وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــــية العلـــــوم
قسم الرياضيات

N⁰ : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Sur une classe de problèmes elliptiques quasilinéaire de type Dirichlet

Option : Analyse fonctionnelle appliquée

Par :

- *SASSANE Lamia*

Encadré par : LECHEHEB Samira MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : MAOUNI Messaoud Prof. U. SKIKDA

Examinateur: SLIMANI Kamel MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Sur une classe de problèmes elliptiques quasi-linéaires de type Dirichlet

Memoire de Master

Analyse fonctionnelle appliquée

Departement de Mathematiques

Par

Sassane Lamia

Université 20 Août 1955 - Skikda

Encadré par : Lecheheb Samira

Faculté des sciences
Département de mathématiques

REMERCIEMENTS

On tient tout d'abord à remecier Allah qui nous a éclairé tout au long de notre chemin et qui nous a permis de réaliser ce modeste travail .

Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus chaleureux à notre encadreur :

Mme. LECHEHEB SAMIRA

qui a dirigé ce travail, pour ses précieux conseils et son suivi au cours de ce travail .

A la précident de notre jury : prof. MAOUNI MESSAOUD

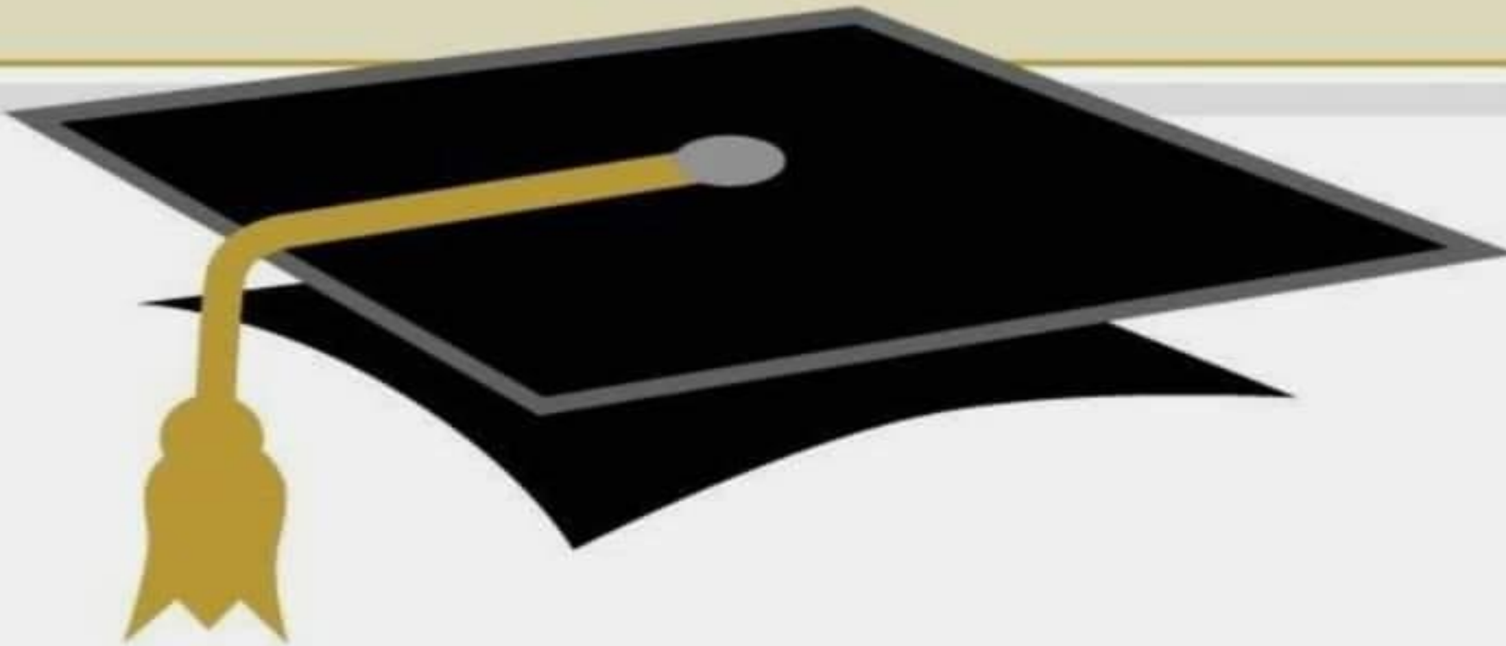
Ainsi que l'examinateur : Dr. SLINAMI KAMEL

Merci pour d'avoir pris le temps de juger notre modeste travail

Aussi nos remercions tous ceux qui nous ont aidé de près au loin, enseignants et étudiants, à la réalisation de ce mémoire .

Et enfin, nous tenons à exprimer notre parfaite considération aux membres de jury pour avoir bien voulus examiner et juger notre travail .

A tout le corps enseignant du département de mathématiques pour l'enseignement reçu .



Dédicase

Du profond de mon cœur, je dédie ce modeste travail à :

*Ma très cher mère BOUNEZOUR RACHIDA *

La lumière de mes jours, la source de mes effort, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur. Qu'Allah nous procure santé et longue vie .

*Mon très cher père IBRAHIME *

Mon exemple éterdel, mon soutien moral et source de joie, celui qui s'est tou jours, sacrifé pour me voir réussir, qui ma toujours pausé et motive dans mes études. Qu'Allah garde pour nous.

Toute ma famille

Mes soeurs : CHERIFA, DOUNIA ZED, DOUA, FERIEL et ma petite soeur SIRINE .

