) \neq 0$ . Les conditions aux limites seraient imposées en  $x = 0$  et /ou  $x = 1$ , selon le signe de  $\mathbf{a}(0)$  et  $\mathbf{a}(1)$ .*

## 2.2 Problème d'évolution

Dans cette section, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de l'équation hyperbolique semi-linéaire suivante

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + P(u) = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(0, t) = g(t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est comme ci-dessus, c'est-à-dire que  $p$  satisfait les hypothèses (2.2a), (2.2b) et (2.2c). On suppose que  $f \in L^{m+1/m}(0, T; L^{m+1/m}(\Omega))$ ,  $g \in L^2(0, T)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Le schéma implicite aux différences finies d'Euler pour (2.27) est posé comme suit : On pose  $\Delta t = T/N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et on pose  $u^0 = u_0$ , puis on construit le  $u^n$  pour  $n = 1, \dots, N$  par induction :

$$\begin{cases} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} + \partial_x u^n + P(u^n) = f^n, \\ u^n(0) = g^n, \end{cases} \quad (2.28a)$$

où

$$f^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} f(x, t) dt, \quad g^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} g(x, t) dt. \quad (2.28b)$$

Étant donné  $u^{n-1} \in L^{(m+1)/m}(\Omega)$ , l'existence d'une solution unique  $u^n \in W^{1, (m+1)/m}(\Omega)$  de (2.27) est garantie par le lemme (2.3). Il reste maintenant à prouver quelques estimations indépendantes de  $N$  pour passer à la limite  $k = 1/N \rightarrow 0$ .

### Remarque 2.2

Concernant le problème aux limites (2.26) de la Remarque (2.1), on pourrait aussi étudier le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + a(x, t) \partial_x u + P(u) + \lambda u = f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $a \in C^1(\Omega_T)$  avec  $a(0, t), a(1, t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$ . Les conditions aux limites seraient imposées à  $x = 0$  et  $x = 1$ , selon le signe de  $a(0, t)$  et  $a(1, t)$ .

### 2.2.1 Estimations a priori

En prenant le produit scalaire de chaque côté de (2.28a) avec  $2u^n \Delta t$ , on trouve que

$$2 \langle u^n - u^{n-1}, u^n \rangle + 2\Delta t \langle \partial_x u^n, u^n \rangle + 2\Delta t \langle P(u^n), u^n \rangle = 2\Delta t \langle f^n, u^n \rangle.$$

On utilisant l'identité

$$2 \langle u^n - u^{n-1}, u^n \rangle = \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2, \quad (2.30)$$

l'équation devient

$$\|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2 + 2\Delta t \langle \partial_x u^n, u^n \rangle + 2\Delta t \langle P(u^n), u^n \rangle = 2\Delta t \langle f^n, u^n \rangle$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Young pour le membre de droite, on obtient en rappelant que  $V = L^{m+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2 + 2\Delta t \langle \partial_x u^n, u^n \rangle + 2\Delta t \langle P(u^n), u^n \rangle \\ & \leq 2\Delta t \|f^n\|_{V'} \|u^n\|_V \leq c_m \Delta t \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + \alpha_1 \Delta t \|u^n\|_V^{m+1}, \end{aligned}$$

où  $c_m = 2 \sqrt[m]{2m}/(m+1) \sqrt[m]{\alpha_1 m}$ . A partir de l'hypothèse (2.2b), on trouve que  $\langle P(u^n), u^n \rangle \geq \alpha_1 \|u^n\|_V^{m+1} - \beta_1$ . Cela implique

$$\begin{aligned} & \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2 + \Delta t ((u^n(1))^2 - (g^n)^2) + \alpha_1 \Delta t \|u^n\|_V^{m+1} \\ & \leq c_m \Delta t \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + 2\beta_1 \Delta t. \end{aligned}$$

En additionnant les inégalités ci-dessus pour  $n = 1, \dots, n_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u_0^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} (u^n(1))^2 + \alpha_1 \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n\|_V^{m+1} \\ & \leq c_m \Delta t \sum_{n=1}^N \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + \Delta t \sum_{n=1}^N (g^n)^2 + \|u_0\|^2 + 2\beta_1 T. \end{aligned}$$

on a par (2.28b)

$$\Delta t \sum_{n=1}^N \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} \leq \|f\|_{L^{(m+1)/m}(0,T;V')}^{(m+1)/m} \quad \Delta t \sum_{n=1}^N (g^n)^2 \leq \|g\|_{L^2(0,T)}^2$$

et nous concluons que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u_0^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} (u^n(1))^2 + \alpha_1 \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n\|_V^{m+1} \\ & \leq K_0 = K_0(P, T, f, g) := c_m \|f\|_{L^{(m+1)/m}(0,T;V')}^{(m+1)/m} + \|g\|_{L^2(0,T)}^2 + \|u_0\|^2 + 2\beta_1 T \quad (2.31) \end{aligned}$$

pour tout  $1 \leq n_0 \leq N$ .

Nous avons prouvé les bornes suivantes.

**Lemme 2.4**

$$\begin{cases} \|u^n\|^2 \leq K_0 & \text{pour tout } 1 \leq n \leq N, \\ \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n\|_V^{m+1} \leq \frac{K_0}{\alpha_1}, \\ \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} (u^n(1))^2 \leq K_0, \\ \Delta t \sum_{n=1}^N \|u^n - u^{n-1}\|^2 \leq K_0, \end{cases} \quad (2.32)$$

où  $K_0$  est défini en (2.31), et ne dépend que des données.

## 2.2.2 Passage à la limite

On introduit maintenant deux solution approchées de (2.1), notées  $\mathbf{u}_k$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  avec  $k = \Delta t$  : pour chaque  $t \in I_n := ((n-1)\Delta t, n\Delta t]$ ,  $n = 1, \dots, N$ , nous fixons

$$\mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}^n,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t}(t - n\Delta t) + \mathbf{u}^n, \quad (2.33)$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{u}_k$  est la fonction échelon sur l'intervalle  $(0, T)$  avec des valeurs prises à partir de chaque intervalle  $I_n$ , et est la fonction linéaire par morceaux que interpole  $\mathbf{u}^{n-1}$  et  $\mathbf{u}^n$  sur  $I_n$ . Nous avons d'abord une forme équivalent du schéma (2.28a) comme suit

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k + \partial_x \mathbf{u}_k + \mathbf{P}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{f}_k & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \tilde{\mathbf{u}}_k(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \\ \mathbf{u}_k(0, t) = \mathbf{g}_k(t), \end{cases} \quad (2.34)$$

où  $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}^n$  et  $\mathbf{g}_k = \mathbf{g}^n$  sur  $I_n$ , pour  $n = 1, \dots, N$ .

On déduit de (2.31) l'inégalité suivant pour les solutions approchées :

$$\Delta t \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_k(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}^n|_{x=1}\|_{L^2(0, T)}^2 + \alpha_1 \|\mathbf{u}_k\|_{L^{m+1}(0, T, V)}^{m+1} \leq \mathbf{K}_0(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad (2.35)$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ .

En utilisant (2.2c) et  $\|\mathbf{u}_k\|_{L^{m+1}(\Omega)}$  étant borné, on trouve que  $\|\mathbf{P}(\mathbf{u}_k)\|_{L^{(m+1)/m}(\Omega)}$  est aussi borné. Donc comme  $\mathbf{K} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k \in \text{ensembel borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \mathbf{u}_k \in \text{ensembel borné de } L^{m+1}(0, T; V) = L^{m+1}(\Omega_t), \\ \mathbf{p}(\mathbf{u}_k) \in \text{ensembel borné de } L^{(m+1)/m}(0, T; V'), \\ \mathbf{u}_k(1) \in \text{ensembel borné de } L^2(0, T), \\ \sqrt{\Delta t} \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k \in \text{ensembel borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (2.36)$$

En conséquence des estimation (2.36), nous trouvons à partir de l'équation (2.34) que

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k + \partial_x \mathbf{u}_k \in \text{ensemble born de } L^{(m+1)/m}(0, T; V'). \quad (2.37)$$

Nous avons maintenant une estimation de la distance enter les deux fonctions  $\mathbf{u}_k$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  : des calculs directs montrent que

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \|\tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k\|^2 dt = \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left( \left\| \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \right\| (t - n\Delta t) \right)^2 dt = \frac{1}{3} \left\| \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 \Delta t^3.$$

Cela implique

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k\|_{L^2(\Omega_t)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \|\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k\|_{L^2(\Omega)} \Delta t. \quad (2.38)$$

D'après (2.38) et (2.36)<sub>5</sub>, on trouve

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} = o(\Delta t^{1/2}). \quad (2.39)$$

D'après (2.36) et (2.39), il existe des sous-suites de  $\tilde{\mathbf{u}}_k$  et  $\mathbf{u}_k$  que l'on note encore  $\mathbf{k}$ , et  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap L^{m+1}(\Omega_t))$ ,  $\chi \in L^{(m+1)/m}(0, T; V')$ ,  $\mathbf{k} \in L^2(0, T)$  telles que pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k \rightharpoonup \mathbf{u} & \text{faible-}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et faiblement en } L^{m+1}(\Omega_t), \\ P(\mathbf{u}_k) \rightharpoonup \chi & \text{faiblement en } L^{(m+1)/m}(0, T; V'), \\ \mathbf{u}_k(1) \rightharpoonup \mathbf{k} & \text{faiblement en } L^2(0, T). \end{cases} \quad (2.40)$$

De (2.37), on peut aussi extraire une sous-suite encore notée  $\mathbf{k}$  tel que  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k + \partial_x \mathbf{u}_k$  converge faiblement vers un  $\varepsilon$  dans  $L^{(m+1)/m}(0, T; V')$ . De (2.40)<sub>1</sub>, nous déduisons que  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k, \partial_x \mathbf{u}_k$  converge vers  $\partial_t \mathbf{u}, \partial_x \mathbf{u}$  au sens de distributions respectivement. On a donc que  $\varepsilon = \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u}$ , et que

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k + \partial_x \mathbf{u}_k \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u} \quad \text{faiblement en } L^{(m+1)/m}(0, T; V'), \quad (2.41)$$

On a  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \cap L^{m+1}(\Omega_T))$ ,  $\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u} \in L^{(m+1)/m}(0, T; V') = L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$ . Grâce au lemme (3.2) avec  $U = \Omega_t$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ ,  $P = (m+1)/m$ , les traces  $\mathbf{u}(0, t)$  et  $\mathbf{u}(x, 0)$  ont un sens.

On note maintenant  $\tilde{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_k, \mathbf{f}_k$  les extensions des fonctions  $\mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{f}}_k$  par zéro au domaine  $(-\infty, 1) \times (-\infty, T)$ ;  $\bar{\mathbf{u}}_0$  est l'extension de  $\mathbf{u}_0$  jusque à  $(-\infty, 1)$  et  $\bar{\mathbf{g}}_k$  est l'extension de  $\mathbf{g}_k$  à  $(-\infty, T)$ . Nous déduisons de (2.40)<sub>2</sub>, (2.41) et (2.34)<sub>2,3</sub> que

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}_k(x, t) - \delta_0(t) \bar{\mathbf{u}}_0(x) + \partial_x \bar{\mathbf{u}}_k(x, t) - \delta_0(x) \bar{\mathbf{g}}_k(t) + P(\bar{\mathbf{u}}_k(x, t)) = \bar{\mathbf{f}}_k(x, t),$$

où  $\delta_0$  est la fonction delta de Dirac de masse en 0. En passant à la limite quand  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , on trouve au sens de distribution

$$\partial_t \bar{\mathbf{u}}(x, t) - \delta_0(t) \bar{\mathbf{u}}_0(x) + \partial_x \bar{\mathbf{u}}(x, t) - \delta_0(x) \bar{\mathbf{g}}(t) + \bar{\chi}(x, t) = \bar{\mathbf{f}}(x, t),$$

où  $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\chi}, \bar{\mathbf{f}}$  sont l'extension de  $\mathbf{u}, \chi, \mathbf{f}$  sur  $(-\infty, 1) \times (-\infty, T)$  et  $\bar{\mathbf{g}}$  est l'extension de  $\mathbf{g}$  à  $(-\infty, T)$ .

Cette équation et  $\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u} + \chi = \mathbf{f}$  sur  $\Omega_t$  impliquent

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{u} + \chi = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0(x), \\ \mathbf{u}(0, t) = \mathbf{g}(t). \end{cases} \quad (2.42)$$

### Remarque 2.3

Pour retrouver la condition initiale et la condition aux limites pour (2.42), on peut aussi prendre le produit scalaire de (2.34) avec  $\varphi(x)\psi(t)$  pour  $\varphi(x) \in D(\bar{\Omega})$ ,  $\psi(t) \in D([0, T])$ ,

$\varphi(\mathbf{1}) = \psi(T) = \mathbf{0}$  et effectuer l'intégration par parties pour obtenir

$$- \langle \tilde{\mathbf{u}}_k, \varphi\psi_t \rangle - \langle \mathbf{u}_0, \varphi\psi(\mathbf{0}) \rangle_{L_x^2(\Omega)} - \langle \mathbf{u}_k, \varphi_x\psi \rangle - \langle \mathbf{g}_k, \varphi(\mathbf{0})\psi \rangle_{L_t^2(0,T)} \\ + \langle \mathbf{p}(\mathbf{u}_k), \varphi\psi \rangle = \langle \mathbf{f}_k, \varphi\psi \rangle .$$

On laisse alors  $\mathbf{k}$  tendre vers zéro et on trouve que

$$- \langle \mathbf{u}, \varphi\psi_t \rangle - \langle \mathbf{u}_0, \varphi\psi(\mathbf{0}) \rangle_{L_x^2(\Omega)} - \langle \mathbf{u}, \varphi_x\psi \rangle - \langle \mathbf{g}, \varphi(\mathbf{0})\psi \rangle_{L_t^2(0,T)} + \langle \chi, \varphi\psi \rangle \\ = \langle \mathbf{f}, \varphi\psi \rangle ,$$

Cela implique aussi (2.42).

