

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/.../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Approximation numérique de la solution d'une équation de
Poisson non-locale

Option : ANEDP

Par :

NEKAKA AHLEM

Encadré par : H. Lakhel

Co-Encadreur : K. Slimani

M.C.A U. SKIKDA

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : M. Maouni

Examineur : CH. Karek

Prof U. SKIKDA

M.C.B SKIKDA

Année : 2022/2023



Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon Dieu Allah qui m'a donné la volonté et la force et le courage pour la réalisation de ce travail.

*Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce rapport dans les conditions les plus favorables, en particulier j'exprime ma profonde gratitude à mon encadreur **Lekhal Hakim** de m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je le remercie vivement pour les heures d'encadrement qu'il m'a accordées et les remarques constructives qui m'ont été précieuses qui m'ont permis de mener ce travail à ce terme.*

Je tiens également à remercier les membres de jury d'avoir accepté de relire mon manuscrit et d'y consacrer une partie de leur temps.

Je remercie également enseignants de maîtrise qui n'ont cessé de me transmettre leurs acquis et leurs expériences.



Dédicace

Merci pour ce que nous sommes

Je dédie ce travail

A

L'homme que ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie
bonheur, qui n'a jamais cassé de me soutenir,

Mon père : **AZIZ**

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, a vie ,
maman que j'adore : **LECHHEB OULYA**

À mon frère **MOHAMED AMIN** , mon soutien moral et source de joie et de
bonheur, que Dieu le protège.

À ma chère sœur **SHOROUCK**, mon âme sœur et mon amie, que Dieu la protège.
À ma petite sœur **FARAH** ma chérie et mon double que je souhaite de m'en prendre
de la graine.

À mon petit frère **SADJED YOUSSEF** mon chouchou et mon amour que dieu le
bénéficie.

Sans oublier, de remercier mes chères **AIDA, RABAB, LOUBNA,**
RAYHANA, KAWTHAR, RAYENNE, SALSABIL, RAJA ... pour tous les
moments qu'on a passé ensemble à l'université. Voire, pour leur aide et leur soutien.

Enfin, je remercie toute personne qui a apporté sa pierre à l'édifice de ce mémoire et
que les mots me manquent pour leur témoigner de ma profonde gratitude.



Résumé

ce mémoire est basé sur les espaces fractionnaire $W^{s,p}$ et le problème elliptique fractionnaire (linéaire). On utilisé le théorème de Lax-Milgram pour la résolution du problème linéaire. De plus, nous traitons l'étude numérique en utilisant la méthode des éléments finis pour l'approximation de la solution de l'équation elliptique correspondante.

Mots clés :les espaces fractionnaire , théorème de Lax-Milgram, méthode des éléments finis.

Abstract

The objective of this memory is the study of existence and unequenss solution for fractional elliptic equations involoving one-dimensional fractional Laplace operator in Sobolev fractional space, These results are obtained by Lax-Milgram theorem. Then, the numerical study of this problem using finite element method for illustrated our results.

Keywords : one-dimensional fractional Laplacian, Lax-Milgram theorem, the finite element method.

ملخص

. في هذه المذكرة قمنا بدراسة وجود ووحداية الحل لمعادلة لابلاسيان الغير المحلية و التي تتضمن عامل لابلاسيان الكسري أحادي البعد في فضاء صوبوليف الكسري، وذلك باستعمال نظرية لاکس ميلیگرام . بعد ذلك ، قمنا بالدراسة العددية باستعمال طريقة العناصر المنتهية لتوضیح نتائجنا،

كلمات مفتاحية: ، نظرية لاکس ميلیگرام، عامل لابلاسيان الكسري أحادي البعد، طريقة العناصر المنتهية.

Table des matières

1	Espace de Sobolev fractionnaire	3
1.1	Espace de Sobolev fractionnaire ($0 < s < 1$)	3
1.2	Espaces Höldériennes	4
1.3	Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}$	6
1.4	Injection de Sobolev fractionnaire	7
1.4.1	Injection continue de Sobolev fractionnaire	7
1.4.2	Injection compact de Sobolev fractionnaire	10
1.5	Espace de Sobolev fractionnaire, $s > 1$	10
1.5.1	Espace $W^{s,p}$, $s > 1$	10
1.5.2	Injection continue et compact dans $W^{s,p}$ avec $s > 1$	11
1.6	Espace $H^s(\Omega)$	11
1.7	Théorème de Lax-Milgram	12
2	Formulation variationnelle d'équation elliptique fractionnaire	13
2.1	Laplacien fractionnaire	15
2.1.1	Laplacien fractionnaire par la norme Gagliardo	15
2.1.2	Le potentiel de Riesz	15
2.2	Définition de $(-\Delta)^s$ dans l'espace des distributions tempéré \mathcal{S}'	17
2.3	Formulation variationnelle et Existence et l'unicité de la solution faible du problème	18
3	Méthode des élément finis et approximation variationnelle	20
3.1	Approximation interne et système matriciel équivalent	20
3.2	Convergence de la méthode	21
3.3	Approximation des élément finis du problème elliptique	23
3.4	Résultats numériques	45

