Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2024.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Calcul des variations en commande optimal

Option : Commande optimale des systèmes dynamiques

Par :
TAALBI Ikram

Encadré par : BOUZETTOUTA. Lamine **MCA** U.SKIKDA

Devant le jury :

Président :	HAMDI. Zakaria	MCBU. SKIKDA
Examinateur:	LALLOUCHE. Abdellah	MCBU. SKIKDA

Année : 2023/2024

Remerciements

On tient tout d'abord à remercier Allah qui nous a Eclairé le bon chemin et qui nous permis de réaliser modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus chaleureux à notre encadreur Mme.BOUZETTOUTA LAMINE, qui a dirigé ce travail pour ses précieux conseils et son suivi au cours de ce travail.

Aussi nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, enseignants et étudiants, à la réalisation de ce mémoire.

Et enfin, nous tenons à exprimer notre parfaite Considération aux membres de jury pour avoir bien voulus examiner et juger notre travail.

A tout le corps enseignant du département de Mathématiques pour l'enseignement reçu, surtout :

Mr.Lallouch Abdellah,

Mr.Hamdi Zakaria.

Dédicace

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu le garde dans son vaste paradis, à toi mon père Mekki.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur, maman Zahra رحمها الله.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : mon fiancé « Mohamed Nassim ».

Mes chers frères et sœurs pour leur appui et leur encouragement.

Tous mes amis et mes collèges années.

Résume :

Ce mémoire est consacré à une étude mathématique de calcule variation en commande optimal à savoir : le calcul variations , problème de Pontriaguine, problème simples de contrôle optimal et application militaire.

Mots clé :

Le calcul des variations, Contrôle optimal, Problème de Pontryagine, Problèmes simples de contrôle optimal.

ملخص

تتناول هذه المذكرة دراسة رياضية لحساب التباين في السيطرة المثلى وهي: حساب التباينات، مسألة بونترياغين، مسائل التحكم الأمثل البسيطة والتطبيقات العسكرية..

الكلمات المفتاحية

حساب التباينات، التحكم الأمثل، مسألة بونترياجين، المسائل البسيطة للتحكم الأمثل.

Abstract :

This memory is devoted to a mathematical study of calculating variation in optimal control, namely: calculating variations, Pontriaguine problem, simple optimal control problems and military application.

Keywords :

The calculation of variations, Optimal control, Pontryagin problem, Simple problems of optimal control.

Table des matières

Introduction

Les caractéristiques des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques, sont analysées par la théorie du contrôle. L'objectif est donc de mettre en place le système d'un État initial donné à un État particulier, en respectant éventuellement certains critères. Les différentes origines des systèmes sont très variées : physique, mécanique, militaires, médicaux, économiques, etc...
Il est possible que l'objectif soit de stabiliser le système afin de le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de trouver des solutions optimales pour un certain critère de définition.
Les méthodes les plus réputées pour résoudre les problèmes de contrôle optimal sont le calcul des variations, la programmation dynamique et le Principe de Minimum de Pontriaguine (PMP). Le calcul des variations est une approche économique qui utilise les résultats traditionnels de l'analyse fonctionnelle.
Le PMP représente les efforts des mathématiciens au cours de plusieurs années pour améliorer la théorie du calcul des variations afin de résoudre des problèmes de contrôle optimal liés à des ensembles fermés et à des solutions qui ne sont pas toujours stables.
Le principe lui-même ne représente rien, il n'est pas représenté par une théorie

dérivée. Le principe établit un ensemble de critères requis pour les problèmes de contrôle pour lesquels le contrôle u(t) est intégré à un ensemble spécifique. Le PMP signifie brièvement que si une fonction de contrôle réduit la fonction objective, ses valeurs à chaque instant t doivent également réduire une certaine fonction appelée le hamiltonien.

Notre étude se concentre principalement sur les méthodes de calcul des variations et du PMP pour résoudre les problèmes de contrôle optimal. Nous allons prendre en compte différentes origines de problèmes auxquels nous appliquons ces deux théories.

Dans cette étude, notre but est de mettre en évidence les limites objectives de la théorie traditionnelle du calcul des variations dans la résolution des problèmes de contrôle optimal. Par la suite, Proposer la méthode du PMP en tant que gestionnaire de la théorie du calcul des variations afin de répondre aux problèmes pratiques importants qui ne peuvent pas être résolus par une telle méthode. Ci-dessous, nous présentons brièvement le contenu de ce mémoire.

Le premier chapitre rappelle les résultats, les notes et les concepts essentiels pour la suite du travail. Le deuxième chapitre présente la méthode de PMP . Le troisième chapitre présente exemple d'application militaire provenant de divers domaines afin de mettre en évidence l'importance de la théorie du contrôle optimal dans l'étude et la résolution de problèmes importants.

Chapitre 1

Rappel mathématique

Dans ce chapitre, on rappelle quelques résultats d'analyse et également quelques notions et concepts qui seront nécessaires pour les développements ultérieurs concernant l'analyse mathématique des problèmes de commande optimale. L'optimisation regroupe les techniques qui permettent de chercher les minima ou maxima de fonctions ou de fonctionnelles ; elle intervient dans presque tous les processus de modélisation actuels.

