وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كليــــــة العلــــوم

قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Etude de la stabilité des systèmes de Bresse avec retard neutre et distribué

Option : Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles

Par :

Meziane Nesrine

Encadré par : Bouzettouta Lamine **M.C.A** U. SKIKDA

Devant le jury :

Présidente **:** Habhoub Fahima **M.C.A** U. SKIKDA

Examinatrice: Khenniche Ghania **M.C.B** U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciement

Tout d'abord, Je remercie Dieu ALLAH, qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur **Dr. Lamine Bouzettouta** pour son enthousiasme dans la supervision de ce mémoire.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux **Dr. Khenniche Ghania** et **Dr. Fahima Habhoub** qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

À madame **Fahima Habhoub** qui n'hésite jamais à donner a chaque fois que j'avais besoin.

À madame **Samira Lagraf** qui m'a épaulée, conseilléeet aidée durant cette expérience.

Je profite aussi de cette occasion pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique d'université **20 Aout 1955**.

Je remercie ma généreuse famille qui attendait ma réussite avec impatience.

Enfin, j'exprime mes remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont aidé à accomplissement de ce modeste travail.

Dédicace

Je dédie le fruit de ce modeste travail :
Ă
L'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon chère père.
Ă
La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur, maman chérie.
Ă
Ma grand-soeur Khawla qui m'a toujours aidé et encouragé, mes frères seifou et Abdou qui étaient toujours à mes cotés .
Aux
personnes dont j'ai bien aimé leurs présence dans ce jour mes grand -pères Boujamaa et Mohamed, ma grand-mère Houria que dieu les accueil dans son vaste paradis, Jeda Hlima que dieu la protège, mes oncles, mes tantes et toutes ma famille paternelle et maternelle, Meziane et Kabrane
Ă
Mes collègues d'étude , Mes aimables amies Camilia , Rayen , Mima , Sara , Imen et Khawla

Nesrine

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude du comportement asymptotique de solution du système de Bresse avec retard distribué et à retard neutre.

Notre principal résultat est d'étudier la stabilité exponentielle du système par des techniques qui basent sur la construction des fonctionnelles de Lyapunov.

Mots-clés : Système de Bresse, Stabilité exponentielle, Retard distribué, retard neutre, fonctionnelle de Lyapunov

Abstract

This memory is devoted to the study the asymptotic behavior of solutions of Bresse system with distributed delay and neutral delay.

Our main result is to study the exponential stability of the system by techniques that base onthe construction of Lyapunov's functional

Keywords : Bresse system, exponential stability, distributed delay, neutral delay, Lyapunov's functional.

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة السلوك المقارب لحل مشكلة براس مع تأخير موزع و تأخير محايد.

هدفنا الرئيسي هو دراسة الإستقرار الأسي للمشكلة من خلال التقنيات القائمة على بناء داليات ليابونوف.

الكلمات المفتاحية : مشكلة براس، إستقرار أسي، تأخير موزع، تأخير محايد، دالية ليابونوف.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Au cours des dernières années, la stabilité des poutres élastiques, thermoélastiques et visco-élastiques de type Timoshenko, Bresse, Rayleign et Euler Bernoulli, et la stabilité des plaques vibrantes de type Kirchhoff, Von Kármán ont attiré beaucoup d'attention de beaucoup des rechercheurs.

Dans leur étude sur les réseaux de poutres fexibles, Lagnese, Leugering et Schmidt [60] découlent un modèle général de poutres élastiques non linéaires de trois dimensions. Un cas particulier de ce modèle est un modèle linéaire couplant trois équations des ondes. Il décrit les mouvement d'une poutre élastique planaire sous l'effet de petites déformations. C'est le système de Bresse qui est donné par les équations suivantes : (voir [8]) :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = Q_x + lN + F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} = M_x - Q + F_2, \\ \rho_1 w_{tt} = N_x - IQ + F_3, \end{cases} \tag{0.1}$$

ou F_i sont les forces extèrieures et N, Q et M désignent la force axiale, la force de cisaillement et le moment de flexion, respectivement. Ces forces sont les relations contraintedéformation (stress-strain) pour le comportement élastique et elles sont données par :

$$\begin{aligned} N &= k_0(w_x - l\varphi), \\ Q &= k(\varphi_x + lw + \psi), \\ M &= b\psi_x, \end{aligned} \tag{0.2}$$

Ici $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = KAG$, $k_0 = EA$, $b = EI$ et $l = R^{-1}$ ou ρ est la densité du matériau, E est le module d'élasticité, G est le module de cisaillement, K est le facteur de cisaillement, A est la surface en coupe transversale, I est le second moment de la section transversale et R est le rayon de courbure. Les fonctions φ, ψ et w désignent, respectivement, le déplacement transversal, l'angle de rotation d'un filament et le déplacement longitudinal de la poutre.

Considérant le couplage des équations (0.1) et (0.2), nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = F_1, \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) = F_2, \text{dans } (0,1)\times(0,\infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) = F_3, \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases}$$

Il y a un bon nombre de publications relatives à la stabilisation du système de Bresse [3], [72], [41] et [16]. En particulier, dans [41], Liu et Rao ont étudié la stabilisation du système de Bresse avec deux lois différentes de dissipation thermique agissant sur les équations concernant le déplacement longitudinal et la rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation des ondes $\left(\frac{\rho_2}{b} = \frac{\rho_1}{k} \text{ et } k = k_0\right)$, ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie. Dans le cas contraire $\left(\frac{\rho_2}{b} \neq \frac{\rho_1}{k} \text{ et } k = k_0\right)$, ils ont montré que la solution lisse décroit polynomialement vers zéro avec des taux $t^{-\frac{1}{2}\cdot}$ où $t^{-\frac{1}{4}\cdot}$ pour les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann-Neumann ou Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet respectivement.

Remarque 0.1. *Si $R \longrightarrow +\infty$, alors $l \longrightarrow 0$, et ce modèle se réduit aux équations de poutre de Timoshenko.*

Le Système (0.1) est un système non amorti et son énergie associée reste constante lorsque le temps t évolue. Pour stabiliser le système (0.1), beaucoup des termes d'amortissement ont été considérés par plusieurs auteurs. (Voir [1], [3], [13], [16], [21])

En considérant des termes d'amortissement comme des mémoires infinies agissant dans les trois équations, le système (0.1) Ont récemment été étudiés par [13] dans

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - Gh\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - Ehl\left(w_x - l\varphi\right) + \int_0^\infty g_1(s)\varphi_{xx}(t-s)ds = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh\left(\varphi_x + lw + \psi\right) + \int_0^\infty g_2(s)\psi_{xx}(t-s)ds = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - Eh\left(w_x - l\varphi\right)_x + lGh\left(\varphi_x + lw + \psi\right) + \int_0^\infty g_3(s)w_{xx}(t-s)ds = 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

où $(x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}_+, g_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, i = 1,2,3$ sont des fonctions données. Les auteurs ont prouvé conditions appropriées sur les données initiales et les mémoires g_i, que le système est bien posé et son énergie converge vers zéro lorsque le temps passe à l'infini, et nous fournissons une connexion entre la vitesse de désintégration de l'énergie et la croissance de g_i à l'infini. La preuve est basée sur les semi-groups la théorie du bien-être, la méthode énerg étique et l'approche introduit dans [12], Pour la stabilité.

Ici, nous nous intéressons par deux types de retard (retard distribué et retard neutre). Alors, nous avons choisi de diviser ce mémoire en deux parties. la première est consacrée à l'étude de la stabilité en retard distribué. Dans [4], les auteurs ont prouvé l'existence globale de ses Sobolev par la théorie du semi-groupe . En outre, ils ont é tudié le comportement asymptotique de la solution utilisant la méthode du multiplicateur. Là, on va étudié la stabilité du système par la méthode des constructions des fonctionnelles de Lyapunov

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - Gh\left(\varphi_{xx} + lw_x + \psi_x\right) - Ehl\left(w_x - l\varphi\right) + \mu_0\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)\varphi_t\left(x, t-s\right) ds = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - EI\psi_{xx} + Gh\left(\varphi_x + lw + \psi\right) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - Eh\left(w_{xx} - l\varphi_x\right) + lGh\left(\varphi_x + lw + \psi\right) = 0, \end{cases} \tag{0.4}$$

où $(x, t) \in]0, 1[\times\mathbb{R}_+$, avec les conditions de Dirichlet :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = w(0, t) = w(1, t) = 0, t > 0 \tag{0.5}$$

Et les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), x \in (0, L), \\ \varphi_t(x, -t) = f_0(x, t) \text{ in } (0, L) \times (0, \tau_2), \end{cases} \tag{0.6}$$

τ_1 et τ_2 sont deux nombres réels avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, μ_0 est une constante positive, $\mu : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}$ est une fonction appartient à L^∞ fonction, $\mu \geq 0$ Presque partout.

La deuxième partie de ce mémoire nous intéressons au retard neutre, qui intervient dans la dérivée seconde (la plus élevée). En 2017, concernant le comportement asymptotique à retard neutre, Tatar [17] a considéré une é quation d'onde amortie avec un retard neutre et il a prouvé que la solution d écroit exponentiellement sous certaines conditions sur le noyau du retard neutre distribué. Puis, dans [15] Seghour et al ont étudié le système stratifié thermoélastique suivant à retard neutre

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + G(\psi - w_x)_x + A w_t = 0, x \in (0,t), t > 0, \\ I_p(3s_{tt} - \psi_{tt}) - G(\psi - w_x) - (3s - \psi) + \mu\theta_x = 0, x \in (0,t), t > 0, \\ 3I_p \left(s_t + \int\limits_0^t h(t-r) s_t(r) dr \right) + 3G(\psi - w_x) + 4\gamma s - 3s_{xx} = 0, x \in (0,t), t > 0, \\ \theta_t - k\theta_{xx} + \mu(3s - \psi)_{tx} = 0, x \in (0,t), t > 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales et les conditions au bord

$$\begin{cases} \psi(0,t) = s(0,t) = \theta_x(0,t) = w_x(0,t) = 0, t \geq 0, \\ \psi_x(0,t) = s_x(0,t) = \theta(0,t) = w(0,t) = 0, t \geq 0, \\ (w, \psi, s, \theta)(x,0) = (w_0, \psi_0, s_0, \theta_0), x \in [0,1], \\ (w_t, \psi_t, s_t)(x,0) = (w_1, \psi_1, s_1), x \in [0,1]. \end{cases}$$

En basant sur ces traveaux passés, nous étudions le système de Bresse suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - k_0 l(w_x - l\varphi), (0,1) \times (0,\infty), \\ \rho_2(\psi_t + \int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s) ds)_t - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) = 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

On considère (0.7) avec les conditions au bord suivantes

$$\varphi(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi_x(0,t) = \psi(1,t) = w_x(0,t) = w(1,t) \tag{0.8}$$

Et

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), x \in (0,1), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), x \in (0,1), \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), x \in (0,1). \end{cases} \tag{0.9}$$

Pour arriver à réaliser ses objectifs qu'il est nécessaire de répartir notre travail en trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous allons donner quelques rappels, définitions et théorèmes fondamentaux pour traite nos problèmes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous confirmons la stabilité exponentielle d'un problème à retard distribué par des fonctions de Lyapunov.