Introduction

Ces dernières années, les équations différentielles partielles (EDP) ou même les équations différentielles fractionnaires (EDF) ont suscité l'intérêt non seulement des mathématiciens, mais aussi des physiciens et des ingénieurs. Pour plus de détails, les systèmes d'équations elliptiques fortement non linéaires présentent des nouveaux phénomènes et intéressants, qui ne sont pas présents dans l'étude dans la même équation. De nombreuses publications sont parues sur les systèmes elliptiques non linéaires. renvoyons les lecteurs. Il est essentiel de mentionner que le calcul fractionnaire est une généralisation de la différenciation et de l'intégration ordinaires.

L'idée du calcul fractionnaire est considérée depuis 1695 lorsque la dérivée d'ordre arbitraire a été décrite par Leibniz . Par la suite, de nombreux chercheurs ont étudié les dérivées fractionnaires et les équations différentielles fractionnaires comme Liouville, Grunwald et Riemann et au fil du temps, les mathématiciens renommés ont accordé beaucoup d'attention au calcul fractionnaire.

Cela est dû à la fois au développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire elle-même. Et par son application dans divers domaines scientifiques tels que l'électrochimie, la biologie, les sciences de la vie et les sciences de l'ingénieur.

Un autre aspect de l'étude des systèmes couplés fractionnaires est l'implication du laplacien fractionnaire et pour autant que nous le sachions, le Laplacien fractionnaire est largement répandu dans l'étude moderne des systèmes différentiels fractionnaires. Il existe plusieurs définitions, mais elles peuvent être ramenées aux suivantes :

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Il existe plusieurs technique pour montrer l'existence et parfois l'unicité de la solution mais dans la plupart des cas il est impossible de déterminer analytiquement la solution exacte des problèmes d'où le besoin d'outils de calcul approché de la solution, parmi ces outils la méthode des éléments finis.

TABLE DES MATIÈRES

La méthode des éléments finis est une technique générale pour construire des sous-espaces de dimension finie d'un espace de Hilbert V .

Dans ce travail, nous sommes concentrés sur la partie théorique de l'opérateur Laplacien fractionnaire, tels que : la définition de cet opérateur, ses propriétés, le cadre fonctionnel et les équations liées. D'autres résultats importants permettant l'approfondissement de l'étude de cet opérateur seront par ailleurs rappelés. Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats sur l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}$, nous prouvons les résultats des injections continues et compactes, et d'autres résultats.

Dans le deuxième chapitre, on applique le théorème de Lax-Milgram pour étudier l'existence et l'unicité de la solution faible du problème de Poisson non local suivant :

$$\begin{cases} (-d_x^2)^s u = f, & x \in (-L, L) \\ u \equiv 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \end{cases}$$

Dans le troisième chapitre, on applique la méthode des éléments finis de Lagrange pour les polynômes de degré un sur le problème elliptique, on termine par une illustration numérique.

Chapitre 1

Espace de Sobolev fractionnaire

Dans cette section on s'intéresse à donner la définition des espaces $W^{s,p}(\Omega)$, où $0 < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, nous prouvons les injections continue et compacte, et d'autres résultats de la régularité. Après avoir démontré ces propriétés dans le cas $0 < s < 1$, nous les étendons aux espaces $W^{s,p}(\Omega)$ pour $s \in \mathbb{R}$, et on conclut ce chapitre par le cas particulier où $p = 2$

1.1 Espace de Sobolev fractionnaire ($0 < s < 1$)

Définition 1.1. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et soient $s \in]0, 1[$, $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ tq } \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\} \quad (1.1)$$

$W^{s,p}(\Omega)$ un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\| u \|_{L^p}^p + [u]_{s,p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

avec

$$[u]_{s,p} = \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Remarque 1.1. [1] Si $s \geq 1$, la définition (1.1) ne convient pas. Supposons que Ω est convexe, tout fonction mesurable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy < +\infty$$

Chapitre 1. Espace de Sobolev fractionnaire

est une constante, et est liée strictement à :

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} (s-1)^{\frac{1}{p}} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = C \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad (1.3)$$

avec C une constante positive.