1.1 Le calcul des variations

Examinons, pour l'instant sans trop entrer dans les détails, ce qu'est le problème de calcul des variations. Il s'agit donc de trouver le minimum d'une fonctionnelle

$$J : E \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

où E est un espace vectoriel normé de fonction réelles C^1. Le problème consiste à déterminer, si elle existe, une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

contenant $[0, t_f]$ vérifiant les conditions aux limites

$$x(0) = x_0, \;\; x(t_f) = t_f \tag{1.2}$$

En outre, certaines conditions de régularité doivent être imposées sur la fonction admissible x définie par le critère

$$J(x) = \int_0^{t_f} F(x(t), \dot{x}(t), t)dt \tag{1.3}$$

où $\dot{x}(t)$ est la dérivée de x par rapport à t et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction de Lagrange généralement supposée de classe C^2 par rapport à ses deux premiers arguments et C^1 par rapport au troisième.

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel normé et $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ un corps. On appelle fonctionnelle J toute application linéaire d'un espace vectoriel normé E dans un corps $\mathbb{K}$.*

Définition 1.2 ***(Fonction admissible)***
On appelle fonction admissible toute fonction suffisamment régulière $x(t)$ vérifiant les conditions aux limites.

Définition 1.3 ***Extemum (minimum, maximum)***
x^* réalise un maximum pour la fonctionnelle J ou que $J(x^*)$ est une valeur maximale de J si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \Omega \mid x - x^* \mid < \varepsilon \;\; alors \;\; J(x) - J(x^*) \leq 0$$

x^* réalise un minimum pour la fonctionnelle J ou que $J(x^*)$ est une valeur minimale de J si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \Omega \mid x - x^* \mid < \varepsilon \;\; alors \;\; J(x) - J(x^*) \geq 0$$

Définition 1.4 ***minimum (maximum) local***
Soit $\mathbb{C}$ un ensemble non vide d'un espace de Hilbert réel H et f une fonction de $\mathbb{C}$ dans

$\mathbb{R}$, *on dit que* $x^* \in \mathbb{C}$ *réalise un minimum local de* f *sur* $\mathbb{C}$ *si on peut trouver une boule ouverte* $B(x^*)$ *de* H *centrée en* x^* *tel que*

$$\forall x \in B(x^*) \cap \mathbb{C} : f(x^*) \leq f(x)$$

On dit que $x^* \in \mathbb{C}$ *réalise un maximum local de* f *sur* $\mathbb{C}$ *si on peut trouver une boule ouverte* $B(x^*)$ *de* H *centrée en* x^* *tel que*

$$\forall x \in B(x^*) \cap \mathbb{C} : f(x^*) \geq f(x)$$

On rappelle qu'une boule ouverte de H *de centre* x^* *et de rayon* $\rho \geq 0$ *est l'ensemble*

$$B(x^*, \rho) = \{x \in H \parallel x^* - x \parallel < \rho\}$$

où $\parallel . \parallel$ *désigne la norme de* H.

Définition 1.5 ***Variation d'une fonctionnelle***

Lorsque J *est une fonctionnelle définie sur un ouvert* Ω *d'un espace vectoriel normé* E, *on appelle variation de la fonctionnelle* J *en* x *dans la direction* $z \in E$, *la limite suivante, si elle existe :*

$$\delta J(x, z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(x + \varepsilon z) - J(x)}{\varepsilon}$$

Proposition 1.1 *[8]*

Si x^* *réalise un maximum local de* f *sur* $\mathbb{C}$, x^* *réalise un minimum local de* $(-f)$ *sur* $\mathbb{C}$. *Plus précisément*

$$\max\{f(x), x \in \mathbb{C}\} = -\min\{-f(x), x \in \mathbb{C}\}$$

Définition 1.6 ***Accroissement d'une fonctionnelle***

L'accroissement d'une fonctionnelle, noté ΔJ, *est défini par*

$$\Delta J = J(x(t) + \delta x(t)) - J(x(t))$$

où $\delta x(t)$ *est la variation de la fonction* $x(t)$*, ainsi, l'accroissement* $\Delta J(x(t), \delta x(t))$ *de la fonctionnelle dépend de la fonction* $x(t)$ *et de sa variation* $\delta x(t)$*.*

Théorème 1.1 ***(Théorème de Taylor à une variable)***

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f \in C^n[a,b], f^{(n)}$ *dérivable dans* $]a,b[$ *et soit* $x_0 \in [a,b], x \neq x_0$*, on a*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

où ξ *est un point strictement compris entre* x_0 *et* x*.*

Théorème 1.2 ***(Théorème de Taylor à deux variables)***

On suppose que $f(x,y)$ *et toutes ses dérivées d'ordre inférieur à* $n+1$ *sont continues dans*

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

soit $(x_0, y_0) \in D, \forall (x,y) \in D$*, il existe* ξ *compris entre* x *et* x_0 *et* η *compris entre* y *et* y_0 *avec*

$$f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$$

où

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &+ ... + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} C_{n+1}^{j}(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

et

$$R_n(x,y) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^{j}(x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(\xi,\eta)$$

Définition 1.7 *Considérons l'accroissement de la fonctionnelle J*

$$\Delta J = J(x(t) + \delta(t)) - J(x(t))$$

Nous utilisons la série de Taylor autour de $x(t) + \delta x(t)$, pour $J(x(t) + \delta x(t))$, alors

$$\begin{aligned} \Delta J &= \frac{\partial J}{\partial x}\delta x(t) + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\delta^2 x(t) + ... \\ &= \delta J + \delta^2 J + ... \end{aligned}$$

où $\delta J = \frac{\partial J}{\partial x}\delta x(t)$,et $\delta^2 J = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\delta^2 x(t)$ sont respectivement la première variation et la deuxième variation de J.

