

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : COSD

Thème

*Applications des systèmes chaotiques
dans la transmission sécurisée des données*

Présenté par :

Boucenna Ahlem

Soutenu publiquement le : xx/xx/2025

Devant le jury composé de :

L. BOUZETTOUTA	M.C.A,	Université de Skikda	Président
A. BOUCENNA	M.C.B,	Université de Skikda	Encadrant
K. SLIMANI	M.C.A,	Université de Skikda	Examinateur

Année universitaire : 2024/2025

إهداء

يكل حب وتقدير أقدم لنفسي أحر التهاني على التخرج وإتمام سنوات دراستي وأتمنى من كل قلبي أن يوفقني الله في كل ما هو آت.

كما أهدي تخرجي إلى فيض الحب والحنان أُمي الغالية رحمها الله وإلى النبض الساكن في عروقي تحية خاصة إلى والدي الكريم أدامك الله لي وحفضك.

كما أهديه إلى أخواتي العزيزات وأخوي الغاليين أدامهم الله سندا لي.

كما اخص هذا الإهداء إلى رفيق الدرب زوجي الغالي وأولادي حفصهم الله ورعاهم لي. وإلى كل من ساهم من قريب وبعيد في وصولي إلى هذه الفرحة.

بوسنة أحلام

ملخص

هذه المذكرة تبحث في الأنظمة الديناميكية الفوضوية وتطبيقاتها في نقل البيانات الآمن. تنقسم إلى ثلاثة فصول رئيسية: مقدمة في الأنظمة الديناميكية المستمرة، تحليل خصائص الفوضى، وطرق المزامنة للتطبيقات التشفيرية. تعتمد الدراسة على نماذج مثل نظامي لورنز وراوسلر، وتقترح تقنيات مبتكرة للاتصال الآمن، مدعومة بمحاكاة رقمية. الكلمات المفتاحية: الأنظمة الفوضوية، التزامن، التحكم الفعال، التحكم المنسجم، الاتصالات الآمنة.

Abstract

This thesis investigates chaotic dynamical systems and their applications in secure data transmission. It is organized into three main chapters : an introduction to continuous dynamical systems, an analysis of chaos characteristics, and synchronization methods for cryptographic applications. The study leverages models such as Lorenz and Rössler systems, and proposes innovative techniques for secure communication, supported by numerical simulations.

Keywords : Chaotic systems, synchronization, active controller, adaptive controller, secure communication.

Résumé

Ce mémoire explore les systèmes dynamiques chaotiques et leurs applications dans la transmission sécurisée de données. Il est structuré en trois chapitres principaux : une introduction aux systèmes dynamiques continus, une analyse des caractéristiques du chaos, et des méthodes de synchronisation pour des applications en cryptographie. Les travaux s'appuient sur des modèles comme ceux de Lorenz et Rössler, et proposent des techniques innovantes pour la communication sécurisée, illustrées par des simulations numériques.

Mots-clés : Systèmes chaotiques, synchronisation, contrôle actif, contrôle adaptatif, communication sécurisée.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie les plus sincères je les exprimes à Allah tout puissant, le Miséricordieux qui me donne la force, le courage et la patience, puis la réussite.

Je exprime toutes mon profonde reconnaissance à mon encadreur

Dr. Boucenna Ahcene, maître de conférences à l'université de Skikda, pour tout l'effort qu'il a fourni pour ma faciliter et aider à accomplir mon projet de fin d'étude, et aussi pour le choix de ce thème riche et moderne.

Ma considérable remerciement, s'adresse également au

Dr. Bouzettouta Lamine, maître de conférences à l'université de Skikda, qui m'a honoré pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

JE remercie chaleureusement **Dr. Slimani Kamel**, maître de conférences à l'université de Skikda, pour avoir accepté d'être membre de jury, et évaluer mon travail. je n'oublie pas aussi l'ensemble de tous mes enseignants et collègues du cycle universitaire, que je les envoix mes sincères expressions de l'appréciation et du respect.

Table des matières

1	Système dynamique à temps continu	9
1.1	Définition d'un système dynamique à temps continu	9
1.1.1	L'espace des phases	10
1.1.2	L'espace d'état	10
1.1.3	Orbites ou trajectoires	11
1.1.4	Points périodiques et cycles limite	11
1.2	Points d'équilibre	11
1.2.1	Linéarisation des systèmes non linéaires	12
1.2.2	Théorème de Hartmann-Grobman	13
1.3	Attracteurs	13
1.3.1	Notion d'attracteur	13
1.4	Stabilité des points d'équilibre	14
1.4.1	Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu [37]	15
1.4.2	Méthode des fonctions de Lyapunov	16
1.5	Bifurcations	17
1.5.1	Définitions de bifurcation	17
1.5.2	Diagramme de bifurcation	18
1.5.3	Différents types de Bifurcation	18
2	Systèmes dynamiques chaotiques	25
2.1	Bref historique sur le chaos	25
2.2	Caractéristique du chaos	27
2.2.1	Sensibilité aux condition initiales :	27
2.2.2	Le déterminisme :	28
2.2.3	L'aspect aléatoire :	28
2.2.4	Attracteurs étranges :	28
2.3	Outils de quantification et mesure du chaos	29
2.3.1	Exposants de Lyapunov :	29
2.3.2	L'algorithme de Wolf :	31
2.4	Exemples de systèmes dynamiques à temps continu chaotiques	33
2.4.1	Modèle de Lorenz	33
2.4.2	Modèle de Rössler	36
3	Applications des systèmes chaotiques dans le domaine de transmission sécurisée de données	41
3.1	Synchronisation du chaos	41
3.1.1	Nécessité de la synchronisation	42
3.1.2	Types de synchronisation	42
3.1.3	Méthodes de synchronisation	44

3.1.4	Exemple de synchronisation complète	48
3.2	Techniques de communications sécurisées à base du chaos	49
3.2.1	Chiffrement par addition	49
3.2.2	Modulation paramétrique	50
3.3	Communications sécurisées par la synchronisation du système de Lü	50
3.3.1	Modulation	51
3.3.2	Émetteur	51
3.3.3	Récepteur	51
3.3.4	Démodulation	53
3.3.5	Résultats de simulation	54

Introduction Générale

Trois révolutions au bout du vingtième siècle dans les sciences, dont la première concerne l'univers et la relativité de **Newton**¹ sur le problème de la stabilité du système solaire, et la seconde l'équation de **Schrödinger**² menant à la mécanique quantique, certains auteurs considèrent une troisième révolution, relative au comportement chaotique des systèmes dynamiques en général. Ils sont développés durant le XIXème siècle ; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français **Henri Poincaré**³ avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales[26]. Il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Puis, plusieurs recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées, **Alexandre Lyapunov**⁴, le mathématicien russe qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, et **Edward Lorenz**⁵ météorologue américain analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents. C'est d'ici les premiers pas pour comprendre le chaos déterministe.

1. Isaac Newton (1642-1727), est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle.

2. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (12 août 1887 à Vienne - 4 janvier 1961) est un physicien, philosophe et théoricien scientifique autrichien.

3. Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

4. Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

5. Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Massachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases"; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire et donc prévisible.

Simultanément aux recherches sur la chaos dans les systèmes dynamiques, un axe de recherches en mathématiques s'est élargi parallèlement, s'intéresse à la synchronisation des mouvements chaotiques, un thème attire l'attention de plusieurs chercheurs, parmi eux en trouve Yamada et Fujisaka [35] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, Afraïmovich et Al. ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [28]. ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre approche plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rulkov et Al. ont posé les bases. En raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations,[1], et la cryptographie [17], les systèmes dynamiques chaotiques jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques, ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques. Par conséquent, il est important de considérer la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

Ce mémoire se structure autour de trois chapitres interconnectés :

Systèmes dynamiques à temps continu : Ce chapitre introduit les bases des systèmes dynamiques, incluant les définitions, les concepts d'espace des phases, les orbites, les points d'équilibre, et les attracteurs. Il aborde également la stabilité selon Lyapunov et les bifurcations, essentielles pour comprendre les transitions entre régimes ordonnés et chaotiques.

Systèmes dynamiques chaotiques : Ce chapitre explore les caractéristiques du chaos, telles que la sensibilité aux conditions initiales, la non-linéarité, et les attracteurs étranges. Il présente également des outils de quantification comme les exposants de Lyapunov et les dimensions fractales, illustrés par des exemples emblématiques tels que les systèmes de Lorenz et de Rössler.

Applications du chaos dans la transmission sécurisée de données : Ce chapitre examine les méthodes de synchronisation des systèmes chaotiques, comme la synchronisation complète ou projective, et leur utilisation dans des techniques de chiffrement et de communication sécurisée. Des exemples concrets, comme la modulation paramétrique, y sont détaillés.

1. Système dynamique à temps continu

L'objectif de ce chapitre est de disposer des éléments théoriques nécessaires à l'analyse du comportement d'un système dynamiques. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques chaotiques. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, des notions sur la stabilité et les méthodes générales d'étude de cette propriété, puis nous donnerons les différents types de points fixes selon leur stabilité, notion de bifurcation..ect

1.1 Définition d'un système dynamique à temps continu

On peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps continu.

Définition 1.1. *L'évolution du système dynamique continu est quant à lui défini par une équation différentielle du premier ordre EDO, où le temps est la variable décrivant l'évolution du système :*

$$\begin{cases} x' = f(x, \mu, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

telles que :

- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$: est le champ de vecteur, qui désigne la dynamique du système (1.1)
- $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état
- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in V \subset \mathbb{R}^r$: le vecteur des paramètres

Remarque 1.1. — *Lorsque l'application f dépend explicitement du temps le système (1.1) est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que le système (1.1) est autonome.*

- *Lorsque l'application f est continue et vérifie la condition Lipschitzienne sur un certain intervalle I de la variable x , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution pour toute condition initiale $x_0 \in I$.*

Définition 1.2. *Une solution du système (1.1) est une fonction $t \rightarrow x(t)$, définie d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans U telle que pour tout $t \in I$ on a $x' = f(x, \mu, t)$.*

Remarque 1.2. *Les systèmes dont on ne connaît pas de solution analytiques, leur étude inclut la résolution numérique des équations différentielles en utilisant les méthodes de Runge-Kutta ou Euler.*

Définition 1.3. (Flot) : Soit le système (1.1) pour un point initial x_0 donné, on note $\varphi^t(x_0) = x(t)$ la trajectoire issue de ce point au temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\varphi^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d\varphi^t(x_0)}{dt} = f(\varphi^t(x_0))$$

L'application $\varphi^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est appelée le flot au temps $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le flot est une solution du système différentiel qui décrit l'évolution d'un système dynamique [21].

1.1.1 L'espace des phases

Définition 1.4. Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état, qui ont la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire, appelée également une orbite.

Pour une condition initiale et un jeu de paramètres $\vec{\mu}$ donnés, ce système admet une solution unique. Pour représenter graphiquement l'évolution du système, deux méthodes sont possibles.

La première méthode, classique, consiste à tracer n diagrammes temporels de la forme $x_i(t)$. Ce type de représentation n'est pas complètement satisfaisant pour deux raisons :

- Il n'est pas possible de voir plus d'une dizaine de courbes. L'analyse de l'influence des conditions initiales est donc très partielle. Seule une dizaine de cas sont testés.
- Il n'est pas possible de repérer visuellement la nature de certaines évolutions. Par exemple, il n'est pas possible de prévoir si un système apparemment stable qui oscille autour d'un état va le rester ou bien diverger aux temps très longs.

La deuxième méthode, répandue dans le domaine des systèmes dynamiques, consiste à tracer la **trajectoire** du système dans l'espace des degrés de liberté que l'on appelle **espace des phases**. Cet espace comporte n dimensions et ses axes sont x_1, \dots, x_n . Il peut être égal à \mathbb{R}^n ou bien être plus petit que ce dernier. Dans cette représentation, le temps ne figure pas explicitement. Le point représentant l'état du système se déplace sur une trajectoire lorsque le temps s'écoule (à une vitesse que le graphique n'indique pas). Parfois, les trajectoires sont désignées par le vocable orbites [23].

Définition 1.5. L'espace des phases est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.1.2 L'espace d'état

Définition 1.6. L'espace d'état est un ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système.

1.1.3 Orbites ou trajectoires

Définition 1.7. On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{cases} \varphi : G \longrightarrow M \\ t \longrightarrow \varphi^t(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

Remarque 1.3. Une trajectoire est une solution du système différentiel. On considère le système dynamique continu (1.1) l'orbite est définie par :

$$O(x_0) = \{x(t); -\infty < t < +\infty\} \quad (1.4)$$

Définition 1.8. On appelle orbite d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est-à-dire le sous-ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par : $\gamma(x) = \varphi_t(x)$. [20].

Définition 1.9. Soit $x(t)$ la solution du système (1.3) issue de la condition initiale $x(0)$. La trajectoire $x(t)$ dans l'espace d'état est appelée trajectoire de phase ou orbite du système, issu de la condition initiale $x(0)$.

1.1.4 Points périodiques et cycles limite

Définition 1.10. Soit le système (1.1), un point x est dit T -périodique : $\forall t \in \mathbb{R} : x(t+T) = x(t)$ et $x(t+\bar{T}) = x(t)$, pour $0 < \bar{T} < T$, est alors appelé la période de la solution.

Définition 1.11. L'image d'une solution x est appelée orbite (trajectoire) et notée :

$$\gamma(x) = \{a \in \Omega; \exists t \in I : x(t) = a\} \quad (1.5)$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur f .

Remarque 1.4. Caractérisant un régime périodique, la solution possède une seule fréquence de base.

Remarque 1.5. Une orbite périodique $O(x)$ est toujours une suite de points périodiques. Tous ces points s'appellent point périodique de période T .

Définition 1.12. (Cycles limite) : le système suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.6)$$

telle que P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Un cycle limite C est une trajectoire fermée isolée dans l'espace, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

1.2 Points d'équilibre

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibres du système.

En général, on ne sait pas résoudre explicitement des équations différentielles non linéaires. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points fixes du système (1.1).

En ces points fixes, la vitesse s'annule : $x' = 0$

Définition 1.13. Un point d'équilibre du système (1.1) est un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$.

Remarque 1.6. Le point fixe géométriquement est une intersection entre la courbe de notre fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses $y = 0$.

Exemple 1.1. Les points fixes de $x' = x^2 - 1$ sont deux points : $x^* = 1$ et $x^* = -1$.