Proposition 1.1. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, nous avons alors :

$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace Banach, séparable pour tout $1 \leq p < +\infty$.

$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $1 < p < +\infty$.

$W^{s,p}(\Omega)$ est un espace uniformément convexe pour tout $1 < p < +\infty$.

1.2 Espaces Höldériennes

Définition 1.2. [2] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on note $C_b^m(\Omega)$ le sous ensemble de $C_b(\Omega)$ constituée des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sont bornés et uniformément continue sur Ω i.e

$$C_b^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) / \forall |\alpha| \leq m, \exists k_{\alpha}; \|D^{\alpha}u\|_{\infty} \leq k_{\alpha}\}$$

On le muni de la norme :

$$\|\varphi\|_{C_b^m(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}\varphi(x)|$$

l'espace $(C_b^m(\Omega), \|\cdot\|_{C_b^m(\Omega)})$ est un espace de Banach.

Définition 1.3. [2] Pour $0 < \lambda \leq 1$, on note $C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ l'espace des fonctions höldériennes sur Ω d'ordre λ , défini comme suit

$$C_b^{0,\lambda}(\Omega) = \{\varphi \in C_b(\Omega) / \exists c > 0, \forall (x, y) \in \Omega^2; |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x - y|^{\lambda}\}$$

Lorsque $\lambda = 1$ on l'appelle espace des fonctions lipschitziennes continue.

Plus généralement, nous définissons $C_b^{m,\lambda}(\Omega)$ comme

$$C_b^{m,\lambda}(\Omega) = \{\varphi \in C_b(\Omega) / \exists c > 0, \forall \alpha, |\alpha| = m, \forall (x, y) \in \Omega^2; |D^{\alpha}\varphi(x) - D^{\alpha}\varphi(y)| \leq c|x - y|^{\lambda}\}$$

On le muni par la norme :

$$\|\varphi\|_{m,\lambda} = \|\varphi\|_{C_b^m(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=m} \sup_{(x,y) \in \Omega^2 / x \neq y} \frac{|D^{\alpha}\varphi(x) - D^{\alpha}\varphi(y)|}{|x - y|^{\lambda}}.$$

Alors $(C_b^{m,\lambda}(\Omega), \|\cdot\|_{m,\lambda})$ est un espace de Banach et nous avons

$$\forall (v, \lambda), 0 < v < \lambda < 1 \implies C_b^{m,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m,v}(\Omega) \hookrightarrow C_b^m(\Omega)$$

1.2 Espaces Höldériennes

Inégalité de Hölder

[2] Soit f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ avec $1 < p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ et } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

[2] Soit f et g deux fonctions dans $L^2(\Omega)$ avec le produit f, g est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Proposition 1.2. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $0 < s < \acute{s} < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, donc nous avons

$$\|u\|_{s,p} \leq C \|u\|_{\acute{s},p} \quad \forall u \in W^{\acute{s},p}(\Omega)$$

Avec $C = C(n, p, s) \geq 1$, En particulier $W^{\acute{s},p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.

Proposition 1.3. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$, et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, alors nous avons :

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

Avec $C = C(n, p, s) \geq 1$, En particulière : $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.

N.B : $W^{1,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique.

Théorème 1.1. [1] Pour $0 < s < 1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.4. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n on pose $W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ dans $W^{s,p}(\Omega)$

Alors d'après le théorème (1.1) on a $W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$ mais en général pour $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega)$.

Il est clair que les inclusions obtenues dans proposition (1.2) et (1.3), sont vraies dans $W_0^{s,p}(\Omega)$

Théorème 1.2. (Théorème de Poincaré) [1]

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, alors il existe λ tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda [u]_{s,p} \quad \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Par conséquent si Ω est borné alors $[\cdot]_{s,p}$ est une norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalente à $\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$

Remarque 1.2. [1] pour $0 < s < 1$ et $p \in]1, +\infty[$ on définit $W^{s,p}(\Omega)$ comme dual de $W_0^{-s,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.3 Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}$

Lemme 1.1. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et $u \in W^{s,p}(\Omega)$ avec $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, s'il existe un compact $K \subset \Omega$ telle que $u \equiv 0$ dans $\Omega \setminus K$ alors le prolongement \tilde{u} défini par :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

appartient à $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\| \tilde{u} \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)}$ où C est une constante positive dépend de n, s, p, K et Ω .