Théorème 1.3 ***(Théorème fondamental)*** *[1]*

Soit $x^*(t)$ un extremum, la première variation de J est nulle en $x^*(t)$ .i.e.

$$\delta J(x^*(t), \delta x(t)) = 0$$

pour toute variation admissible $\delta x(t)$.

En utilisant le lemme fondamentale du calcul des variations :

Lemme 1.1 ***(Lemme fondamental)*** *[5]*

Si $v(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$ et si

$$\int_a^b v(x)\eta(x)dx = 0$$

$\forall \eta \in C^1[a, b]$ *et* $\eta(a) = \eta(b) = 0$*, alors* $v = 0$

Exemple 1.1 *[11]*

Considérons l'exemple suivant qu'on va utiliser ulterièrement Soit le développement économique en temps fini où K = K(t) défini le capital social, C = C(t) est la consommation et Y = Y (t) la production nationale nette au temps t.

Supposons que

$$Y = f(K), ou\ \dot{f}(K) > 0, \ddot{f}(K) \leq 0$$

De sorte que la production nationale nette doit strictement augmenter et la fonction concave du capital est unique. Pour chaque $t \in [0, T]$ (l'intervalle de planification), nous considérons

$$C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t)$$

Ce qui signifie que la production $f(K(t))$ est partagée entre la consommation $C(t)$ et l'investissement $\dot{K}(t)$. Dailleurs, soit $K(0) = K_0$ le capital initial au temps $t = 0$.

1.2 Problème de Pontryagine

Pour l'instant, nous donnons une formulation du problème de Pontryagine qui résout le principe du Minimum. Soit un système régi par une équation d'état

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \tag{1.4}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^n$ désignent respectivement l'état et la commande à l'instant t.

Soit t_1 l'instant initial, et supposons que la valeur de l'état à cet instant soit fixée

$$x(t_1) = x_1 \tag{1.5}$$

On ne peut pas piloter le système considéré entre l'instant $t_1 = 0$ et un instant final t_f qu'avec une commande suffisamment régulière. Nous nous limiterons aux commandes continues par morceaux avec.

$$u(t) \in U, \forall t \in I \tag{1.6}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $[0, t_f]$ et U est sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.8 ***(Commande admissible)***

On appelle commande admissible toute fonction continue par morceaux

$$u(t), 0 \leq t \leq t_f, \text{ valeur dans } U$$

Le problème consiste à déterminer, si elle existe, une commande optimale u^* minimisant, sur l'ensemble des commandes admissibles un critère J

$$J(x, u, t) = \int_0^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \tag{1.7}$$

où F est une fonction vectorielle réelle suffisamment régulière par rapport à ses arguments.

Théorème 1.4 ***[[Principe du minimum faible (cas sans contrainte sur la commande)]*** *[2]*

Si la commande u associée au système linéaire de commande (1.4) est optimale pour la fonction coût (1.7), alors il existe une application $\lambda(.)$ absolument continue sur $[0, t_f]$, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, appelée vecteur adjoint, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, t_f]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial x}, 0 \leq t \leq t_f \\ \frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u} = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où H est le hamiltonien associé au système et au coût ; et est donné par :

$$H = H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) f(x(t), u(t), t)$$

où T indique la transposition vectorielle

Théorème 1.5 *Principe du minimum fort (cas de la commande avec contrainte)[2] Si la commande u associé au système linéaire de commande (1.4) est optimale pour la fonction coût (1.7), alors il existe une application*$\lambda(.)$ *absolument continue sur* $[0, t_f]$*, à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *, appelée vecteur adjoint, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [0, t_f]$ *tel que :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x(t),u(t),\lambda(t),t)}{\partial x} \end{cases}$$

où H est le hamiltonien défini précédemment.

Définition 1.9 ***(La commandabilité des systèmes)***

Un système est dit commandable ou gouvernable entre x_0 *et* x_1*, si l'on peut trouver une commande u(t) qui permette de transiter de l'état initial* x_0 *à l'état final* x_1 *en temps fini.*

Un système est dit totalement gouvernable s'il existe une solution u(t) pour tout couple $\{x_0, x_1\}$*.*

Commandabilité des systèmes linéaires invariants [8]

Nous nous limiterons dans un premier temps au cas d'un système mono-variable dont la commande u(t) se réduit à un terme scalaire. Il s'agit alors de définir les conditions nécessaires pour que le système décrit par l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ soit commandable tel que $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. La linéarité de l'équation permet de raisonner pour un état initial nul $(x(t_0) = 0)$. Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il une commande $u(t) \in U$ telle que, pour t_1 fini, on ait :

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau (si \;\; x(t_0) = 0) \end{aligned}$$