Mes deux frères : AHMED et HOUSSEME.

Mon amie proche : HOUCEM.

Mon cher oncle : NOUROU.

Mes amies : ASMA NAHEL, BOUCHRA BELALEM, MERINI AMEL , CHERIBET HAJER.

*A tout ceux que j'aime et ceux qui m'aiment *

Notations

Symbole	Signification
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels non nuls.
Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$\partial\Omega$	le bord de Ω.
p'	Exposant conjugué de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
$L^{p'}$	Exposant dual de $L^p(\Omega)$.
p.p	presque pour tous les points.
∇u	Le gradient de la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^t$.
Δu	Le laplacien de la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ c-à-d $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\nabla u)$.
div	Divergence.
$\|.\|$	La norme.
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité.
$D_i f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivées partielle de f par rapport à x_i.
B_R	La boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine.
U	$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$
$\|(u, v)\|_U$	$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.
W	$L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.
E	$H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Table des matières

Introduction Générale

Nous compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grand partie basées sur les équations aux dérivées partielles, c'est en effet gâce à la modélisation de ces phénomènes au travers d'équations aux dérivées partielles(EDPs). Dans la théorie des EDPs, cette méthode est lieé au principe du maximum et aux résultats de comparaison. Elle permet d'obtenir des résultats d'existence et la localisation d'une solution d'un problème aux limites en présence d'un couple de fonctions. En règle générale ces équations elliptiques correspondent à la traduction mathématique des lois de la physique comme dynamiques des fluides, électromagnétisme, thermique, chimique et mécanique quantique [17].

Les équations aux différence qui sont abondamment utilisées pour faire avancer cette science, elle est très utile pour d'écrire des phénomènes saisonniers. Par exemples, ce pourrait être pour l'étude d'une population d'insectes qui après un certain temps disparaît, pour réapparaître ultérieurement après avoire été pendent un certain temps sous forme de larve [18].

Dans une grande majorité de cas, l'EDPs sont non-linéaire (à cause des propriétés des matériaux) et l'on doit faire appel à l'ordinateur pour les résoudres (logiciel de calcul numérique), lorsque cella est possible, il est intéressant de résoudre les équation du modèle de façon analytique, elle peut-être utilisée pour une première étude d'optimisation du dispositif étudié, les méthodes vaiationnelles faibles [17].

Notre principal objectif dans ce travail est d'étudier l'existence de la solution faible pour une classe de problèmes élliptiques quasilinéaires. L'existence des solutions de ce type des problèmes a été étudié par plusieurs auteurs en utilisant des différentes méthodes, citons par exemple : la méthode des sous et sur solution, les méthodes variationelles, les théorèmes du point fixe [4, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 16]. Dans notre travail en utilisant la méthode de compacité pour monter l'existence de la solution faible, qui est une méthode très utile pour résoudre une équation différentielle patielle quasilinéaire.

Ce travail est constitué de trois chapitres.

Le premier chapitre est un préliminaire qui comporte des résultats utilisés tout au long de ce travail, le chapitre est organisé comme suite :

en premier lieux nous rappelons et complémont d'analyse sur les espaces $L^p(\Omega)$ et de Sobolev, ainsi quelques inégalités utiles et les résultats sur l'intégration et la dualité, dans la deuxième lieus présentons la méthode de degré topologique de Brouwer qui jouent un rôle essentiel dans ce mémoire [7].

Dans la deuxième chapitre, nous exposons l'existence des solutions faibles d'un problème quasilinéaire suivant :

$$\begin{cases} -div(\alpha(x,u(x))\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{ou} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory .

On va assurer l'existence de solution, en utilisant la méthode de compacité [14].

Le dernier chapitre est consacré à l'existence des solutions faibles pour un système elliptique quasilinéaire suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(\alpha_1(x,v(x))\nabla u) = f_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\text{div}(\alpha_2(x,u(x))\nabla v) = f_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f = (f_1, f_2)$ est une fonction dans $(H^{-1}(\Omega))^2$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est une fonction de Carathéodory .

Ce résultat peut être considéré comme une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent .

Chapitre 1

Préliminaires mathématiques

Dans ce chapitre, nous traitons deux parties. Dans la première nous rappelons divers résultats généraux qui ont servi dans cette mémoire et qui pour la plupart sont accompagnés de références. Dans la deuxième partie nous introduisons la méthode du degré topologique.

1.1 Rappels et complément d'analyse

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels, particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev. Nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats utiles pour les chapitres suivants. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ continue}\},$$

$C^m(\Omega)$: L'espace des fonctions m fois continument différentiables sur Ω

$$C^\infty(\Omega) = \underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} C^m(\Omega)$$

$C_c(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) \text{ telle que } f(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^m \backslash K \text{ où } K \text{ est un compact}\}$.
$D(\mathbb{R}^m)$ L'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ à support compact dans $\mathbb{R}^m$ (dit aussi, espace des fonctions test).