Lemme 1.2. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , symétrique par rapport au cordonné x_n on pose $\Omega_+ = \{x \in \Omega : x_n > 0\}$ et $\Omega_- = \{x \in \Omega : x_n < 0\}$

Soit $u \in W^{s,p}(\Omega_+)$ avec $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$ on définit :

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(\acute{x}, x_n) & x_n \geq 0 \\ u(\acute{x}, -x_n) & x_n < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Donc $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\| \tilde{u} \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 4 \| u \|_{W^{s,p}(\Omega_+)}$

Lemme 1.3. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, et soient $u \in W^{s,p}(\Omega)$ et $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$, $0 \leq \psi \leq 1$ Alors

$$\psi u \in W^{s,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \| \psi u \|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Avec $C = C(n, s, p, \Omega)$.

Théorème 1.3. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$, avec frontière borné, et $p \in [1, +\infty[$, $s \in]0, 1[$. Alors $\forall u \in W^{s,p}(\Omega)$, $\exists \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\tilde{u}|_{\Omega} = u$ et

$$\| \tilde{u} \|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| u \|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

Avec $C = C(n, s, p, \Omega)$

Corollaire 1.1. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$, avec frontière borné, et $p \in [1, +\infty[$, $s \in]0, 1[$. Alors pour tout $u \in W^{s,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $u_n \rightarrow u$ quand $n \rightarrow \infty$ dans $W^{s,p}(\Omega)$ i.e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| u_n - u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$$

1.4 Injection de Sobolev fractionnaire

1.4 Injection de Sobolev fractionnaire

Dans cette section nous montrons les résultats des injections continue et compact dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ avec $0 < s < 1$.

Nous commençons par quelques résultats important qu'on vas les utiliser dans les preuves.

Lemme 1.4. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. On fixe $T > 1$, soit $\acute{n} \in \mathbb{Z}$ et $(a_k)_k$ suite borné non négative avec $a_k = 0$ pour tout $k \geq \acute{n}$. Alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{\frac{n-sp}{n}} T^k \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{n}} T^k$$

avec $C = C(n, s, p, T) > 0$ indépendant à \acute{n} .

Lemme 1.5. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ support compacte ; pour tout $k \in \mathbb{Z}$ soit :

$$a_k = || f |_{> 2^k} |$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \geq C \sum_{k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0} a_{k+1} a_k^{\frac{-sp}{n}} 2^{2k}$$

avec $C = C(n, s, p) > 0$

Lemme 1.6. [1] Soit $q \in [1, +\infty[$, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction mesurable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$f_n(x) := \max \{ \min \{ f(x), n \}, -n \} \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} || f_n ||_{L^q(\mathbb{R}^n)} = || f ||_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

1.4.1 Injection continue de Sobolev fractionnaire

Nous avons trois cas

premier cas : $sp < n$

Théorème 1.4. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Alors il existe une constante positive $C = C(n, s, p)$ tel que pour toute fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons :

$$|| f ||_{L^{p^*}}^{p^*} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

Chapitre 1. Espace de Sobolev fractionnaire

avec $p^* = p^*(n, s)$ "exposant critique fractionnaire", qui égale $\frac{np}{n-sp}$ i.e

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

Corollaire 1.2. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$. Alors il existe une constante positive $C = C(n, s, p)$ et pour toute fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall q \in [p, p^*]$$

avec $p^* = \frac{np}{n-sp}$ i.e

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

Théorème 1.5. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < n$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n qui satisfait les hypothèses de régularités de telle sorte, on peut prolonger les fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ vers les fonctions de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ c-à-d : Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$ avec frontière borné. Alors il existe une constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ tel que, pour toute $f \in W^{s,p}(\Omega)$ nous avons

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, p^*]$$

i.e :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

avec $p^* = \frac{np}{n-sp}$

Corollaire 1.3. [1] Sous les hypothèses du théorème précédent, et de plus on suppose que Ω est borné alors

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*]$$

avec : $p^* = \frac{np}{n-sp}$

Deuxième cas $sp = n$

Nous notons que lorsque $sp \rightarrow n$, l'exposant critique $p^* \rightarrow +\infty$, donc il n'est pas des surprises dans ce cas, si $f \in W^{s,p}$ alors $f \in L^q$ pour n'importe quel q , comme indique dans les deux théorème suivants :