Il reste à montrer que  $\chi = P(\mathbf{u})$ . Pour cela, soit  $\mathbf{v} \in L^{(m+1)/m}(\mathbf{0}, T; V)$  tel que  $P(\mathbf{v}) \in L^{(m+1)/m}(\mathbf{0}, T; V')$ ; nous considérons

$$\mathbf{X}_k = \int_0^T \langle P(\mathbf{u}_k) - P(\mathbf{v}), \mathbf{u}_k - \mathbf{v} \rangle dt.$$

on voit d'abord que  $\mathbf{X}_k \geq \mathbf{0}$  grâce à la monotonie (2.2a) de  $\mathbf{p}$ , puis on écrit

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^1 + \mathbf{X}_k^2 + \mathbf{X}_k^3,$$

où

$$\mathbf{X}_k^1 = \int_0^T \langle P(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_k \rangle dt, \quad \mathbf{X}_k^2 = \int_0^T \langle P(\mathbf{u}_k), \mathbf{v} \rangle dt,$$

et

$$\mathbf{X}_k^3 = \int_0^T \langle P(\mathbf{v}), (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}) \rangle dt.$$

La faible convergence dans (2.40) montre immédiatement que lorsque  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$  :

$$\mathbf{X}_k^2 \rightarrow \int_0^T \langle \chi, \mathbf{v} \rangle dt \quad \mathbf{X}_k^3 = \int_0^T \langle P(\mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle dt.$$

Pour  $\mathbf{X}_k^1$ , on utilise le schéma (2.34) et on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^1 &= \int_0^T \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt - \int_0^T \langle \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt - \int_0^T \langle \partial_x \tilde{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^N\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_k|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_k\|_{L^2(0,T)}^2 \\ &\leq \int_0^T \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_k|_{t=T}\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_k|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{g}_k\|_{L^2(0,T)}^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

D'après le lemme (3.3) et puisque  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbf{0}, T)$  et  $\mathbf{g} \in L^2(\mathbf{0}, T)$ , on sait que les traces de  $\mathbf{u}$  en  $x = \mathbf{0}, \mathbf{1}$  et  $t = \mathbf{0}, T$  sont des fonction  $L^2$ . Nous avons aussi cette information  $\liminf_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{u}_k|_{t=T}\| \geq \|\mathbf{u}|_{t=T}\|$ ,  $\liminf_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{u}_k|_{x=1}\|_{L^2(0,T)} \geq \|\mathbf{u}|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}$ ,  $\int_0^T \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle dt$  et  $\|\mathbf{g}_k\|_{L^2(0,T)} \rightarrow \|\mathbf{g}\|_{L^2(0,T)}$ . Qui

donnent ensemble

$$\limsup_{k \rightarrow 0} X_k^1 \leq \int_0^T \langle f, u \rangle dt - \frac{1}{2} \|u|_{t=T}\|^2 + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 - \frac{1}{2} \|u|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2} \|g\|_{L^2(0,T)}^2. \quad (2.43)$$

Comme on a  $u \in L^{m+1}(\Omega_T)$  et  $\partial_t u + \partial_x u \in L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$ , d'après le lemme (3.3) appliquer à  $u$  avec  $y = t$ ,  $U = \Omega_T$ ,  $q = \frac{m+1}{m}$  et en utilisant (2.42), on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|u|_{t=T}\|^2 - \|u_0\|^2 + \|u|_{x=1}\|_{L^2(0,T)}^2 - \|g\|_{L^2(0,T)}^2) &= \int_{\Omega_t} \langle u, u_t + u_x \rangle dx dt \\ &= \int_{\Omega_t} \langle u, f - \chi \rangle dx dt. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En combinant (2.43) et (2.44), on trouve que

$$\limsup_{k \rightarrow 0} X_k^1 \leq \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt.$$

Nous concluons finalement que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow 0} X_k &\leq \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt - \int_0^T \langle p(v), u - v \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \chi - P(v), u - v \rangle dt \end{aligned}$$

ce qui, avec  $X_k \geq 0$ , implique que pour tout  $v \in L^{m+1}(0, T; V)$ ,

$$\int_0^T \langle \chi - P(v), u - v \rangle dt \geq 0$$

La méthode standard de Minty (voir[8]) donne alors  $\chi = P(u)$ .

### 2.2.3 Résultat principal de la section 2

#### Théorème 2.1

Supposons que  $f \in L^{(m+1)/m}(0, T; L^{(m+1)/m}(\Omega))$ ,  $g \in L^2(0, T)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$  soient donnés. Alors il existe un unique solution  $u = u(t, x) \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{(m+1)/m}(0, T; L^{m+1}(\Omega))$  vérifiant (2.1) et (2.5).

**Preuve 2.4** L'existence d'une solution  $u$  a été démontrée dans la section 2.2.1, et il suffit donc de montrer l'unicité. Soient  $u_1, u_2$  appartenant à  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{(m+1)/m}(0, T; L^{m+1}(\Omega))$  vérifiant (2.1) – (2.5), soit  $w = u_1 - u_2$ ; on voit alors que  $w$  satisfait

$$\begin{cases} w_t + w_x = P(u_2) - P(u_1) \\ w(t, 0) = 0, \\ w(0, x) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Puisque  $u_1, u_2 \in L^{m+1}(\Omega_T)$ , on trouve d'après (2.45)<sub>1</sub> que  $w_t + w_x$  appartient à  $L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$  par l'hypothèse (2.2b). En appliquant le lemme (3.3) à  $w$  avec  $y = t$ ,  $U = \Omega_t := \Omega * (0, t)$ ,

$p = m + 1$ ,  $q = (m + 1)/m$  et utilisant (2.45)<sub>2,3</sub>, on obtient

$$\int_0^t w(1, t')^2 dt' + \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx = \int_{\Omega_t} w(w_t + w_x) dx dt' \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui, avec (2.45)<sub>1</sub>, implique que

$$\int_{\Omega} w(x, t)^2 dx + \int_{\Omega_t} (u_1 - u_2)(P(u_1) - P(u_2)) dx dt' \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.46)$$

par conséquent, nous pouvons conclure que  $u_1(., t) = u_2(., t)$  pour tout  $t \in [0, T]$  et donc  $u_1 = u_2$ , et nous avons donc complété la preuve.

# Chapitre 3

## Problème à deux dimension

Dans cette section, nous considérons le domaine rectangulaire  $\Omega = (0, 1)^2$  dans  $\mathbb{R}$  et notre but est de montrer l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation hyperbolique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + Au + P(u) = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(0, y, t) = g_1(y, t), & u(x, 0, t) = g_2(x, t), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $Au = \partial_x u + \partial_y u$  et  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est comme dans la section 2 satisfaisant (2.2a)–(2.2c). On suppose que  $f \in L^{(m+1)/m}(0, T; L^{(m+1)/m}(\Omega))$ ,  $g_1 \in L^2(0, T; L_y(0, 1))$ ,  $g_2 \in L^2(0, T; L_x^2(0, 1))$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$ .