Pour un instant t quelconque, on a

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton[6],$e^{A(t_1-\tau)}$ peut se développer sous forme d'un polynôme matriciel de degré $n-1$:

$$e^{A(t_1-\tau)} = \alpha_0(\tau,t)I + \alpha_1(\tau,t)A + ... + \alpha_{n-1}(\tau,t)A^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau,t)A^i$$

Théorème 1.6 *[4]*
Le système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $G_j = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$ est de rang n. On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

Théorème 1.7 *(Théorème de la moyenne)*
Si f est intégrable sur [a, b] et si l'on pose $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a).$$

Si f est continue sur [a, b] , alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = f(c).$$

Chapitre 2

Problèmes simples de contrôle optimal

On a développé la commande optimale afin de diriger un système vers un objectif de manière optimale.Donc, le problème de commande optimale peut être décrit de la façon suivante :

- Il existe un système (robot, fusée, four,...) dont l'évolution dans le temps est régie par une loi physique (mécanique, transfert de matière...) qui relie ses variables indépendantes définies par un vecteur indépendante x(t) (vitesse, position) et des commandes indépendantes u(t) (accélération, taux de matière, poussée).
- En utilisant des commandes, on souhaite que le système suive une trajectoire spécifique ou atteigne un état optimal ou réduise le long de la trajectoire, un critère.

De plus, il y a un lien entre la théorie des processus optimaux et le calcul des variations, et il lui est équivalent lorsque le domaine de commande U est un ensemble ouvert de l'espace vectoriel et que toutes les conditions nécessaires pour calculer les variations découlent du principe du minimum [1], [4], [7] .

Toutefois, la théorie traditionnelle du calcul des variations est incapable de résoudre des problèmes où l'on impose des conditions du type U fermé, $|u| \leq 1, ...$ où il y a absence de conditions de régularité.Le principe du minimum présente donc un avantage par rapport à la théorie classique du calcul des variations, car il s'applique à un ensemble quelconque (ouvert ou fermé) et/ou la solution peut être régulière ou non régulière.

2.1 Différents types de problèmes d'optimisation

2.1.1 Problème de Lagrange

Dans cette section, nous étudions une classe de problèmes de commande optimale. On considérera un système dynamique dont l'évolution est régie par l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \ pour \ t_1 \leq t \leq t_2 \tag{2.1}$$

où es contrôles u(t) sont des fonctions définies de $[t_1, t_2]$ dans $\mathbb{R}$.
Étant donné une fonction $F : [t_1, t_2] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, où U ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on définit le problème de minimisation :

$$Min \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t), t)dt \tag{2.2}$$

tel que

$$x(t_1) = x_1 \ est \ une \ condition \ initial \ donne. \tag{2.3}$$

Ainsi, la formulation (2.2) est appelée problème de Lagrange. Nous présentons, ci- dessous, deux formulations alternatives.

2.1.2 Problème de Bolza

L'avantage du problème de Bolza est que c'est un problème qui regroupe les deux précédentes formulations à savoir les formulations de Lagrange et de Mayer. Soit le système dynamique (2.1) Étant donné une fonction $F : [t_1, t_2] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation par

$$Min[\int_{t_1}^{t_2} F(x(t), u(t), t)dt + G(x(t_2))] \tag{2.4}$$

et satisfaisant la condition initiale

$$x(t_1) = x_1 \tag{2.5}$$

Les trois formulations (2.1), (2.2), (2.3) sont équivalentes dans le sens où on peut toujours se ramener de l'une à l'autre. [La fonctionnelle de Bolza (Lagrange pour $G \equiv 0$, Mayer pour $F \equiv 0$)].

2.2 Problème abstrait de commande optimale

Un problème de commande optimale comporte deux parties :
La première partie consiste à déterminer, parmi les commandes admissibles, celles qui permettent d'avoir une trajectoire joignant le point initial à une cible.
La deuxième partie consiste à chercher, parmi toutes ces trajectoires possibles, celle qui réalise le coût minimal. Ainsi, le problème de commande optimale consiste à déterminer, si elle existe, une commande u^* minimisant, sur l'ensemble U des commandes admissibles, un critère J de la forme

$$J = S(x_f, t_f) + \int_{t_1}^{t_f} F(x(t), u(t), t)dt \tag{2.6}$$

tel que

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), t \in [t_1, t_f] \quad (2.7)$$

et les conditions aux limites sont l'une ou l'autre des formes suivantes.

$$x(t_1) = x_1 \; et \; x(t_f) \; fixe, \; t_f \; fixe \quad (2.8)$$

$$x(t_1) = x_1 \; et \; x(t_f) \; fixe, \; t_f \; libre \quad (2.9)$$

$$x(t_1) = x_1 \; et \; x(t_f) \; libre, \; t_f \; fixe \quad (2.10)$$

$$x(t_1) = x_1 \; et \; x(t_f) \; libre, \; t_f \; libre \quad (2.11)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U, \forall t \in I, I \subset \mathbb{R}$ contenant $[t_1, t_f]$ et U est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^m$ .S,F et g sont des fonctions vectorielles suffisamment régulières par rapport à leurs arguments.