Dans le dernier chapitre, nous étudions la stabilité du mémé problème avec un autre type de retard (le retard neutre) par la mémé méthode.

Finalement, nous tenterons de dégager quelques pistes ouvertes pour des travaux futurs.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et certains résultats sur les inégalités dans l'espace de Sobolev, aussi nous donnons les dé finitions et quelques intégrales intégrales qui joue un rôle dans notre travail.

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.0.1 espace complet

Définition 1.1. *Un espace normé* $(E, \|.\|_E)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* E *est convergente dans* E *.*

1.1.0.2 Espaces de Banach

Définition 1.2. *Un espaces vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach .*

1.1.0.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3. *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel* H *muni d'un produit sclaire* (u, v) *et qui est* ***complet*** *pour la norme*

$$(u, v)^{\frac{1}{2}}$$

.

1.1.1 Espaces fonctionnels linéaires

1.1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.4. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, et soit Ω est un domaine ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. définir l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}. \tag{1.1}$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$, notée par

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Définition 1.5. *si $p = \infty$, on définit*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0, \ |f(x)| \leq C, p.p.sur\ \Omega \} \tag{1.3}$$

et

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C \geq 0, \ |f(x)| \leq C \text{ p.p dans } \Omega \}.$$

Théorème 1.1. *([25]) il est bien connu que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|f\|_p$ est un espace de Banach , pour tous $1 \leq p \leq \infty$.*

Définition 1.6. *(Espaces $L^2(\Omega)$) pour $p = 2$ on note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable c-à-d*

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}; \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

L'espace linéaire $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{0,\Omega} = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Certaines inégalités intégrales

Nous allons donner ici quelques inégalités intégrales importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliquées et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

1.1.2.1 Inégalité de Holder

Théorème 1.2. *([25], Inégalité de Holder) Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, *supposant que* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *et* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Alors,* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |f \times g|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

1.1.2.2 Inégalité Young

Lemme 1.1. *([25], Inégalité Young) soit* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R})$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, *et* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. *Alors,* $f \times g \in L^r(\mathbb{R})$ *et*

$$\|f \times g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} . \tag{1.4}$$

1.1.3 Espaces de Sobolev

Les espaces de sobolev sont des espaces fonctionnels dont les puissances et les dérivées sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue , ces espaces sont des espaces de Banach

1.1.3.1 Les espaces $H^1(\Omega)$

Définition 1.7. *(Espace* $H^1(\Omega)$*) on note* $H^1(\Omega)$ *l'espace fonctionnel linéaire défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ \textit{tel que} \ \forall i \in [1, d] : \frac{du}{dx_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

et note

$$(f, g)_{H^1} = \int_\Omega f(x) g(x) dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx$$

est un espace de Hlibert.sa norme notée par $\| \, . \, \|_{H^1}$

Définition 1.8. *(Espace* $H_0^1(\Omega)$*) On définit l'espace* $H_0^1(\Omega)$ *comme la fermeture de* $D(\Omega)$ *pour la norme* $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ *ainsi pour chaque* $v \in H_0^1(\Omega)$, *il existe une suite* $\varphi_n \in D(\Omega)$ *tel que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - v\|_{H^1(\Omega)} \to 0$$

les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

1.1.3.2 Les espaces $H^2(\Omega)$

Définition 1.9. ($Espace\ H^2(\Omega)$) *on note* $H^2(\Omega)$ *l'espace défini par :*

$$H^2(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \\ 1 \leq i \quad , \quad j \leq n \end{array} \right\}$$

Définition 1.10. *soit* $m \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [0, \infty]$. *on définit* $W^{m,p}(\Omega)$ *est l'espace de toutes* $f \in L^p(\Omega)$, *définie comme*

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) \quad = \quad & \Big\{ f \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que} \\ & |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq m, \text{ où }, \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n} \Big\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Théorème 1.3. *([26])* $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach avec leur norme usuelle*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}, \ 1 \leq p \leq \infty, \text{ pour tout } f \in L^p(\Omega). \tag{1.6}$$

Définition 1.11. *noteé par* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.12. *Lorsque* $p = 2$, *nous préférons désigner par* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ *et* $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ *fourni avec la norme*

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left(\|\partial^\alpha f\|_{L^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.7}$$

qui à faire $H^m(\Omega)$ *un espace de Hilbert réel avec leur produit scalaire usuel*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

Lemme 1.2. *(Inégalité de Sobolev-Poincaré) si*

$$2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}, \text{ pour } n \geq 3,$$

$$q \geq 2, \text{ pour } n = 1, 2,$$

alors

$$\|u\|_q \leq C(q, \Omega) \|\nabla u\|_2, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 1.3. *(**Poincaré**) Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante positive C_Ω tel que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \| u \|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)} .$$

1.1.4 Quelques inégalités algébriques

Depuis notre étude basée sur des inégalités algébriques, nous voulons rappeler quelques inégalités ici.

1.1.4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.4. *([25]) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si u et v sont des fonctions de $L^2(\Omega)$, alors*

$$\left| \int_\Omega uv dx \right| \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.4.2 Inégalité de Young

Lemme 1.5. *(L'inégalité de Young) pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta} \tag{1.8}$$

où δ est une constante positive.

1.2 Théorie de la stabilité de Lyapunov

L'étude de la stabilité pour les systèmes évolutives est souvent liée à la construction des fonctionnelles de Lyapunov. La méthode générale de la construction des fonctions de Lyapunov ont proposée par V. Kolmanovskii et L. Shaikhet et déja utilisée avec succés pour les équations différentielles, pour les équations de différence à temps discret, pour les équations de différence à temps continu, est utilisé ici pour étudier la stabilité des équations évolutive à retard, en particulier, des équations différentielles partielles. On a l'équation

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t, u(t)) + f_1(t, u_t), t > 0, \\ u(s) = \Psi(s), s \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{1.9}$$

Notons par $U(t, \Psi)$ la solution de l'équation (1.9) correspondant à la condition initiale Ψ.

Définition 1.13. *La solution triviale de l'équation (1.9) est dite stable si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que.*

$$| u(t, \Psi) | < \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0, si \mid \Psi \mid_{C_H} = \sup_{s \in [-h,0]} \mid \Psi(s) \mid < \delta. \tag{1.10}$$

Définition 1.14. *La solution triviale de l'équation (1.9) est dite exponentiellement stable si elle est stable et il existe* $\lambda > 0$ *une constante positive tel que pour tout* $\Psi \in C(0, -h, H)$ *il existe* C *(qui peut dépendre sur* Ψ*) tel que.*
$| u(t, \Psi) | \leq C \exp(-\lambda t)$ *pour* $t > 0$

Maintenant, on va faire la démonstration de la théorème du stabilité . On suppose qu'il

existe une fonctionnelle $V\ (t\ , u_t\ )$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour certains nombres positives c_1, c_2 et λ

Théorème 1.4. *[6]*

$$| u(t, u_t) | \leq c_1 \exp(\lambda t) \mid u(t) \mid^2, t \geq 0 \tag{1.11}$$

$$| u(0, u_0) | \leq c_2 \mid \Psi \mid^2_{C_H} \tag{1.12}$$

$$\frac{d}{dt} V(t, u_t) \leq 0, t \geq 0 \tag{1.13}$$

Alors la solution triviale de l'équation (1.9) est exponentiellement stable. Notons que le théorème implique que l'étude de la stabilité de l'équation (1.9) peut être réduit à la construction appropriées de Lyapunov. Pour construire les fonctionnelles de Lyapunov on utilise des procé dures formelles.

1.2.0.1 Le procédure des fonctionnelles de Lyapunov

Le procédure consiste en quatre étapes.

1. **Etape1**

Pour transformer l'équation (1.9) sous la forme

$$\frac{dz(t, u_t)}{dt} A_1(t, u(t)) + A_2(t, u_t) \tag{1.14}$$

où $z(t, .)$, $A_1(., .)$ et $A_2(., .)$ sont des familles d'opérateurs non linéaires,

1. $z(t, 0) = 0$, $A_2(t, 0) = 0$, l'opérateur $A_1(t, .)$ dé pendante de t et $u(t\ )$ mais indépendante pour les valeurs présidentes $u(t\ + s), s < 0$.

   Etape2

On suppose que la solution triviale de l'équation

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1(t, y(t))$$

est exponentiellement stable et il existe donc une fonctionnelle de Lyapunov $V(t, y(t))$, qui satisfait les conditions du théorème([6]).

Etape3

La fonctionnelle de Lyapunov $V(t, u_t)$ pour l'équation (1.9) est écrit sous la forme $V = V_1 + V_2$, où $V_1(t, u_t) = V(t, z(t, u_t))$.

L'élément y de la fonction $V\ (t\ , y)$ est remplacée la fonctionnelle $z(t\ , x_t)$ dans la partie gauche de l'équation (1.9).

Etape4

Généralement, la fonctionnelle $V_1(t\ , u_t)$ satisfait les conditions du théorème([6]). Pour satisfait ces conditions, il est nécessaire de calculer $\frac{d}{dt}V_1(t, u_t)$ et de l'estimer. Ensuite, la fonctionnelle $V_2(t, u_t)$ peut être choisir de manière standard.

1.3 Problèmes à Retard

Dans cette section, nous introduisons trois problèmes, anciens et nouveaux, qui sont traités à l'aide de la théorie générale des équations différentielles. Nous tentons de donner une description suffisante de la dérivation, de la solution et des propriétés des solutions pour que le lecteur puisse apprécier une partie du goût du problème. Dans aucun des cas nous ne donnons un traitement complet du problème, mais offrent des références pour une étude plus approfondie.

1.3.1 Le contrôle d'un navire

Minorsky (1962) a conçu un dispositif de direction automatique pour le cuirassé New Mexico. Ce qui suit est une esquisse du problème voir [27].

Supposons que le gouvernail du navire ait une position angulaire $x(t)$ et supposons qu'il y ait une force de frottement proportionnelle à la vitesse, disons $-cx\prime(t)$. Il ya un instrument indiquant la direction qui pointe dans la direction de mouvement réelle et il ya un instrument pointant dans la direction désirée. Ces deux sont reliés par un dispositif qui active un moteur électrique produisant une certaine force pour déplacer le gouvernail de manière à amener le navire sur la trajectoire souhaitée. Il y a un décalage de temps entre le moment où le navire s'éloigne et le moment où le moteur électrique active la force de rappel. L'équation pour $x(t)$ est

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t-h)) = 0, \tag{1.15}$$

où $xg(x) > 0$ si $x \neq 0$ et c est un constant positive. L'objectif est de donner des conditions assurant que x (t) restera près de zéro pour que le navire suive son cours.