Théorème 1.6. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = n$. Alors il existe une constante positive $C = C(n, s, p) > 0$ et pour toute fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{pour tout } q \in [p, +\infty[$$

i.e

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour tout } q \in [p, +\infty[$$

1.4 Injection de Sobolev fractionnaire

Théorème 1.7. [1] Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = n$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n qui satisfait les hypothèses de régularités de telle sorte, on peut prolonger les fonctions de $W^{s,p}(\Omega)$ vers les fonctions de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ c-à-d un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$ avec frontière borné. Alors il existe une constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ telle que, pour toute $f \in W^{s,p}(\Omega)$ nous avons

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

i.e

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

Corollaire 1.4. [1] Sous les hypothèses de théorème (1.7), si on suppose de plus que Ω est borné alors : $\forall f \in W^{s,p}(\Omega)$ nous avons :

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

Avec $C = C(n, s, p, \Omega)$ i.e :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$$

Troisième cas : $sp > n$

Dans cette section, nous afficherons deux propriétés de la régularité pour les fonctions dans $W^{s,p}(\Omega)$ lorsque $sp > n$ et Ω égal \mathbb{R}^n ou bien un domaine qui satisfait les résultats de régularité de prolongement.

Théorème 1.8. Soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tels que $sp > n$. Alors il existe une constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ telle que pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\|f\|_{C^{0, n-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

i.e

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{plus précisément} \quad W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^{0, n-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^n)$$

Corollaire 1.5. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$, de frontière borné, et soit $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp > n$. Alors il existe une constante $C = C(n, s, p, \Omega)$ telle que pour tout $f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ nous avons

$$\|f\|_{C^{0, n-\frac{s}{p}}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

e.i

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0, n-\frac{s}{p}}(\Omega) = C_b^{0, n-\frac{s}{p}}(\Omega)$$

1.4.2 Injection compact de Sobolev fractionnaire

Dans cette section, nous indiquons certains résultats de compacité impliquant les espaces fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ dans les domaines borné.

Théorème 1.9. [1] Soit Ω un ouvert borné, de classe $C^{0,1}$ de frontière borné, et soit

$0 < s < 1, p \in]1, +\infty[$ et $n \geq 1$. Alors nous avons

Si $sp < n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q \leq \frac{np}{n-sp}$

Si $sp = n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < +\infty$

Si $sp > n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}(\Omega)$ est compact $\forall \alpha \leq s - \frac{n}{p}$

1.5 Espace de Sobolev fractionnaire, $s > 1$

1.5.1 Espace $W^{s,p}$, $s > 1$

Définition 1.5. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ avec $s > 1$ et $p \in [1, +\infty[$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ défini par

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{[s],p}(\Omega) \text{ tq } D^\alpha u \in W^{s-[\alpha],p}(\Omega) \quad \forall \alpha, |\alpha| = [s]\}$$

avec $[s]$ est la partie entière de s .

Est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|_{W^{s-[\alpha],p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$s = [s]$, alors l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ coïncide avec l'espace de Sobolev classique. $(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach

Proposition 1.4. [1] Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$, et $p \in [1, +\infty[$ et \acute{s} et $s > 1$.

Alors si $\acute{s} \geq s$:

$$W^{\acute{s},p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

Théorème 1.10. [1]

Pour $s > 1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

- Pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $s > 1$ on pose $W^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.
- Nous avons $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.
- Tout les résultats précédent sont valable dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$. avec $s > 0$

1.6 Espace $H^s(\Omega)$

1.5.2 Injection continue et compact dans $W^{s,p}$ avec $s > 1$

De même dans le cas où $s > 1$, nous avons les résultats des injections continues et compactes.