Exemple 1.2. On considère la fonction f :

$$f(x) = \mu + \frac{x}{1+x^2}$$

Les racines de $f(x) = 0$ sont :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -\mu(1+x^2) = x \iff -\mu - \mu x^2 - x = 0 \\ &\iff \mu x^2 + x + \mu = 0 \\ &\iff \Delta = 1 - 4\mu^2 \end{aligned}$$

Doc l'équation possède :

$$\begin{cases} 2 \text{ solutions réelles si } \Delta > 0 \text{ c'est-à-dire } -\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ solution double si } \Delta = 0 \text{ c'est-à-dire } \mu = \pm \frac{1}{2} \\ \Delta < 0 \text{ solution réelle sinon} \end{cases}$$

1.2.1 Linéarisation des systèmes non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (1.7)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, et $f = (f_1, \dots, f_n)$ et soit x^* un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre x^* .

La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage du point x^* comme suit :

$$\varepsilon' + x'^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.8)$$

où $J_f(x^*)$ est la matrice Jacobienne de la fonction f définie par :

$$J_f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^*} \quad (1.9)$$

Comme $f(x^*) = x'^*$, alors l'équation (1.10) devient :

$$\varepsilon'(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.10)$$

L'écriture (1.12) veut dire que le système (1.9) est linéarisé.

1.2.2 Théorème de Hartmann-Grobman

Le système dynamique (1.9). Soit x^* un point fixe du système (1.9) et soit $J_f(x^*)$ la matrice Jacobienne au point x^* , alors le théorème d'Hartmann-Grobman s'énonce :

Théorème 1.1. *Si $J_f(x^*)$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certains voisinages U de x^* .*

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.9) à la dynamique du système linéarisé (1.12).

1.3 Attracteurs

1.3.1 Notion d'attracteur

Définition 1.14. *Un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de la région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.*

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques :

Attracteurs réguliers

Définition 1.15. *Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent des "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines, et peuvent être de deux sortes :*

- **Un point fixe** : la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.
- **Un cycle limite** : la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases, par exemple.

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires de "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue [2].

Attracteurs étranges

L'expression d'un attracteur étrange a été utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens, il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique.

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qu'on trouve dans la littérature sont restrictives.

Définition 1.16. *Un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.*

Remarque 1.7. Les différents types d'attracteurs étranges : Les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principaux : attracteur hyperbolique, Quasi-attracteur, et attracteur de type Lorenz.

Remarque 1.8. On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes, Il s'agit des nœuds stables et des foyers stables, représentés (Figure 1.1)

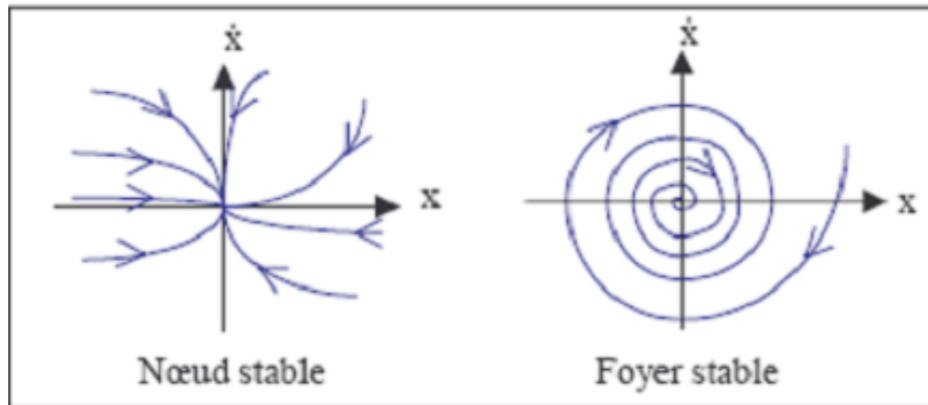


FIG. 1.1: Points fixes attracteurs

Exemple 1.3. Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases} \quad (1.11)$$

l'origine est le seul point critique pour ce système (1.13).

On voit sur la Figure 1.2 que le point critique $(0, 0)$ est un attracteur positif.

1.4 Stabilité des points d'équilibre

Le concept de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points fixes. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point fixe. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point fixe en reste toujours suffisamment proche.

Les systèmes dynamiques sont nombreux et variés. Nous étudions la nature qualitative de l'état des systèmes dynamiques continus : est-il stable ou instable .

Définition 1.17. x^* est un point d'équilibre (critique) du système non linéaire (1.9) et λ_i , $i = (1, \dots, n)$: les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$, est appelé **puits** si toutes les λ_i , $i = (1, \dots, n)$ ont des parties réelles négatives, d'où x^* est stable. Il est appelé **source** si toutes les λ_i , $i = (1, \dots, n)$ ont des parties réelles positives, d'où x^* est instable.

Définition 1.18. (Centre) : Un point fixe est dit **centre** si le déterminant du Jacobien du système (1.1) est positif et est de trace nulle (i.e $\det(J) > 0$ et $\text{tr}(J) = 0$), alors les valeurs propres sont imaginaires pures (c'est-à-dire $\text{Re}(\lambda_i) = 0$).

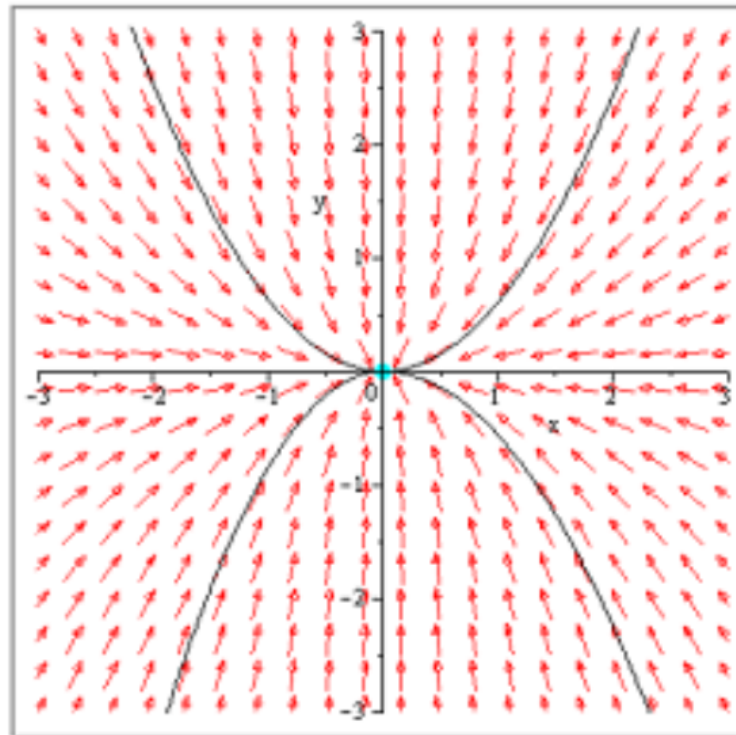


FIG. 1.2: Attracteur positif

Exemple 1.4. (Centre) : Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -4x \end{cases} \quad (1.12)$$

On a par comparaison du système (1.2) et (1.14) :

$$\begin{cases} y = f(x, y) \\ -4x = g(x, y) \end{cases} \quad (1.13)$$

alors le point d'équilibre est $(0, 0)$

donc la matrice Jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{tr}(J) = 0$, $\det(J) = 4 > 0 \implies$ par la définition (du centre) : le point d'équilibre est un centre.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu [37]

Définition 1.19. Le point d'équilibre du système (1.1) est stable au sens de Lyapunov si pour des conditions initiales x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|x(t, t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.14)$$

Définition 1.20. Le point d'équilibre du système (1.1) est **attractif** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, x_0) - x^*) = 0 \quad (1.15)$$

Définition 1.21. Le point d'équilibre du système (1.1) est **asymptotiquement stable** lorsqu'il est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif.

Définition 1.22. Le point d'équilibre du système (1.1) est **exponentiellement stable** s'il existe deux constantes strictement positives a et b et s'il existe $t_0 > 0$, tels que :

$$\|x(t, x_0) - x^*\| < a \exp(-bt), \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \quad (1.16)$$

Définition 1.23. Le point d'équilibre du système (1.1) est **instable au sens de Lyapunov** lorsqu'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

Remarque 1.9. Les points peuvent être stables ou instables, à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines [4].

Remarque 1.10. — La courbe est la **trajectoire** et le dessin est appelé **portrait de phase**.

- En partant d'une condition initiale quelconque, le segment suivi par un point sur la ligne est une trajectoire, et ce tracé est un portrait de phase [8]. Les points fixes sont les points d'équilibre, ils peuvent être stables ou instables.
- Le signe de $f(x)$ permet de reporter sur l'axe des abscisses, confondu avec l'espace des phases, la direction du flot (Figure 1.3)

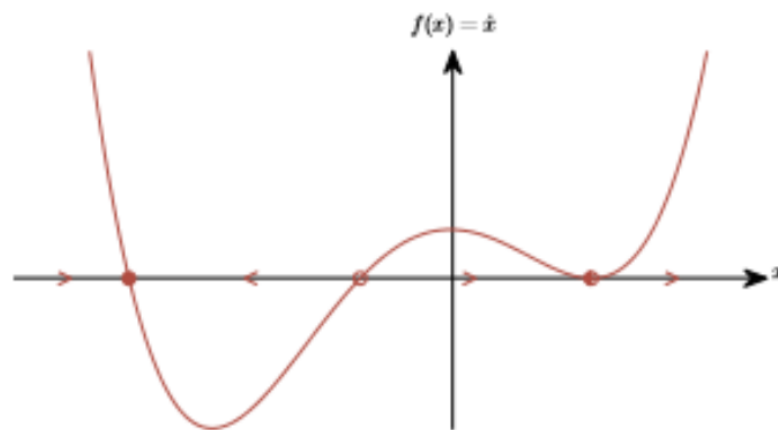


FIG. 1.3: Espace des phases sur l'axe des abscisses

1.4.2 Méthode des fonctions de Lyapunov

Soit $v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction différentiable.

Théorème 1.2. Soit le système autonome :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \quad (1.17)$$

$$v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (1.18)$$

si $x(l) = (x_1(l), \dots, x_n(l))$ satisfait (1.20).

Théorème 1.3. Pour le système (1.20), il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ de signe défini positif (ou négatif) telle que $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction semi-définie négative (ou positive) ou identiquement nulle alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est stable au sens de Lyapunov. $v(x_1, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Théorème 1.4. Si pour le système (1.20) il existe une fonction de signe définie $v(x_1, \dots, x_n)$ telle que

$$v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$$

est une fonction de signe défini inverse de v alors le point d'équilibre $x = (0, \dots, 0)$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.5. Supposons que pour le système (1.20) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que $v = (0, \dots, 0) = 0$. Si $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine $(0, \dots, 0)$ des points en lesquels $v(x_1, \dots, x_n) > 0$ alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est instable.

Théorème 1.6. Supposons que pour le système (1.20) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ différentiable dans un voisinage de $(0, \dots, 0)$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Dans n'importe quel voisinage Ω de $(0, \dots, 0)$ il existe un domaine Ω_1 dans lequel $v(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $v(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour $v(x_1, \dots, x_n) \in Fr_{\Omega_1}$.
- Le point d'équilibre $(0, \dots, 0) \in Fr_{\Omega_1}$.
- Dans $\Omega_1 : \frac{\partial v}{\partial t} = f \cdot \nabla v$ est une fonction définie positive.

Alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ de (1.20) est instable.

1.5 Bifurcations

Introduction

La notion de bifurcation a été introduite par Henri Poincaré au début du XXe siècle dans ces travaux sur les systèmes différentiels. Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système. Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.

1.5.1 Définitions de bifurcation

Le terme bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suite à la variation de l'un de ces paramètres ; une bifurcation correspond donc à la collision de deux objets (point répulsif ou selle, attracteur) ou de deux variétés et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire ; la collision de deux objets donne naissance à une bifurcation locale alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation globale.

soit :

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.19)$$

avec le paramètre de contrôle μ , et soit x^* sa solution.

Définition 1.24. Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système (1.22) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Définition 1.25. Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre μ pour laquelle le système (1.22) n'est pas structurellement stable).

1.5.2 Diagramme de bifurcation

Diagramme c'est un résumé de toute l'information sur la bifurcation et permet comprendre de ce fait comment évolue le système.

Définition 1.26. Un système diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

1.5.3 Différents types de Bifurcation

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations : bifurcation locale, bifurcation super-critique et sous-critique et la bifurcation globales.

Bifurcation locale

Les bifurcations locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. Le critère de détection utilisé dans le cas des bifurcations locales concerne les valeurs propres du Jacobien. Il existe plusieurs types de bifurcations locales, parmi lesquelles on peut citer :

- Bifurcation nœud-col ou saddle node,
- Bifurcation fourche ou pitchfork,
- Bifurcation transcritique,

Bifurcation nœud-col : Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre μ est le polynôme quadratique $f(x) = \mu + x^2$.

Dans le système (1.23), on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$f(x; \mu) = x^2 - \mu \quad (1.20)$$

Nous appelons la fonction (1.23) la forme normale de la bifurcation nœud-col. Étudions le comportement de l'équation (1.23).

Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \mp \sqrt{\mu}, \quad (1.21)$$

Qui existent seulement pour $\mu > 0$, leur stabilité est déterminée par :

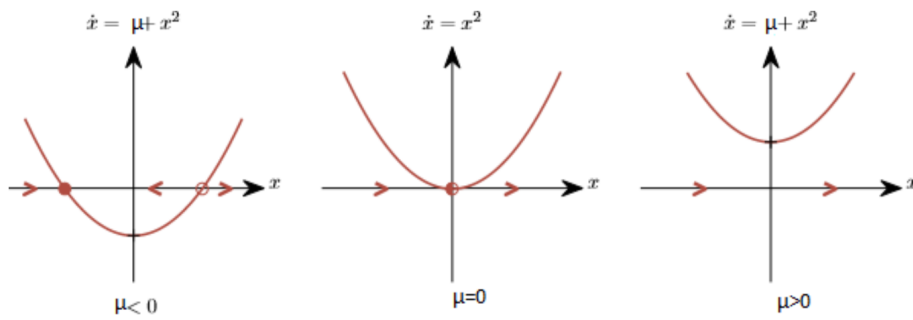


FIG. 1.4: Exemple de bifurcation nœud-col

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\mp}^* = -2(\mp\sqrt{\mu}) = \mp 2\sqrt{\mu}; \quad (1.22)$$

Selon les signes de $f'(x^*)$ on voit que $x_+^* = \sqrt{\mu}$ est instable tandis que $x_-^* = -\sqrt{\mu}$ est stable.