Position du problème(sans contrainte sur la commande)

Le problème de commande optimale s'écrit alors :

$$Min J(u) == S(x_f, t_f) + \int_{t_1}^{t_f} F(x(t), u(t), t) dt \quad (2.12)$$

tel que

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.13)$$

et les conditions aux limites

$$x(t_1) = x_1 \; et \; x(t_f) \; libre, \; t_f \; libre \quad (2.14)$$

où S, F et g sont, au moins de classe C^1 par rapport à leurs arguments.

Notre objectif est de construire par le théorème 1.6 [1.7] les conditions nécessaires d'optimalité. Nous développons la solution du problème de commande optimale donné ci-dessus, à travers les étapes suivantes :

Étape 1 : Le Hamiltonien

Étape 2 : Les équations d'état et co-état

Étape 3 : La condition nécessaire par rapport à u

Étape 4 : Les conditions de transversalité

Description succincte des différentes étapes de la résolution du problème [1]

Étape 1 : Le Hamiltonien

Nous formons le hamiltonien H pour le problème décrit par le système (2.15) et (2.14) en posant :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda g(x(t), u(t), t) \tag{2.15}$$

où $\lambda(t)$ est l'état adjoint.

Étape 2 : État adjoint et équation d'état

Soient $x^*(t), u^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ les valeurs optimales ; alors, l'équation d'état et l'équation adjointe sont données respectivement par :

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^* = g(x^*(t), u^*(t), t) \tag{2.16}$$

avec la condition initiale

$$x^*(t_1) = x(t_1) \tag{2.17}$$

et

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^* = -\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\right)^* \tag{2.18}$$

Étape 3 : Condition d'optimalité

La condition d'optimalité est donnée par

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^* = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u}\right)^* = 0 \tag{2.19}$$

Étape 4 : Condition de transversalité :

$$[H^* + (\partial S/\partial t)]_{t_f}\delta t_f + [(\partial S/\partial t)^* - \lambda^*(t)]_{t_f}\delta t_f \delta x_f = 0 \tag{2.20}$$

La relation (2.20) donne la relation supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations (2.16) et (2.18)

Différents cas de transversalité

Type 1 : puisque t_f et $x(t_f)$ sont fixes, δt_f et δx_f sont nuls dans la condition de transversalité (2.20) ; il n'y aucune condition supplémentaire à part celles imposées par la formulation du théorème.

Type 2 : t_f le temps final libre et $x(t_f)$ est fixe, alors δt_f est arbitraire et comme $x(t_f)$ est fixe, δx_f , est nul. Le coefficient de δt_f dans la condition de transversalité (2.20) est nul aboutissant à :

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \tag{2.21}$$

Type 3 : t_f fixe et $x(t_f)$ est libre. Alors δt_f est nul et δx_f est arbitraire. Ceci signifie que le coefficient de δx_f dans la condition de transversalité (2.20) est nul. i.e.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)_{t_f} = 0 \tag{2.22}$$

Type 4 : t_f et $x(t_f)$ sont libres, ne sont pas reliés,δt_f et δx_f ne le sont pas ; on a d'après la condition (2.20) le résultat suivant

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)_{t_f} = 0 \tag{2.23}$$

$$\left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} = 0 \tag{2.24}$$

Exemple 2.1 *Soit à minimiser le problème de commande optimale (P2) tels que*

$$(P_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} J = \int_0^1 (x^2 + u^2) \\ telque \\ \dot{x} = -x + u \\ et\ x(0) = 1, x(1) = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

On résout ce problème aussi par la technique reposant sur les résultats obtenus dans la section 2.4. En effet, on a ici :

$$\begin{cases} F(x, ut) = x^2 + u^2 \\ g(x, u, t) = x + u \\ H(x, u, \lambda, t) = (x^2 + u^2) + \lambda(x + u) \\ x(0) = 1, x(1) = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

D'après (2.16), (2.18) et (2.19) on a les résultats suivants

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ \dot{\lambda} = -(2x - \lambda) \\ 2u + \lambda = 0 \\ x(0) = 1, x(1) = 0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Ainsi que

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2x \\ u = \dot{x} + x \\ \lambda = -2u \\ x(0) = 1, x(1) = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

La résolution des équations différentielles précédentes donne

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \\ u(t) = C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ \lambda(t) = -2\left[C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}\right] \end{cases} \tag{2.29}$$

Détermination des constantes

Comme $x(0) = 1, x(1) = 0$, ceci implique

$$C_1 = \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}} + e^{\sqrt{2}}}, C_2 = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}} + e^{\sqrt{2}}} \tag{2.30}$$

De ce fait, la solution optimale est

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}t} + \frac{e^{-\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}t} \\ u(t) = \frac{(1-\sqrt{2})}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}(1-t)} + \frac{(1+\sqrt{2})}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}(t-1)} \\ \lambda(t) = -2\frac{(1-\sqrt{2})}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}(1-t)} + \frac{(1+\sqrt{2})}{e^{-\sqrt{2}}+e^{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}(t-1)} \end{cases} \tag{2.31}$$