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 *Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, on definit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}/f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0, \quad |f(x)| \leq C, \mu \text{ - p.p. sur } \Omega\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \ \mu - \text{p.p}\}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

Remarque 1.1.1 *En particulier, si $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

L^1_{loc} désigne l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω, i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}.$$

Structure des espaces $L^p(\Omega)$

Proposition 1.1.1 *[8]*

1. *L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.*
2. *L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*
3. *L'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

1.1.2 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Holder

Théorème 1.1.1 *[3] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Inégalité de Minkowski

Théorème 1.1.2 *[3] Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, avec $p \geq 1$ alors*

$$f + g \in L^p(\Omega) \text{ et } \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.1.3 *[8] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C_Ω telle que :*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.3 Quelques résultats sur l'intégration et la dualité

Théorème 1.1.4 (Convergence dominée de Lebesgue [3]) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f on suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que tout $n \geq 1$ on ait $|f_n(x)| \leq g(x) p.p.$ sur Ω, alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0.$$

Théorème 1.1.5 *[3] Soient $(f_n)_{n\in N}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, alors il existe sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tels que*

1. *$f_{n_k}(x) \to f(x)$, presque partout sur Ω.*
2. *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$ et presque partout sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.*

Définition 1.1.2 (Dérivée faible) *Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens fiable s'il existe $D_i f \in L^1_{lac}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_\Omega D_i f(x) \varphi(x) dx.$$

1.1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est à dire des espaces constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est très important pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Définition 1.1.3 — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on définit la fonctionnelle $\|\cdot\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :*

$$\|f\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|a|\leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right\}^{1/p}$$
$$\|f\|_\infty = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty ;$$

pour toute fonction f qui donne un sens à cette écriture.

— $W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)$ *telle que* $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ *pour* $0 \leq |\alpha| \leq m\}$.

— $W_0^{m,p}(\Omega) =$ *la fermeture de* $C_0^\infty(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

Remarque 1.1.2 *Si $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $\quad H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.*

Proposition 1.1.2 *[8]*

1. $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.
2. $W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable, pour* $1 \leq p < +\infty$.
3. $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif, pour* $1 < p < +\infty$.

Remarque 1.1.3 *Dans $W^{1,p}(\Omega)$ l'application*

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{1,p}$.

Théorème 1.1.6 *[13]*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant la propriété suivante

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty, p^* = \frac{N_p}{N-p}$

1. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ *Alors* $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *avec* $q \in [p, p^*], \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{m}{N}$
2. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ *Alors* $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *avec* $q \in [p, \infty]$
3. *Si* $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, *Alors* $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Proposition 1.1.3 (Formule d'intégration par partie[13]) *Soient u, v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\partial\Omega \in C^1$, alors pour tout $1 \leq i \leq N$ a lieu la formule d'intégration par partie*

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)n_i ds$$

où $n_i = \cos(n, x_i)$ est le cosinus de l'angle de la normale extérieure à $\partial\Omega$ et de l'axe des x_i.

Si $v \in H^1(\Omega)$ et si les composantes u_i du vecteur $\vec{u}$ appartiennent à $H^1(\Omega)$, alors a lieu l'égalité :

$$\int_\Omega div(\vec{u}(x)).v(x)dx = -\int_\Omega (\vec{u}(x), \nabla v(x))dx + \int_{\partial\Omega} (\vec{u}, \vec{n})vds.$$

Enfin, en remarquant que

$$\Delta u(x) = div(\nabla \vec{u}),$$

on obtient la $2^{ème}$ formule de Green.

Proposition 1.1.4 *[13] Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vds.$$

Théorème 1.1.7 (Rellich [10]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ et $1 \leq p < +\infty$. Toute partie borné e de $W_0^{1,p}(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$. Ceci revient à dire que de toute suite bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^p(\Omega)$.*

Le théorème reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ à condition de supposer la frontière lipschitzienne.

Théorème 1.1.8 (Stampacchia [13]) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$ p.p.*

Théorème 1.1.9 (Lax-Milgram [3]) *Soit L une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H et a une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction $u \in H$ telle que :*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a est symétrique, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle $J : H \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \text{ pour tout } v \in H,$$

c.a.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \text{ et } J(u) < J(v) \text{ si } u \neq v.$$

Définition 1.1.4 *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable à valeur réelle.*
Considérons lapplication

$$\begin{aligned} f : \Omega \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto f(u); \end{aligned}$$

où $f(u)$ est une fonction à valeur réelle définie sur Ω par :

$$f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

L'application f est appelée opérateur de Nemitski associée à f.

Théorème 1.1.10 *[2] Soient $\alpha, \beta \geq 1, f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant :*

1. *$f(x,t)$ mesurable par rapport à $x \in \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et continue par rapport à $t \in \mathbb{R}$ pour presque partout $x \in \Omega$.*
2. *Il existe $a_1 \in L^B(\Omega)$ et $a_2 > 0$ tel que*

$$|f(x,u)| \leq a_1(x) + a_2(x)|u|^{\frac{\alpha}{\beta}}, \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \geq 1).$$

Alors lopérateur de Nemiski f est continue de $L^\alpha(\Omega)$ à $L^B(\Omega)$.

Remarque 1.1.4 *La condition* (1) *est appellée condition de Carathéodory et $f(x,t)$ satisfaisant* (2) *est appellée fonction de Carathèodory.*

1.2 Degré topologique

Nous abordons dans cette deuxiéme partie une méthode de compacité pour obtenir des résulats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires.

1.2.1 Degré de Brouwer et propriétés

Définition 1.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. Soit $f \in C\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $y \in \mathbb{R}^N$. On cherche à montrer qu'il existe $x \in \bar{\Omega}$ tel que $f(x) = y$. On commence par donner l'existence et l'unicité d'une application, appelée dégre topologique, en dimension finie puis on l'étend a la dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir des résultats d'existence de solutions. Soient Ω un ouvert borné et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N, f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), x_0 \in \Omega$ est dit point régulier si $J_f(x_0) \neq 0$ (ou $J_f(x_0) = detDf(x_0)$ avec*

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}(x_0)).$$

Dans le cas contraire, x_0 est appelé point critique ou point singulier. Désignons par

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}$$

l'ensemble des points singuliers de f sur Ω.