Théorème 1.11. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe $C^{0,1}$ et de frontière borné, et Soit $s \in]1, +\infty[$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors nous avons :

Si $sp < n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p, p^*]$

Si $sp = n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty[$

Si $sp > n$ alors

Si $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{n}{p}], s-\frac{n}{p}-[s-\frac{n}{p}]}(\Omega)$

Si $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{n}{p}-1, \alpha}(\Omega) \forall \alpha < 1$

Théorème 1.12. [1] Soit Ω un ouvert borné, de classe $C^{0,1}$ de frontière borné, et soit $s > 1$, $p \in]1, +\infty[$ et $n \geq 1$. Alors nous avons

Si $sp < n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q \leq \frac{np}{n-sp}$

Si $sp = n$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < +\infty$

Si $sp > n$ alors

Si $s - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{[s-\frac{n}{p}], \alpha}(\Omega)$ est compact $\forall \alpha <$

$s - \frac{n}{p} - [s - \frac{n}{p}]$

Si $s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ nous avons $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{s-\frac{n}{p}-1, \alpha}(\Omega) \forall \alpha < 1$

1.6 Espace $H^s(\Omega)$

Dans cette section on s'intéresse le cas où $p = 2$

Définition 1.6. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , alors on définit

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega) \text{ pour } 0 < s < 1$$

Proposition 1.5. [1] le produit scalaire dans $H^s(\Omega)$ est défini par :

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy$$

Définition 1.7. [1] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , alors on définit

$$H_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : u \equiv 0 \in \mathbb{R}^n \setminus (\Omega)\}$$

1.7 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.8. [2] (*Forme linéaire continue*)

On appelle *forme linéaire* une fonctionnelle linéaire sur un espace de Hilbert V , une forme linéaire l vérifie donc les propriétés suivantes

$$\bullet l(\beta\omega) = \beta l(\omega) \quad \forall \omega \in V \quad \text{et} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$\bullet l(w_1 + w_2) = l(w_1) + l(w_2) \quad \forall w_1, w_2 \in V$$

Si de plus, il existe une constante C telle que :

$$|l(w)| \leq C \|w\|_V \quad \forall w \in V \tag{1.6}$$

on dira qu'elle est non seulement linéaire mais aussi continue sur V

Définition 1.9. [2]

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application a qui on associe à un couple $(u, w) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u, w)$ satisfaisant

$$\bullet a(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2, w) = \beta_1 a(u_1, w) + \beta_2 a(u_2, w) \quad \forall u_1, u_2, w \in V \quad \text{et} \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet a(u, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 a(u, w_1) + \beta_2 a(u, w_2) \quad \forall u, w_1, w_2 \in V \quad \text{et} \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses deux arguments.

Définition 1.10. [2] (*Forme bilinéaire continue*)

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, w)| \leq C \|u\|_V \|w\|_V \quad \forall u, w \in V \tag{1.7}$$

Définition 1.11. [2] (*Forme bilinéaire coercive*)

Une forme bilinéaire est dit coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|_V^2 \quad \forall w \in V \tag{1.8}$$

Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive.

Théorème 1.13. [2] (*Lax-Milgram*)

Soit V un espace de Hilbert et soient l et a des formes linéaire et bilinéaire continues sur V et $V \times V$. Si de plus a est coercive, alors il existe une unique solution u du problème variationnel

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in V \end{cases} \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Formulation variationnelle d'équation elliptique fractionnaire

Dans ce travail, on s'intéresse à l'équation de Poisson non locale

$$\begin{cases} (-d_x^2)^s u = f, & x \in (-L, L) \\ u \equiv 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-L, L) \end{cases} \quad (2.1)$$

telle que f est une fonction donnée dans $L^2(-L, L)$, pour tout $s \in (0, 1)$, $(-d_x^2)^s$ désigne l'opérateur de Laplace fractionnaire de dimension un, qui se définit comme l'intégrale singulière suivante :

$$(-d_x^2)^s u(x) = c_{1,s} P.V \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} dy, \quad (2.2)$$

où $c_{1,s}$ est une constante de normalisation donnée par :

$$c_{1,s} = \frac{s 2^{2s} \Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(1-s)},$$

et Γ est représenté la fonction Gamma, elle est donnée par, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$:

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{+\infty} \exp^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$.

Définition 2.1. [1] (Espace de Schwartz) espace noté \mathcal{S} sont des espaces des fonctions C^∞ ses fonctions qui décroissent rapidement, sa topologie est défini par les semi-normes suivantes

$$p_N(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^N) \sum_{|\alpha| \geq N} |D^\alpha \varphi(x)|, N = 0, 1, 2, \dots$$

Chapitre 2. Formulation variationnelle d'équation elliptique fractionnaire

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ donc

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } P_N(\varphi) < +\infty\}$$

Définition 2.2. [1] Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Nous appelons la convolution de f et g noté $f * g$ par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

tel que $y \rightarrow f(x-y)g(y)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le produit de convolution a des propriétés importantes combinées avec la suite régularisante et la transformée de Fourier.