Remarque 1.11. Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$, $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

La figure (1.5) présente le diagramme de bifurcation nœud-col (la variation du point d'équilibre en fonction du paramètre μ pour le cas $f(x, \mu) = +\mu - x^2$).

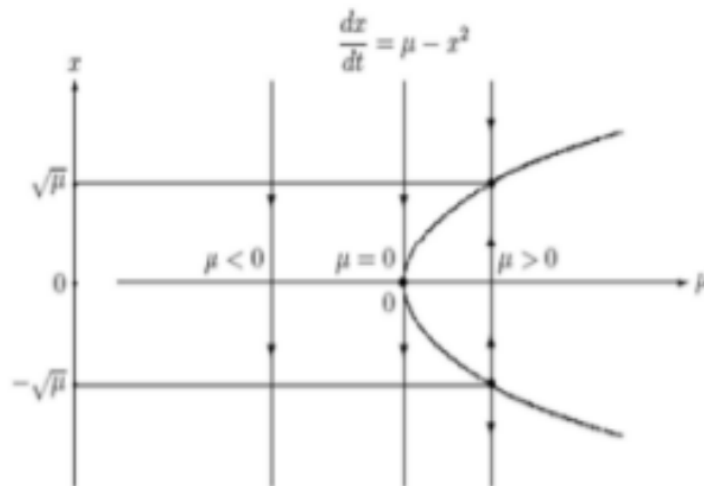


FIG. 1.5: Diagramme de bifurcation Nœud-col

Bifurcation fourche : Si on peut réduire $f(x, \mu)$ à un polynôme cubique à ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (1.23)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \quad (1.24)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3 \quad (1.25)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3 \quad (1.26)$$

La forme normale de la bifurcation fourche super-critique est l'équation (1.26). Cette équation (1.26) est invariante par le changement de variable $x \longleftrightarrow -x$. Sa résolution graphique est portée (Figure 1.6).

Nous calculons ses points fixes :

$$f(x^*) = x^*(\mu - x^{*2}) = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu - 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu} \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 1 seul point fixe : $x^* = 0$ stable.

$\mu = 0$: 1 seul point fixe : $x^* = 0$ mais moins stable car la pente est nulle.

$\mu > 0$: 3 points fixes : $x^* = 0$ instable, $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ stables.

Quand les branches de nouveaux points fixes $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Le diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.7).

Faisons le même calcul pour l'équation (1.27) qui est la forme normale d'une bifurcation fourche sous-critique.

Cette équation (1.27) est également invariante par le changement de variable $x \longleftrightarrow -x$. Sa résolution graphique est portée (Figure 1.8).

Nous calculons ses points fixes :

$$\mu x^* + x^{*3} = (\mu + x^{*2})x^* = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 3 points fixes : $x^* = 0$ stable, $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$ instables.

$\mu \geq 0$: 1 seul point fixe, $x^* = 0$ instable.

Le diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.9). Ce type de bifurcation va conduire tous les points vers l'infini, sauf ceux à l'intérieur d'une parabole. [4]

Bifurcation transcritiques (d'échange de stabilité) : Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension.

Dans certaines situations, un point fixe est toujours un point fixe, quelle que soit la valeur du paramètre de contrôle, mais sa stabilité peut changer, on considère la forme normale un bifurcation transcritique suivante :

$$x' = f(x, \mu) = \mu x - x^2 = (\mu - x)x$$

(1.30)

Cette équation est analogue à l'équation logistique, mais nous autorisons ici des valeurs négatives pour x . L'analyse graphique est reportée (Figure 1.10).

Cette équation analogue à l'équation logistique. Les équations admettent deux points d'équilibre $x^* = 0$ et $x^* = \mu$.

L'analyse usuelle donne :

$$\mu x^* - x^{*2} = (\mu - x^*)x^* = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = \mu \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

$$f'(x^*) = (\mu - 2x^*) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ -\mu & \text{pour } x^* = \mu \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 2 points fixes : $x^* = 0$ stable, $x^* = \mu$ instable.

$\mu = 0$: 1 point fixe semi-stable : $x^* = 0 = \mu$.

$\mu > 0$: 2 points fixes : $x^* = 0$ instable, $x^* = \mu$ stable.

Lorsque μ passe de positif à négatif, il y a échange de stabilité. Le diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.11). Ici les deux points fixes ne disparaissent pas à la collision mais échangent leur stabilité.

1.5.4.2 Bifurcation super-critique et sous-critique : La distinction de la bifurcation super-critique et sous-critique est intéressante, car les deux n'ont pas de toute la même signification. En effet, pour des valeurs décroissantes du paramètre, dans le cas de la bifurcation super-critique le système passe continûment d'un équilibre "haut" ou "bas" à un équilibre moyen. Au contraire, dans le cas de la bifurcation sous-critique, le système est sur l'équilibre "moyen" et brusquement cet attracteur disparaît et la solution du système saute de manière discontinue vers un autre attracteur ou diverge vers l'infini par exemple, si le système représente une population, il y a une différence énorme entre le passage doux d'un régime de croissance à un autre (bifurcation super-critique) et l'extinction brutale de la population (bifurcation sous-critique).

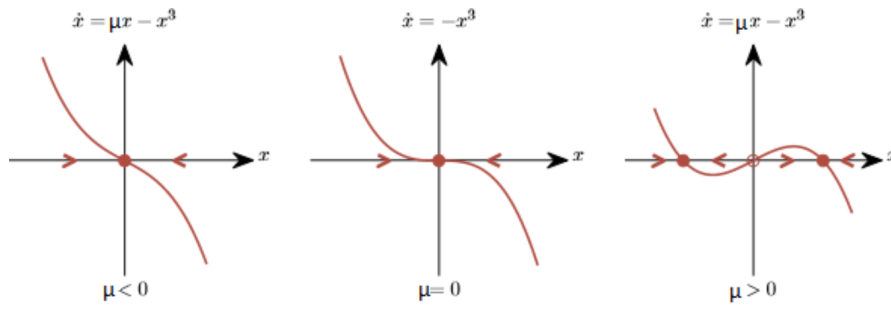


FIG. 1.6: La bifurcation fourche supercritique correspond à une brisure spontanée de la symétrie $x \longleftrightarrow -x$ On représente ici sa forme normale $x' = \mu x - x^3$

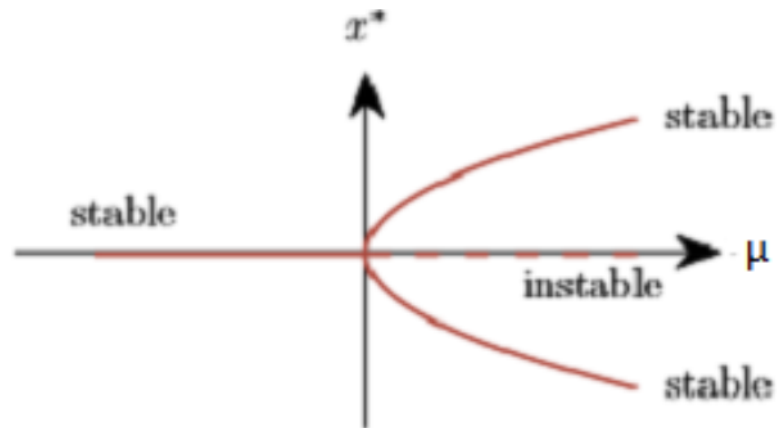


FIG. 1.7: Diagramme de bifurcation supercritique.

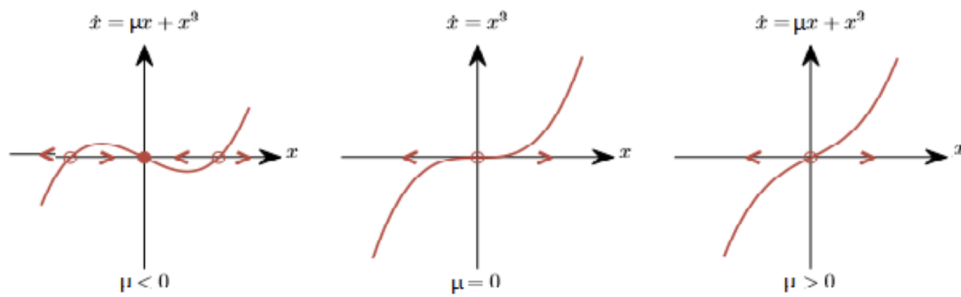
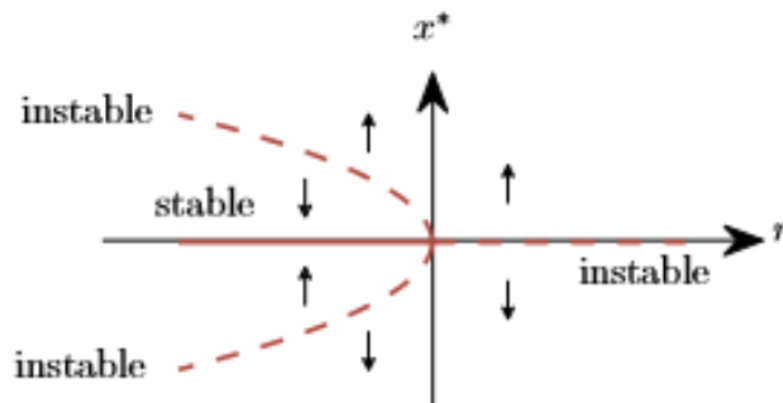
FIG. 1.8: Bifurcation fourche sous-critique. On représente ici sa forme normale $x' = \mu x + x^3$.

FIG. 1.9: Diagramme d'une bifurcation fourche sous-critique.

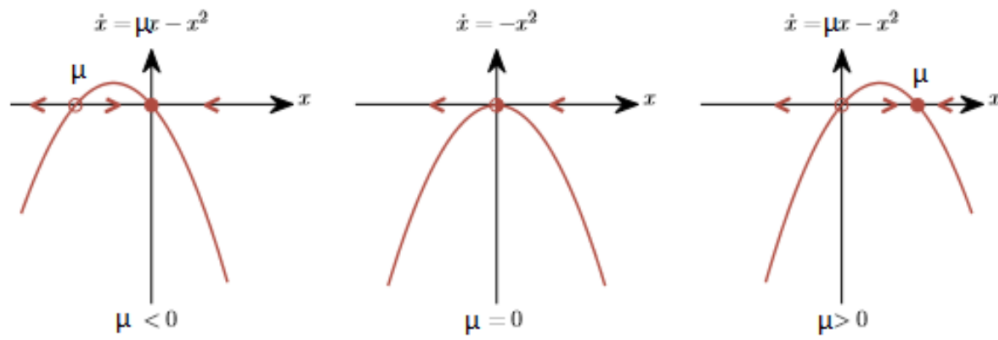


FIG. 1.10: La bifurcation transcritique correspond à un échange de stabilité des 2 points fixes. On représente ici sa forme normale $x' = \mu x - x^2$

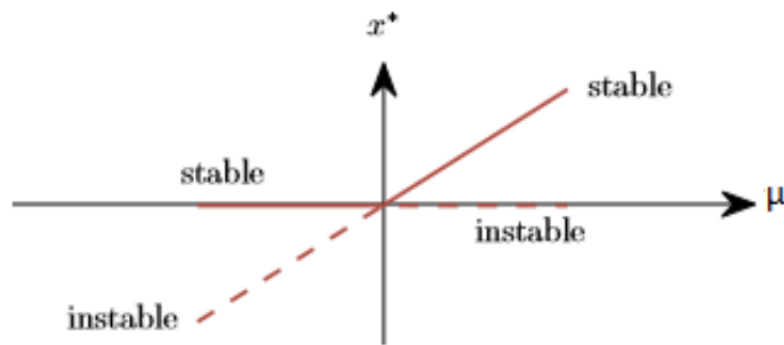


FIG. 1.11: Diagramme de bifurcation transcritique.

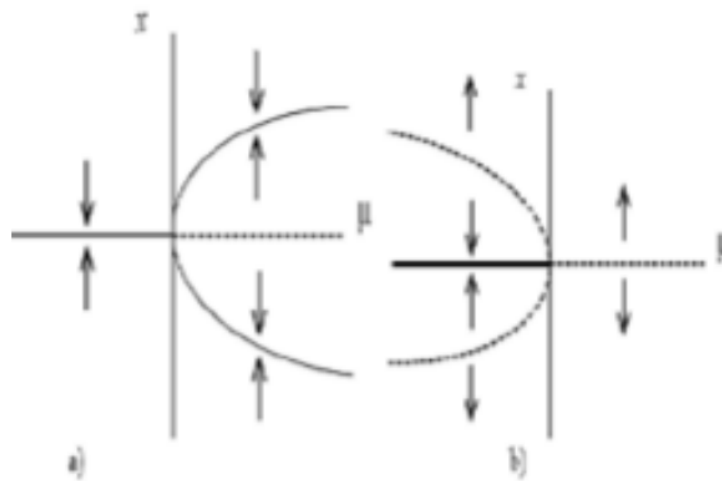


FIG. 1.12: Diagramme de bifurcation fourche a) super critique b) sous critique.

2. Systèmes dynamiques chaotiques

Nous entamons dans ce chapitre par un bref historique sur la naissance du terme chaos, puis nous présentons les caractéristiques du chaos, quelques outils de quantification et de mesure du chaos, comme l'exposant de Lypunov, et la dimension fractale.

2.1 Bref historique sur le chaos

Généralement, il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs explication sont données au phénomènes chaotiques, comme confusion, et aussi un indésirable aspect du désordre, abime essentiel et aléatoire indésirable et agitation.

Plusieur travaux prédispose l'invention de cette branche de mathématiques dans sa façon moderne, nous commençons par Henri Poincaré en 1889 [?], dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publié par Poincaré.

La divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par Jacques Hadamard, en 1890 puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par Pierre Duhem qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

Durant des milliers d'années les êtres humains ont noté que de petites causes pourraient avoir de grands effets et que c'était dur de prédire n'importe quoi pour certain. Ce qui avait causé une agitation parmi les scientifiques dans quelques systèmes de dire que les petits changements de conditions initiales pourraient mener aux prédictions différentes, cette prédiction elle-même devient inutiles.

Le mathématicien français, Jacques Hadamard prouvé, à la fin du XIX^{ème} siècle, un théorème sur la « dépendance sensible aux conditions initiale » au sujet du mouvement sans friction d'un point sur une surface ou le courant géodésique sur une surface de courbure négative.[?]

Pendant 1927, Bathazar Van Der Pol a noté vraisemblablement le comportement bruyan « occasionnelle » dans un circuit oscillatoire du tube électronique gouverné par une simple équation différentielle non linéaire.