Définition 1.2.2 (Cas régulier) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $y \notin f(\partial\Omega)$ une valeur régulière, on dèfinit le degré de f au point y par*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{f(x_i)=y, i=\overline{1.n}} sgn\left(\det D_x f(x_i)\right).$$

Définition 1.2.3 *Soit $N \geq 1$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, y) où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, f \in C\left(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ et $y \in \mathbb{R}^N$ t.q $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 1.2.1 (Brouwer, 1933 [10]) *Soit $N \geq 1$ et $\mathcal{A}$ donné par la définition 1.2.3 Il existe alors une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$ appelée (degré topologique), vérifiant les trois proprités suivantes :*

- **Normalisation :** *$d(Id, \Omega, y) = 1$, si $y \in \Omega$.*
- **Degré d'une union :** *$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$, si $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \left\{f(x), x \in \bar{\Omega} \backslash \Omega_1 \cup \Omega_2\right\}$.*
- **Invariance par homotopie :** *Si $h \in C\left([0,1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N\right), y \in C\left([0,1], \mathbb{R}^N\right)$ et $y(t) \notin \{h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ (pour tout $t \in [0,1]$) on a alors $d(h(t,.), \Omega, y) = d(h(0,.), \Omega, y(0)$, pour tout $t \in [0,1]$.*

1.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Une première conséquence de cette méthode de dergé topologique est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 1.2.2 *[10] Soit* $N \geq 1, R > 0$ *et* $f \in C(B_R, B_R)$ *avec* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$ *(on a muni* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme noté* $\|.\|$*). Alors* f *admet un point fixe, c'est a dire il existe* $x \in B_R$ *t.q.* $f(x) = x$*.*

Remarque 1.2.1 *La propriété essentielle du degré topologique est :*
Si $(I - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ *et* $d(I - f, \Omega, y) \neq 0$*, alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $x - f(x) = y$*.*

Chapitre 2

Existence de solution pour un problème quasi-linéaire non-monotone

2.1 Position du problème

Nous intéressons ici au problème suivant :

$$\begin{cases} -div(\alpha(x,u(x))\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{ou} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\alpha : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory .

On suppose qu'il existe des constants $0 < m \leq M$ tel que

$$m \leq \alpha(x,s) \leq M, \tag{2.2}$$

pour $x \in \Omega$ p.p., et tout $s \in \mathbb{R}$.

2.2 Résultat principal

Définition 2.2.1 *On dit que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *est une solution faible de* (2.1) *si pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega \alpha(x,u(x))\langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx = \langle f, v\rangle_H.$$

Théorème 2.2.1 *Sous la condition* (2.2), *le problème* (2.1) *admet au moins une solution.*

2.3 Preuve du théorème 2.1.1

Soit V un sous - espace de dimension finie menu de la norme $H_0^1(\Omega), V^*$ le dual de V. On définie l'application $H : V \times [0,1] \to V^*$ par

$$\langle H(u,\lambda), v\rangle_H = \int_\Omega \alpha(x,\lambda u)\langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx - \langle f, v\rangle_H,$$

pour tout $v \in V$.

2.3.1 Estimation à priori

Nous allons montrer ici que toutes les solutions sont dans la boule $\overline{B}(R)$, c'est-à-dire

$$\{u \in V : H(u,\lambda) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in [0,1]\} \subset \overline{B}\left(m^{-1}\|f\|_{H^{-1}}\right).$$

En effet, si $H(u,\lambda) = 0$ pour tout $(u,\lambda) \in V \times [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
0 = \langle H(u,\lambda), u\rangle &= \int_\Omega \alpha(x,\lambda u)\langle \nabla u(x), \nabla u(x)\rangle dx - \langle f, u\rangle_H \\
&\geq m\int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_\Omega f u dx \\
&\geq m\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq m\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq m^{-1}\|f\|_{H^{-1}}.$$

Par conséquence pour tout $R > m^{-1}\|f\|_{H^{-1}}$, on a

$$H(u,\lambda) \neq 0 \quad \text{si } (u,\lambda) \in \partial B^V(R) \times [0,1]. \tag{2.3}$$

2.3.2 H est borné

Maintenant, si $(u,\lambda) \in \overline{B}^V(R) \times [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle H(u,\lambda), v\rangle| &= \left|\int_\Omega \alpha(x,\lambda u)\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f v dx\right| \\
&\leq M\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(MR + \|f\|_{H^{-1}}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, et d'où

$$H(\overline{B}^V(R) \times [0,1]) \subset \overline{B}^{V^*}(MR + \|f\|_{H^{-1}}). \tag{2.4}$$

2.3.3 H est continue

Soit $(u_n, \lambda_n) \in \overline{B}^V(R) \times [0,1]$ converge vers (u, λ) dans $V \times [0,1]$ c'est-à-dire dans $H_0^1(\Omega) \times [0,1]$. Comme $H(u_n, \lambda_n)$ est borné d'aprés (2.4), pour montrer que

$$H(u_n, \lambda_n) \underset{n \to +\infty}{\to} H(u, \lambda),$$

il suffit de montrer que $H(u, \lambda)$ est l'unique ensemble de point de $H(u_n, \lambda_n)$.
Soit $g \in V^*$ est une unique ensemble de point, (λ_{n_k}) une sous suite de (λ_n) et (u_{n_k}) une sous suite de (u_n) telle que $H(u_{n_k}, \lambda_{n_k}) \to g$ dans V^*, et comme $u_{n_k} \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$, donc $u_{n_k} \to u \in L^2(\Omega)$ fortement, alors d'aprés le réciproque de TCD on a $u_{n_k} \longrightarrow u$ p.p dans Ω et $|u_{n_k}| \leq k$ telle que $k \in L^2(\Omega)$ et comme α est continue alors

$$\alpha(x, \lambda_{n_k} u_{n_K}) \to \alpha(x, \lambda u), \quad p.p., \text{ dans } \Omega.$$

Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et (2.2)

$$\alpha(x, \lambda_n u_n) \nabla v \to \alpha(x, \lambda u) \nabla v, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part,

$$\partial_i u_{n_k} \to \partial_i u, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Nous conclure que :

$$\begin{aligned}\langle H(u_{n_k}, \lambda_{n_k}), v \rangle_H &= \int_\Omega [\alpha(x, \lambda_{n_k} u_{n_k}) \langle \nabla u_{n_k}(x), \nabla v(x) \rangle] dx - \langle f, v \rangle_H \\ &\longrightarrow \int_\Omega \alpha(x, \lambda u(x)) \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx - \langle f, v \rangle_H = \langle H(u, \lambda), v \rangle_H .\end{aligned}$$

Par conséquent $g = H(u, \lambda)$. Toutes ces propriétés nous permettent d'appliquer la propriété d'invariance homotopie

$$\deg_B(H(.,1), B(R), 0) = \deg_B(H(.,0), B(R), 0). \tag{2.5}$$

Mais $H(u,0)=0$ est équivalent au problème linéaire

$$\int_\Omega \alpha(x,0)\left\langle \nabla u(x), \nabla v(x)\right\rangle dx = \left\langle f, v\right\rangle_H ,$$

pour tout $v \in V$, dont la solution est unique car l'ensemble des ses solutions est borné. Par conséquent

$$\deg_B(H(.,0), B(R), 0) = \pm 1,$$

et d'après (2.5), il existe $u \in B^V(R)$ qui satisfait

$$\int_\Omega \alpha(x,u(x))\left\langle \nabla u(x), \nabla v(x)\right\rangle dx = \left\langle f, v\right\rangle_H , \|u\|_{H_0^1} \leq m^{-1}\|f\|_{H^{-1}}, \tag{2.6}$$

pour tout $v \in V$.

2.3.4 Passage à la limite

Lemme 2.3.1 *[10] (Convergence forte contre convergence faible)*
On suppose que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ et $g_n \to g$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ alors :

$$\int_\Omega f_n g_n dx \to \int_\Omega f g dx \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Par contre, on rappelle que si $f_n \to f$ dans L^2 faible et $g_n \to g$ dans L^2 faible, on n'a pas en générale convergence de $\int_\Omega f_n g_n dx$ vers $\int_\Omega f g dx$.

Maintenant, on sait que $H_0^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{n\geq 1} V_n}$ où $V_n \subset V_{n+1} (n \geq 1)$ et V_n de dimension n. Par conséquent, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite v_n tq $v_n \in V_n$ qui converge vers v. D'autre part, par (2.6) appliqués à $V = V_n$, il existe pour chaque $n \geq 1, u_n \in V_n$ telle que

$$\int_\Omega \alpha(x,u_n(x))\langle \nabla u_n(x), \nabla \varphi(x)\rangle dx = \langle f, \varphi\rangle_H, \|u_n\|_{H_0^1} \leq m^{-1}\|f\|_{H^{-1}},$$

pour tout $\varphi \in V_n$. En particulier, on prend $\varphi = v_n$

$$\int_\Omega \alpha(x,u_n(x))\langle \nabla u_n(x), \nabla v_n(x)\rangle dx = \langle f, v_n\rangle_H, \|u_n\|_{H_0^1} \leq m^{-1}\|f\|_{H^{-1}}, \tag{2.7}$$

pour tout $n \geq 1$. D'après (2.7), on peut extraire une sous suite encore notée u_n telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega),\ u_n \to u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } u_n \to u\ p.p.,\ \text{dans } \Omega.$$

Comme $(\alpha(x, u(x)))$ est borné dans $L^2(\Omega)$, et $\nabla v_n \to \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to \infty$ dans (2.7) on obtien

$$\int_\Omega \alpha(x, u(x))\langle \nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx = \langle f, v\rangle_H, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donc u est une solution faible de (2.1)

Chapitre 3

Résultats d'existence pour un système elliptique quasi-linéaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de la solution faible pour une classe de systèmes elliptiques quasilinéaires. Ce résultat peut être considéré comme une généralisation des résultats obtenus dans le chapitre précédent.

3.1 Position du problème

L'objectif de ce chapitre est la construction des solutions faibles pour le système suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(\alpha_1(x, v(x))\nabla u) = f_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\mathrm{div}(\alpha_2(x, u(x))\nabla v) = f_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f = (f_1, f_2)$ est une fonction dans $(H^{-1}(\Omega))^2$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est une fonction de Carathéodory .