Définition 2.3. [1] (suite régularisante). On appelle $(\rho_n)_{n \leq 1}$ suite régularisante s'il s'agit d'une suite des fonctions on \mathbb{R}^n tq

$$\rho_n \in C_{\mathbb{R}^n}^\infty, \text{supp} \rho_n \subset \overline{B(0, 1/n)}, \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(y)dy = 1 \text{ et } \rho_n \geq 0, \text{ dans } \mathbb{R}^n$$

Théorème 2.1. [1] Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors

$$\rho_n * f \rightarrow f$$

Si $n \rightarrow +\infty$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.4. (Transformation de Fourier)[1]

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ alors la transformation de Fourier est défini comme suit

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

On peut défini \mathcal{F} de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\hat{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$
cette définition est équivalent à

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi \cdot x} \varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.2. (Plancherel)[1]

Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\check{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

2.1 Laplacien fractionnaire

2.1 Laplacien fractionnaire

Dans cette section, nous allons définir laplacien fractionnaire, par la norme Gagliardo et la transformation de Fourier dans l'espace de Fourier. Nous discuterons aussi de sa relation avec le potentiel de Riesz que nous donnerons à la définition. Nous démontrerons que les définitions suivantes sont équivalentes :

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) - 2u(x) + u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(-\Delta)^s u(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}(u)(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

2.1.1 Laplacien fractionnaire par la norme Gagliardo

Soit $u \in \mathcal{S}$ et $s \in (0, 1)$, on défini $(-\Delta)^s$ comme

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s} P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = C_{n,s} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{CB_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad (2.3)$$

Où P.V est la valeur principale de Cauchy. $C_{(n,s)}$ soit une constante positive qui ne dépend que n et s, précisément donnée par :

$$C(n, s) = \pi^{2s + \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(s + n/2)}{\Gamma(-s)} \quad (2.4)$$

2.1.2 Le potentiel de Riesz

Le noyau de Riesz I_α , avec $\alpha \in (0, n)$, est défini comme

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(n, \alpha)} |x|^{\alpha-n} \quad (2.5)$$

où

$$\gamma(n, \alpha) = \Pi 2^{\frac{n}{2}-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})} \quad (2.6)$$

Le potentiel de Riesz d'une fonction donnée $f, \mathcal{I}_\alpha(f)$ est son convolution avec le noyau de Riesz

$$\mathcal{I}_\alpha(f) = I_\alpha * f(x) = \frac{1}{\gamma(n, \alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (2.7)$$

Chapitre 2. Formulation variationnelle d'équation elliptique fractionnaire

$\gamma(n, \alpha)^{-1}$ dans (2.5) est choisi pour simplifier le calcul par la transformation de Fourier.

Proposition 2.1. [1] Soit $\alpha \in (0, n)$, puis

$$\mathcal{F}(I_\alpha(x)) = |y|^{-\alpha} \quad (2.8)$$

où l'égalité aux sens du distribution.

Remarque 2.1. [1] Maintenant, nous pouvons justifier le choix du facteur constant $C(n, s)$ dans (2.3) et (2.4). Nous notons que $C_{(n,s)}$ ne dépend pas de la fonction u . Ainsi, si nous prenons une fonction u de telle sorte que pour certain $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = 0$, nous avons :

$$(-\Delta)^s u(x) = -C_{n,s} P.V \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = -C_{n,s} \gamma(n, -2s) \mathcal{I}_{-2s}(u)$$

à l'aide de la définition de $C(n, s)$ dans (1.6), on obtient

$$-\mathcal{I}_{-2s}(u) = -C_{n,s} \gamma(n, -2s) \mathcal{I}_{-2s}(u)$$

alors $C_{n,s} = \frac{1}{\gamma(n, -2s)}$

Lemme 2.1. [1] Soit $s \in (0, 1)$ et $(\Delta)^s$ l'opérateur de Laplacien fractionnaire défini en (1.6). Dans la suite, pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) - 2u(x) + u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Autres propriétés du Laplacien fractionnaire

Proposition 2.2. [1] Soit $\psi, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous avons

1. Translation : Si nous définissons $\varphi_a(x) = \varphi(x+a)$, $a \in \mathbb{R}^n$,

$$((-\Delta)^s \varphi_a)(x) = ((-\Delta)^s \varphi)(x+a), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

2. Produit :

$$(-\Delta)^s (\varphi\psi)(x) = \varphi(x)(-\Delta)^s \psi(x) + \psi(x)(-\Delta)^s \varphi(x) - C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))(\psi(x) - \psi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