1.3.2 Epidémies (Cooke et Yorke)

Dans les travaux de Cooke et Yorke (1973), l'hypothèse de Lotka est modifiée de sorte que le nombre de naissances par unité de temps n'est fonction que de la taille de la population et non de la répartition par âge voir [27] . Dans cette hypothèse, on a $x(t)$ la taille de la population et on a le nombre de naissances $B(t) = g(x(t))$. Supposons que chaque individu a une duré e de vie L de sorte que le nombre de décès par unité de temps soit $g(x(t-L))$. Alors la taille de la population est définie par

$$x'(t) = g(x(t)) - g(x(t-L)). \tag{1.16}$$

Où g est une fonction différentiable. Nous notons que toute fonction constante est une solution de (1.16).

Cooke et Yorke (1973) considèrent le modèle suivant pour la propagation de la gonorrhée. La population est divisée en deux classes :

(a) $S(t)$ =Le nombre de sujets susceptibles

(b) $x(t)$ =Le nombre de maladies infectieuses.

Le taux de nouvelle infection dépend uniquement des contacts entre les individus sensibles et infectieux. Puisque S(t) est égal à la population totale constante moins $x(t)$, la vitesse est une fonction $g(x(t))$. Supposons qu'une personne exposée est immédiatement infectieuse et reste infectieuse pendant une période L (le temps pour le traitement et la guérison). Alors x vérifie aussi (1.16) Tient. où, à tout moment $t, x(t)$ est égal à la somme du capital produit au cours de la période $[t-L,t]$ plus une constante c désignant la valeur des actifs non dépréciés. Ainsi :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^L P(s)g[x(t-s)]ds + c \qquad (1.17)\\ &= \int_{t-L}^t P(t-u)g[x(u)]du + c. \end{aligned}$$

1.3.3 L'équation de tournesol

Somolinos (1978) a considéré l'équation

$$x'' + (a/r)x' + (b/r)\sin x(t-r) = 0,$$

Et a obtenu des résultats intéressants sur l'existence des solutions périodiques. L'étude de ce problème remonte au début des années 1800 et a attiré beaucoup d'attention. Il implique le mouvement d'une plante de tournesol voir [27]

CHAPITRE 2

STABILITÉ EXPONENTIELLE D'UN SYSTÈME DE BRESSE AVEC UN TERME DE RETARD DISTRIBUÉ

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés au système de Bresse suivant avec un terme de retard distribué

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - k_0 l\left(w_x - l\varphi\right) + \mu_0\varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\varphi_t\left(x, t-s\right)ds = 0, x \in (0,1), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + lw + \psi\right) + \psi_t = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x + kl\left(\varphi_x + lw + \psi\right) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $(x,t) \in]0,1[\times\mathbb{R}_+$, avec les conditions de Dirichlet :

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = w(0,t) = w(1,t) = 0, t > 0. \tag{2.2}$$

Et les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), x \in (0,1), \\ \varphi_t(x,-t) = f_0(x,t) \text{ dans } (0,1)\times(0,\tau_2), \end{cases} \tag{2.3}$$

τ_1 et τ_2 Sont deux nombres réels avec $0 \le \tau_1 < \tau_2$, μ_0 est une constante positive, $\mu : [\tau_1, \tau_2] \to \mathbb{R}$ est un fonction appartient à L^∞, $\mu \ge 0$ Presque partout.
Ici, nous allons étudier l'asymptotique stabilité du système (2.1)-(2.2). Donc, nous prouvons la décroissance exponentielle de l'énergie lorsque le temps tend à l'infini par la technique des mul-

tiplicateurs qui est basée sur la construction de la fonctionnelle de Lyapunov, sous l'hypothèse

$$\mu_0 \geq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s)ds. \tag{2.4}$$

En ce qui concerne le retard distribué, Nicaise et Pignotti [20] é quation d'onde considérée avec amortissement linéaire par frottement et routard distribué

$$u_{tt} - \Delta u + \mu_1 u_t + a\left(x\right) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) u_t\left(x, t-s\right) ds = 0, \tag{2.5}$$

dans $\Omega \times (0, \infty)$, condition aux limites de Dirichlet-Neumann et a est une fonction choisie l'espace approprié. Ils ont établi la stabilité exponentielle de la solution sous l'hypothèse que

$$\|a\|_\infty \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2\left(s\right) ds < \mu_1. \tag{2.6}$$

2.0.1 Position du problème

En introduisant la nouvelle variable suivante

$$z(x, \rho, t, s) = \varphi_t\left(x, t-\rho s\right), x \in \left(0, 1\right), \rho \in \left(0, 1\right), s \in (\tau_1, \tau_2), t > 0. \tag{2.7}$$

Par conséquent, le problème (2.1) prend la forme

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + lw + \psi\right)_x - k_0 l\left(w_x - l\varphi\right) + \mu_0 \varphi_t + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z\left(x, , 1, t, s\right) ds = 0, \\ s z_t(x, \rho, t, s) + z_\rho(x, \rho, t, s) = 0, \text{, dans } (0,1) \times (0,1) \times (0,\infty) \times \left(\tau_1, \tau_2\right), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\varphi_x + lw + \psi\right) + \psi_t = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x + kl\left(\varphi_x + lw + \psi\right) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Avec les conditions de Dirichlet :

$$\varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = w(0, t) = w(1, t) = 0, t > 0. \tag{2.9}$$

Et les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(x,0)=\varphi_0(x), \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x), \psi(x,0)=\psi_0(x),\ x\in(0,1), \\ \psi_t(x,0)=\psi_1(x), w(x,0)=w_0(x), w_t(x,0)=w_1(x), x\in(0,1), \\ \varphi_t(x,-t)=f_0(x,t) \text{ dans } (0,1)\times(0,\tau_2), \\ z(x,0,t,s)=\varphi_t(x,t) \text{ on } (0,1)\times(0,\infty)\times(\tau_1,\tau_2), \\ z(x,\rho,0,s)=f_0(x,\rho,s) \text{ dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\tau_2), \end{cases} \tag{2.10}$$

où , τ_1 et τ_2 sont deux nombres réels avec $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, μ_0 est une constante positive, $\mu : [\tau_1, \tau_2]$ est une fontion $L^\infty, \mu \geq 0$ presque partout,

2.0.2 Stabilité Exponentielle

On définit l'énergie associée à la solution du problème (2.8) par la formule suivante :

$$\begin{aligned} E(t) = {} & \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + lw + \psi)^2 + k_0(w_x + l\varphi)^2)dx \\ & + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s|\mu(s)| \int_0^1 z^2\left(x,\rho,t,s\right) d\rho ds dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lemme 2.1. *Soit (φ, ψ, w, z) solution du problème (2.8). Ensuite, la fonction énergétique définie par (2.11) satisfait*

$$E'(t) = -\left(\mu_0 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, ds\right) \int_0^1 |\varphi_t|^2\, dx - \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.12}$$

Démonstration. En multipliant la première équation dans (2.8) par φ_t, la deuxième équation par $\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)| \int_0^1 z\left(x,\rho,t,s\right)$, la troisième équation par ψ_t et la quatrième équation par w_t, en intégrant sur $[0,1]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\rho_1}{2dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)\varphi_{tx} dx - k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)\varphi_t dx, \\ +\mu_0 \int_0^1 \varphi_t\varphi_t dx + \int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z\left(x,1,t,s\right)\varphi_t\left(x,t\right) ds dx = 0, \\ \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu(s)\right| z\left(x,\rho,t,s\right) z_t\left(x,\rho,t,s\right) ds d\rho dx, \\ + \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu(s)\right| z\left(x,\rho,t,s\right) z_\rho\left(x,\rho,t,s\right) ds d\rho dx = 0, \\ \frac{\rho_2}{2dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)\psi_t dx + \int_0^1 \psi_t^2 dx = 0, \\ \frac{\rho_1}{2dt}\int_0^1 w_t^2 dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\rho) w_{tx} dx + kl\int_0^1 (\rho_x + lw + \psi) w_t dx = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Finalement, en additionnant (2.13) après simplifier quelques termes

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\rho_1\int\limits_0^1\varphi_t^2dx+\tfrac{1}{2}\rho_2\int\limits_0^1\psi_t^2dx+\tfrac{1}{2}\rho_1\int\limits_0^1 w_t^2dx+\tfrac{1}{2}b\int\limits_0^1\psi_x^2dx+\tfrac{1}{2}k\int\limits_0^1\left(\varphi_x+\psi+lw\right)^2dx\right.\\&\left.+\tfrac{1}{2}k_0\int\limits_0^1\left(w_x-l\varphi\right)^2dx\right)+\textstyle\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\left|\mu(s)\right|z\left(x,1,t,s\right)z_t\left(x,1,t,s\right)dsd\rho dx=0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Maintenant, à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\varphi_t(t)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z\left(x,1,t,s\right)dsdx\right| &\le \int_0^1\varphi_t(t)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)\left|z(x,1,t,s)\right|dsdx\\&\le \int_0^1\varphi_t(t)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z^2(x,1,t,s)ds\right)^{\frac{1}{2}}dx\\&\le \frac{1}{2}\int_0^1\varphi_t^2(t)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)ds\right)dx\\&\quad+\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z^2(x,1,t,s)dsdx.\end{aligned}\tag{2.15}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|z\left(x,\rho,t,s\right)z_\rho\left(x,\rho,t,s\right)dsd\rho dx=\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_0^1\left|\mu(s)\right|z\left(x,\rho,t,s\right)z_\rho\left(x,\rho,t,s\right)d\rho dsdx.\tag{2.16}$$

En intégrant par partie $(2.13)_2$ avec (2.16), on obtient

$$\frac{d}{2dt}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\left|\mu(s)\right|\int_0^1 z^2\left(x,\rho,t,s\right)d\rho dsdx=-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int_0^1\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,t,s\right)d\rho dsdx.\tag{2.17}$$

En simplifiant le deuxième coté de (2.17)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int_0^1\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,t,s\right)d\rho dsdx&=-\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\left[z^2\left(x,\rho,t,s\right)\right]_0^1dsdx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\left[z^2\left(x,0,t\right)-z^2\left(x,1,t,s\right)\right]dsdx.\end{aligned}$$

Alors, on obtient (2.12)

2.0.3 Construction de l'équation de Lyapunov

Nous pouvons prouver que l'énergie décroissonte. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soit* $(\varphi, \psi, w\ , z)$ *solution de (2.8)- (2.9)-(2.10). Il existe alors deux constantes positives* M *et* m *tel que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-mt}, t \geq 0.$$