On suppose qu'il existe des constants $0 < m_i \leq M_i$ tel que

$$m_i \leq \alpha_i(x, s) \leq M_i \quad , \quad \text{pour } i = \overline{1, 2}. \tag{3.2}$$

3.2 Résultat principal

Dans cette section, nous discutons des notions de solutions faibles et de résultat principal. Première, soit $U = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

qui est un espace de Banach menu de la norme

$\|(u,v)\|_U^2 = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)}$,
et soit $W = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et $\mathrm{E} = H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Dans la suite, $\|.\|_{L^2(\Omega)}$, $\|.\|_{H^1_0(\Omega)}$ et $\|.\|_{H^{-1}(\Omega)}$ désignera les normes usuelles de $L^2(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, respectivement.
Nous donnons maintenant le :

Définition 3.2.1 *On dit que* $(u,v) \in U$ *est une solution faible de* (3.1) *si pour tout* $(\varphi,\psi) \in U$ *on a*

$$\int_\Omega \alpha_1(x,v(x))\nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x,u(x))\nabla v(x)\nabla\psi(x)dx = \int_\Omega f_1\varphi dx + \int_\Omega f_2\psi dx.$$

Théorème 3.2.1 *Sous la condition* (3.2)*, le système* (3.1) *admet au moins une solution.*

3.3 Preuve du théorème 3.2.1

Soit $\tilde{V}$ un sous - espace de dimension finie menu de la norme U, $\tilde{V}^*$ le dual de $\tilde{V}$. On définie l'application $T : \tilde{V} \times [0,1] \to \tilde{V}^*$ par

$$\begin{aligned}&\langle T(u,v,\lambda),(\varphi,\psi)\rangle_{\mathrm{V}}\\&= \int_\Omega \alpha_1(x,\lambda v)\nabla u\nabla\varphi dx + \int_\Omega \alpha_2(x,\lambda u)\nabla v\nabla\psi dx\\&-\int_\Omega f_1(x)udx - \int_\Omega f_2(x)vdx,\end{aligned}\tag{3.3}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in \tilde{V}$.

3.3.1 Estimation à priori

Nous allons montrer que toutes les solutions sont dans la boule $\overline{B}^{\tilde{V}}(R)$, c'est-à-dire

$$\{(u,v) \in \tilde{V} : T(u,v,\lambda) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in [0,1]\} \subset \overline{B}\left(\frac{2}{\min\,(m_1,m_2)}\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\right).$$

En effet, si $T(u,v,\lambda)=0$ pour tout $(u,v,\lambda)\in\tilde{V}\times[0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
0 &= \langle T(u,v,\lambda),(u,v)\rangle_U \\
&= \int_\Omega \alpha_1(x,\lambda v)\nabla u\nabla u dx + \int_\Omega \alpha_2(x,\lambda u)\nabla v\nabla v dx - \int_\Omega f_1 u dx - \int_\Omega f_2 v dx \\
&\geq m_1\int_\Omega \nabla u\nabla u dx + m_2\int_\Omega \nabla v\nabla v dx - \int_\Omega f_1 u dx - \int_\Omega f_2 v dx \\
&\geq m_1\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + m_2\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f_1\|_{H^{-1}}\|u\|_{L^2(\Omega)} - \|f_2\|_{H^{-1}}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq m_1\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} + m_2\|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \|f_1\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1_0(\Omega)} - \|f_2\|_{H^{-1}}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\geq m_1\|(u,v)\|^2_U + m_2\|(u,v)\|^2_U - \|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\|(u,v)\|_U - \|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\|(u,v)\|_U \\
&\geq \ \min\,(m_1,m_2)\|(u,v)\|^2_U - 2\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\|(u,v)\|_U.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\|(u,v)\|_{\mathrm{U}} \leq \frac{2}{\min(m_1,m_2)}\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}.$$

Par conséquence pour tout $R > \dfrac{2}{\min(m_1,m_2)}\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}$,

on a

$$H(u,v,\lambda)\neq 0 \quad \text{si } (u,v,\lambda)\in\partial B^{\tilde{V}}(R)\times[0,1]. \tag{3.4}$$

3.3.2 T est borné

Maintenant, si $(u,v,\lambda)\in\overline{B}^{\tilde{V}}(R)\times[0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
&|\langle T(u,v,\lambda),(\varphi,\psi)\rangle| \\
&\leq M_1\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} + M_2\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|f_1\|_{H^{-1}}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|f_2\|_{H^{-1}}\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq M_1\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} + M_2\|v\|_{H^1_0(\Omega)}\|\psi\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f_1\|_{H^{-1}}\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f_2\|_{H^{-1}}\|\psi\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&\leq M_1\|(u,v)\|_U\|(\varphi,\psi)\|_U + M_2\|(u,v)\|_U\|(\varphi,\psi)\|_U + \|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\|(\varphi,\psi)\|_U + \|(f_1,f_2)\|_E\|(\varphi,\psi)\|_U \\
&\leq (\ \mathrm{Max}\ (M_1,M_2)\ \|(u,v)\|_U + 2\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\ )\|(\varphi,\psi)\|_U \\
&\leq (\mathrm{Max}\ (M_1,M_2)\ R + 2\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}}\ )\|(\varphi,\psi)\|_U \\
&\leq (MR + 2\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}})\ \|(\varphi,\psi)\|_U,
\end{aligned}$$

pour tout $(u,v)\in U$, et d'où

$$T(\overline{B}^{\tilde{V}}(R)\times[0,1]) \subset \overline{B}^{\tilde{V}^*}(MR + 2\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}})\,. \tag{3.5}$$