2.3 Le calcul des variations en commande optimale

Dans cette section, nous étudions un système de commande optimale par les techniques variationnels c'est-à-dire la méthode du calcul des variations. Pour trouver la commande optimale $u^*(t)$ pour un problème décrit par l'équation du système, l'indice de performance et les conditions aux limites, nous allons traiter l'équation différentielle qui régit l'état du système comme une contrainte d'égalité de la forme

$$\dot{x}(t) - g(x(t), u(t), t) = 0$$

Nous utilisons la variation du contrôle $u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$ dans l'objectif suppose que U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$ et procède par $\ll$ *petite variation* $\gg$ de la commande optimal u^* ; ainsi, en posant $J = J(u)$, on cherche une commande optimale u^* tel que

$$J(u^* + \delta u) \geq J(u^*) \tag{2.32}$$

Notre objectif dans cette section est de reformuler le problème de commande optimale décrit par (2.9), (2.10) et (2.11) en un problème de calcul des variations sans contrainte.

Nous développons la solution du problème de Bolza à travers les étapes suivantes :

Étape 1 : Hypothèse de l'existence de la commande optimale et de l'état associe

Étape 2 : Variation de la commande et de l'état

Étape 3 : Multiplicateur de Lagrange

Étape 4 : Première variation

Étape 5 : Condition d'extremum

Description des étapes conduisant aux CNO :

Étape 1 : Commande optimale et état optimal

Supposons que la commande optimale $u^*(t)$ et l'état optimal $x^*(t)$ correspondant existent,alors par analogie avec le calcul des variations, on pose

$$J(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x^*(t), u^*(t), t) + \frac{dS(x^*(t), t)}{dt} \right] dt \tag{2.33}$$

$$\int_{t_0}^{t_f} F(x^*(t), u^*(t), t) + S(x^*(t_f) - S(x^*(t_0)))$$

et

$$\dot{x}^*(t) = g(x^*(t), u^*(t), t) \tag{2.34}$$

Étape 2 : Variations de la commande et de l'état

Soient

$$u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \; et \; x(t) = x^*(t) + \delta u(t) \tag{2.35}$$

Alors, l'équation d'état (2.34) et l'indice de performance (2.33) s'écrivent respectivement :

$$\dot{x}^*(t) + \delta\dot{x}(t) = g(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t)$$

$$J(u^*(t) + \delta u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t), t) + \frac{dS}{dt} \right] dt \tag{2.36}$$

Étape 3 : Multiplicateurs de Lagrange

Considérons l'équation d'état (2.34) sous forme de contrainte. On associe à la contrainte un multiplicateur $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que la performance augmentée, soit

$$J(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x^*(t), \dot{x}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) dt \tag{2.37}$$

où

$$L(x^*(t), \dot{x}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = F(x^*(t), u^*(t), t) + (\partial S/\partial x)\dot{x}^*(t) \tag{2.38}$$

$$+(\partial S/\partial t) + \lambda(t)[\dot{x}^*(t) + g(x^*(t), u^*(t), t)]$$

D'où

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)dt \tag{2.39}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)dt + \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)dt$$

En utilisant le théorème de la moyenne puis le théorème1.2 du chapitre 1 appliqués à la fonction $L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)$ autour de $x^*(t), u^*(t)$ en gardant les termes linéaires et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)dt \approx L|_{t_f}\delta t_f \tag{2.40}$$

Étape 4 : Première variation

En définissant ΔJ puis en utilisant le théorème 1.2, on obtient la première variation δJ en retenant seulement les termes linéaires :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} [(\partial L/\partial x)^* \delta x(t) + (\partial L/\partial \dot{x})^* \partial \dot{x}(t) + (\partial L/\partial u)^* \delta u(t)]dt + L|_{t_f}\delta t_f \tag{2.41}$$

Intégrant par parties le terme qui contient $\delta \dot{x}(t)$ dans (2.41) alors δJ s'écrit

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{\big[(\partial L/\partial x)^* - \frac{d}{dt}(\partial L/\partial \dot{x})^*\big]\delta x(t) + (\partial L/\partial u)^* \delta u(t)\}dt$$

$$+L|_{t_f}\delta t_f + [(\partial L/\partial \dot{x})^* \delta x(t)]|_{t_f} \tag{2.42}$$

Étape 5 : Condition d'extremum

Sachant que $\delta J = 0$ d'après le théorème 1.3 pour le calcul des variations, il vient alors que pour le système de commande (2.10), on considère $\delta x(t)$ une variation dépendante. Le coefficient dans (2.42) est nul :

$$(\partial L/\partial x)^* - \frac{d}{dt}(\partial L/\partial \dot{x})^* = 0 \tag{2.43}$$

Comme la variation du contrôle $\delta u(t)$ est arbitraire, alors le coefficient de la commande est nulle

$$(\partial L/\partial u)^* = 0 \tag{2.44}$$

Ainsi, la première variation se réduit à

$$L|_{t_f}\delta t_f + [(\partial L/\partial \dot{x})^*\delta x(t)]|_{t_f} = 0 \tag{2.45}$$