Nous commençons par introduire quelques fonctionnelles et démontrer quelques lemmes qui seront utiles pour la suite

Lemme 2.2. *Soit* (φ, ψ, w, z) *la solution du système(2.8). Alors, la fonctionnelle* $F_1(t)$ *est définit par*

$$F_1(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)dx.$$

Vérifie

$$\begin{aligned} F\prime_1(t) \leq & -\frac{k_0 l}{2} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 w_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ & + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\mu_0^2}{k_0 l} \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z^2 \left(x, 1, t, s\right) ds \right) dx + (1 + \rho_1 l) \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

On dérive $F_1(t)$, on obtient

$$F\prime_1(t) = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}(w_x - l\varphi)dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)_t dx - \rho_1 \int_0^1 w_{tt}(\varphi_x + \psi + lw)dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)_t dx,$$

d'après $(2.8)_1$ et $(2.8)_4$, on obtient

$$\begin{aligned} F_1'(t) = & -k \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x (w_x - l\varphi)dx - k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \mu_0 \int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx \\ & - \int_0^1 (w_x - l\varphi) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z \left(x, 1, t, s\right) ds \right) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx \\ & - k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_x (\varphi_x + lw + \psi)dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)_t dx. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Maintenant, on distribue les termes suivants

$$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_{xt} dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \tag{2.20}$$

Et

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw)_t dx = -\rho_1 \int_0^1 w_t \varphi_{xt} dx - \rho_1 \int_0^1 w_t \psi_t dx - \rho_1 l \int_0^1 w_t^2 dx. \tag{2.21}$$

On utilise l'inégalité de Young

$$\mu_0 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) dx \le \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{k_0 l}{4} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \tag{2.22}$$

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t \psi_t dx \le \frac{\rho_1 l}{2} \int_0^1 w_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.23}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwarz et en utilisant (2.4), on arrive

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (w_x - l\varphi) \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z\,(x,1,t,s)\, ds \right) dx &\le \frac{\mu_0^2}{k_0 l} \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z^2\,(x,1,t,s)\, ds \right) dx \\
&\quad + \frac{k_0 l}{4\mu_0} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) ds \right) dx \\
&\le \frac{\mu_0^2}{k_0 l} \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z^2\,(x,1,t,s)\, ds \right) dx + \frac{k_0 l}{4} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Et grace à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord (2.9)

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t \varphi_{xt} dx = \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_{xt} dx, \tag{2.25}$$

$$k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_x (\varphi_x + lw + \psi) dx = -k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)(\varphi_x + lw + \psi)_x dx, \tag{2.26}$$

En insérant (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) et (2.26) dans (2.18) et en exploitant la condition $k = k_0$, on coïncide avec (2.18)

Lemme 2.3. *Soit (φ, ψ, w, z) la solution du système (2.8). Alors la fonctionnelle F_2 est définit par*

$$F_2(t) = \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_t(\varphi + \int\limits_0^x \psi(y)dy)dx$$

Satisfait

$$\begin{aligned} F\prime_2(t) \leq & -\frac{k}{2}\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx - \frac{lk_0}{2}\int\limits_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx \\ & + c\int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int\limits_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, z^2\,(x,1,t,s)\, dsdx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Démonstration. Par différenciation de $F_2(t)$ nous avons □

$$F\prime_2(t) = \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_{tt}\varphi dx + \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_{tt}(\int\limits_0^x \psi(y)dy)dx + \int\limits_0^1 \varphi_t \left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right)_t dx.$$

On utilisant $(2.8)_1$, on obtient

$$\begin{aligned} F\prime_2(t) = & \, k\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x \varphi dx + k_0 l \int\limits_0^1 (w_x - l\varphi)\varphi dx - \mu_0 \int\limits_0^1 \varphi_t \varphi dx - \int\limits_0^1 \varphi \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z\,(x,1,t,s)\, ds\right) dx \\ & + \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x \left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right) dx + k_0 l \int\limits_0^1 (w_x - l\varphi)\left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right) dx \\ & - \mu_0 \int\limits_0^1 \varphi_t \left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right) dx - \int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z\,(x,1,t,s)\, ds\right)\left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right) dx + \int\limits_0^1 \varphi_t \left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right)_t dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

àl'aide de l'inégalité de Young et Cauchy-Shwarz, on a

$$\int\limits_0^1 \varphi_t \left(\int\limits_0^x \psi(y)dy\right)_t dx \leq \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx + \int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx. \tag{2.29}$$

D'aprés la formule d'intégration par parties et sous les conditions au bord (2.9), on déduit que

$$k\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x \varphi dx = -k\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)\varphi_x dx. \tag{2.30}$$

Et

$$k\int_0^1(\varphi_x+lw+\psi)_x\left(\int_0^x\psi(y)dy\right)dx=-k\int_0^1(\varphi_x+lw+\psi)\psi dx. \tag{2.31}$$

Maintenant, en additionnant les termes suivants

$$-\mu_0\int_0^1\varphi_t\left(\int_0^x\psi(y)dy\right)dx-\mu_0\int_0^1\varphi_t\varphi dx=-\mu_0\int_0^1\varphi_t\left(\varphi+\int_0^x\psi(y)dy\right)dx. \tag{2.32}$$

Et

$$\begin{aligned}&-\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z\left(x,1,t,s\right)ds\int_0^x\psi(y)dydx-\int_0^1\varphi\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z\left(x,1,t,s\right)ds\right)dx\\&=-\int_0^1\left(\varphi+\left(\int_0^x\psi(y)dy\right)\right)\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(s)z\left(x,1,t,s\right)ds\right)dx.\end{aligned} \tag{2.33}$$

En remplaçant (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33) dans (2.28) sous la condition $\frac{\rho_2}{b}=\frac{\rho_1}{k}$, on arrive à (2.27)

Lemme 2.4. *Soit (φ,ψ,w,z) la solution du système (2.8). Alors, la fonctionnelle F_3 est définit par*

$$F_3(t)=\rho_2\int_0^1\psi\psi_t dx.$$

Vérifie, pour tout $\varepsilon_4=\frac{b}{4k}$, $\varepsilon_5=\frac{b}{4}$

$$F_3'(t)\leq-\frac{b}{2}\int_0^1\psi_x^2dx+\left(\frac{1}{b}+\rho_2\right)\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{k^2}{b}\int_0^1(\varphi_x+lw+\psi)^2dx. \tag{2.34}$$

Démonstration. En différenciant $F_3(t)$ et en intégrant par parties, nous avons □

$$F_3'(t)=\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx+\rho_2\int_0^1\psi\psi_{tt}dx.$$

La deuxième équation du système (2.8) conduit à

$$F_3'(t)=\rho_2\int_0^1\psi_t^2dxdx+\rho_2\int_0^1\psi\left[\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+lw+\psi)-\frac{1}{\rho_2}\psi_t\right]dx. \tag{2.35}$$

En remarquant que

$$b\int\limits_0^1 \psi\psi_{xx}dx = -b\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx. \tag{2.36}$$

En simplifiant (2.35), on obtient alors

$$F_3'(t) = \rho_2\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx - b\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx - k\int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi)dx - \int\limits_0^1 \psi\psi_t dx. \tag{2.37}$$

À l'aide de l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré

$$-k\int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi)dx \leq kc\varepsilon_4\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k}{4\varepsilon_4}\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx. \tag{2.38}$$

Et

$$-\int\limits_0^1 \psi\psi_t dx \leq c\varepsilon_5\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_5}\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{2.39}$$

On insérant (2.36), (2.39) et (2.38) dans (2.37), on obtient alors le résultat souhaité.

Lemme 2.5. *Soit (φ, ψ, w, z) la solution du système (2.8). Alors, la fonctionnelle F_4 est définit par*

$$F_4(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} se^{-s\rho}\left|\mu(s)\right| z^2\left(x,\rho,s,t\right) dsd\rho\right) dx. \tag{2.40}$$

Satisfait , pour δ un terme positif

$$\begin{aligned} F_4'(t) \leq &-\delta\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu(s)\right| z^2\left(x,\rho,s,t\right) dsd\rho\right) dx \\ &- \delta\int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu(s)\right| z^2\left(x,1,s,t\right) ds\right) dx + \mu_0\int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Démonstration. On dérive (2.40), en utilisant l'équation (2.8), alors

$$\begin{aligned} F_4'(t) =& -2\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho}\left|\mu(s)\right| z\left(x,\rho,s,t\right) z_\rho\left(x,\rho,s,t\right) dsd\rho\right) dx \\ =& -\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho}\left|\mu(s)\right| \frac{d}{d\rho} z^2\left(x,\rho,s,t\right) dsd\rho\right) dx. \end{aligned} \tag{2.42}$$

En utilisant le théorème du Fubini, on obtient

$$-\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-s\rho}\left|\mu(s)\right|\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)dsd\rho\right)dx = -\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1\left(e^{-s\rho}\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)\right)d\rho dsdx.$$

Autrement dit

$$\begin{aligned}&-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1 e^{-s\rho}\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)d\rho dsdx\\&=-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1\frac{d}{d\rho}\left(e^{-s\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)+se^{-s\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)\right)d\rho dsdx.\end{aligned}\tag{2.43}$$

En simplifiant (2.43), ça donne

$$\begin{aligned}-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1 e^{-s\rho}\frac{d}{d\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)d\rho dsdx &= -\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1\frac{d}{d\rho}e^{-s\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)d\rho dsdx\\&\quad-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1 e^{-s\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)d\rho dsdx.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|\int\limits_0^1\frac{d}{d\rho}e^{-s\rho}z^2\left(x,\rho,s,t\right)d\rho dsdx &= \int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|z^2\left(x,0,s,t\right)dsdx\\&\quad-\int\limits_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-s}\left|\mu(s)\right|z^2\left(x,1,s,t\right)dsdx.\end{aligned}$$

On utilise $z\left(x,0,s,t\right)=\varphi_t$ et $e^{-s}\leq e^{-s\rho}\leq 1$ pour $0<\rho<1$, on obtient

$$\begin{aligned}F_4'(t)\leq &-\int\limits_0^1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-s}\left|\mu(s)\right|z^2\left(x,1,s,t\right)ds\right)dx+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\mu(s)\right|ds\int\limits_0^1\varphi_t^2dx\\&-\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2}s\left|\mu(s)\right|e^{-s}z^2\left(x,\rho,s,t\right)dsd\rho\right)dx,\end{aligned}$$

et comme e^{-s} est une fonction croissance, on trouve $-e^{-s}\leq -e^{-\tau_2}$ pour tout $s\in[\tau_1,\tau_2]$.

Finnalement, on pose $\delta=e^{-\tau_2}$, on obtient (2.41). □

Maintenant, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov

$$L(t) = NE(t) + \sum_{i=1}^{4} N_i F_i. \tag{2.44}$$

Où N, N_1, N_3, N_4 et N_5 sont des constantes strictement positives à déterminer convenablement.