3.3.3 T est continue

Soit $(u_n, v_n, \lambda_n) \in \overline{B}^{\tilde{V}}(R) \times [0,1]$ converge vers (u, v, λ) dans $\tilde{V} \times [0,1]$ c'est-à-dire dans $U \times [0,1]$. Comme $T(u_n, v_n, \lambda_n)$ est borné d'après (3.4), pour montrer que

$$T(u_n, u_n, \lambda_n) \underset{n \to +\infty}{\to} T(u, v, \lambda),$$

il suffit de montrer que $T(u, v, \lambda)$ est l'unique ensemble de point de $T(u_n, v_n, \lambda_n)$.
Soit $l \in \tilde{V}^*$ est une unique ensemble de point, (λ_{n_k}) une sous suite de (λ_n), (u_{n_k}) une sous suite de (u_n) et (v_{n_k}) une sous suite de (v_n) telle que $T(u_{n_k}, v_{n_k}, \lambda_{n_k}) \to l$ dans $\tilde{V}^*$.
Comme $(u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u, v)$ dans U, donc $(u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u, v) \in W$, alors d'aprés le réciproque de TCD on a $(u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u, v)$ p.p., dans Ω et il existe $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ telle que $|v_{n_k}| \leq h_1, |u_{n_k}| \leq h_2$ et comme α est continue alors

$$\alpha_1(x, \lambda_{n_k} v_{n_K}) \to \alpha_1(x, \lambda v), \quad p.p., \text{ dans } \Omega,$$

$$\alpha_2(x, \lambda_{n_k} u_{n_K}) \to \alpha_2(x, \lambda u), \quad p.p., \text{ dans } \Omega.$$

Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et (3.2), ona

$$\alpha_1(x, \lambda_n v_n) \nabla\varphi \to \alpha_1(x, \lambda v) \nabla\varphi, \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\alpha_2(x, \lambda_n u_n) \nabla\psi \to \alpha_2(x, \lambda u) \nabla\psi, \text{ dans } L^2(\Omega).$$

D'autre part, $(\nabla u_{n_k}, \nabla v_{n_k}) \to (\nabla u, \nabla v)$ dans W.
Nous conclure que

$$\begin{aligned}
&\langle T(u_{n_k}, v_{n_k} \lambda_{n_k}), (\varphi, \psi) \rangle_U \\
&= \int_\Omega \alpha_1(x, \lambda_{n_k} v_{n_k}) \nabla u_{n_k}(x) \nabla\varphi(x) dx + \int_\Omega \alpha_2(x, \lambda_{n_k} u_{n_k}) \nabla v_{n_k}(x) \nabla\psi(x) dx \\
&- \int_\Omega f_1(x)\varphi dx - \int_\Omega f_2(x)\psi dx \\
&\to \int_\Omega \alpha_1(x, \lambda v(x)) \nabla u(x) \nabla\varphi(x) dx + \int_\Omega \alpha_2(x, \lambda u(x)) \nabla v(x) \nabla\psi(x) dx \\
&- \int_\Omega f_1(x)\varphi dx - \int_\Omega f_2(x)\psi dx = \langle T(u, v, \lambda), (\varphi, \psi) \rangle_U .
\end{aligned}$$

Par conséquent $l = T(u, v, \lambda)$. Toutes ces propriétés nous permettent d'appliquer la propriété d'invariance homotopie

$$\deg_B(T(.,.,1), B(R), 0) = \deg_B(T(.,.,0), B(R), 0). \tag{3.6}$$

Mais $T(u, v, 0) = 0$ est équivalent au problème linéaire

$$\int_\Omega \alpha_1(x, \lambda v)\nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x, \lambda u)\nabla v(x)\nabla\psi(x)dx = \int_\Omega f_1(x)\varphi\, dx + \int_\Omega f_2(x)\psi\, dx,$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$, dont la solution est unique car l'ensemble des solutions est borné. Par conséquent

$$\deg_B(T(.,.,0), B(R), 0) = \pm 1.$$

D'après (3.6), ils existes $(u, v) \in B^{\tilde{V}}(R)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha_1(x, v(x))\nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x, u(x))\nabla v(x)\nabla\psi(x)dx \\ &= \int_\Omega f_1\varphi(x)dx + \int_\Omega f_2\psi(x)dx, \\ &\|(u, v)\|_{\mathrm{U}} \leq \frac{2}{\min(m_1, m_2)}\|(f_1, f_2)\|_{\mathrm{E}}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in \tilde{V}$.

3.3.4 Passage à la limite

Maintenant, on sait que $U = \overline{\bigcup_{n\geq 1}\tilde{V}_n}$ où $\tilde{V}_n \subset \tilde{V}_{n+1} (n \geq 1)$ et $\tilde{V}_n$ de dimension n. Par conséquent, pour tout $(\varphi, \psi) \in U$, ils existes une suite (φ_n, ψ_n) telle que $(\varphi_n, \psi_n) \in \tilde{V}_n$ qui converge vers (φ, ψ). D'autre part, par (3.7) appliqués à $\tilde{V} = \tilde{V}_n$, il existe pour chaque $n \geq 1, (u_n, v_n) \in \tilde{V}_n$ telle que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha_1(x, v(x))\nabla u_n(x)\nabla\phi(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x, u(x))\nabla v_n(x)\nabla\tilde{\phi}(x)dx \\ &= \int_\Omega f_1\phi(x)dx + \int_\Omega f_2\tilde{\phi}(x)dx, \\ &\|(u_n, v_n)\|_{\mathrm{U}} \leq \frac{2}{\min(m_1, m_2)}\|(f_1, f_2)\|_{\mathrm{E}}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout $(\phi,\tilde{\phi}) \in \tilde{V}_n$. En particulier, on prend $(\phi,\tilde{\phi}) = (\varphi_n,\psi_n)$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \alpha_1(x,v_n(x))\nabla u_n(x)\nabla\varphi_n(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x,u_n(x))\nabla v_n(x)\nabla\psi_n(x)dx \\
&= \int_\Omega f_1\varphi_n(x)dx + \int_\Omega f_2\psi_n(x)dx, \qquad (3.9) \\
&\|(u_n,v_n)\|_{\mathrm{U}} \leq \frac{2}{\min(m_1,m_2)}\|(f_1,f_2)\|_{\mathrm{E}},
\end{aligned}$$

pour tout $(\varphi_n,\psi_n) \in \tilde{V}_n$. D'aprés (3.9), on peut extraire une sous suite encore notée (u_n,v_n) telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } U,\ \ u_n \to u \text{ dans } W \text{ et } u_n \to u \ p.p.,\ \text{ dans } \Omega.$$