Ensuite en 1940, Mary Cartwright Tôt et John Littlewood on noté que l'équation de Bathazar Van Der Pol pourrait exposer d'une façon ou d'une autre des solutions sensibles à tous les chiffres dans ses condition initiale .

Plusieurs mathématiciens comme Kolmogorov, Arnold et Moser (entre les années 1920 et 1960) poursuivirent l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaire en suivant la tradition de Poincaré.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la "révolution cognitive" considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon Miller, Gallanter et Pribram. En 1972, Newell et Simon ont proposé une nouvelle

approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.[?]

Particulièrement à travers un travail de Steve Smale, en 1960, des preuves mathématiques ont été données pour qu'il pourrait y avoir des équations différentielles dans lesquelles une telle sensibilité est générique, et la fin des années 1960, est le début des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe, en premier principalement sur les calculatrices analogiques, et plus tard les calculatrices numériques. [?]

E. N. Lorenz s'intéressait à la météorologie, qui n'était pas encore vraiment considérée comme une science par un grand nombre de personnes. A cette époque, on dépensait en effet beaucoup de ressources pour tenter d'étaler des prévisions météorologiques très loin d'être précises .

En se basant sur un modèle informatique de trois variable seulement (simplifié jusqu'à le rendre presque ridicule par rapport à ceux développés par des instituts prévés), Lorenz étudie la prévision du temps et obtient bientôt des résultats inédits.[?]

E. N. Lorenz montre que les mouvements atmosphériques ne sont pas périodiques, et que des changements minimes dans les paramètres initiaux peuvent aboutir à des résultats totalement différents . C'est la sensibilité aux conditions initiales ou "effet papillon".

"Effet papillon", terme correspond à une image quelque peu pécrique : la battement d'ailes d'un papillon peut provoquer une tornade à l'autre bout du monde. .Mais l'orgine première de ce terme vient en réalité de la forme de l'attracteur de Lorenz, qui peut être assimilée aux ailes d'un papillon [?] .

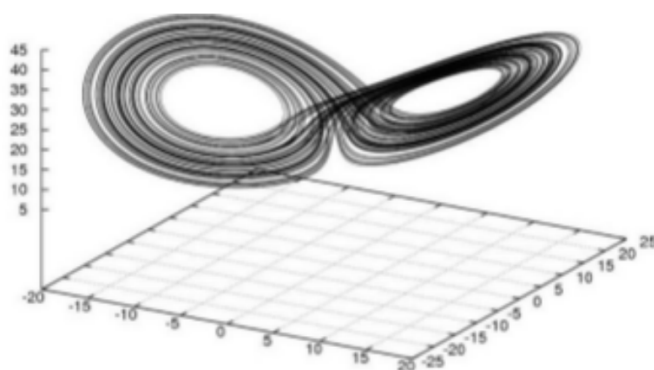


FIG. 2.1: L'attracteur de Lorenz

L'attracteur de Lorenz est défini comme l'ensemble à long terme des trajectoires dans l'espace des phases du modèle créé par Lorenz. Puis, il conclut de sa découverte qu'il est impossible de réaliser une prévision météorologique précise à long terme. En effet, des incertitudes inévitables dans les données fournies aux modèles et de la quantité de paramètres à prendre en compte comme le vent, la température, le degré d'humidité rendent cela impossible. De plus, il réalise qu'il suffit ici de trois variables seulement pour provoquer un comportement chaotique : l'introduction d'un nombre très limité de données peut induire une dynamique à la fois complexe et imprévisible.[?]

Il met en évidence que la complexité peut être le propre d'un système. On pensait jusque-là qu'elle résultait d'apports accidentels dus à une multitude de causes.

E.N.Lorenz formalise en 1960 sa théorie du chaos. Il décrit comment, en jouant seulement sur quelques variables, un comportement chaotique peut être engendré dans un système en théorie très simple.

Puis, en 1977, Ilya Prigogine a gagné le Prix Nobel en chimie, il a travaillé sur l'entropie des systèmes ouverts, c'était le rassemblement et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a utilisé un système dissipatif qui montre que les structures les plus compliquées peuvent évoluer de façons très simples, ou selon un ordre qui sort du chaos.

T. Matsumoto et L.O. Chua [?] en 1986 observeront pour la première fois un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments, cette observation a été le point de départ dans le développement de la théorie des circuits non linéaires, et par la suite les circuits électroniques chaotiques [?]. Avec des expériences numériques, Matsumoto a vérifié que ce circuit est de nature chaotique, mais il a aussi vérifié que les autres circuits, qu'il a appelé : "les circuits de Chua", à cette époque Matsumoto et ses étudiants réussissent aussi à modifier les circuits de Rosenthal pour obtenir deux résistances non linéaires terminales, avec une fonction linéaire par morceaux préalablement choisie. Deux ans après, Tokumasu réussit à adapter le circuit de Rosenthal pour obtenir la non linéarité voulue [?].

2.2 Caractéristique du chaos

Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

- Sensibilité aux conditions initiales
- Non-linéarité
- Déterminisme
- L'aspect aléatoire
- Attracteurs étranges

2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales :

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIX^e siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

D'un point de vue mathématique, on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \implies \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \quad (2.1)$$

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique.

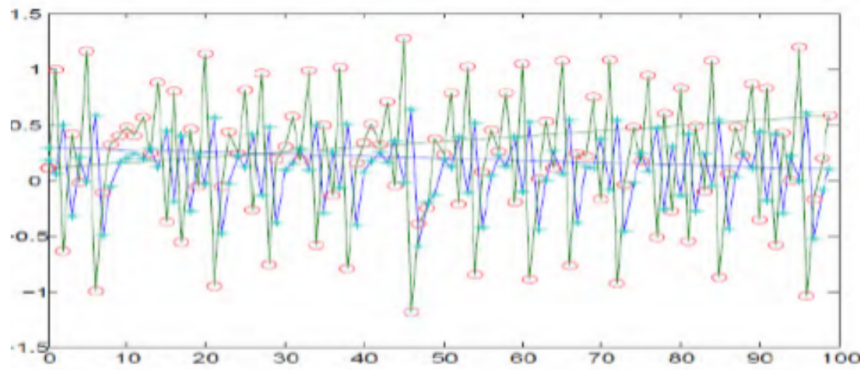


FIG. 2.2: Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique.

2.2.2 Non linéarité :

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. Le comportement chaotique d'un système dynamique non linéaire est aux non linéarités. En général, pour prévoir des phénomènes générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause [2].

2.2.2 Le déterminisme :

Définition 2.1. La notion de déterminisme signifie la capacité "prédire" le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes [2].

2.2.3 L'aspect aléatoire :

Les systèmes chaotiques se comportent, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard, en effet d'une manière qui peut sembler aléatoire. Cet aspect du chaos vient du fait que l'on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, aucune structure n'apparaît. Mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes, comme par exemple les équations de **Newton** régissant l'évolution d'au moins trois corps en interaction.

2.2.4 Attracteurs étranges :

L'expression d'un attracteur étrange a été utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens [30], il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. ils n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définition qui on trouve dans la littérature sont restrictives.

Un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phase qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Les attracteurs chaotiques étranges peuvent être classés en trois types principaux :

Attracteur hyperbolique :

Ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

Quasi-attracteur :

Ces types d'attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables.

Attracteur de type Lorenz :

Attracteur de type Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres.

2.3 Outils de quantification et mesure du chaos

Sachant que la perte de l'information sur les conditions initiales induite par un comportement chaotique, expliquerait en partie la complexité du comportement de certains systèmes réels. Cependant, ne disposant pas de conditions nécessaires et/ou suffisantes pour caractériser un système chaotique, pour cela nous cherchons des moyens quantitatifs permettant de reconnaître, de distinguer un comportement chaotique d'un comportement aléatoire ou erratique [11].

*La **quantification du chaos** permet dans certains cas de décrire la dynamique d'un système et son passage à un régime chaotique en fonction des variations de certains paramètres, dits paramètres de contrôle du système [2].*

2.3.1 Exposants de Lyapunov :

*La distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de **Lyapunov** permettent de mesurer ce taux de divergence [28].*

Alexandre Lyapunov (1857-1918) a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

Ce paramètre de contrôle est appelé "Exposants de Lyapunov" qui est une quantité permettant de caractériser le chaos temporel et est défini pour un système dynamique par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})| \right) \quad (2.2)$$

Soit un système dynamique quelconque, la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimale E_0 qui sera amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$. Remarquons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1. On a :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$$

Il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale. En appliquant le logarithme (un produit correspond à une somme), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \cdots + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini dans la somme ci-dessus, nous obtenons l'exposant de **Lyapunov** :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right) \quad (2.3)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si, naturellement la fonction est dérivable. Soit $f(x_i)$ cette fonction :

$$\begin{aligned} E_i &= f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \\ \frac{E_i}{E_{i-1}} &= \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \end{aligned}$$

Puisque :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

si f est dérivable, on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1})$$

alors, par conséquent :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \quad (2.4)$$

Si l'exposant de **Lyapunov** est positif, nous avons :

$$\lambda = \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0$$

qui implique que :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera donc sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de **Lyapunov** est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme.

Généralement, on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de **Lyapunov** :

- Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de Lyapunov λ qui tend vers $-\infty$.
- Si $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
- Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phases est un ensemble de lignes croisées.

TAB. 2.1: Attracteurs et exposants de Lyapunov

État stable	Attracteur	Dimension de Lyapunov	Exposant de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Périodique d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Périodique d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Deux trajectoires initialement proches Z_1 et Z_2 divergent après un temps $\Delta t = t_2 - t_1$ vers Z_2 tel que :

$$|Z_2| \approx \exp(\lambda \cdot \Delta t) |Z_1| \quad (2.5)$$

où λ est l'exposant de Lyapunov.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative.

Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif.

2.3.2 L'algorithme de Wolf :

Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps.

L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de Wolf calcule l'exposant de Lyapunov le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

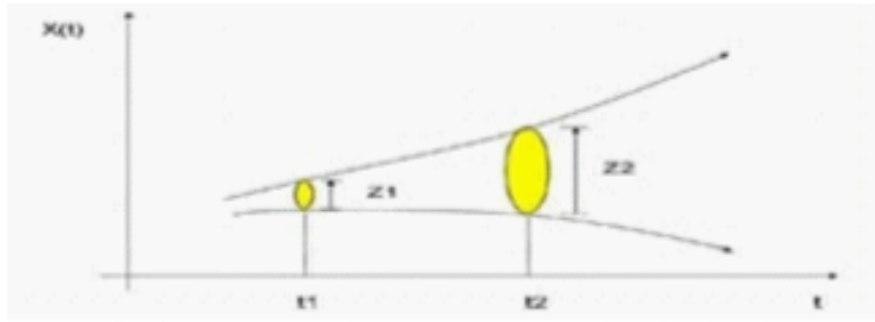


FIG. 2.3: Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase.

Les étapes de l'algorithme sont :

1. Changement du paramètre de contrôle
2. Choix aléatoire d'une condition initiale
3. Évolution du système dans le but d'atteindre un attracteur
4. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation
5. Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calculs de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires
6. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence
7. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné
8. Retour au point (1)
9. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné

Dimension fractale :

Le terme « dimension fractale » est utilisé comme une référence quelquefois à ce qui est appelé la dimension de capacité plus communément (lequel est, en parlant en gros, l'interprète, D dans l'expression $n(\varepsilon) = \varepsilon^{-D}$, où $n(\varepsilon)$ est le nombre minimal d'ensembles ouverts de diamètre ε suffisantes de couvrir l'ensemble).

Le terme dimension est souvent lié à celui de coordonnée, c'est-à-dire variable nécessaire pour décrire la position d'un élément, d'un ensemble et cette dimension est par définition un nombre entier.

La dimension de l'attracteur :

- Si l'attracteur est un point sa dimension est 0
- Si l'attracteur est une ligne ou une courbe fermée sa dimension est 1 et ainsi de suite

Il y a un autre genre d'attracteur qui a une forme inhabituelle, une structure géométrique fractale due à l'étirement dans une direction et au repliement dans une autre direction qu'il est l'attracteur étrange.

Il y a deux types de dimensions fractales :

1. Celles dont la définition dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non), dimension de Hausdorff, dimension de capacité, etc.

2. Celles dont la définition, en plus des propriétés métriques tient compte de la dynamique du système, c'est-à-dire d'une mesure de la répartition du temps de séjour d'une trajectoire précise, dimension de corrélation, dimension d'information, dimension ponctuelle, fonction de dimension de corrélation, fonction de dimension d'information, dimension de Lyapunov, etc.

2.4 Exemples de systèmes dynamiques à temps continus chaotiques

2.4.1 Modèle de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres [33].

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z) = a(y - x) \\ y' = f_2(x, y, z) = rx - y - xz = x(r - z) - y \\ z' = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (2.6)$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de a et b sont fixées tel que : $a = 10$ et $b = \frac{8}{3}$.

x : représente la vitesse.

y : la différence locale de température.

z : la distortion des profils de température (par rapport au cas linéaire conductif).

a : est proportionnel au nombre de Prandtl.

b : l'élongation de la boîte (la taille du système).

r : le paramètre de contrôle positif (le nombre de Rayleigh réduit).

Équilibre du modèle

Cherchons les points d'équilibre (x, y, z) de ce système dynamique vérifiant $x' = y' = z' = 0$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \iff x(r - z) - y = 0 \iff \\ z' = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} ay = ax \\ y(r - z) = y \iff \\ y^2 - b(r - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ z = r - 1 \\ y = \pm \sqrt{b(r - 1)} \end{cases} \quad (2.8)$$

Si $r < 1$: Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point fixe : $(0, 0, 0)$

Si $r > 1$: il y a deux points : $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$; $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$.

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne A obtenue en linéarisant le système autour d'un point fixe. L'expression de la matrice Jacobienne A du système est :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}, (2.9)$$

avec $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)$ d'où :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix} (2.10)$$

Au point $(0, 0, 0)$ les valeurs propres λ de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} (2.11)$$

Par conséquent on a :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix} (2.12)$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (1+a)\lambda + a(1-r)) = 0 \implies \Delta = (1+a)^2 - 4a(1-r) (2.13)$$

a pour racines :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-r)}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-r)}}{2} \\ \lambda_3 = -b \end{cases} (2.14)$$

Pour

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{cases} (2.15)$$

- Si $r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives, le point d'équilibre est nœud stable.

- Si $r = 1$, les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(a+1)$, $\lambda_3 = -b$ (C'est une bifurcation fourche), le point d'équilibre est dit marginal.