Lemme 2.6. *Soit $(\varphi,\ \psi, w, z)$ la solution de (3.1). Ensuite, il existe deux constantes positives C_1et C_2 tels que*

$$C_1 E(t) \leq L(t) \leq C_2 E(t), \forall t \geq 0. \tag{2.45}$$

Autrement dit, les fonctions E et L sont équivalentes.

Démonstration. D'après (2.44) on a □

$$\begin{aligned}
|L(t) - NE(t)| = \Bigg| &-N_1 \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi) dx - N_1 \rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw) dx \\
&+ N_2 \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\varphi + \int_0^x \psi(y) dy) dx + N_3 \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx \\
&+ N_4 \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} |\mu(s)| \, z^2 (x, \rho, s, t) \, ds d\rho \right) dx \Bigg| .
\end{aligned}$$

On exploite les inégalités de Young , Cauchy-Schwarz et Poincaré et $e^{-s\rho} \leq 1$

$$\begin{aligned}
|L(t) - NE(t)| \leq & N_1 \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left| \varphi_t^2 \right| dx + N_1 \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left| (w_x - l\varphi)^2 \right| dx + N_1 \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left| (\varphi_x + \psi + lw)^2 \right| dx \\
&+ N_1 \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \left| w_t^2 \right| dx + \frac{N_2 \rho_1}{2} \int_0^1 \left| \varphi_t^2 \right| dx + \frac{N_2 \rho_1}{2} \int_0^1 \left| (\varphi_x + \psi + lw)^2 \right| dx \\
&+ \frac{N_2 \rho_1}{2} \int_0^1 \left| \varphi_t^2 \right| dx + \frac{N_2 \rho_1}{2} \int_0^1 \left| \psi_x^2 \right| dx + \frac{N_3 \rho_2 c}{2} \int_0^1 \left| \psi_x^2 \right| dx + \frac{N_3 \rho_2}{2} \int_0^1 \left| \psi_t^2 \right| dx \\
&+ N_4 \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s \, |\mu(s)| \, z^2 (x, \rho, s, t) \, ds d\rho \right) dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|L(t)-NE(t)| \leq & \left(\frac{N_1\rho_1}{2}+\frac{N_2\rho_1}{2}\right)\int\limits_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx \\ & +\left(\frac{N_1\rho_1}{2}+N_2\rho_1\right)\int\limits_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx \\ & +\frac{N_1\rho_1}{2}\int\limits_0^1 \left|w_t^2\right| dx \\ & +\frac{N_1\rho_1}{2}\int\limits_0^1 \left|(w_x-l\varphi)^2\right| dx \\ & +\left(\frac{N_2\rho_1}{2}+\frac{N_3\rho_2 c}{2}\right)\int\limits_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx \\ & +\left(\frac{N_2\rho_2}{2}+\frac{N_3\rho_2}{2}\right)\int\limits_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx \\ & +N_4\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\left|\mu(s)\right| z^2\left(x,\rho,s,t\right) ds d\rho\right) dx \\ \leq & CE(t).\end{aligned}$$

Alors

$$|L(t)-NE(t)| \leq CE(t).$$

Qui donne

$$\left(N-C\right)E(t) \leq L(t) \leq \left(N+C\right)E(t).$$

Par conséquent, on choisit N suffisamment large, on obtient l'estimation (2.45). Maintenant, on est prit à citer et de prouver le résultat principal de cette section

Théorème 2.2. *Soit $(\varphi,\ \psi,\ w, z)$ la solution de (2.8). On suppose que $\frac{\rho_2}{b}=\frac{\rho_1}{k}$ et $k=k_0$. Alors, pour l assez petit, le problème (2.8) est exponentiellement stable. C'est- -à-dire, il existe deux constantes strictement positives M et m telles que la solution du problème (2.8) vérifie*

$$E(t) \leq Me^{-mt}, \forall t \geq 0.$$

En différenciant $L(t)$, on obtient

$$L'(t) = NE'(t) + F_1'(t) + N_2F_2'(t) + N_3F_3'(t) + N_4F_4'(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & N\left[\left(-\mu_0 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, ds\right)\int_0^1 |\varphi_t|^2\, dx - \int_0^1 |\psi_t|^2\, dx\right] \\
& + \left[-\frac{k_0 l}{2}\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \frac{\rho_1 l}{2}\int_0^1 w_t^2 dx + kl\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \right.\\
& \left. + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\mu_0^2}{k_0 l}\int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) z^2(x,1,t,s)\, ds\right) dx + (1+\rho_1 l)\int_0^1 \varphi_t^2 dx\right] \\
& + N_2\left[-\frac{k}{2}\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx - \frac{lk_0}{2}\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \psi_t^2 dx \right.\\
& \left. + 2c\int_0^1 \varphi_t^2 dx + c\int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, z^2(x,1,t,s)\, ds dx\right] \\
& + N_3\left[-\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + \left(\frac{1}{b} + \rho_2\right)\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{k^2}{b}\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx\right] \\
& + N_4\left[-\delta\int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, z^2(x,1,s,t)\, ds\right) dx + \mu_0\int_0^1 \varphi_t^2 dx \right.\\
& \left. - \delta\int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\, |\mu(s)|\, z^2(x,\rho,s,t)\, ds d\rho\right) dx\right].
\end{aligned}$$

Après les modifications, on trouve

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq & -\left[N - \frac{\rho_1}{2l} - \frac{N_2}{4} - N_3(\frac{1}{b} + \rho_2)\right] \int\limits_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - \left[N\left(\mu_0 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, ds\right) - (1 + \rho_1 l) - 2N_2 c - N_4\mu_0\right] \int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& - \left[\frac{\rho_1 l}{2}\right] \int\limits_0^1 w_t^2 dx \\
& - \left[\frac{N_3 b}{2}\right] \int\limits_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[\frac{k_0 l}{2} - N_2 \frac{l k_0}{2}\right] \int\limits_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[\frac{k N_2}{2} - kl - \frac{N_3 k^2}{b}\right] \int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx \\
& - \delta N_4 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\, |\mu(s)|\, z^2\,(x, \rho, s, t)\, ds d\rho\right) dx \\
& - \left[-\frac{\mu_0^2}{k_0 l} - N_2 c + N_4 \delta\right] \int\limits_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, z^2\,(x, 1, t, s)\, ds dx.
\end{aligned}$$

Après, on choisit nos constants dont les termes entre parenthèse seront positifs Ensuite, on choisit N_3 et N_2 assez grand pour que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= N_3 > 0, \\
\alpha_2 &= 0 < N_2 < 1, \\
\alpha_3 &= \delta N_4 > 0.
\end{aligned}$$

D'autre, part on choisit N_3

$$\alpha_4 = 0 < 2l + \frac{2N_3 k}{b} < N_2.$$

Finalement, on choisit N suffisament large

$$\alpha_5 = N - \frac{\rho_1}{2l} - \frac{N_2}{4} - N_3(\frac{1}{b} + \rho_2) > 0.$$

Et

$$\alpha_6 = N\left(\mu_0 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu(s)|\, ds\right) - (1 + \rho_1 l) - 2N_2 c - N_4 \mu_0 > 0.$$

Tout ces choix, implique que

$$L'(t) \leq -\int_0^1 \left[\alpha_5\psi_t^2 + \alpha_6\varphi_t^2 + \frac{\rho_1 l}{2}w_t^2 + \alpha_1\psi_x^2 + \alpha_2(w_x - l\varphi)^2 + \alpha_4(\varphi_x + lw + \psi)^2\right] dx$$
$$- \alpha_3 \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} s\,|\mu(s)|\, z^2\,(x, \rho, s, t)\, ds d\rho \right) dx.$$

Et (2.45) reste vrai. Par conséquent, pour un certain $\eta > 0$

$$L'(t) \leq -\eta E(t), \forall t \geq 0. \tag{2.46}$$

Combinons (2.45) et (2.46) pour obtenir

$$L'(t) \leq -\eta E(t) \leq -\frac{\eta}{C_2} L(t), \forall t \geq 0. \tag{2.47}$$

D'où

$$L(t) \leq L(0)e^{-\frac{\eta t}{C_2}}, \forall t \geq 0. \tag{2.48}$$

En détaillant le résultat (2.48) par une intégration simple

$$L'(t) = \frac{dL(t)}{dt} \leq -\frac{\eta}{C_2} L(t), \forall t \geq 0.$$

Alors

$$\frac{dL(t)}{L(t)} \leq -\frac{\eta}{C_2} t, \qquad \forall t \geq 0.$$

On intègre sur $[0, t]$

$$\log(L(t)) - \log(L(0)) \leq -\frac{\eta}{C_2} t, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ce qui nous donne

$$\log\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right) \leq -\frac{\eta}{C_2} t, \qquad \forall t \geq 0.$$

Alors (2.48) et (2.45) impliquent que

$$C_1 E(t) \leq L(0)e^{-\frac{\eta t}{C_2}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Finalement

$$E(t) \leq \frac{L(0)}{C_1} e^{-\frac{\eta t}{C_2}} = M e^{-mt}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration.

CHAPITRE 3

STABILITÉ EXPONENTIELLE DE SYSTÈME DE BRESSE AVEC RETARD NEUTRE

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de système bresse avec retard neutre, notre principal résultat est d'étudier la stabilité exponentielle du système par la technique des multiplicateurs qui est basée sur la construction de la fonctionnelle de Lyapunov. Alors, on pose ce système comme suit

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + lw + \psi)_x - k_0 l(w_x - l\varphi), (0,1) \times (0,\infty), \\ \rho_2(\psi_t + \int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds)_t - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + lw + \psi) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw + \psi) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On considère (3.1), avec les conditions au bord suivantes

$$\varphi(0,t) = \varphi_x(1,t) = \psi_x(0,t) = \psi(1,t) = w_x(0,t) = w(1,t) = 0. \tag{3.2}$$

Et

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), x \in (0,1), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), x \in (0,1), \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.3}$$

3.0.1 Lemmes principaux

Dans cette section, nous énonçons les lemmes de principes nécessaires à la preuve de notre résultat de stabilité

Lemme 3.1. *On définit l'énergie associée à la solution du problème (3.1) par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + lw + \psi)^2 + k_0(w_x + l\varphi)^2)dx \\ & + \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous pouvons prouver que l'énergie décroissante. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soit (φ, ψ, w) solution de (3.1)-(3.2) et (3.3). Il existe alors deux constantes positives r et R tel que*

$$E(t) \leq RE(0)e^{-rt}, \quad t \geq 0.$$

Lemme 3.2. *Soit (φ, ψ, w) la solution du problème (3.1). Ensuite, la fonction énergétique définie par (3.4) satisfait*

$$E'(t) = -\frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t) - \psi_t(s))^2 dxds.$$