Le schéma standard aux différences finies de (3.1) est défini comme suit : Soit  $\Delta t = T/N$ ; on pose  $u^0 = u_0$ , et on construit le  $u^n$  pour  $n = 1, \dots, N$  récursivement en posant

$$\begin{cases} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} + Au^n + p(u^n) = f^n \\ u^n(0, y) = g_1^n(y), & u^n(x, 0) = g_2^n(x), \end{cases} \quad (3.2a)$$

où

$$f^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} f(x, y, t) dt, \quad g_1^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} g_1(y, t) dt, \quad g_2^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} g_2(x, t) dt. \quad (3.2b)$$

On réécrit l'équation (3.2a), comme

$$\begin{cases} \partial_y u^n + \partial_x u^n + P(u^n) + \frac{1}{\Delta t} u^n = f^n + \frac{1}{\Delta t} u^{n-1}, \\ u^n(0, y) = g_1^n(y), & u^n(x, 0) = g_2^n(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

Étant donné  $u^{n-1} \in L^{(m+1)/m}(\Omega)$ , l'existence et l'unicité de  $u^n$  dans  $L^{(m+1)/m}(\Omega)$  est garantie en appliquant le théorème (2.1) avec  $t = y$  et  $P(u) = P(u) + \frac{1}{\Delta t} u$  et on note que  $P(u) + \frac{1}{\Delta t} u$  est strictement monotone grâce à  $\lambda = \frac{1}{\Delta t} > 0$ .

### 3.1 Estimations à priori

Nous utilisons toujours les notations précédentes, c'est à dire que  $V = L^{m+1}(\Omega)$  et  $V' = L^{(m+1)/m}(\Omega)$  sont des espaces duaux l'un de l'autre;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité entre  $L^r(\Omega)$  et  $L^{r'}(\Omega)$ , pour  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  et  $\|\cdot\|$  est la norme dans  $L^2(\Omega)$ .

En prenant le produit scalaire de chaque coté de (3.2a) avec  $2u^n \Delta t$ , et en utilisant l'identité (2.30) on trouve

$$\|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\| + 2 \langle Au^n, u^n \rangle \Delta t + 2 \langle P(u), u^n \rangle \Delta t = 2 \langle f^n, u^n \rangle \Delta t.$$

On utilisant inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young pour le membre de droite, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\| + 2 \langle Au^n, u^n \rangle \Delta t + 2 \langle P(u), u^n \rangle \Delta t \\ \leq 2 \|f^n\|_{V'} \|u^n\|_V \Delta t \\ \leq c_m \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} \Delta t + \alpha_1 \|u^n\|_V^{m+1} \Delta t, \end{aligned}$$

où  $c_m := 2 \sqrt[m]{2m/(m+1)} \sqrt[m]{\alpha_1}$ . On sait par (2.2b) que  $\langle P(u^n), u^n \rangle \geq \alpha_1 \|u^n\|_V^{m+1} - \beta_1$  et cela implique

$$\begin{aligned} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\| + 2\Delta t \langle Au^n, u^n \rangle + \alpha_1 \Delta t \|u^n\|_V^{m+1} \\ \leq c_m \Delta t \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + 2\beta_1 \Delta t. \end{aligned}$$

Comme  $g_1^n \in L_y^2(0,1)$ ,  $g_2^n \in L_y^2(0,1)$  et  $Au^n \in L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$ , on applique le lemme (3.3) avec  $U = \Omega$  et  $a = b = 1$  pour obtenir

$$\begin{aligned} 2 \langle Au^n, u^n \rangle &= 2 \langle \partial_x u^n + \partial_y u^n, u^n \rangle \\ &= \|u^n|_{x=1}\|_{L_y^2(0,1)} - \|g_1^n(y)\|_{L_y^2(0,1)} + \|u^n|_{y=1}\|_{L_x^2(0,1)} - \|g_2^n(x)\|_{L_x^2(0,1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^n\|^2 - \|u^{n-1}\|^2 + \Delta t (\|u^n|_{x=1}\|_{L_y^2(0,1)}^2 \\ + \|u^n|_{y=1}\|_{L_x^2(0,1)}^2) + \alpha_1 \Delta t \|u^n\|_V^{m+1} \\ \leq c_m \Delta t \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + 2\beta_1 \Delta t + \Delta t \|g_1^n(y)\|_{L_y^2(0,1)}^2 + \Delta t \|g_2^n(x)\|_{L_x^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

On additionne les inégalités ci dessus pour  $n = 1, \dots, n_0$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u_0^n\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} (\|u^n|_{x=1}\|_{L_y^2(0,1)}^2 + \|u^n|_{y=1}\|_{L_x^2(0,1)}^2) + \alpha \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n\|_V^{m+1} \\ \leq c_m \Delta t \sum_{n=1}^N \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} + 2\beta_1 T + \Delta t \sum_{n=1}^N \|g_1^n\|_{L_y^2(0,1)}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^N \|g_2^n\|_{L_x^2(0,1)}^2 + \|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Puisque nous avons

$$\Delta t \sum_{n=1}^N \|f^n\|_{V'}^{(m+1)/m} \leq \|f\|_{L^{(m+1)/m}(0,T,V')}$$

$$\Delta t \sum_{n=1}^N \|g_1^n\|_{L_y^2(0,1)}^2 \leq \|g_1\|_{L^2(0,T;L_y^2(0,1))}^2$$

et

$$\Delta t \sum_{n=1}^N \|g_2^n\|_{L_x^2(0,1)}^2 \leq \|g_2\|_{L^2(0,T;L_x^2(0,1))}^2$$

on en déduit que, pour tout  $1 \leq n_0 \leq N$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n - u^{n-1}\|^2 + \|u^{n_0}\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n|_{x=1}\|_{L_y^2(0,1)}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n|_{y=1}\|_{L_x^2(0,1)}^2 \\ & + \alpha_1 \Delta t \sum_{n=1}^{n_0} \|u^n\|_V^{m+1} \leq K_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ou :  $K_0 = c_m \|f\|_{L^{(m+1)/m}(0,T;V')}^2 + \|g_1\|_{L^2(0,T;L_y^2(0,1))}^2 + \|g_2\|_{L^2(0,T;L_x^2(0,1))}^2 + \|u_0\|^2 + 2\beta_1 T$ .

## 3.2 Passage à la limite

Nous introduisons deux solutions approchées  $u_k$  et  $\tilde{u}_k$  définies sur  $t \in I_n := ((n-1)\Delta t, n\Delta t)$ ,  $n = 1, \dots, N$  comme suit :  $u_k$  est la fonction en escalier sur  $I_n$  avec des valeurs tirées de la à droite de chaque intervalle  $I_n$ , et  $\tilde{u}_k$  est la fonction linéaire par morceaux qui interpole  $u^{n-1}$  et  $u^n$  sur  $I_n$ . On a d'abord une forme équivalent du schéma (3.2a) comme suit

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_k + Au_k + P(u_k) = f_k \text{ in } \Omega \times (0, T), \\ u_k(0, y, t) = g_{1k}(y, t), \quad u_k(x, 0, t) = g_{2k}(x, t), \\ \tilde{u}_k(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (3.5)$$

ou  $f_k, g_{1k}$  et  $g_{2k}$  sont les fonctions en escalier sur  $(0, T)$ , respectivement égales à  $f^n, g_1^n$  et  $g_2^n$  sur l'intervalle  $I_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . D'après (3.4), on trouve

$$\begin{aligned} & \Delta t \|\partial_t \tilde{u}_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|u_k(t)\|^2 + \|u^n|_{x=1}\|_{L^2(0,T;L_y^2(0,1))}^2 \\ & + \|u^n|_{y=1}\|_{L^2(0,T;L_x^2(0,1))}^2 + \alpha_1 \|u_k\|_{L^{m+1}(0,T,v)}^{m+1} \leq \kappa_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ .

Donc, comme  $k \rightarrow 0$  :

$$\begin{cases} u_k, \tilde{u}_k \in \text{ensemble borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_k \in \text{ensemble borné de } L^{m+1}(0, T; V) = L^{m+1}(\Omega_T), \\ P(u_k) \in \text{ensemble borné de } L^{(m+1)/m}(0, T; V'), \\ u_k|_{\partial\Omega} \in \text{ensemble borné de } L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)), \\ \sqrt{\Delta t} \partial_t \tilde{u}_k \in \text{ensemble borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.7)$$

En conséquence de ces bornes, à partir de l'eq. (3.5), on trouve que  $\partial_t \tilde{u}_k + Au_k$  est borné dans  $L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$  indépendamment de  $\kappa$ .

De ces borné avec (2.38), on extrait une sous suite encore notée  $\kappa$  telle que pour  $\kappa \rightarrow 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_k, \tilde{\mathbf{u}}_k \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faible-}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et faiblement dans } L^{m+1}(\Omega_T), \\ P(\mathbf{u}_k) \rightharpoonup \chi \text{ faiblement dans } L^{(m+1)/m}(0, T; V'), \\ \mathbf{u}_k|_{\partial\Omega} \rightharpoonup \kappa \text{ faiblement dans } L^2(0, T; \partial\Omega), \\ \partial_t \tilde{\mathbf{u}}_k + A\mathbf{u}_k \rightharpoonup \xi = \partial_t \mathbf{u} + A\mathbf{u} \text{ faiblement en } L^{(m+1)/m}(0, T; V'). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Nous avons  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega_T)$ ,  $\partial_t \mathbf{u} + A\mathbf{u} \in L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$ . Grâce au lemme (3.4) avec  $M = \Omega_T$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{1}$  et  $\mathbf{p} = (m+1)/m$ , les traces  $\mathbf{u}|_{t=0}$  et  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$  font sens. comme dans le cas de dimension un, en étendant tout les fonctions par zéro au domaine  $(-\infty, 1)^2 \times (-\infty, T)$ , en laissant  $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{0}$  et en combinant avec (3.5)<sub>2,3</sub> et (3.8)<sub>2,4</sub> nous trouvons la condition initiale et la condition aux limites pour l'équation limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u} + A\mathbf{u} + \chi = \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{y}, t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{u}(x, 0, t) = \mathbf{g}_2(x, t), \\ \mathbf{u}(x, \mathbf{y}, 0) = \mathbf{u}_0(x, \mathbf{y}). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Grâce au lemme (3.5) avec  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{1}$  et  $\mathbf{u}|_{x=0} = \mathbf{g}_1(\mathbf{y}, 1) \in L^2(0, T; L_y(0, 1))$ ,  $\mathbf{u}|_{y=0} = \mathbf{g}_2(x, t) \in L^2(0, T; L_x(0, 1))$ ,  $\mathbf{u}_0(x, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega)$ , toutes les trace  $\mathbf{u}|_{x=1}$ ,  $\mathbf{u}|_{y=1}$  et  $\mathbf{u}|_{t=T}$  sont des fonctions de carré intégrable, et l'intégration par parties est valable pour  $\langle \partial_t \mathbf{u} + A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ; on peut donc de même (comme dans la section 2.2.2) montrer que

$$\int_0^T \langle \chi - p(v), (\mathbf{u} - v) \rangle dt \geq 0$$

pour tout  $\mathbf{v} \in L^{m+1}(0, T; V)$  et donc par la méthode de Minty  $\chi = P(\mathbf{u})$ . ceci montre que  $\mathbf{u}$  est une solution de (3.1)

### Théorème 3.1

supposons que  $\mathbf{f} \in L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$ ,  $\mathbf{g}_1 \in L^2(0, T; L_y^2(0, 1))$ ,  $\mathbf{g}_2 \in L^2(0, T; L_x^2(0, 1))$  et  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$  sont donnés. Alors il existe une unique fonctions  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega_T)$  vérifiant (3.1).

### Preuve 3.1

L'existence d'une solution  $\mathbf{u}$  a été démontrée dans la section 3.2, et il suffit donc de montrer l'unicité. soit  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  appartiennent à  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(0, T; L^{m+1}(\Omega))$  qui vérifient tout deux (3.1). En fixant  $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ , on voit alors que  $\mathbf{w}$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_t + A\mathbf{w} = P(\mathbf{u}_2) - P(\mathbf{u}_1), \\ \mathbf{W}(t, 0, \mathbf{y}) = \mathbf{W}(t, x, 0) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}(0, x) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Depuis  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in L^{m+1}(\Omega_T)$ , on trouve d'après (3.10), que  $\mathbf{W}_t + A\mathbf{w}$  appartient à  $L^{(m+1)/m}(\Omega_T)$  par hypothèse (2.2b). Application du lemme (3.5) à  $\mathbf{W}$  avec  $\mathbf{z} = \mathbf{t}$ ,  $M = \Omega_t := \Omega \times (0, t)$ ,  $\mathbf{p} = m+1$  et  $\mathbf{q} = (m+1)/m$  et en utilisent (3.10)<sub>2,3</sub>, on obtient cela pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^t \mathbf{w}(x, 1, t')^2 dx dt' + \int_0^1 \int_0^t \mathbf{w}(1, \mathbf{y}, t')^2 dy dt' + \int_\Omega \mathbf{w}(x, \mathbf{y}, t)^2 dx dy \\ & = \int_{\Omega_t} \mathbf{w}(\mathbf{w}_t + \mathbf{w}_x) dx dt', \end{aligned}$$

ce qui, avec (3.10)<sub>1</sub>, implique que

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)^2 d\mathbf{x}d\mathbf{y} + \int_{\Omega_t} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)(P(\mathbf{u}_1) - P(\mathbf{u}_2)) d\mathbf{x}d\mathbf{t}' \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

on peut donc conclure que  $\mathbf{u}_1(\cdot, t) = \mathbf{u}_2(\cdot, t)$  pour tout  $t \in [0, T]$  et donc  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , et on a donc complété la preuve.

### Remarque 3.1

(La générale de l'opérateur  $\mathbf{A}$  et les conditions aux limites). On pourrait étudier la forme générale suivant de  $\mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\partial_x \mathbf{u} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\partial_y \mathbf{u}$  ou  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C^1(\overline{\Omega_T})$  ne sont jamais nuls sur le bord  $\partial\Omega$ . Les condition aux limites imposées sue la frontière  $\partial\Omega$  dépendent des signes de  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  sur la frontière. par exemple, on pourrait imposer les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, \mathbf{y}, t) &= \mathbf{g}_1(\mathbf{y}, t) \quad \text{quand } \mathbf{a}(0, \mathbf{y}, t) > 0, & \mathbf{u}(1, \mathbf{y}, t) &= \mathbf{g}_1(\mathbf{y}, t) \quad \text{quand } \mathbf{a}(1, \mathbf{y}, t) < 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0, t) &= \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{quand } \mathbf{b}(\mathbf{x}, 0, t) > 0, & \mathbf{u}(\mathbf{x}, 1, t) &= \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{quand } \mathbf{b}(\mathbf{x}, 1, t) < 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les conditions aux limites de (3.12) sont strictement dissipatives au sens de [1, Chapitre 3]. Notre résultat principal du théorème (3.1) est toujours valable sans trop changer sa preuve. En effet, les théorèmes (2.1) peuvent être appliqués avec  $\mathbf{t} = \mathbf{y}$  au problème (3.3) induit par le schéma aux différences finies en temps dans le cas général.