Le système (2.34) en fonction du Lagrangien est

$$(\partial L/\partial \lambda)^* = 0 \tag{2.46}$$

Maintenant, nous utilisons le résultat de la section 2.1, pour le problème décrit par (2.9), (2.10) et (2.11). Pour la condition optimale, nous avons l'ensemble des équations d'Euler -Lagrange par rapport à la fonctionnelle augmentée (2.37) donnée en termes de $x(t), \lambda(t)$ et $u(t)$ par :

$$Equation\ d'tat \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^* = 0 \tag{2.47}$$

$$Equation\ adjointe \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)^* = 0 \tag{2.48}$$

$$Equation\ de\ commande \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)^* = 0 \tag{2.49}$$

De ce fait, les équations (2.48) et (2.49) sont équivalentes aux équations (2.44) et (2.46) respectivement

Comme

$$\delta x(t_f) \approx \delta x_f - \dot{x}(t_f)\delta t_f \tag{2.50}$$

Alors, en substituant (2.47) dans la condition générale (2.45), nous obtenons

$$\left[L^* - (\partial L/\partial \dot{x})^*\dot{x}(t)|_{t_f}\right]\delta t_f + (\partial L/\partial \dot{x})^*|_{t_f}\delta x_f \tag{2.51}$$

où (2.51) est la condition de transversalité.

Exemple 2.2 *Nous allons reformuler le problème (P2) de l'exemple 2.1 de la section 2.2 par la méthode du calcul des variations.*

D'après (2.37), on a

$$J(x,u) = \int_0^1 L(x,\dot{x},u,\lambda,t)dt \tag{2.52}$$

Soit

$$L(x,\dot{x},u,\lambda,t) = x^2 + u^2 + \lambda(\dot{x} + x - u) \tag{2.53}$$

où $\lambda = \lambda(t) \in \mathbb{R}$ *est le multiplicateur de Lagrange*

L'ensemble des équations d'Euler-Lagrange est donné par :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0 \Rightarrow 2x + \lambda - \dot{\lambda} = 0 \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}) = 0 \Rightarrow \dot{x} + x - u = 0 \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}) = 0 \Rightarrow 2u - \lambda = 0 \tag{2.56}$$

D'après (2.55) et (2.56) on a

$$\lambda = 2u = 2(\dot{x} + x) \tag{2.57}$$

Utilisant les équations (2.57) dans (2.54)

$$2x + 2(\dot{x} + x) - 2(\ddot{x} + \dot{x}) = 0 \tag{2.58}$$

Par résolution de l'équation précédente, on obtient :

$$\ddot{x} - 2x = 0 \rightarrow x(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \tag{2.59}$$

Alors

$$u(t) = \dot{x}(t) + x(t) \tag{2.60}$$

et

$$\lambda(t) = 2u \tag{2.61}$$

Donc

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-\sqrt{2}t} + C_2 e^{\sqrt{2}t} \\ u(t) = C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} \\ \lambda(t) = -2\big[C_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + C_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}\big] \end{cases} \tag{2.62}$$

Nous concluons que les deux approches conduisent aux mêmes conditions nécessaires d'optimalité. Cependant l'approche calcul des variations est plus élégante car faisant appel uniquement à des outils classiques de l'analyse fonctionnelle.

Chapitre 3

Application militaire

L'histoire de l'humanité est marquée par la maîtrise de la nature afin d'en tirer le meilleur profit possible.Ainsi, les exigences de la vie en société ont entraîné l'émergence des concepts de contrôle et d'optimisation.
Le contrôle, au sens de vérification, est essentiel à tous les égards : on surveille le déroulement d'une réaction chimique ou l'évolution d'un système physique afin de corriger les éventuels écarts par rapport à une situation spécifique ; on vérifie les procédés industriels.
De plus, la notion d'optimisation peut être présente dans toutes les disciplines scientifiques et techniques.Un rayon lumineux se déplace dans une direction réduisant le temps de trajet.En mathématiques, on étudie les conditions d'existence et le calcul précis ou approché de "meilleures solutions" pour des problèmes provenant de différentes disciplines telles que les sciences physiques, chimiques, industrielles, biologiques, économiques et militaires. [9]

Exemple 3.1 *[10], [3]*
Dans cet exemple, on considère le mouvement d'un missile décrit par

$$\ddot{x}(t) = -g + u(t) - \alpha\dot{x}(t), t \geq 0 \tag{3.1}$$

où α est une constante positive donnée. Le terme $(-\alpha\dot{x}(t))$ représente la résistance de l'aire proportionnelle à la vitesse du missile à chaque instant t et g est la constante de gravitation.

On impose les conditions initiales :

$$x(0) = 0 \text{ et } \dot{x}(t) = 0 \tag{3.2}$$

et la condition finale

$$x(t_1) = h \tag{3.3}$$

Le but est de minimiser la quantité

$$J(u) = \int_0^{t_1} u^2(t)dt \tag{3.4}$$

qui donne une mesure de la force de poussée totale.

L'équation différentielle

$$J = \frac{m}{\alpha} \ln(\frac{m - \alpha a}{m - \alpha c}) \qquad (\star)$$

S'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g + u - \alpha x_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème est de trouver le contrôle optimale $u^*(t)$ qui minimisera la fonctionnelle J(u) soumise aux contraintes (4.62), (3.1) et (3.2). Pour simplifier la résolution du problème on pose $\alpha = 0$.