Démonstration. En multipliant la première équation du (3.1) par φ_t, la deuxième équation par ψ_t, la troisième équation par w_t et en intégrant sur $(0,1)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - k\int_0^1(\varphi_x + lw + \psi)_x\varphi_t dx - k_0 l\int_0^1(w_x - l\varphi)\varphi_t dx = 0, \\ \rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s))_t dsdx - b\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx, \\ +k\int_0^1(\varphi_x + lw + \psi)\psi_t dx = 0, \\ \rho_1\int_0^1 w_{tt}w_t dx - k_0\int_0^1(w_x - l\rho)_x w_t dx + kl\int_0^1(\rho_x + lw + \psi)w_t dx = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\rho_1}{2dt}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + k\int_0^1(\varphi_x + lw + \psi)\varphi_{tx}dx - k_0 l\int_0^1(w_x - l\varphi)\varphi_t dx = 0, \\ \frac{\rho_2}{2dt}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2dt}\int_0^1 \psi_x^2 dx + k\int_0^1(\varphi_x + lw + \psi)\psi_t dx + k\Box\psi_t = 0, \\ \frac{\rho_1}{2dt}\int_0^1 w_t^2 dx + k_0\int_0^1(w_x - l\rho)w_{tx}dx + kl\int_0^1(\rho_x + lw + \psi)w_t dx = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

$\square$

Lemme 3.3. *Pour toute fonction* $\psi \in C^1((0,\infty);L^2(0,1))$ *et tout* $k \in C^1(0,\infty)$, *on a l'identité suivante*

$$\begin{aligned} k\Box\psi_t =& \frac{\rho_2}{2dt}\int_0^1\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)dsdx + \frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &- \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t)-\psi_t(s))^2 dxds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Où

$$\begin{aligned} k\Box\psi_t =& \rho_2\int_0^1 \psi_t\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)\right)_t dsdx \\ =& \rho_2 k(t)\int_0^1 \psi_t\psi_t(0)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t(\int_0^t k(t-s)\psi_{tt}ds)dx \\ =& \rho_2 k(t)\int_0^1 \psi_t\psi_t(0)dx + \rho_2\int_0^1 \psi_t(t)\int_0^t k(t-s)\psi_{tt}(s)dsdx \\ =& \rho_2 k(t)\int_0^1 \psi_t\psi_t(0)dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \frac{d}{dt}\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)dsdx \\ &+ \frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_2 k(t)\int_0^1 \psi_t(0)\psi_t(t)dx - \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t)-\psi_t(s))^2 dxds \\ =& \frac{\rho_2}{2dt}\int_0^1\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)dsdx + \frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t)-\psi_t(s))^2 dxds. \end{aligned}$$

En remplaçant (3.7) dans (3.6) puis en additionnant les trois equations du système (3.6), on arrive à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + lw + \psi)^2 + k_0(w_x + l\varphi)^2)dx \right. \\ &\left. + \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx\right) = -\frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t)-\psi_t(s))^2 dxds. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 (\rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + lw + \psi)^2 + k_0(w_x + l\varphi)^2)dx \right. \\ \left. + \frac{\rho_2}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)\right)dx. \tag{3.8}$$

Et

$$E'(t) = -\frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t) - \psi_t(s))^2 dx ds. \tag{3.9}$$

3.0.2 Construction de l'equation de Lyapunov

Nous commensons par introduire quelques fonctionnelles et démontrer quelques lemmes qui seront utiles pour la suite

Lemme 3.4. *Soit (φ, ψ, w) la solution du système (3.1). Alors, la fonctionnelle F_1est définit par*

$$F_1(t) = -\rho_1 \int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx.$$

L'estimation satisfait

$$F_1'(t) \leq -\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1\int_0^1 w_t^2 dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + (k + \frac{k}{4\varepsilon_1})\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx + kc\varepsilon_1\int_0^1 \psi_x^2 dx. \tag{3.10}$$

Démonstration. Différencier $F_1(t)$, on obtient □

$$F\prime_1(t) = -\rho_1\int_0^1 \varphi\varphi_{tt}dx - \rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1\int_0^1 ww_{tt}dx - \rho_1\int_0^1 w_t^2 dx.$$

En tenant compte le premier et le troisième terme dans (3.1) puis on intègre par partie, on obtient

$$F_1'(t) = -\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1\int_0^1 w_t^2 dx - \rho_1\int_0^1 \varphi\left[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + lw + \psi)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi)\right]dx \\ - \rho_1\int_0^1 w\left[\frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + lw + \psi)\right]dx.$$

Autrement dit

$$
\begin{aligned}
F\prime_1(t) = &- \rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int\limits_0^1 w_t^2 dx - k_0 l \int\limits_0^1 (w_x - l\varphi)\varphi dx + k_0 \int\limits_0^1 w_x(w_x - l\varphi) dx \\
&+ kl \int\limits_0^1 w(\varphi_x + lw + \psi) dx - k \int\limits_0^1 \varphi(\varphi_x + lw + \psi)_x dx.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Les conditions au bord (3.2) permettent d'écrire l'égalité comme suit

$$-k \int\limits_0^1 \varphi(\varphi_x + lw + \psi)_x dx = k \int\limits_0^1 \varphi_x(\varphi_x + lw + \psi) dx.$$

On met

$$k \int\limits_0^1 \varphi_x(\varphi_x + lw + \psi) dx = k \int\limits_0^1 (\varphi_x + \psi - \psi)(\varphi_x + lw + \psi) dx.$$

Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
kl \int\limits_0^1 w(\varphi_x + lw + \psi) dx + k \int\limits_0^1 \varphi_x(\varphi_x + lw + \psi) dx &= kl \int\limits_0^1 w(\varphi_x + lw + \psi) dx \\
&+ k \int\limits_0^1 (\varphi_x + \psi - \psi)(\varphi_x + lw + \psi) dx \\
&= k \int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx - k \int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi) dx.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

En appliquant alors les inégalités de Young et Poincaré, on obtient

$$-k \int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi) dx \leq kc\varepsilon_1 \int\limits_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k}{4\varepsilon_1} \int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx. \tag{3.13}$$

On insère (3.12) et (3.13) dans (3.11), on obtient (3.10).

Lemme 3.5. *Soit (φ, ψ, w) la solution du système(3.1). Alors, la fonctionnelle $F_2(t)$ est définit par*

$$F_2(t) = -\rho_1 \int\limits_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int\limits_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw) dx.$$

Vérifie, pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq &- k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{4\varepsilon_2} - \rho_1 l \right) \int_0^1 w_t^2 dx + \varepsilon_2 \rho_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

On dérive $F_2(t)$ et on utilisent les équations $(3.1)_1$ et $(3.1)_3$

$$\begin{aligned} F_2'(t) = &-\rho_1 \int_0^1 \left[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + lw + \psi)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \right] (w_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx \\ &- \rho_1 \int_0^1 \left[\frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\rho)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + lw + \psi) \right] (\varphi_x + \psi + lw) dx - \rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw)_t dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En simplifiant (3.15) puis en intégrant sur $(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) = &-k \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x (w_x - l\varphi) dx - k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx \\ &+ k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)(\varphi_x + lw + \psi)_x dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw)_t dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Maintenant on distribue les termes suivants

$$-\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (w_x - l\varphi)_t dx = -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_{xt} dx + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \tag{3.17}$$

Et

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t (\varphi_x + \psi + lw)_t dx = -\rho_1 \int_0^1 w_t \varphi_{xt} dx - \rho_1 \int_0^1 w_t \psi_t dx - \rho_1 l \int_0^1 w_t^2 dx. \tag{3.18}$$

On utilise l'inégalité de Young

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t \psi_t dx \leq \frac{\rho_1}{4\varepsilon_2} \int_0^1 w_t^2 dx + \varepsilon_2 \rho_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx. \tag{3.19}$$

Et grâce à la formule d'intégration par parties avec les conditions au bord (3.2), on trouve

$$-\rho_1 \int_0^1 w_t \varphi_{xt} dx = \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_{xt} dx. \tag{3.20}$$

En insérant (3.17), (3.18), (3.20) et (3.19) dans (3.16) et en exploitant la condition $k = k_0$, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) \leq & -k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx - k \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x (w_x - l\varphi) dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)(\varphi_x + lw + \psi)_x dx \\ & + \rho_1 l \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t w_{xt} dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 w_{xt} \varphi_t dx \\ & + \frac{\rho_1}{4\varepsilon_2} \int_0^1 w_t^2 dx + \varepsilon_2 \rho_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \rho_1 l \int_0^1 w_t^2 dx. \end{aligned}$$

Ceci donne (3.14)

Lemme 3.6. *Soit (φ, ψ, w) la solution du système (3.1). Alors, la fonctionnelle F_3est définit par*

$$F_3(t) = \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + lw + \psi) dx + \frac{b\varphi_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_x dx - \frac{\rho_2^2}{2k} \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s) \psi_t^2(s) ds \right) dx.$$

Satisfait

$$\begin{aligned} F_3'(t) \leq & -\frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx + (\rho_2 + \frac{\rho_2 l}{2}) \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 l}{2} \int_0^1 w_t^2 dx + \frac{bl}{4\varepsilon_3} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\ & + bl\varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Démonstration. Par différenciation de $F_3(t)$ nous avons □

$$F_3'(t) = \rho_2 \int_0^1 \left[-\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds \right)_t + \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + lw + \psi) \right] (\varphi_x + lw + \psi)dx$$
$$+ \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + lw + \psi)_t dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \left[\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + lw + \psi)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \right] \psi_x dx$$
$$+ \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_{xt} dx - \frac{\rho_2^2}{2k} \int_0^1 (\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds)_t dx.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} F_3'(t) = &- \rho_2 \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds \right)_t (\varphi_x + lw + \psi)dx + b \int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x + lw + \psi)dx \\ &- k \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + lw + \psi)_t dx + b \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)_x \psi_x dx \\ &+ \frac{bk_0 l}{k} \int_0^1 (w_x - l\varphi)\psi_x dx + \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \varphi_t \psi_{xt} dx - \frac{\rho_2^2}{2k} \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds \right)_t dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Par distribution, on trouve

$$\rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + lw + \psi)_t dx = \rho_2 \int_0^1 \psi_t \varphi_{xt} dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2 l \int_0^1 \psi_t w_t dx. \tag{3.23}$$

À l'aide de l'inégalité de Young, on a

$$\rho_2 l \int_0^1 \psi_t w_t dx \leq \frac{\rho_2 l}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 l}{2} \int_0^1 w_t^2 dx. \tag{3.24}$$

Et

$$\frac{bk_0 l}{k} \int_0^1 (w_x - l\varphi)\psi_x dx = \frac{bl}{4\varepsilon_3} \int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + +bl\varepsilon_3 \int_0^1 \psi_x^2 dx. \tag{3.25}$$