- Si $r > 1$, on a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. L'origine est devenue instable (col).

La stabilité des points fixes pour $r > 1$. Dans ce cas, la matrice Jacobienne A s'exprime :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Le polynôme caractéristique d'où :

$$\lambda^3 + (a+b+1)\lambda^2 + b(a+r)\lambda + 2ba(r-1) = 0 \quad (2.17)$$

Selon les valeurs du paramètre r , ce polynôme de degré trois peut avoir :

- Trois racines réelles négatives (le point fixe stable) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On va chercher à savoir s'il existe une valeur critique r_c pour laquelle les points fixes deviennent instables. Une valeur propre réelle change de signe. Cela équivaut à un changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si $\lambda = 0$ on a forcément $r = 1$. On peut donc rechercher pour quelles valeurs de r on peut obtenir deux racines iw et $-iw$ de partie réelle nulle. En reportant la valeur $\lambda = iw$ dans l'équation :

$$iw^3 + (iw)^2(a+b+1) + b(a+r)iw + 2ab(r-1) = 0 \quad (2.18)$$

On obtient les deux conditions :

$$\begin{cases} -w^2(a+b+1) + 2b(r-1)a = 0 \\ -iw^3 + iwb(a+r) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

En éliminant w^2 , il vient la valeur critique r_c :

et on a par (3.3) :

$$\begin{cases} w^2 = \frac{2ab(r_c-1)}{a+1+b} \\ w^3 = wb(a+r_c) \iff w^3 = w \cdot w^2 \iff w^2 = ab + br_c \end{cases} \quad (2.20)$$

$$r_c = \frac{a(a+b+3)}{a-b-1} = \frac{470}{19} \simeq 24.73, \text{ pour } \begin{cases} a = 10 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (2.21)$$

$$w = \pm \sqrt{\left(ab + b \frac{ab + \frac{2ab}{a+b+1}}{\frac{2ab}{a+b+1}} \right)} = \pm((ab+b)r_c) \simeq 92.64 \quad (2.22)$$

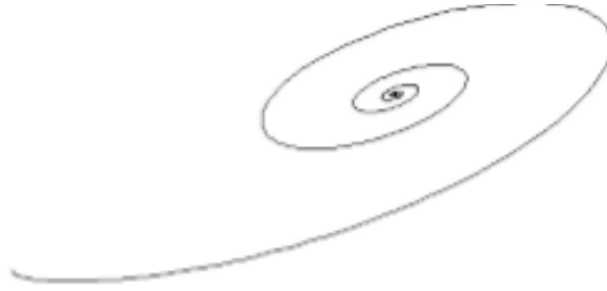
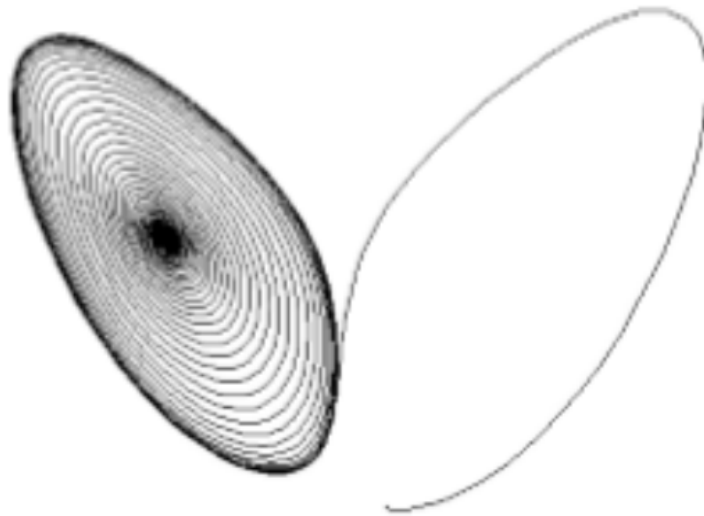
On trouve donc que, pour $r \geq r_c$, la trajectoire est chaotique. Elle tourne autour d'un des deux équilibres instables comme si elle y convergait puis elle bascule vers l'autre équilibre. C'est le célèbre effet papillon [13] [39].

Les exposants de Lyapunov :

Les calculs des exposants de Lyapunov donnent les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40 \times 28}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40 \times 28}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 11.828 \\ \lambda_2 = -22.828 \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{cases} \quad (2.23)$$

tel que le système (3.1) pour $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, avec les conditions $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.01$ on a : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, et $\lambda_3 < 0$.

FIG. 2.4: Modèle de Lorenz $r = 5$ FIG. 2.5: Modèle de Lorenz $r = 10$

Donc d'après le tableau de classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov on voit que le système est chaotique.

2.4.2 Modèle de Rössler

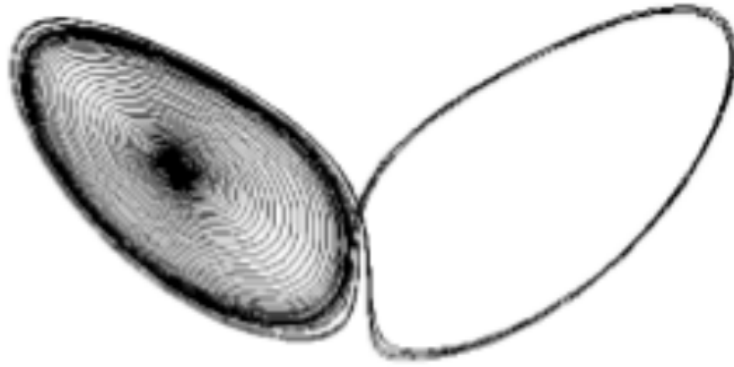
L'attracteur de O.Rössler (1974) issu de travaux en cinétique chimique, correspond lui aussi à une formulation dans le cadre de la mécanique des fluides ; il est associé au système différentiel non-linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique à temps continu et tridimensionnel qui présente une dynamique chaotique. L'ensemble des trajectoires à long terme de ce système définit un attracteur étrange aux propriétés fractales. (a, b, c étant des paramètres réels)[24].

L'article original de O.Rössler indique que l'attracteur de Rössler était censé se comporter de la même manière que l'attracteur de Lorenz, mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu'une seule spirale [14].

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} x' = -y - z = -(y + z) \\ y' = x + ay \\ z' = b - cz + xz = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.24)$$

Tel que a, b, c sont des constantes (paramètres de bifurcation).

FIG. 2.6: Modèle de Lorenz $r = 15$ FIG. 2.7: Modèle de Lorenz $r = 20$

Pour $a = 0.2$; $b = 0.2$; $c = 5.7$.

Une partie de l'élégance de l'attracteur de Rössler est due au fait que deux de ses équations sont linéaires, on pose $z = 0$, permet d'examiner le comportement sur le plan (x, y) .

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + ay \end{cases} \quad (2.25)$$

La stabilité dans le plan (x, y) , peut alors être trouvée en calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne :

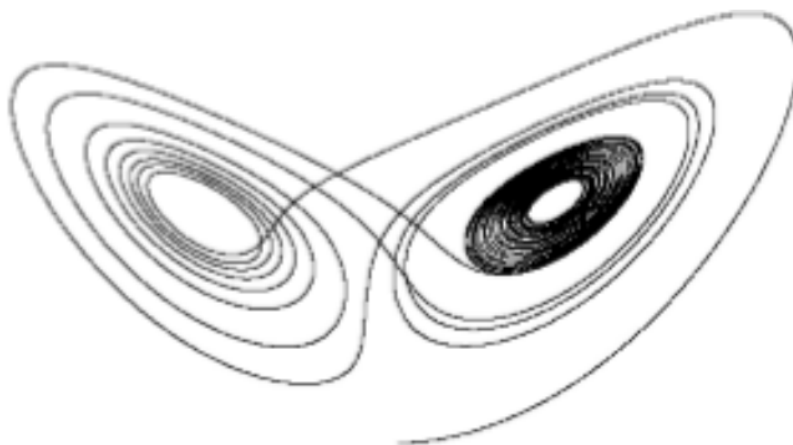
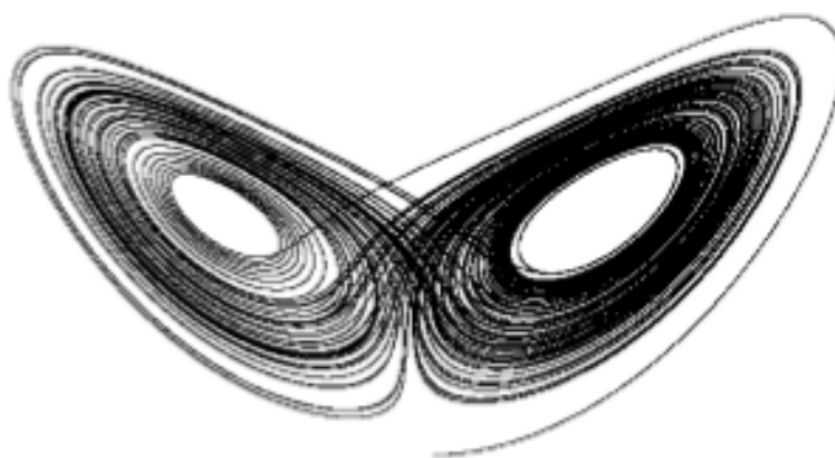
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Alors le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0 \implies \Delta = a^2 - 4 \quad (2.27)$$

Donc les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{cases} \quad (2.28)$$

FIG. 2.8: Modèle de Lorenz $r = 24$ FIG. 2.9: Modèle de Lorenz $r = 26$

Cherchons les points fixes de ce système dynamique les trois équations de Rössler vérifiant :
 $x' = y' = z' = 0$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ x + ay = 0 \\ b + z(x - c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ b + (-y)[(-ay) - c] = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ ay^2 + cy + b = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

On a : $ay^2 + cy + b = 0 \iff \left\{ y_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$, tel que $\Delta = c^2 - 4ab > 0$.

d'où :

$$(x; y; z) \equiv \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right) \quad (2.30)$$

Alors les deux points fixes sont :

$$\begin{cases} M_1 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ M_2 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right) \end{cases} \quad (2.31)$$

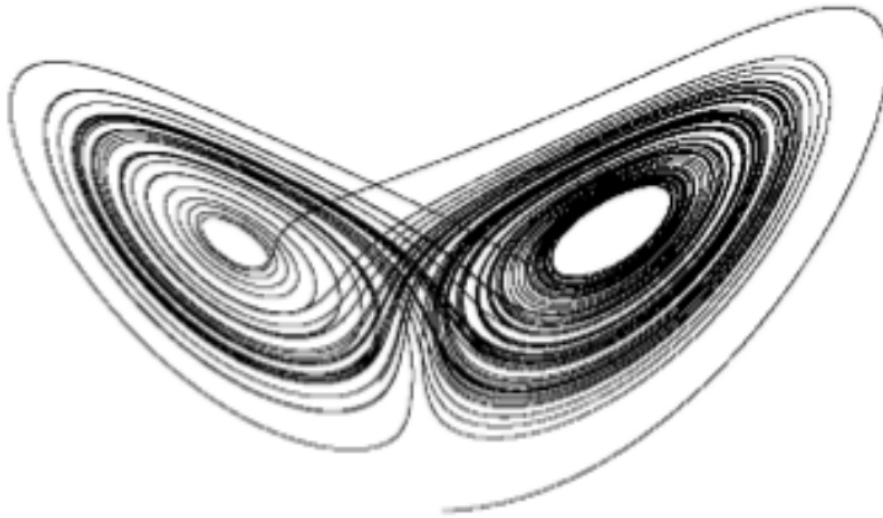
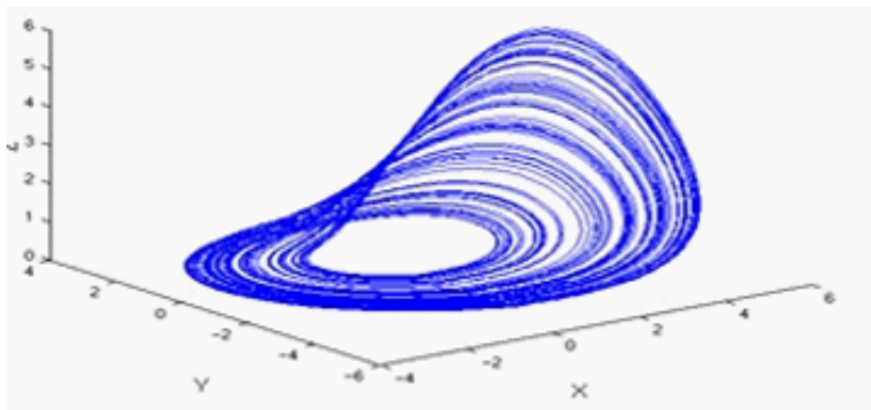
FIG. 2.10: Modèle de Lorenz $r = 28$ 

FIG. 2.11: Attracteur étrange de Rössler

Comme cité plus haut l'un des points instables est situé au centre de la spirale et l'autre se situe hors de l'attracteur.

Régimes périodiques et chaotique :

On a la stabilité de chacun de ces points fixes peut être analysée en déterminant leurs valeurs propres respectives et vecteurs propres. Commençant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & -c \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Alors le polynôme caractéristique est :

$$-\lambda^3 + (a + x - c)\lambda^2 + (ac - ax - 1 - z)\lambda + x - c + az = 0 \quad (2.33)$$

pour $a = 0.1$

$$|J - \lambda I| = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0.1 - \lambda & 0 \\ z & 0 & -c - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(0.1 - c) + 0.1c\lambda - c = 0 \quad (2.34)$$

Selon c , on va trouver les types des points :

- $c = 4 \implies$ période 1.
- $c = 6 \implies$ période 2.
- $c = 8.5 \implies$ période 4.
- $c = 9 \implies$ chaotique.
- $c = 12 \implies$ période 3.
- $c = 12.6 \implies$ période 6.
- $c = 13 \implies$ chaotique.
- $c = 18 \implies$ chaotique.

3. Applications des systèmes chaotiques dans le domaine de transmission sécurisée de données

Introduction

L'idée principale de la transmission chaotique consiste à ajouter le message dans un signal chaotique pour chiffrer cette information et de l'envoyer vers le récepteur à travers un canal public. L'information chiffrée est donc récupérée au niveau du récepteur après la synchronisation des deux systèmes émetteur et récepteur [32, 33, 34].