Comme $(\alpha_1(x,v_n(x)))$ et $(\alpha_2(x,u_n(x)))$ sont bornées dans W et $(\nabla\varphi_n,\nabla\psi_n) \to (\nabla\varphi,\nabla\psi)$ fortement dans W, alors en passant à la limite dans (3.9)

$$\int_\Omega \alpha_1(x,v(x))\nabla u(x)\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega \alpha_2(x,u(x))\nabla v(x)\nabla\psi(x)dx = \int_\Omega f_1\varphi(x)dx + \int_\Omega f_2\psi(x)dx$$

donc (u,v) est une solution faible de (3.1)

Conclusion

Dans ce travail, on a étudie l'existence des solutions pour deux classes de problèmes elliptiques quasilinéaires avec condition de Dirichlet, en utilisant la méthode de compacité pour prouver les résultats d'existence. Cette méthode est mieux adaptée à l'étude des problèmes quasilinéaires, car elle nécessite d'estimation à priori, elle est applicable, elle d'utilisation presque facile .

Ensuite, nous faison une extension de ces résultats au système, à savoir une classe de systèmes elliptiques quasilinéaires.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev space, Academic press*, New york/San Francisco/ London, (1975).

[2] A. Ambroseti and A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis And Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, (2007).

[3] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York .(2010).

[4] R.P. Agarwal,D.O'Regan, *Infinite Interval problems modeling pheno-mena ahich arise in the theory of plasma and electrical potential theory*, Stud. Appl. Math. 111(2003), 339-358.

[5] P. Amster and A.Deboli, *A Neumann boundary value problem on unbounded interval*,Electron. J.Differential Equations (2008), vol 2008, No 90, pp 1-5.

[6] J.V. Baxely, *Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on ifinite intervals*,J. Math. Anal. Appl (1990),147, pp 122-133.

[7] Bouaziz souad, Kerboua zineb *mémoire Sur L'existence et l'unicité de solutions non trivales des équations aux dérivées partielles non linéaires,* Universite 20 aout 1955 de skikda (2015).

[8] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et application.* Dunod, Paris, (1983).

[9] A. Contantin, *On an infinite interval boundary value problem, Annali di matematica pura ed addplicata(IV)*, Vol CLXXVI (1999), pp 379-394.

[10] T. Gallouet, R. Herbin, *Cours Master 2, Equation aux dérivée partielle*, Université Aix de Marseille, (2020).

[11] A.Granas, R.B Guenther,J.W. Lee and D.O'regan, *Boundary value problems on infinite intervals and semiconductor devices,*Vol J. Math. Anal. Appl (1986),116, pp 335-348.

[12] O.A.Gross, *The Boundary value problem on infinite interval : Existence,Uniqueness and asympotic behavior og bounded solutions to class of nonlinear second order differential equations,* J. Math. Anal. Appl 7,100-109 (1963).

[13] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux Problémes Elliptiques*, Springer Verlag, Math. Appl, Vol 13, 1993.

[14] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, (1969).

[15] B. Liu, L.Liu and Y. Wu, *Multiple solutions of singular three-point boundary value problems on* $[0, +\infty)$ Nonliner Anal.(2009), 70, pp 3348-3357.

[16] B. Liu, L.Liu and Y. Wu, *Unbounded solutions for three-point boundary value problems with nonlinear boundary conditions on* $[0, +\infty)$ Nonlinear. Anal (2010),73, pp 2923-2932.

[17] T.Lubin, *Equations aux dérivées partielles(EDP), Méthode de résolution des EDP par séparation de variables Applications*HAL ID : CEL601575654 https ://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01575654 (2017).

[18] M.Nehari Mohamed, *Sur L'existence des solutions pour des classes de problemes aux limites quasilineaires dans les echelles de temps.*Thèse de doctora, Universite aboubakr belkaid de tlemcen (2016).

Abstract

The objective of this thesis is the study of the existence of the weak solution for two classes of quasilinear elliptic problems :
- The first problem class involving au operator in divergentid forme.
- The second class is an extension of the first problem to the system.
Using the comapactness method to prove existence results.

Key words : Topological degree, elliptic problems, weak solution

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude de l'existence de la solution faible pour deux classes de problèmes elliptiques quasilinéaires:
- La première classe de problème contient un opérateur en forme divergentielle.
- La deuxième classe est une extension du premier problème au système.
En utilisant la méthode de compacité pour prouver les résultats d'existence.

Mots clés : Degré topologique, problèmes elliptiques, solution faible.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود حل ضعيف لفئتين من المشاكل الإهليلجية شبه الخطية :
ـ أول فئة مشكلة التي تحتوي على مؤثر في شكل تباعدية.
ـ الفئة الثانية هي امتداد للمشكلة الأولى للنظام .
نستخدم طريقة الإكتناز من أجل إثباث نتائج الوجود.

كلمات مفتاحية: درجة طوبولوجية، المسائل الإهليلجية، الحل الضعيف.