Aussi

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds \right)_t (\varphi_x + lw + \psi)dx = &\frac{\rho_2^2}{2k} \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds \right)_t^2 dx \\ &+ \frac{k}{2} \int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.26}$$

D'aprés la formule d'intégration par parties et sous les conditions au bord (3.2), on déduit que

$$b\int_0^1 \psi_{xx}(\varphi_x+lw+\psi)dx=-b\int_0^1 \psi_x(\varphi_x+lw+\psi)_x dx, \tag{3.27}$$

$$\rho_2\int_0^1 \psi_t\varphi_{xt}dx=-\rho_2\int_0^1 \psi_{xt}\varphi_t dx. \tag{3.28}$$

Exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\frac{\rho_2^2}{2k}\int_0^1\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)_t^2 dx\leq \frac{\rho_2^2}{2k}\int_0^1\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)_t dx. \tag{3.29}$$

En remplaçant (3.24), (3.23), (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29) dans (3.22) sous la condition $\frac{\rho_2}{b}=\frac{\rho_1}{k}$, on arrive à (3.21)

Lemme 3.7. *Soit (φ,ψ,w) la solution du système (3.1). Alors, la fonctionnelle F_4 est définit par*

$$F_4(t)=\rho_2\int_0^1 \psi(\psi_t+\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds)dx.$$

Vérifie

$$\begin{aligned}F_4'(t)\leq& -\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2dx+(\rho_2+\frac{\rho_2}{2})\int_0^1\psi_t^2dx+\frac{k^2}{2b}\int_0^1(\varphi_x+lw+\psi)^2dx\\ &+\frac{\rho_2\overline{k}}{2}\int_0^1\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx.\end{aligned}$$

Démonstration. En différenciant $F_4(t)$ et en intégrant par parties, nous avons □

$$\begin{aligned}F_4^{'}(t)=&\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx+\rho_2\int_0^1\psi_t\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)dx+\rho_2\int_0^1\psi\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)_t dx\\ &+\rho_2\int_0^1\psi\left[-\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)_t+\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x+lw+\psi)\right]dx.\end{aligned} \tag{3.30}$$

En remarquant que
$$b\int\limits_0^1 \psi\psi_{xx}dx = -b\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx. \tag{3.31}$$
En simplifiant (3.30) avec (3.31), on obtient alors
$$F_4'(t) = \rho_2\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_2\int\limits_0^1 \psi_t\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)dx - b\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx - k\int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi)dx. \tag{3.32}$$
À l'aide de l'inégalité de Young
$$\rho_2\int\limits_0^1 \psi_t\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)dx \leq \frac{\rho_2}{2}\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)^2 dx. \tag{3.33}$$
Avec l'inégalité de Poincaré
$$-k\int\limits_0^1 \psi(\varphi_x + lw + \psi)dx \leq \frac{b}{2}\int\limits_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k^2}{2b}\int\limits_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx. \tag{3.34}$$
En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\frac{\rho_2}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds\right)^2 dx \leq \frac{\rho_2\overline{k}}{2}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx. \tag{3.35}$$
Insertion de (3.33), (3.34) et (3.35) dans (3.32) on obtient alors le résultat souhaité.

Lemme 3.8. *Soit (φ, ψ, w) la solution du système (3.1). Alors, la fonctionnelle F_5 est définit par*
$$F_5(t) = e^{-\varsigma t}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t e^{\varsigma s}\widetilde{H}(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx.$$
Satisfait $t \geq 0$
$$F_5'(t) = -\varsigma F_5(t) + \widetilde{H}(0)\int\limits_0^1 \psi_t^2 dx - \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx.$$
Où
$$H(t) = \int\limits_t^\infty e^{\varsigma s}\left|k(s)\right| ds.$$

Maintenant, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov

$$L(t) = NE(t) + N_1F_1 + \frac{1}{l}F_2 + N_3F_3 + N_4F_4 + N_5F_5. \tag{3.36}$$

Où N, N_1, N_3, N_4 et N_5 sont des constantes strictement positives à déterminer convenablement.

Lemme 3.9. *Soit $(\varphi,\ \psi, w)$ la solution de (3.1). Ensuite, il existe deux constantes positives C_1et C_2 tel que*

$$C_1(E(t) + F_5(t)) \leq L(t) \leq C_2(E(t) + F_5(t)), \forall t \geq 0. \tag{3.37}$$

Autrement dit, les fonctions E et L sont équivalentes.

Démonstration. D'après (3.36) on a □

$$\begin{aligned}|L(t) - NE(t) - N_5F_5(t)| = \Bigg| &-N_1\rho_1 \int_0^1 (\varphi\varphi_t + ww_t)dx \\ &- \frac{\rho_1}{l}\int_0^1 \varphi_t(w_x - l\varphi)dx - \frac{\rho_1}{l}\int_0^1 w_t(\varphi_x + \psi + lw)dx \\ &+ N_3\rho_2 \int_0^1 \psi_t(\varphi_x + lw + \psi)dx - \frac{N_3\rho_2^2}{2k}\int_0^1 (\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds)dx \\ &+N_3\frac{b\varphi_1}{k}\int_0^1 \varphi_t\psi_x dx + N_4\rho_2 \int_0^1 \psi(\psi_t) + \int_0^t k(t-s)\psi_t(s)ds)dx\Bigg|.\end{aligned}$$

On exploite les inégalités de young, Cauchy-Schwarz et Poincaré

$$
\begin{aligned}
|L(t)-NE(t)-N_5F_5(t)| \leq {} & \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|\varphi_x^2\right| dx + \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|w^2\right| dx + \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|w_t^2\right| dx \\
& + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|(w_x-l\varphi)^2\right| dx + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx \\
& + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|w_t^2\right| dx + \frac{N_3\rho_2}{2}\int_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx + \frac{N_3\rho_2}{2}\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx \\
& + \frac{N_3 b\rho_1}{2k}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{N_3 b\rho_1}{2k}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx + \frac{N_3\rho_2^2}{2k}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\left|\psi_t(s)\right|^2 ds\right) dx \\
& + \frac{N_4\rho_2 c}{2}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx + \frac{N_4\rho_2}{2}\int_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx + \frac{N_4\rho_2 c}{2}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx \\
& + \frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s) ds\right) dx.
\end{aligned}
$$

On sait que

$$
\varphi_x^2 + w^2 \leq (\varphi_x+\psi+lw)^2.
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|L(t)-NE(t)-N_5F_5(t)| \leq {} & \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx + \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{N_1\rho_1}{2}\int_0^1 \left|w_t^2\right| dx \\
& + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|(w_x-l\varphi)^2\right| dx + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|w_t^2\right| dx \\
& + \frac{\rho_1}{2l}\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx + \frac{N_3\rho_2}{2}\int_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx \\
& + \frac{N_3\rho_2}{2}\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx + \frac{N_3 b\rho_1}{2k}\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx + \frac{N_3 b\rho_1}{2k}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx \\
& + \frac{N_3\rho_2^2}{2k}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\left|\psi_t(s)\right|^2 ds\right) dx + \frac{N_4\rho_2 c}{2}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx + \frac{N_4\rho_2}{2}\int_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx \\
& + \frac{N_4\rho_2 c}{2}\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx + \frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2}\left(\int_0^1\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s) ds\right) dx.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
|L(t)-NE(t)-N_5F_5(t)| \leq & \left(\frac{N_1\rho_1}{2}+\frac{\rho_1}{2l}+\frac{N_3\rho_2}{2}\right)\int_0^1 \left|(\varphi_x+\psi+lw)^2\right| dx \\
& +\left(\frac{N_1\rho_1}{2}+\frac{\rho_1}{2l}+\frac{N_3b\rho_1}{2k}\right)\int_0^1 \left|\varphi_t^2\right| dx \\
& +\left(\frac{N_1\rho_1}{2}++\frac{\rho_1}{2l}\right)\int_0^1 \left|w_t^2\right| dx \\
& +(\frac{\rho_1}{2l})\int_0^1 \left|(w_x-l\varphi)^2\right| dx \\
& +\left(\frac{N_3b\rho_1}{2k}+\frac{N_4\rho_2c}{2}+\frac{N_4\rho_2c}{2}\right)\int_0^1 \left|\psi_x^2\right| dx \\
& +\left(\frac{N_3\rho_2}{2}+\frac{N_4\rho_2}{2}\right)\int_0^1 \left|\psi_t^2\right| dx \\
& +\left(\frac{N_3\rho_2^2}{2k}+\frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2}\right)\int_0^1\int_0^t k(t-s)\left|\psi_t(s)\right|^2 dsdx \\
& \leq CE(t).
\end{aligned}$$

Alors

$$|L(t)-NE(t)-N_5F_5(t)| \leq CE(t).$$

Qui donne

$$(N-C)\,E(t)+N_5F_5(t) \leq L(t) \leq (N+C)\,E(t)+N_5F_5(t).$$

Par conséquent , on choisit N suffisament large, on obtient l'estimation (3.37) avec

$$C_1=\min\{N-C,N_5\},$$

$$C_2=\max\{N+C,N_5\}.$$

Maintenant, on est prit à citer et de prouver le résultat principal de cette section.

Théorème 3.2. *Soit $(\varphi,\,\psi,w)$ la solution de (3.1). On suppose que $\frac{\rho_2}{b}=\frac{\rho_1}{k}$ et $k=k_0$. Alors, pour l assez petit, le problème (3.1) est exponentiellement stable. C'est-à-dire, il existe deux constantes strictement positives R et r tel que la solution du problème (3.1) vérifie*

$$E(t) \leq Re^{-rt}, \forall t \geq 0.$$

En différenciant $L(t)$, on obtient

$$L'(t) = NE'(t) + N_1F_1'(t) + \frac{1}{l}F_2'(t) + N_3F_3'(t) + N_4F_4'(t) + N_5F_5'(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
L'(t) \leq\ & N\left[-\frac{\rho_2 k(t)}{2}\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^t k'(t-s)\int_0^1 (\psi_t(t)-\psi_t(s))^2 dx)ds\right] \\
& + N_1\left[-\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1\int_0^1 w_t^2 dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + (k + \frac{k}{4\varepsilon_1})\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx\right. \\
& \left. + kc\varepsilon_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx\right] \\
& + \frac{1}{l}\left[-k_0 l\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 l\int_0^1 \varphi_t^2 dx + kl\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)^2 dx + (\frac{\rho_1}{4\varepsilon_2} - \rho_1 l)\int_0^1 w_t^2 dx\right. \\
& \left. + \varepsilon_2\rho_1\int_0^1 \psi_t^2 dx\right] \\
& + N_3\left[-\frac{k}{2}\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx + (\rho_2 + \frac{\rho_2 l}{2})\int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2 l}{2}\int_0^1 w_t^2 dx + \frac{bl}{4\varepsilon_3}\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx\right. \\
& \left. + bl\varepsilon_3\int_0^1 \psi_x^2 dx\right] \\
& + N_4\left[-\frac{b}{2}\int_0^1 \psi_x^2 dx + (\rho_2 + \frac{\rho_2}{2})\int_0^1 \psi_t^2 dx + k\varepsilon_4\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx\right. \\
& \left. + \frac{\rho_2\overline{k}}{2}\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right) dx\right] \\
& + N_5\left[-\varsigma F_5(t) + \widetilde{H}(0)\int_0^1 \psi_t^2 dx - \int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right) dx\right].
\end{aligned}$$