# Annexe

## Théorème 3.2

Soit  $J : K \rightarrow \mathbf{R}$  une fonctionnelle semi continue convexe et inférieure, et supposons que une des hypothèses suivantes est vrai

(1)  $K$  est borné

(2)  $J(\mathbf{u}) \rightarrow +\infty$  comme  $\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty$ , et  $\mathbf{u} \in K$

alors  $\inf_{v \in K} J(v) > -\infty$ , et il existe au moins un  $\mathbf{u} \in K$  tel que

$$J(\mathbf{u}) = \inf_{v \in K} J(v).$$

L'ensemble de  $\mathbf{u}$  satisfaisant 3.2 est convexe et fermé. De plus, si  $J$  est convexe, alors il existe un et un seul  $\mathbf{u}$  vérifiant 3.2.

## Théorème 3.3

Soit  $A : X \rightarrow X'$  un opérateur vérifier les propriétés suivantes :

(1)  $A$  est faiblement continue sur un sous espace de dimension fini de  $X$

(2)  $A$  est borne :  $\|A\mathbf{u}\|_{X'}$  est borné si  $\|\mathbf{u}\|_X$  est borné.

(3)  $A$  est monotone :  $\langle A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\langle X', X \rangle} \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$ .

(4) soit l'un des cas suivent :

(a)  $K$  est borné; ou

(b)  $A$  est coercive, c'est à dire :

$$\frac{\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\langle X', X \rangle}}{\|\mathbf{u}\|_X} \rightarrow +\infty \text{ et } \|\mathbf{u}\|_X \rightarrow +\infty, \mathbf{u} \in K$$

Alors pour tout  $\ell \in X'$  il existe au moins un  $\mathbf{u} \in K$  tel que

$$\langle A\mathbf{u} - \ell, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in K.$$

Si de plus,  $A$  est strictement monotone c'est à dire

$$\langle A\mathbf{u} - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle_{\langle X', X \rangle} > 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K, \mathbf{u} \neq \mathbf{v}.$$

Alors il existe un et un seul  $\mathbf{u}$  satisfaisant 3.3.

### **Théorème 3.4 (Théorème de la Trace)**

Dans cette annexe, nous donnons quelques théorèmes de trace que nous avons utilisés.

On fixe  $\mathbf{p}$  tel que  $1 < \mathbf{p} < +\infty$ , et on pose aussi  $\mathbf{q} = \mathbf{p}'$  l'exposant conjugué de  $\mathbf{p}$  (i.e  $1/\mathbf{p} + 1/\mathbf{q} = 1$ ).

#### **Lemme 3.1**

Soit  $\mathbf{X}$  un espace de Banach réflexif, et  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) \in C^0([0, 1])$  tel que  $\lambda(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c}_0$  pour une constante positive  $\mathbf{c}_0$ . Supposons que deux suites de fonction  $\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{g}^\epsilon \in L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$  satisfassent

$$\begin{cases} -\epsilon \mathbf{u}_{xx}^\epsilon + \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{u}_x^\epsilon = \mathbf{g}^\epsilon \\ \mathbf{u}^\epsilon(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_x^\epsilon(1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{g}^\epsilon$  borné dans  $L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$  indépendamment de  $\epsilon, \mathbf{u}_0 \in \mathbf{X}$  et  $\mathbf{p} > 1$ , alors les  $\mathbf{u}_x^\epsilon$  sont bornés dans  $L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$  indépendamment de  $\epsilon$ , et pour tout sous suite  $\mathbf{u}^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{g}^\epsilon \rightarrow \mathbf{g}$  (fortement ou faiblement) convergeant dans  $L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$ ,  $\mathbf{u}^\epsilon(0)$  converge vers  $\mathbf{u}(0)$  dans  $\mathbf{X}$  (faiblement au moins), et donc  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$

#### **Preuve 3.2**

Pour simplifier, on laisse tomber  $\epsilon$  et en résolvant 3.1, on obtient

$$\mathbf{u}_x(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^1 \frac{1}{\epsilon} e^{-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_1} (\lambda(\bar{\mathbf{x}})/\epsilon d\bar{\mathbf{x}})} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \quad (3.2)$$

en prenant la norme  $\mathbf{X}$  de 3.2 et en l'élevant à la puissance  $\mathbf{p}$ , et en utilisant l'inégalité de Hölder, nous trouvons

$$\|\mathbf{u}_x\|_{\mathbf{X}}^{\mathbf{p}} \leq \left( \int_{\mathbf{x}}^1 \frac{1}{\epsilon} e^{-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_1} (\lambda(\bar{\mathbf{x}})/\epsilon d\bar{\mathbf{x}})} d\mathbf{x}_1 \right)^{\mathbf{p}/\mathbf{q}} \int_{\mathbf{x}}^1 \frac{1}{\epsilon} e^{-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_1} (\lambda(\bar{\mathbf{x}})/\epsilon d\bar{\mathbf{x}})} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\|_{\mathbf{X}}^{\mathbf{p}} d\mathbf{x}_1. \quad (3.3)$$

Les calculs directs montrent que la première intégral de 3.3 est inférieure à :

$$\left( \int_{\mathbf{x}}^1 \frac{1}{\epsilon} e^{-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{c}_0/\epsilon d\mathbf{x}_1} d\mathbf{x}_1 \right) = \left( \int_{\mathbf{x}}^1 \frac{1}{\epsilon} e^{-\int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}_1} -\mathbf{c}_0(\mathbf{x}_1-\mathbf{x})/\epsilon} \leq \frac{1}{\mathbf{c}_0}$$

puis en intégrant 3.3 de 0 et 1 par rapport à  $\mathbf{x}$  et en inversant l'ordre d'intégration pour  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1$ , on arrive finalement à

$$\int_0^1 \|\mathbf{u}_x\|_{\mathbf{X}}^{\mathbf{p}} d\mathbf{x} \leq \left(\frac{1}{\mathbf{c}_0}\right)^{\mathbf{p}} \int_0^1 \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{X}}^{\mathbf{p}} d\mathbf{x} \quad (3.4)$$

il s'ensuit que les  $\mathbf{u}$  sont uniformément bornés dans  $L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$ ; donc  $\mathbf{u} \in C_x([0, 1]; \mathbf{X})$ . L'existence de la trace  $\mathbf{u}(0)$  et sa dépendance linéaire continue sur  $\mathbf{u}, \mathbf{g}$  s'ensuit facilement.