Alors ($\star$) devient

$$\ddot{x}(t) = -g + u(t) \tag{3.6}$$

et le système (3.4) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g + u \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit le hamiltonien

$$H(x, u, \lambda) = u^2 + \lambda_1 x_2 + (-g + u)\lambda_2 \tag{3.8}$$

La commande optimale u^* vérifie

$$\frac{\partial H}{\partial u^*} = 0 \tag{3.9}$$

ce qui donne :

$$2u^* + \lambda_2 = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\lambda_2 \tag{3.10}$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda) &= \frac{1}{4}\lambda_2^2 + \lambda_1 x_2 - g\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2 \\ &= -\frac{1}{4}\lambda_2^2 + \lambda_1 x_2 - g\lambda_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Le vecteur adjointλ vérifie

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{3.12}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\dot{\lambda}_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

Les équations (3.6), (3.9) et (3.12) définissent complètement la solution u, λ et x si l'on précise les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ et la condition finale $x(t_1) = 0$.
L'équation (3.12) donne

$$\lambda_1 = \lambda_{10} = C^{ts} \tag{3.14}$$

et

$$\lambda_2 = -\lambda_{10}t + \lambda_{20} \text{ et } \lambda_{20} = C^{ts} \tag{3.15}$$

L'équation (3.9) donne

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}(-\lambda_{10}t + \lambda_{20}) \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda_{10}t - \lambda_{20})$$

L'équation (3.6) donne

$$\begin{cases} x_2(t) = -gt + \frac{1}{2}\lambda_{10}t^2 - \frac{1}{2}\lambda_{20}t + x_{20} \\ x_1(t) = -g\frac{t^2}{2} + \lambda_{10}\frac{t^3}{6} - \frac{1}{4}\lambda_{20}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{cases} \tag{3.17}$$

avec

$$x_{10} = x_1 = 0 \text{ } et \text{ } x_{20} = x_2 = 0$$

d'où

$$\begin{cases} x_2^*(t) = -gt + \frac{1}{2}\lambda_{10}t^2 - \frac{1}{2}\lambda_{20}t \\ x_1^*(t) = -g\frac{t^2}{2} + \lambda_{10}\frac{t^3}{6} - \frac{1}{4}\lambda_{20}t^2 \end{cases} \tag{3.18}$$

Pour trouver les constantes d'intégrations λ_{10} et λ_{20}, il suffit d'exprimer que pour $t = t_1$, l'état final $x_1^*(t_1) = 0$ et$x_2^*(t_2) = 0$

$$\begin{cases} x_2^*(t) = -gt + \frac{1}{2}\lambda_{10}t^2 - \frac{1}{2}\lambda_{20}t = 0 \\ x_1^*(t) = -g\frac{t^2}{2} + \lambda_{10}\frac{t^3}{6} - \frac{1}{4}\lambda_{20}t^2 = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

On obtient

$$\lambda_{10} = \frac{\lambda_{20} + 2g}{t_1} \tag{3.20}$$

et

$$\lambda_{20} = 4g \tag{3.21}$$

d'où

$$\lambda_{10} = \frac{4g}{t_1} \tag{3.22}$$

alors

$$u^*(t) = 2g(1 - \frac{t}{t_1^*}), 0 \leq t \leq t_1^* \tag{3.23}$$

avec

$$t_1^* = \sqrt{6h/g}$$

On observe que la poussée initiale u(0) doit être le double de la gravitation.

Conclusion

Ce mémoire a illustré l'application des concepts de contrôle optimal à un problème militaire. En rappelant les bases mathématiques nécessaires, en formulant un problème de contrôle optimal simple, et en appliquant ces principes à un scénario militaire concret, nous avons démontré l'utilité et l'efficacité du contrôle optimal pour résoudre des problèmes complexes dans des contextes réels. Les futures recherches pourraient explorer des scénarios plus complexes et intégrer des facteurs supplémentaires pour améliorer encore l'optimisation des missions militaires .

Bibliographie

[1] D.S. Naidu. *Optimal control systems CRC Press, France, 2.3.*

[2] E. Trelat . *Controle optimal et application Vuibert, Paris, 2005.*

[3] ENID R. PINCH, . *Optimal ContrÙle and the Calculus of Variations Oxford University Press, 1993.*

[4] Frederick.Y.M.Wan . *Introduction to the calculus of variations and its applications Chapman ß Hall, 1995.*

[5] G.,Leitman . *The calculus of variations optimal control Plenum press, 1981.*

[6] H.Sissaou . *Cours de CotrÙle Optimal (2006/2007), DÈpartement de mathÈmatique universitÈ Bdji-Mokhtar-Annaba.*

[7] L.Pontriaguine,V.Bolianski . *R.GamkrÈlidzÈ, F.Michtchencko, Theorie mathematique des processus optimaux Edition Mir. Moscou, 1974.*

[8] M. Bergounioux, . *Optimisation et contrÙle des systËmes linÈaires Dunod, Paris, 2001.*

[9] Pole (Ed) . *ContrÙle et Optimisation Rencontres du 5eme TIPE, N04, Hors Serie, 2002.*

[10] Raina S. Robiva Exal. *Laboratory Manual of Biomathematics Academic Press, 2008.*

[11] Sydaeter. K. 1981. *Topics in Mathematical Analysis For Economists Academic Press. London, 1987*