Après les modifications , on trouve

$$
\begin{aligned}
L'(t) \leq & -\left[\frac{N\rho_2 k(t)}{2} - \frac{\varepsilon_2\rho_1}{l} - N_3(\rho_2 + \frac{\rho_2 l}{2}) - \frac{3N_4\rho_2}{2} - N_5\widetilde{H}(0)\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& - [N_1\rho_1 - \rho_1]\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& - \left[N_1\rho_1 - \frac{\rho_1}{4\varepsilon_2 l} + \rho_1 - \frac{N_3\rho_2 l}{2}\right]\int_0^1 w_t^2 dx \\
& - \left[N_1 kc\varepsilon_1 - N_3 bl\varepsilon_3 + \frac{N_4 b}{2}\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& - \left[-N_1 k_0 + k_0 - \frac{N_3 bl}{4\varepsilon_3}\right]\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& - \left[-N_1(k + \frac{k}{4\varepsilon_1}) - k + \frac{N_3 k}{2} - \frac{N_4 k^2}{2b}\right]\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx \\
& - \left[-\frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2} + N_5\right]\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right) dx \\
& - \varsigma N_5 F_5(t).
\end{aligned}
$$

Location

$$
\varepsilon_1 = \frac{1}{N_1}, \varepsilon_2 = \frac{l}{\rho_1}, \varepsilon_3 = \frac{1}{N_3}.
$$

On a

$$
\begin{aligned}
L'(t) \leq & -\left[\frac{N\rho_2 k(t)}{2} - \frac{\varepsilon_2\rho_1}{l} - N_3(\rho_2 + \frac{\rho_2 l}{2}) - \frac{3N_4\rho_2}{2} - N_5\widetilde{H}(0)\right]\int_0^1 \psi_t^2 dx \\
& -[N_1\rho_1 - \rho_1]\int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
& -\left[N_1\rho_1 - \frac{\rho_1}{4l^2} + \rho_1 - \frac{N_3\rho_2 l}{2}\right]\int_0^1 w_t^2 dx \\
& -\left[kc - bl + \frac{N_4 b}{2}\right]\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& -\left[-N_1 k_0 + k_0 - \frac{N_3^2 bl}{4}\right]\int_0^1 (w_x - l\varphi)^2 dx \\
& -\left[-N_1(k + \frac{kN_1}{4}) - k + \frac{N_3 k}{2} - \frac{N_4 k^2}{2b}\right]\int_0^1 (\varphi_x + lw + \psi)^2 dx \\
& -\left[-\frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2} + N_5\right]\int_0^1 \left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right) dx \\
& -\varsigma N_5 F_5(t).
\end{aligned}
$$

Après, on choisit nos constants dont les termes entre parenthèse seront positifs. Alors, on choisit N_1 et N_4 assez grand pour que

$$\alpha_0 = N_1\rho_1 - \rho_1 > 0.$$

Et

$$\alpha_1 = kc - bl + \frac{N_4 b}{2} > 0.$$

Une fois que N_1 et N_4 ont fixé, on choisit N_3 suffisamment large tel que

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= N_1\rho_1 - \frac{\rho_1}{4l^2} + \rho_1 - \frac{N_3\rho_2 l}{2} > 0 \\
\alpha_3 &= -N_1 k_0 + k_0 - \frac{N_3^2 bl}{4} > 0 \\
\alpha_4 &= -N_1(k + \frac{kN_1}{4}) - k + \frac{N_3 k}{2} - \frac{N_4 k^2}{2b} > 0
\end{aligned}
$$

Idem pour N_5

$$\alpha_5 = -\frac{N_4\rho_2\overline{k}}{2} + N_5 > 0$$

Finalement, on choisit N suffisament large

$$\alpha_6 = \frac{N\rho_2 k(t)}{2} - \frac{\varepsilon_2 \rho_1}{l} - N_3(\rho_2 + \frac{\rho_2 l}{2}) - \frac{3N_4\rho_2}{2} - N_5\widetilde{H}(0) > 0.$$

Tout ces choix, implique que

$$\begin{aligned} L^{'}(t) \leq -\int_0^1 \Big[&\alpha_6\psi_t^2 + \alpha_0\varphi_t^2 + \alpha_2 w_t^2 + \alpha_1\psi_x^2 + \alpha_3(w_x - l\varphi)^2 + \alpha_4(\varphi_x + lw + \psi)^2 \\ &+\alpha_5\left(\int_0^t k(t-s)\psi_t^2(s)ds\right)dx\Big] - \varsigma N_5 F_5(t). \end{aligned}$$

Et (3.37) reste vrai. Par conséquent, pour un certain $\theta > 0$,

$$L'(t) \leq -\theta\left(E(t) + F_5(t)\right), \forall t \geq 0. \tag{3.38}$$

Combinons (3.37) et (3.38) pour obtenir

$$L'(t) \leq -\theta\left(E(t) + F_5(t)\right) \leq -\frac{\theta}{C_2}L(t), \forall t \geq 0. \tag{3.39}$$

D'où

$$L(t) \leq L(0)e^{-\frac{\theta t}{C_2}}, \forall t \geq 0. \tag{3.40}$$

Alors (3.40) et (3.37) impliquent que

$$C_1\left(E(t) + F_5(t)\right) \leq L(0)e^{-\frac{\theta t}{C_2}}, \forall t \geq 0.$$

Finalement, en utilisant la positivité de $F_5(t)$ on trouve que

$$E(t) \leq \frac{L(0)}{C_1}e^{-\frac{\theta t}{C_2}} = Re^{-rt}, \forall t \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration.

CONCLUSION

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un système de Bresse avec un retard distribué à retard neutre .En utilisant la méthode des multiplicateurs par la construction des fonctionnelles de Lyapunov un résultat de la décroissance générale de l'énergie a été prouvé dans les deux retards donnés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Alabau Boussouira, J.E. Munôz Rivera, D.S. Almeida Junior, Stability to weak dissipative Bresse system, J. Math.Anal.Appl., 2011, 374, 481–498.

[2] M. O. Alves, L. H. Fatori, J. Silva, R. N. Monteiro, Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system, Math. Meth. Appl. Sci., 2015, 38(5), 898–908.

[3] A. Benaissa, M. Miloudi, M. Mokhtari, Global existence and energy decay of solutions to a Bresse system with delay terms, Comment.Math.Univ.Carolin., 2015, 56, 2, 169 –186.

[4] Well-posedness and stability of solutions to Bresse system with delay and distributed delay,Univ.20 august 1955.skikda,2019

[5] L. Bouzettouta, S. Zitouni, Kh. Zennir and A. Guesmia, Stability of Bresse system with internal distributed delay, J. Math. Comput. Sci., 2017, 7, No. 1, 92-118.

[6] L. Bouzettouta, S. Zitouni, Kh. Zennir and H. Sissaoui, Well-posedness and decay of solutions to Bresse system with internal distributed delay, Int. J. Appl. Math. Stat., 2017, Vol. 56, Issue No. 4.

[7] J. L. Lions, Quelque méthode de résolution des problème aux linéaires, Dunod, Gaulthier-Villars, paris (1996).

[8] J. A. C. Bresse, Cours de Méchanique Appliquée, Mallet Bachelier, Paris, 1859.

[9] LH. Fatori, J. E. Munoz Rivera, JA. Soriano, Bresse system with indefinite damping, J. Math. Anal. Appl., 2012 387(1), 284-290.

[10] A. Fernando, Gallego, Jaime E. Muñoz Rivera, Decay rates for solutions to thermoelastic Bresse systems of types I and III, Elec. J. Diff. Eq., Vol. 2017 (2017), No. 73, pp. 1-26.

[11] Fernandez Sare and R. Racke, On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier law, Arch. Rational Mech. Anal., 2009, 194, 221-251.

[12] A. Guesmia, Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory, J. Math. Anal. Appl., 2011, 382 :748-760.

[13] A. Guesmia and M. Kafini, Bresse system with infinite memories, Math. Meth. Appl., 2014, DOI : 10.1002/mma.3228.

[14] A. Keddi,T. Apalara, S. A. Messaoudi, Exponential and Polynomial Decay in a Thermoelastic-Bresse System with Second Sound, Appl Math Optim, 2016, DOI 10.1007/s00245-016-9376-y.

[15] R.E. Showalter, Monotone Operators in Bamach Space and Nonlinear Partial Differemtial Equation, By the American Mathematicale Society. (1997).

[16] Z. Liu, B. Rao, Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, Z. Angew. Math. Phys., 2008, 60, 54-69.

[17] M. I. Mustafa, M. Kafini, Exponential decay in thermoelastic systems with internal distributed delay, Palestine J. Math., 2013, 2 (2), 287-299.

[18] M. I. Mustafa, A uniform stability result for thermoelasticity of type III with boundary distributed delay, J. Abstr. Diff. Equa. Appl., 2014, 2 (1), 1-13.

[19] S. Nicaise, C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, SIAM J. Control Optim, 2006, 45 (5) : 1561–1585.

[20] S. Nicaise, C. Pignotti, Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay, Diff. Int. Equs., 2008 21(9-10), 935-958.

[21] M. L. Santos, A. Soufyane and D. S. Almeida Junior, Asymptotic behavior to Bresse system with past history, Quarterly Of Applied Mathematics. V LXXIII, 2015, N 1, 23-54.

[22] A. Wehbe and W. Youssef, Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks. Journal of Mathematical Physics ; 2010, 51(10) :103523, 17 ; https ://doi.org/10.1063/1.3486094.

[23] C. Q. Xu, S. P. Yung, and L. K. Li, Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2006, 12 :4, 770–785.

[24] S. Zitouni, L. Bouzettouta, Kh. Zennir and D. Ouchenane, Exponential decay of thermoelastic Bresse system with distributed delay term, Hacettepe J. Math. Stat., 47(5) (2018), 1216-1230.

[25] H .Brezis, Analyse fonctionnelle,théorie et application,Membre de l'institut Professeur à l'université pierre-et-Marie Curie.

[26] T. Cazenave, A. Hareaux, *Introduction aux Problems d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, societé de mathematiques appliquees et industrielles.

[27] T. A. Burton, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations, Academic Press, INC. Orlando, Florida, 1985.