**Remarque 3.2** Si la fonction de coefficient dans le terme de convection est négative, c'est à dire au lieu de 3.1 nous avoir

$$\begin{cases} -\epsilon \mathbf{u}_{xx}^\epsilon - \lambda(\mathbf{x}) \mathbf{u}_x^\epsilon = \mathbf{g}^\epsilon, \\ \mathbf{u}^\epsilon(1) = \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_x^\epsilon(0) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

pour deux séquences  $\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{g}^\epsilon \in L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$ , alors le même résultat que dans le lemme 3.2 s'ensuit; c'est à dire que les  $\mathbf{u}_x^\epsilon$  sont bornés dans  $L_x^{\mathbf{p}}(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$  indépendamment de  $\epsilon$  et

aussi pour toute sous suite  $\mathbf{u}^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{g}^\epsilon \rightarrow \mathbf{g}$  qui convergent (fortement ou faiblement) dans  $L_x^p(\mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{X})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{1})$  converge vers  $\mathbf{u}(\mathbf{1})$  en  $X$  (faiblement au moins), et donc  $\mathbf{u}(\mathbf{1}) = \mathbf{u}_1$ .

Soit  $U = (\mathbf{0}, L_1) \times (\mathbf{0}, L_2)$  un sous ensemble de  $\mathbf{R}^2$  et on considère l'espace :

$$\chi(U) = \{\mathbf{u} \in L^p(U), T\mathbf{u} = a\mathbf{u}_x + b\mathbf{u}_y \in L^p(U)\}$$

muni de sa norme naturelle  $(\|\mathbf{u}\|_{L^p(\mathbf{u})}^p + \|T\mathbf{u}\|_{L^p(\mathbf{u})}^p)^{1/p}$  ou  $L_1$  et  $L_2$  sont des constantes positives, et  $a$  et  $b$  sont des constantes non nulle. on a alors le résultat de trace suivant.

### Lemme 3.2

Si  $\mathbf{u} \in \chi(U)$ , alors les traces de  $u$  sont définies sur tout  $\partial\mathbf{u}$ , c'est à dire que les traces de  $u$  sont définies en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $L_1$  et  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,  $L_2$  et ils appartiennent aux espaces respectifs  $W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2)$  et  $W_x^{-1,p}(\mathbf{0}, L_1)$ . De plus, les opérateurs de trace sont linéaires continus dans les espace correspondants, par exemple,  $\mathbf{u} \in \chi(U) \rightarrow \mathbf{u}|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$  est continue de  $\chi(U)$  dans  $W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2)$ .

### Preuve 3.3

Puisque  $\mathbf{u} \in L^p(\mathbf{u})$ , on voit que  $\mathbf{u}_y$  appartient à  $L_x^p(\mathbf{0}, L_1; W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2))$  ce qui, avec  $T\mathbf{u} \in L^p(\mathbf{u})$  et  $a, b$  non nuls, implique que  $\mathbf{u}_x \in L_x^p(\mathbf{0}, L_1; W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2))$ . en combinaison avec  $\mathbf{u} \in L_x^p(\mathbf{0}, L_1; L_y^p(\mathbf{0}, L_2))$ , on obtient que  $\mathbf{u} \in C_x([0, L_1]; W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2))$ . par conséquent, les traces de  $u$  sont bien définies en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  et  $L_1$ , et appartiennent à  $W_y^{-1,p}(\mathbf{0}, L_2)$ . La continuité des applications correspondantes est facile. la preuve pour les traces en  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  et  $L_2$  est similaire.

### Lemme 3.3

Supposons que  $\mathbf{u} \in L^p(U)$  et  $TU \in L^q(U)$  avec  $\mathbf{a}, \mathbf{b} > \mathbf{0}$ . alors par le lemme 3.2 avec  $\mathbf{p} = \min \mathbf{p}, \mathbf{q}$ , on sait que les traces de  $u$  sur  $\partial\mathbf{u}$  sont bien définies. de plus, on suppose que les trace  $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \in L^2(\mathbf{0}, L_2)$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \in L^2(\mathbf{0}, L_1)$ . puis les traces  $\mathbf{u}(L_1, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, L_2)$  appartiennent à  $L^2(\mathbf{0}, L_2)$ ,  $L^2(\mathbf{0}, L_1)$  respectivement, et l'identité est vrai

$$\begin{aligned} \int_U \mathbf{u}(T\mathbf{u}) d\mathbf{x}d\mathbf{y} &= \frac{\mathbf{a}}{2} (\|\mathbf{u}(L_1, \mathbf{y})\|_{L^2(\mathbf{0}, L_2)}^2 - \|\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{y})\|_{L^2(\mathbf{0}, L_2)}^2) \\ &\quad + \frac{\mathbf{b}}{2} (\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, L_2)\|_{L^2(\mathbf{0}, L_1)}^2 - \|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|_{L^2(\mathbf{0}, L_1)}^2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Preuve 3.4** Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ . on note d'abord par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  les bornes  $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} = L_1, \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = L_2$  respectivement, puis on introduit un nouveau système de coordonnées  $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$  tel que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \mathbf{a}^2} \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix}$$

on note par  $\Gamma'_i$  image de  $\Gamma_i$ , par cette transforme pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  ; on note aussi  $U'$  image de  $U$  et on note  $U'$  la transformation de  $U$ . Soit  $(\alpha_{y'}, y')$  et  $(\beta_{y'}, y')$ . Être les points d'extrémité de l'intersection de  $U'$  avec la ling  $y'$  fixe,  $(\alpha_{y'}, y') \in \Gamma'_1$  ou  $\Gamma'_3$ ,  $(\beta_{y'}, y') \in \Gamma'_2$  ou  $\Gamma'_4$  (voir fig 1)

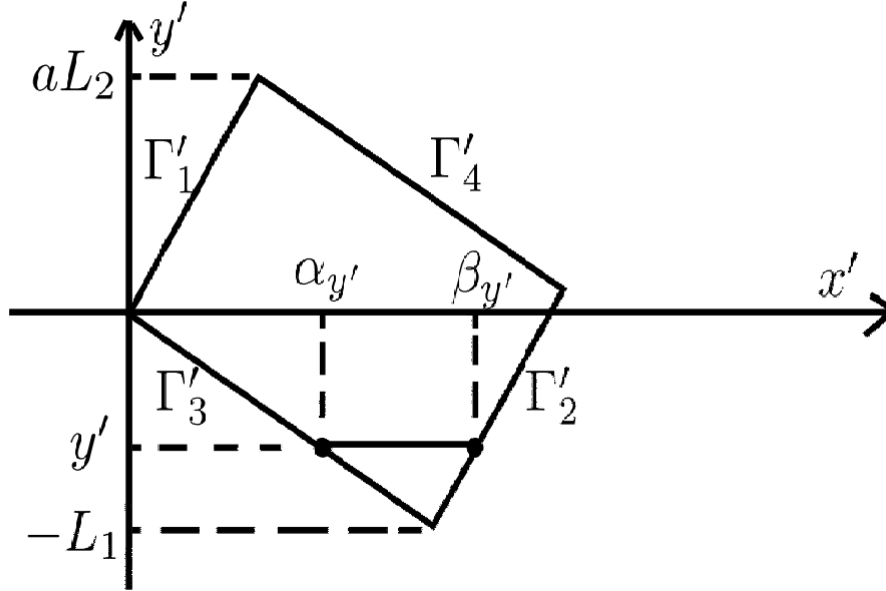


FIGURE 3.1 – Le domaine  $u'$

Le calcul direct montre que

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{1}{1+a^2} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{1+a^2} T u.$$