3.1 Synchronisation du chaos

Introduction

Durant la décennie passée, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et différentes méthodes ont été proposées. On distingue deux modes de synchronisation. Le premier mode repose sur un couplage mutuel entre deux systèmes chaotiques ou plus (Yamada et Fujisaka qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique). Par la suite, Afraimovich et al. ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique. Le second est appelé maître-esclave ou couplage unidirectionnel.

Définitions de la synchronisation

Définition 3.1 (De Larousse). *La synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : "Syn" veut dire ensemble et "Chrono" veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations en fonction du temps.*

Définition 3.2 (Générale). *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

Il existe deux classes de synchronisation suivant la manière avec laquelle les deux systèmes chaotiques sont couplés :

Synchronisation unidirectionnelle

- **Le maître** : est un système indépendant.
- **L'esclave** : est un système qui est dépendant du système maître.

Dans ce cas, on n'a qu'un seul système maître qui est l'émetteur et un seul système esclave qu'est le récepteur. Donc la synchronisation est dans un seul sens.

Synchronisation bidirectionnelle

Dans ce cas chaque système (l'émetteur et le récepteur) peut jouer le rôle d'un maître et d'un esclave en même temps, c'est-à-dire que la synchronisation est dans les deux sens.

3.1.1 Nécessité de la synchronisation

La synchronisation des systèmes chaotiques semble impossible dans un premier temps, notamment à cause de la sensibilité de ces systèmes aux conditions initiales. De plus, un système chaotique n'est pas asymptotiquement stable, c'est-à-dire que les trajectoires issues des conditions initiales voisines (légèrement différentes) divergent exponentiellement avec le temps. En mathématique : Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, **Brown et Kocarev** ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation [29]. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes : $X' = F(x(t))$,

$$Y' = G(y(t))$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition 3.3 (Brown et Kocarev). Les sous-systèmes dans les équations précédentes sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y , s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$.

Avec le choix de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe différents types de synchronisation.

3.1.2 Types de synchronisation

Nous rappelons les différents types de synchronisation présentés dans ce mémoire : la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation projective, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée et la synchronisation Q-S.

Anti-synchronisation

Définition 3.4. Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [?]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :

$$e(t) = Y(t) + X(t) \quad (3.1)$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0 \quad (3.2)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes [28].

Synchronisation complète

Définition 3.5. Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel représentés par les équations différentielles, le système chaotique maître représenté par :

$$X'(t) = F(X(t)) \quad (3.3)$$

et le système esclave représenté par :

$$Y'(t) = G(Y(t)) + U \quad (3.4)$$

où :

- $X(t)$: est le vecteur d'état du système maître de dimension n
 - $Y(t)$: est le vecteur d'état du système esclave de dimension m
 - $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: champ de vecteurs F
 - $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$: champ de vecteurs G
 - $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$: vecteur de contrôle à déterminer
- L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.5)$$

telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \forall x(0), \forall y(0) \quad (3.6)$$

- Si $F = G$, on parle de synchronisation complète identique
- Si $F \neq G$, on parle de synchronisation complète non identique

Synchronisation décalée

Définition 3.6. Deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $X(t)$ du système chaotique esclave convergent vers les variables d'état $Y(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \tau)\| = 0 \text{ où } \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - Y(t + \tau)\| = 0 \right), \forall x(0) \quad (3.7)$$

où τ est un nombre positif très petit.

Synchronisation projective

Définition 3.7. On dit qu'il y a une synchronisation projective entre les deux systèmes maître et esclave si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0, \forall (x(0); y(0)); i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où α_i est appelé facteur d'échelle constant non nul [19].

- Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète
- Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète

Synchronisation FSHP

Définition 3.8. On dit qu'on a une synchronisation FSHP (Full State Hybrid Projective synchronisation), si chaque variable d'état $y_i(t); 1 \leq i \leq n$; du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $x_i(t); 1 \leq i \leq n$; du système chaotique maître, tels que :

$$\exists(\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(t) \right| = 0, \forall(x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n(3.9)$$

Synchronisation généralisée

Définition 3.9. La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés [?].

On considère un couple de système maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ Y'(t) = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.10)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0, \forall x(0), \forall y(0)(3.11)$$

alors, les systèmes maître-esclave se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ .

Synchronisation Q-S

Définition 3.10. La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [?]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnel, $X(t)$ et un système esclave, m -dimensionnel, $Y(t)$ sont en synchronisation Q-S dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t))(3.12)$$

vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0.(3.13)$$

pour toutes conditions initiales $X(0)$ et $Y(0)$ des deux systèmes.

3.1.3 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation :

Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par **Bai et Lonngren** [7], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme a été présentée par **M.A.Ahan** [15], **O.I.Olusola et al**, **K.S. Ojo et al**[22].

Soient deux systèmes chaotiques à synchroniser notre esclave définis par :

$$X' = F(X(t))(3.14)$$

$$Y' = G(Y(t)) + U(3.15)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'états des systèmes maître et esclave respectivement, et $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini, cette erreur est déterminée comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t)(3.16)$$

Alors

$$e'(t) = Y'(t) - X'(t)(3.17)$$

$$e'(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U(3.18)$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t))(3.19)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e'(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U(3.20)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, N une fonction non linéaire, U le contrôle est proposé comme suit :

$$U = V - N(X(t), Y(t))(3.21)$$

où V est le contrôleur actif défini par :

$$V = -Le(t)(3.22)$$

où L est une matrice de contrôle inconnue, on obtient donc la formule finale de l'erreur :

$$e'(t) = (A - L)e(t)(3.23)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître et le système esclave est transformé en problème de zéro stabilité du système d'erreur.

Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. On considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2), \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.24)$$

et

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(y_1, y_2), \\ y'_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + u. \end{cases} \quad (3.25)$$

où f_1 est une fonction linéaire, $f_i (i = 2, 3, \dots, n)$, sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes.

L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n, \end{cases} \quad (3.26)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} e'_1 = g_1(e_1, e_2), \\ e'_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ e'_n = g_n(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) + u. \end{cases} \quad (3.27)$$

où g_1 est une fonction linéaire, et $g_i, (i = 2, 3, \dots, n)$, sont des fonctions non-linéaires.

L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système $e_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping.

Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant [?], est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes.

Soient les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) \quad (3.28)$$

et

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u(3.29)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer.

L'erreur entre le système maître et le système esclave est définie par : $e = y - x$. La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$e' = Ae + \eta(x, y) + u(3.30)$$

où $\eta(x, y) = f(y(t)) - f(x(t))$.

Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur, la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y)(3.31)$$

où v est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable.

En substituant dans la dynamique de l'erreur, on obtient :

$$e' = Ae + Bv(3.32)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système d'erreur par un choix approprié du contrôleur en mode glissant.

Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j(3.33)$$

où C est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0, s'(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$s'(e) = C(Ae + Bv) = 0(3.34)$$

donc le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}CAe(3.35)$$

où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire.

Le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme :

$$s' = -q\text{sgn}(s) - ks(3.36)$$

où $\text{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q\text{sgn}(s)](3.37)$$

Théorème 3.1. *Le système maître et le système esclave sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x; y)(3.38)$$

où v est défini par l'équation précédente, (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Démonstration. Pour observer la zéro-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2} \quad (3.39)$$

dont la dérivée est :

$$V' = -ks - q\text{sgn}(s)s \quad (3.40)$$

puisque $\text{sgn}(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$, alors $V' < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître et le système esclave sont globalement synchronisés. \square

3.1.4 Exemple de synchronisation complète

Pour illustrer la méthode de contrôle actif, considérons deux systèmes de Lorenz. Le système maître est :

$$\begin{cases} x_1' = a(y_1 - x_1) \\ y_1' = x_1(r - z_1) - y_1 \\ z_1' = x_1y_1 - bz_1 \end{cases} \quad (3.41)$$

et le système esclave est :

$$\begin{cases} x_2' = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ y_2' = x_2(r - z_2) - y_2 + u_2 \\ z_2' = x_2y_2 - bz_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.42)$$

Les erreurs de synchronisation sont :

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1 \\ e_2 = y_2 - y_1 \\ e_3 = z_2 - z_1 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1' = x_2' - x_1' \\ e_2' = y_2' - y_1' \\ e_3' = z_2' - z_1' \end{cases} \quad (3.43)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} e_1' = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ e_2' = re_1 - e_2 - x_2z_2 + x_1z_1 + u_2 \\ e_3' = -be_3 + x_2y_2 - x_1y_1 + u_3 \end{cases} \quad (3.44)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2z_2 + x_1z_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Le contrôleur U est choisi comme :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 + x_2z_2 - x_1z_1 \\ u_3 = v_3 - x_2y_2 + x_1y_1 \end{cases} \quad (3.46)$$

En substituant, nous obtenons :

$$\begin{cases} e_1' = a(e_2 - e_1) + v_1 \\ e_2' = re_1 - e_2 + v_2 \\ e_3' = -be_3 + v_3 \end{cases} \quad (3.47)$$

Nous choisissons le contrôleur actif comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -ae_2 \\ v_2 = -re_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

La matrice de contrôle est donc :

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Le système d'erreur final devient :

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Les valeurs propres de ce système sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a < 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_3 = -b < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

Le système est donc asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, ce qui assure que pour tout $t \rightarrow \infty \implies e_i \rightarrow 0, (i = 1, 2, 3)$. La synchronisation est donc effective.

3.2 Techniques de communications sécurisées à base du chaos

Dans cette partie nous présentons quelques techniques de communications sécurisée à base du chaos.

3.2.1 Chiffrement par addition

Le chiffrement par addition (ou bien le masquage chaotique) est la technique la plus simple pour la transmission d'une information. Dans cette technique, le signal d'information $m(t)$ est ajouté à un signal chaotique $x(t)$ généré par un système émetteur. Le signal du texte chiffré $T(t) = m(t) + x(t)$ ainsi obtenu est transmis à travers le canal de transmission vers un système récepteur qui se synchronise identiquement avec le système émetteur. Le signal d'information reconstruit $\hat{m}(t)$ est alors obtenu après la soustraction entre le signal chiffré (transmis) $T(t)$ et le signal porteur estimé $\hat{x}(t)$.

3.2.2 Modulation paramétrique

Cette méthode consiste à utiliser le signal d'information pour moduler l'un des paramètres du système émetteur. Cependant, la méthode d'ajouter le message et la fonction de modulation des paramètres ne doivent pas supprimer le caractère chaotique du signal envoyé au système récepteur. Le système récepteur synchronise d'une manière adaptative avec le système émetteur et finalement le signal d'information est récupéré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation.

3.3 Communications sécurisées par la synchronisation du système de Lü

La principale motivation de cette partie consiste à étudier une approche simple d'un schéma de communication sécurisée basé sur la synchronisation du système de Lü en utilisant la technique de modulation paramétrique. Cette opération sera effectuée par l'intermédiaire de quatre éléments principales, à savoir : la modulation (en utilisant la fonction exponentielle), l'émetteur chaotique, le récepteur chaotique et la démodulation. Le diagramme principal de ce schéma est illustré à la Figure 3.1.

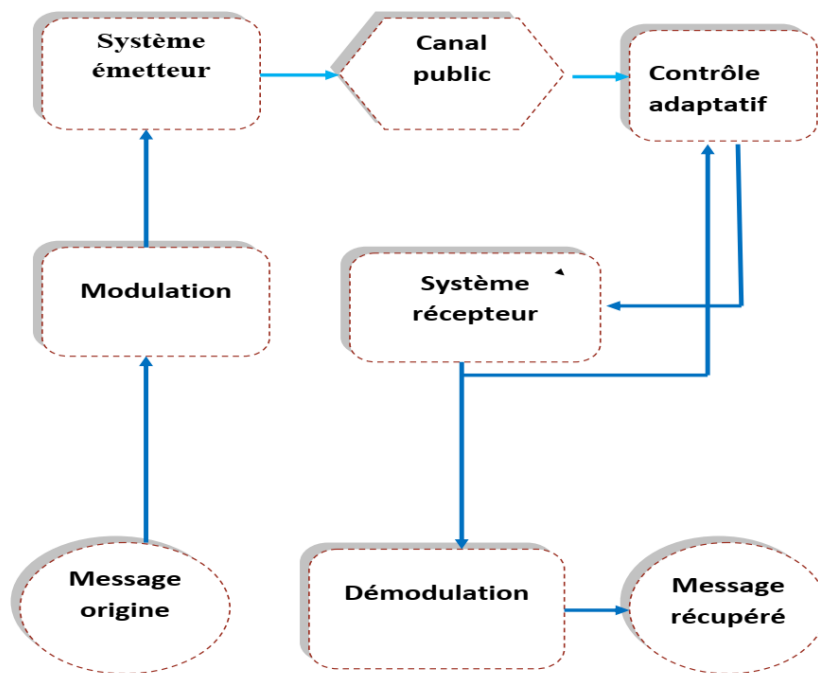


FIG. 3.1: Diagramme principal de communication sécurisée.

3.3.1 Modulation

Considérons le système hyperchaotique de Lü [5] qui décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = x_1x_3 + dx_4, \end{cases} \quad (3.52)$$

où

$$a = 36, \quad b = 3, \quad c = 20 \quad \text{et} \quad 0.6 \leq d \leq 1. \quad (3.53)$$

Pour transmettre un signal de message quelle que soit sa taille, nous envisageons de le moduler dans le paramètre inconnu d du système (1). Soit $m(t)$ le message transmis. Définissons maintenant un nouveau paramètre inconnu $D = D(t)$. Afin de préserver le comportement chaotique du système étudié, nous présentons la technique de la modulation paramétrique suivante :

$$D(t) = 0.4 \exp(-m(t)) + 0.6, \quad m(t) \geq 0. \quad (3.54)$$

Il est clair que $0.6 \leq D \leq 1$.

3.3.2 Émetteur

Considérons maintenant le système (1) et remplaçons le paramètre d par D , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = cx_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 = x_1x_3 + Dx_4, \end{cases} \quad (3.55)$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 sont des signaux chaotiques qui doivent être transmis au récepteur via un canal public.

Puisque $D(t) \in [0.6, 1]$, le système résultant (4) reste hyperchaotique (Figure 3.2). Nous prenons donc le système (4) comme système émetteur.