Donc, pour  $u \in L^p(u)$  et  $Tu \in L^q(u)$ , on voit que  $u' \in L^p(U')$  et  $u'_x \in L^q(U')$ , ce qui montre que  $u'_x$  appartient à  $L^1(U')$  par l'inégalité de Holder. Donc pour  $y'$  fixé, on voit que

$$u'(\beta_{y'}, y')^2 = u'(\alpha_{y'}, y')^2 + 2 \int_{\alpha_{y'}}^{\beta_{y'}} u'(x', y') u'_x(x', y') dx'. \quad (3.7)$$

En intégrant 3.7 par rapport à  $y'$  de  $-L_1$  à  $L_2$ , on obtient

$$\int_{-L_1}^{aL_2} u'(\beta_{y'}, y')^2 dy' = \int_{-L_1}^{aL_2} u'(\alpha_{y'}, y')^2 dy' + 2 \int_{-L_1}^{aL_2} \int_{\alpha_{y'}}^{\beta_{y'}} u'(x', y') u'_x(x', y') dx' dy'. \quad (3.8)$$

Puisque les trace de  $u$  en  $\Gamma_1 = x = 0$  et  $\Gamma_3 = y = 0$  sont des fonction  $L^2$ , on a aussi que les trace de  $u'$  en  $\Gamma'_1$  et  $\Gamma'_3$  sont des fonction  $L^2$ . On déduit donc de (3.8) que les trace de  $u'$  en  $\Gamma'_2$  et  $\Gamma'_4$  sont des fonction  $L^2$ , ce qui montre que les trace de  $u$  en  $\Gamma_2 = x = L_1$  et  $\Gamma_4 = y = L_2$  sont des fonction  $L^2$ .

Maintenant, en retransformant dans les système d'origine  $(x, y)$ , (3.8) équivaut à

$$\begin{aligned} a \int_0^{L_2} u(L_1, y)^2 dy + \int_0^{L_1} u(x, L_2)^2 dx &= a \int_0^{L_2} u(0, y)^2 dy + \int_0^{L_1} u(x, 0)^2 dx \\ &+ \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} u(Tu) dx dy \end{aligned}$$

qui est (3.6) dans le cas  $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ . Nous terminons ainsi la preuve.

Les lemmes (3.2) et (3.3) sont également valables dans le cas tridimensionnel. nous les énonçons comme suit. soit  $M = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$  un sous ensemble de  $\mathbf{R}^3$ , et on considère l'espace :

$$\chi(M) = \{u \in L^p(M), Tu = au_x + bu_y + cu_z \in L^p(M)\}$$

muni de sa norme naturelle  $(\|u\|_{L^p(M)}^p + \|Tu\|_{L^p(M)}^p)^{1/p}$ , ou  $L_1, L_2, L_3$  sont des constantes positives, et  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  sont des constantes non nulles. On a alors le résultat de la trace suivant.

### Lemme 3.4

Si  $u \in \chi(M)$ , alors les traces de  $u$  sont définies sur tout  $\partial M$ . C'est à dire que les traces de  $u$  sont définies en  $x = 0, y = 0, L_2$  et  $z = 0, L_3$ , et elles appartiennent à les espaces respectifs  $W_{y,z}^{-1,p}((0, L_2) \times (0, L_3)), W_{x,z}^{-1,p}((0, L_1) \times (0, L_3))$ . Les opérateurs de trace sont linéaires continus dans les espaces correspondants.

### Lemme 3.5

Supposons que  $u \in L^p$  et  $Tu \in L^q$  avec  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} > 0$ . Alors par le lemme (3.4) avec  $p = \min\{p, q\}$ , on sait que les traces de  $u$  sur  $\partial u$  sont bien défini. De plus, nous supposons que les traces  $u|_{x=0}, u|_{y=0}, u|_{z=0}$  sont des fonctions  $L^2$  par rapport aux domaines correspondants. alors les traces  $u|_{x=L_1}, u|_{y=L_2}, u|_{z=L_3}$  sont aussi des  $L^2$  fonctions, et d'identité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \int_M u(Tu) dx dy dz &= \frac{\mathbf{a}}{2} (\|u|_{x=L_1}\|_{L^2}^2 - \|u|_{x=0}\|_{L^2}^2) + \frac{\mathbf{b}}{2} (\|u|_{y=L_2}\|_{L^2}^2 - \|u|_{y=0}\|_{L^2}^2) \\ &+ \frac{\mathbf{c}}{2} (\|u|_{z=L_3}\|_{L^2}^2 - \|u|_{z=0}\|_{L^2}^2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

La preuve des lemmes (3.4) et (3.5) est le même que la preuve des lemmes (3.2) et (3.3) en utilisant la transformation de coordonnées suivante adaptée pour le lemme (3.5) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & c & -b \\ \frac{b^2 + c^2}{a} & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Bibliographie

- [1] S. Benzoni-Gavage and D. Serre, Multi-dimensional Hyperbolic partial Differential Equations, Oxford univ. press, 2007.
- [2] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 5, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1973, Notas de matematica (50).
- [3] F.E. Browder, Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, Bull. Amer. Math. soc. 71 (1965), 780-785.
- [4] I. Ekeland and R. Témam, Convex Analysis and Variational Problems, English edn, Classics in Applied Mathematics, Vol. 28, society for industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999 (transl. from French).
- [5] R.T. Glassey, Blow-up theorems for nonlinear wave equations, Mathematische Zeitschrift **132** (1973), 183-203 (English).
- [6] C.-Y. Jung and D. pham, Singular perturbation of semi-linear reaction-convection equations in a channel and numerical applications, Adv. Differential Equations **12** (3) (2007), 265-300.
- [7] J. Kacur, Application of Rothe's method to perturbed linear hyperpolic equation and variational inequalities, CZechoslo-vak Math. J. **34(109)**(1) (1984), 92-106.
- [8] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969.
- [9] J.-L. Lions, perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer-verlage, Berlin, 1973.
- [10] Y. Liu, On potential wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations, Journal of Differential Equations **192**(1) (2003), 155-169.
- [11] E. Martensen, The Roth method for the wave equation in several space dimensions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A84**(1,2) (1979), 1-18.

- [12] G.J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, *Duke Math. J.* **29** (1962), 341-346.
- [13] G.J. Minty, On a "monotonicity" method for the solution of non-linear equations in Banach spaces, *proc. Nat. Acad. Sci. USA* **50** (1963), 1038-1041.
- [14] C.-D. Munz, On the Convergence of the Rothe Method for Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *Problems of Applied Analysis (Oberwolfach, 1985)*, *Methoden Verfahren Math. Phys.*, Vol. 33, Lang, Frankfurt am Main, 1987, pp. 27-40.
- [15] R.E. O'Malley, Jr., *Introduction to singular Perturbations*, *Applied Mathematics and Mecahanics*, Vol. 14, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.
- [16] D.H. Sattinger, On global solution of nonlinear hyperbolic equation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **30** (1968), 148-172.
- [17] J.-c. Saut and R. Temam, An intial Boundary-value problem for the Zakharov-Kuznetsov equation, *Adv. Differential Equations* **15**(11,12) (2010), 1001-1031.
- [18] R. Temam, *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, *Studies in Mathematics and Its Applications*, Vol. 2, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1977.
- [19] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001 (Reprint of the 1984 edn).