3.3.3 Récepteur

Considérons également le système récepteur comme étant le système de Lü, qui est supposé décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = cy_2 - y_1y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 = y_1y_3 + \hat{D}y_4 + u_4, \end{cases} \quad (3.56)$$

où \hat{D} est le paramètre inconnu à estimer et $u_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont les contrôles à concevoir. Notre objectif consiste à concevoir des contrôles adaptatifs u_i (pour tout $i = 1, 2, 3, 4$) et un paramètre \hat{D} réalisant une synchronisation entre le système émetteur (4) et le système récepteur (5). Pour quantifier cet objectif, l'erreur de synchronisation est définie comme suit :

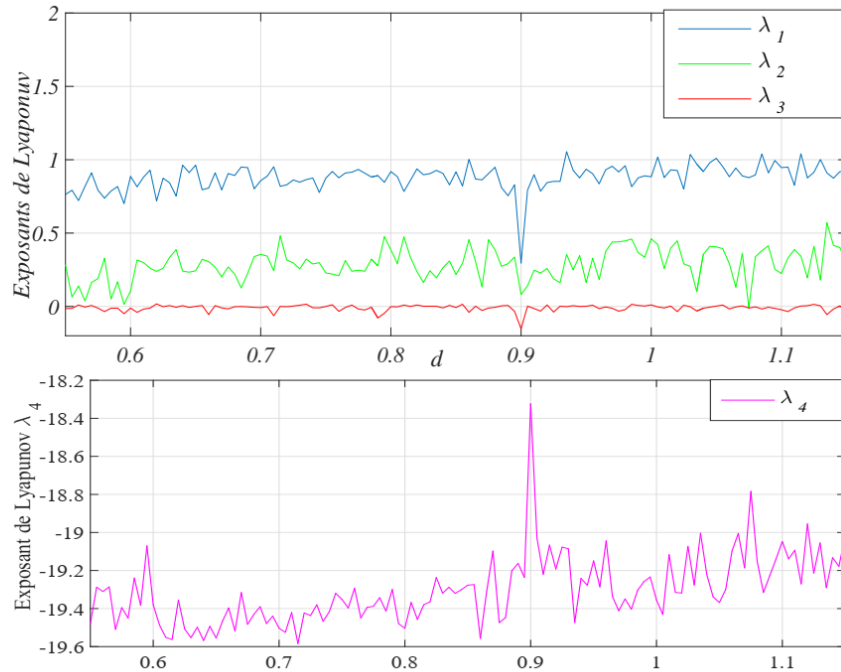


FIG. 3.2: Exposants de Lyapounov du système de Lü.

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.57)$$

Définissons également l'erreur d'estimation par :

$$e_D = D - \hat{D}. \quad (3.58)$$

La dynamique de l'erreur de synchronisation est alors donnée par :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i - \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.59)$$

En substituant les équations (4) et (5) dans l'équation (8), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 = ce_2 - y_1 y_3 + x_1 x_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 = y_1 y_2 - x_1 x_2 - be_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 = y_1 y_3 - x_1 x_3 + \hat{D}e_4 - e_D x_4 + u_4. \end{cases} \quad (3.60)$$

En différenciant (7) par rapport à t , nous obtenons :

$$\dot{e}_D = -0.4\dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{D}}. \quad (3.61)$$

Par conséquent, le problème de synchronisation devient le problème de stabilité de la dynamique des erreurs (9). Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Si les contrôles adaptatifs et la loi de commande sont sélectionnés respective-*

ment comme :

$$\begin{cases} u_1 = -a(e_2 - e_1) - k_1 e_1, \\ u_2 = -c e_2 + y_1 y_3 - x_1 x_3 - k_2 e_2, \\ u_3 = -y_1 y_2 + x_1 x_2 + (b - k_3) e_3, \\ u_4 = -y_1 y_3 + x_1 x_3 - \hat{D} e_4 + e_D x_4 - k_4 e_4, \end{cases} \quad (3.62)$$

où $k_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont des gains de contrôle positifs,
et

$$\dot{\hat{D}} = -e_4^2 - 0.4\dot{m} \exp(-m), \quad (3.63)$$

alors la synchronisation entre les deux systèmes (4) et (5) est achevée.

Démonstration. Avec le choix de contrôle adaptatif (11), le système d'erreur (9) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = -k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 = -k_3 e_3, \\ \dot{e}_4 = -e_D e_4 - k_4 e_4. \end{cases} \quad (3.64)$$

Considérons la fonction de Lyapounov suivante :

$$V = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^4 e_i^2 + e_D^2 \right). \quad (3.65)$$

En calculant la dérivée de V le long des trajectoires du système erreur (13), nous obtenons :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^4 e_i \dot{e}_i + e_D \dot{e}_D \quad (3.66)$$

$$= e_1(-k_1 e_1) + e_2(-k_2 e_2) \quad (3.67)$$

$$+ e_3(-k_3 e_3) + e_4(-e_D e_4 - k_4 e_4) + e_D(-0.4\dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{D}}) \quad (3.68)$$

$$= -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2) + e_D(-e_4^2 - 0.4\dot{m} \exp(-m) - \dot{\hat{D}}). \quad (3.69)$$

En substituant la loi d'adaptation (12) dans (15), on obtient :

$$\dot{V} = -(k_1 e_1^2 + k_2 e_2^2 + k_3 e_3^2 + k_4 e_4^2). \quad (3.70)$$

Évidemment, V est définie positive et \dot{V} est définie négative sur \mathbb{R}^5 . D'après le théorème de la stabilité de Lyapounov, les erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3, 4$ convergent asymptotiquement vers zéro, c'est-à-dire la synchronisation entre les deux systèmes (4) et (5) est achevée et le zéro du paramètre erreur D est également asymptotiquement stable. Cela implique que le paramètre incertain D est également estimé simultanément dans le récepteur. \square

3.3.4 Démodulation

Selon la fonction de la transformation inversible (3), le signal du message d'origine peut être récupéré sous la forme :

$$\hat{m}(t) = \ln \left(\frac{0.4}{\hat{D}(t) - 0.6} \right). \quad (3.71)$$

Ici $\hat{m}(t)$ représente le signal récupéré. Lorsque la synchronisation souhaitée a lieu, nous avons $\hat{D}(t) \rightarrow D(t)$ quand $t \rightarrow \infty$. On obtient alors :

$$\hat{m}(t) = \ln \left(\frac{0.4}{\hat{D}(t) - 0.6} \right) \rightarrow m(t) = \ln \left(\frac{0.4}{D(t) - 0.6} \right), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty. \quad (3.72)$$

En utilisant la méthode de démodulation ci-dessus, le récepteur peut donc extraire le signal du message \hat{m} avec succès.

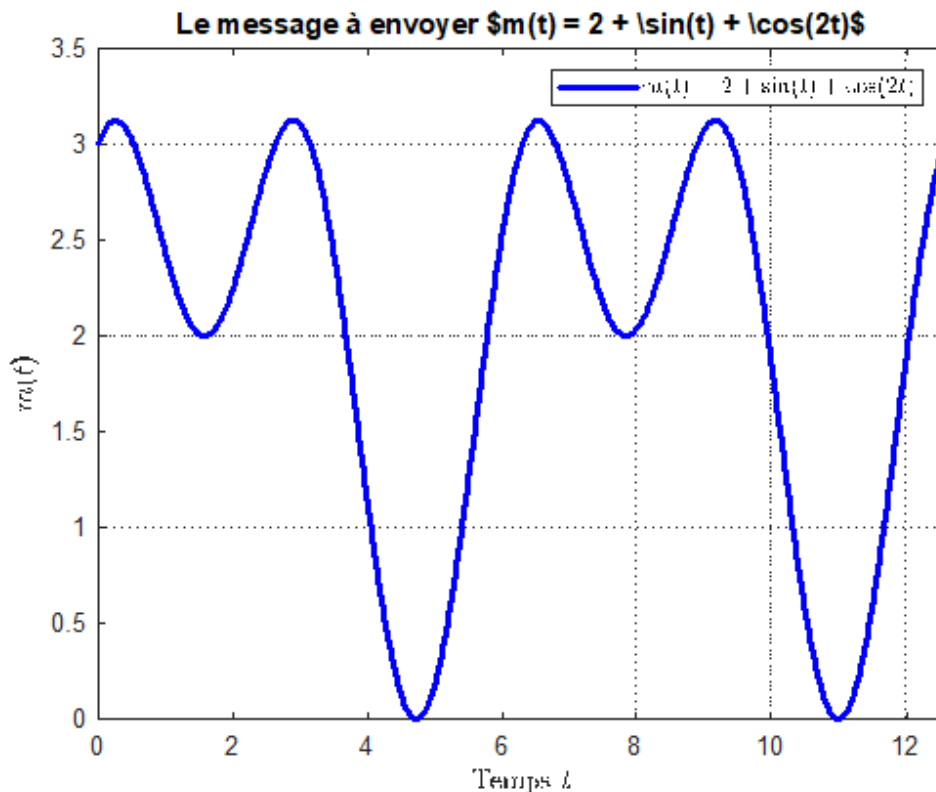
3.3.5 Résultats de simulation

Dans cette partie, nous présentons des simulations numériques pour montrer l'efficacité du système de communication proposé.

Cas d'un signal d'information borné

Ici, le signal de message caché dans le système émetteur est donné par :

$$m(t) = 2 + \sin(t) + \cos(2t). \quad (3.73)$$



Évidemment, $0 \leq m(t) \leq 4$. Selon l'équation (3), on peut sélectionner $D(t)$ comme suit :

$$D(t) = 0.4 \exp(-2 - \sin(t) - \cos(2t)) + 0.6. \quad (3.74)$$

Il en résulte que $D(0) = 1$.

La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par : $\hat{D}(0) = 1$.

Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par $e_D(0) = 0$.

Les conditions initiales des deux systèmes (4) et (5) sont sélectionnées respectivement comme :

$$x_1(0) = 0.02, \quad x_2(0) = 0.02, \quad x_3(0) = 0.04, \quad x_4(0) = 0.06. \quad (3.75)$$

$$y_1(0) = 0.03, \quad y_2(0) = 0.05, \quad y_3(0) = 0.03, \quad y_4(0) = 0.03. \quad (3.76)$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

$$e_1(0) = 0.01, \quad e_2(0) = 0.03, \quad e_3(0) = -0.01, \quad e_4(0) = -0.03. \quad (3.77)$$

Les paramètres de gain sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.1. \quad (3.78)$$

La Figure 3.3 illustre le comportement chaotique du système résultant (4). Les résultats de la simulation du système de communication sécurisé proposé sont présentés aux Figures 3.4 et ??.

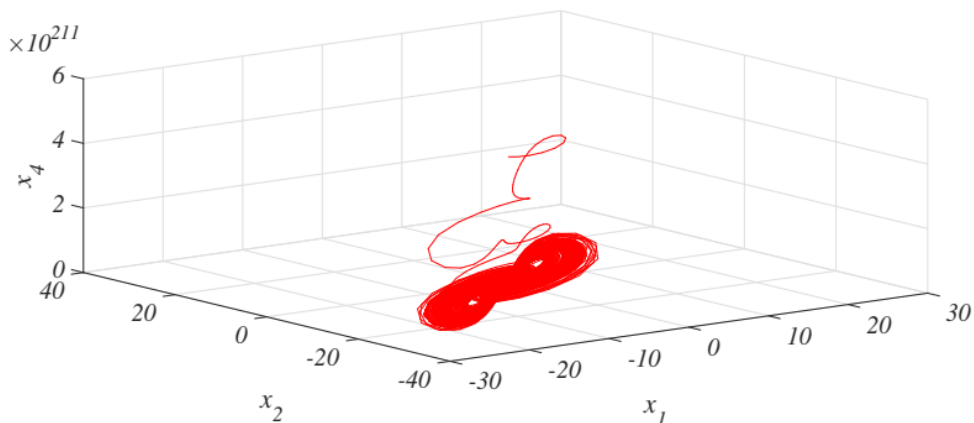


FIG. 3.3: Attracteur chaotique du système résultant (4).

Remarque 3.1. De la Figure 3.4, nous voyons que les erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3, 4$ convergent asymptotiquement vers zéro rapidement. C'est-à-dire que la synchronisation entre le système émetteur et le système récepteur est obtenue sous la présence des contrôleurs (11) et de la loi d'adaptation (12), et l'objectif de communication est atteint.

Cas d'un signal d'information non borné

Dans ce cas, le signal du message est pris comme suit :

$$m(t) = 0.01(t + \cos(2t)). \quad (3.79)$$

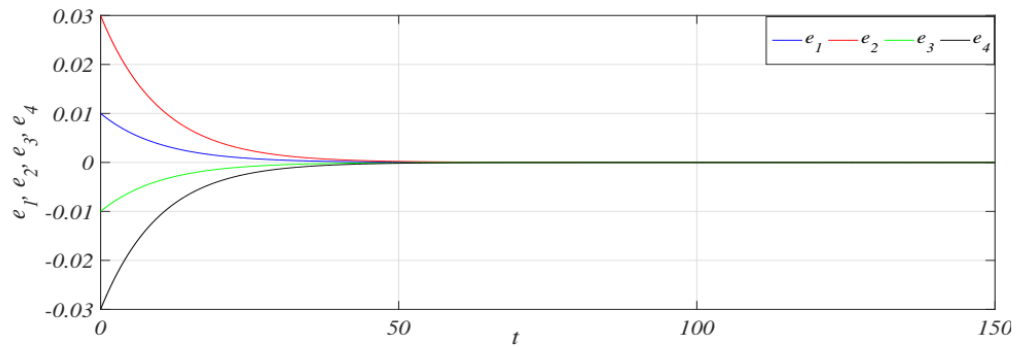


FIG. 3.4: L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation. Cas du signal d'information borné : $m(t) = 2 + \sin(t) + \cos(2t)$.

Afin de préserver le comportement chaotique du système émetteur étudié, l'amplitude du signal d'information ne doit pas dépasser certaines valeurs limites. Pour cela, on suppose que $|m(t)| < \infty$.

Selon l'équation (3), $D(t)$ peut être obtenu comme suit :

$$D(t) = 0.4 \exp(-0.01(t + \cos(2t))) + 0.6. \quad (3.80)$$

Il en résulte que $D(0) = 1$.

La condition initiale pour la loi d'adaptation est donnée par : $\hat{D}(0) = 1$.

Donc la condition initiale de l'erreur d'estimation est donnée par $e_D(0) = 0$.

Les conditions initiales des deux systèmes (4) et (5) sont sélectionnées respectivement comme :

$$x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = -0.2, \quad x_3(0) = 0.2, \quad x_4(0) = 0.4. \quad (3.81)$$

$$y_1(0) = 0.2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0.1, \quad y_4(0) = 0.2. \quad (3.82)$$

Par suite les conditions initiales de système erreur sont données par :

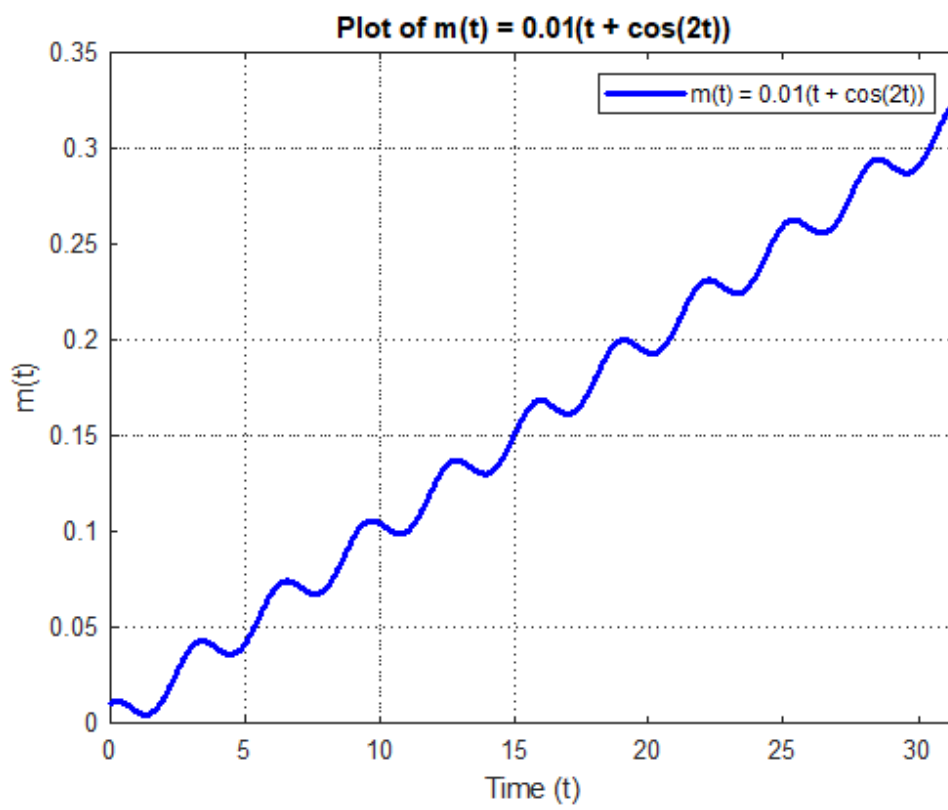
$$e_1(0) = 0.1, \quad e_2(0) = 0.2, \quad e_3(0) = -0.1, \quad e_4(0) = -0.2. \quad (3.83)$$

Les paramètres de conception sont choisis comme suit :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.2. \quad (3.84)$$

L'attracteur chaotique du système résultant (4) est représenté à la Figure 3.5. Les résultats de simulation numériques pour la synchronisation entre les systèmes émetteur et récepteur via les contrôleurs (11) et la loi d'adaptation (12) et le message transmis sont illustrés aux Figures 3.7 et 3.6.

Remarque 3.2. La Figure 3.7 décrit l'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_i , $i = 1, 2, 3, 4$, ce qui montre que les erreurs de synchronisation approchent très rapidement de l'origine. Donc, la synchronisation souhaitée est obtenue.



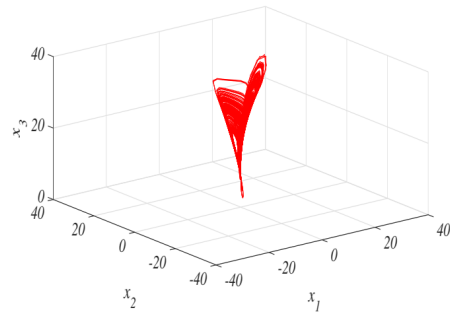


FIG. 3.5: Attracteur chaotique du système résultant (4).

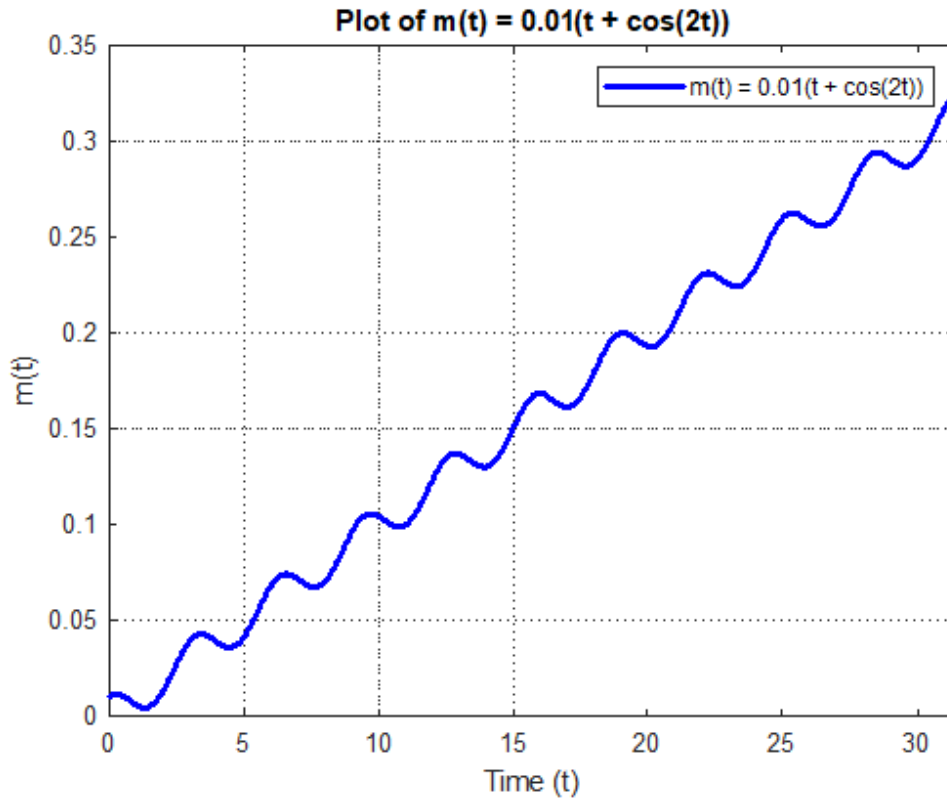


FIG. 3.6: L'évolution temporelle de message origine non borné : $m(t) = 0.01(t + \cos(2t))$.

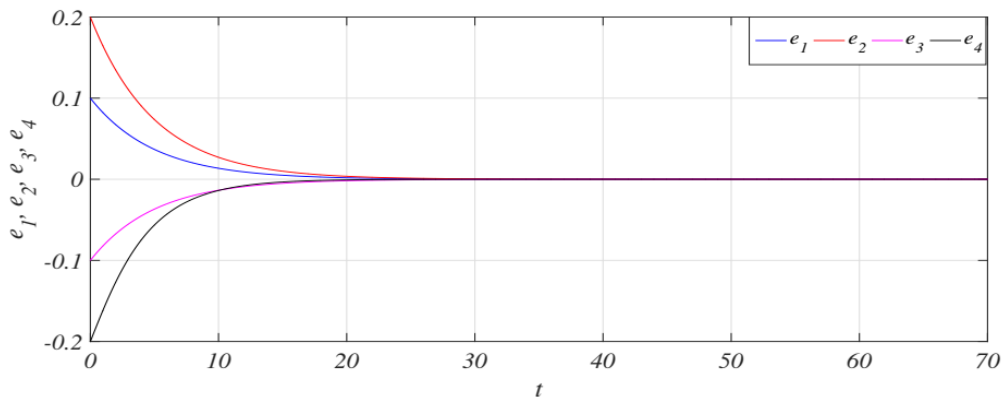


FIG. 3.7: L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation. Cas du signal d'information non borné : $m(t) = 0.01(t + \cos(2t))$.

Conclusion générale

Ce mémoire a permis d'explorer en profondeur les systèmes dynamiques chaotiques, depuis leurs fondements théoriques jusqu'à leurs applications pratiques dans le domaine de la transmission sécurisée de données. Les trois chapitres interconnectés ont offert une progression logique :

- La première partie a établi les bases théoriques des systèmes dynamiques continus, en mettant l'accent sur les concepts clés tels que les points d'équilibre, la stabilité au sens de Lyapunov et les bifurcations.
- La seconde partie a approfondi les caractéristiques spécifiques du chaos, notamment à travers l'étude des attracteurs étranges et des outils de quantification comme les exposants de Lyapunov, illustrés par les systèmes emblématiques de Lorenz et Rössler.
- Enfin, la troisième partie a démontré l'utilité pratique de ces concepts à travers des méthodes innovantes de synchronisation et leur application concrète dans des protocoles de communication sécurisée.

Les résultats obtenus, notamment dans la synchronisation du système de Lü et les simulations de transmission sécurisée, confirment le potentiel des systèmes chaotiques pour le chiffrement de données. La sensibilité aux conditions initiales, souvent considérée comme un obstacle, se révèle ici un atout majeur pour la sécurité.

Cette étude ouvre plusieurs perspectives prometteuses :

- L'extension des méthodes à des systèmes hyperchaotiques de dimension supérieure
- L'optimisation des algorithmes pour des applications temps réel
- L'adaptation aux nouvelles technologies de communication quantique

En conclusion, ce travail souligne à la fois la richesse mathématique des systèmes dynamiques non linéaires et leur pertinence croissante dans un monde où la sécurité des données devient un enjeu critique. Les propriétés intrinsèques du chaos, combinées à des méthodes de contrôle sophistiquées, offrent des solutions élégantes aux défis contemporains de la cryptographie.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Boccaletti, S., Kurths, J., Valladares, D.L., Osipov, G., Zhou, C.** "The synchronization of chaotic systems". *Physics Reports* 366, 1-101 (2002).
2. **Bouchenine H, Guermache H,** "Etude de la dynamique et chaotique du systeme le Lorenz". Mémoire de Mathématique, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussof-Mila (2020/2021).
3. **Charkhache C, Chaibi S,** "Le chaos dans les systemes dynamiques". Mémoire de Magistere en Mathématique, Université Larbi Tebessi-Tebessa (20/06/2019).
4. **Charru, F.** *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences (2012).
5. **Chen, A., Lu, J., L"u, J. and Yu, S.** "Generating hyperchaotic L"u attractor via state feedback control". *Physica A* 364 (2006) 103–110.
6. **Dang-Vu, H., & Delcarte, C.** *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*. Ellipses (2000).
7. **Devaney, Robert L.** *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley (1989).
8. **Bai, E., Lonngren, K.E.** "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control". *Chaos, Solitons and Fractals* 11(7), 1041-1044 (2008).
9. **Eric Gonclaves de Silva,** "Introduction aux systemes dynamiques et Chaos". Institut Polytechnique de Grenoble (Avril 2004).
10. **Grassi, G.** "Generalized synchronization between different chaotic maps via deadbeat control". *Chinese Physics B* 21(5), 050505-5 (2012).
11. **Guckenheimer, J., Holmes, P.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag (1986).
12. **Guilhem Assael, Lucas Blaaizot.** "La théorie du chaos". Lycée du Sacré-Cœur et Lycée Etoile (2013/2014).
13. **Hale, J.K., Kocak, H.** *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag (1991).
14. **Ibtissem Talbi,** *Systemes dynamiques non-lineaires et phenomenes de chaos*. Thèse de Magistere, Université Mentouri de Constantine (29/06/2010).
15. **Kaouache, S., Abdelouahab, M.S.** "Modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems". *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems* 10(5), 96-104 (2018).
16. **Khan, M.A.** "Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control". *Journal of Information and Computer Science* 7(4), 272-283 (2012).
17. **Chua, L.O.** "Chua's circuit : an overview ten years later". *Journal of Circuits Systems & Computers* 4 (1994).

18. **Li, G.H.** "Inverse lag synchronization in chaotic systems". *Chaos, Solitons & Fractals* 40, 1076-1080 (2009).
19. **Hu, M., Xu, Z.A.** "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems". *Non-linear Analysis* 69(4), 1091-1099 (2008).
20. **Manieri, R., Rehacek, J.** "Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems". *Physical Review Letters* 82(15), 3042-3045 (1999).
21. **Marle, C.M.** *Systemes dynamiques : une introduction*. Ellipses (2003).
22. **Mindlin, G.B., Solari, H.G., Natiello, M.A., Gilmore, R., Tuffillaro, N.B.** "Classification of strange attractors by integers". *Physical Review Letters* (1991).
23. **Olusola, O.I., Vincent, U.E., Njah, A.N., Idowu, B.A.** "Global stability and synchronization criteria of linearly coupled gyroscope". *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 13(3), 258-269 (2013).
24. **Olivier Bonnefoy**, "Systemes dynamiques et instabilités hydrodynamiques". École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne (08/04/2021).
25. **Osipov, G.V., Pikovsky, A.S., Rosenblum, M.G., Kurths, J.** "Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators". *Physical Review E* 55(3), 2353-2361 (1996).
26. **Poincaré, H.** "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I)". *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7, 375-422 (1881).
27. **Poincaré, H.** *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Vol. 3). Gauthier-Villars (1899).
28. **Pyragas, K.** "Properties of generalized synchronization of chaos". *Nonlinear Analysis : Modelling and Control* 3, 101-129 (1998).
29. **Pecora, L.M., Carroll, T.L.** "Synchronization in chaotic systems". *Physical Review Letters* 64(8), 821-824 (1990).
30. **Brown, R., Kocarev, L.** "A unifying definition of synchronization for dynamical systems". *Chaos* 10(2), 344-349 (June 2000).
31. **Ruelle, D., Takens, F.** "On the nature of turbulence". *Communications in Mathematical Physics* 20, 167-192 (1971).
32. **Afraimovich, V.S., Verichev, N.N., Rabinovich, M.N.** "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems". *Radiophysics and Quantum Electronics* 29, 747-757 (1986).
33. **Wang, X.Y., Zhu, L.B.** "Adaptive full state hybrid projective synchronization of unified chaotic systems with unknown parameters". *International Journal of Modern Physics B* 25, 4661-4666 (2011).
34. **Wang, X.Y., Song, J.M.** "Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14(8), 3351-3357 (2009).
35. **Wu, X.X., Chen, Z.** *Introduction of Chaos Theory*. Shanghai Science and Technology Bibliographic Publishing House (1996).
36. **Yamada, T., Fujisaka, H.** "Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems". *Progress of Theoretical Physics* 47(1), 32-47 (1983). doi :10.1143/PTP.47.32.
37. **Yan, Z.** "Chaos Q-S synchronization between Rossler system and the new unified chaotic system". *Physics Letters A* 334(5), 406-412 (2005).