3. Convolution : Si nous prenons ρ_n une suite régularisante :

$$\rho_n * ((-\Delta)^s \varphi)(x) = ((-\Delta)^s \varphi * \rho_n)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

Notez que la même chose vaut pour l'inverse de $(-\Delta)^s$

2.2 Définition de $(-\Delta)^s$ dans l'espace des distributions tempéré \mathcal{S}'

2.2 Définition de $(-\Delta)^s$ dans l'espace des distributions tempéré \mathcal{S}'

Dans cette section, on définissons le Laplacien fractionnaire d'une fonction u dans les espaces L^p . Nous rappelons le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ dans leur non local représentation dans un espace réel.

Lemme 2.2. [1] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert borné. Alors il existe un constant $C = C(n, s, \Omega) > 0$ telle que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\left| \int_{|x-y|>\xi} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \right| \leq C \frac{\|\varphi\|_{C^2(\Omega)}}{1 + |\xi|^{n+2s}}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

Par ce résultat, on a pour $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(-\Delta)^s$ est continue, et pour une constante positive $C = C(n, s, \Omega)$ on a

$$|(-\Delta)^s \varphi(x)| \leq C \frac{\|\varphi\|_{C_c^2(\Omega)}}{1 + |x|^{n+2s}}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Maintenant, on pose

$$\mathcal{L}_s^1 = \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^{n+2s}} dx < +\infty \right\}$$

Définition 2.5. [1] Soit un ouvert ensemble, comme $u \in \mathcal{L}_s^1$, la distribution $(-\Delta)^s u$ défini par :

$$\langle (-\Delta)^s u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u (-\Delta)^s \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Noter que $(-\Delta)^s u = f$ sur $\dot{D}(\Omega)$, est équivalent à la formulation faible :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u (-\Delta)^s \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Définition 2.6. [1] On défini $D^{s,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^s}}$ le complémentaire de $C_c^\infty(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert par rapport la norme

$$\|u\|_{D^{s,2}(\Omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(x) - \varphi(y))^2}{|x-y|^{n+2s}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $u \in D^{s,2}(\Omega) \subset \mathcal{L}_s^1$ satisfait

$$(-\Delta)^s u = f \quad \text{dans } \dot{D}(\Omega)$$

Chapitre 2. Formulation variationnelle d'équation elliptique fractionnaire

On obtient la formulation faible

$$\langle u, \varphi \rangle_{D^{s,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \varphi \in D(\Omega)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle_{D^{s,2}(\Omega)} &= C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \hat{u} \hat{\varphi} d\xi \end{aligned}$$

2.3 Formulation variationnelle et Existence et l'unicité de la solution faible du problème

dans cette section, nous sommes intéressés à l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (2.1)

La formulation variationnelle du problème (2.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^s(-L, L) \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \int_{-L}^L f v dx \quad \forall v \in H_0^s(-L, L) \end{cases} \quad (2.12)$$

pour tout $v \in H_0^s(-L, L)$ la forme bilinéaire :

$a(u, v) : H_0^s(-L, L) \times v H_0^s(-L, L) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donné par :

$$a(u, v) = \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy$$

ici, On désigne l'espace $H_0^s(-L, L)$:

$$H_0^s(-L, L) = \{u \in H^s(\mathbb{R}) : u = 0 \in \mathbb{R} \setminus (-L, L)\}$$

Nous rappelons l'espace Hilbert $H_0^s(-L, L)$ la fermeture de $C_c^\infty(-L, L)$

Théorème 2.3. *le problème (2.12) admet une solution faible est elle est unique.*

Preuve. *on utilise le théorème de Lax-Milgram pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (2.12)*

- *la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue*

2.3 Formulation variationnelle et Existence et l'unicité de la solution faible du problème

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \right| \\
 &\leq \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)||v(x) - v(y)|}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
 &\leq \frac{c(1, s)}{2} \|u\|_{L^2(-L, L)} \|v\|_{L^2(-L, L)} \\
 &\leq \frac{c(1, s)}{2} \|u\|_{H_0^s(-L, L)} \|v\|_{H_0^s(-L, L)}
 \end{aligned}$$

alors $a(.,.)$ est continue

- $a(.,.)$ est coercive

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
 &= \frac{c_{1,s}}{2} \|v\|_{H_0^s(-L, L)}^2
 \end{aligned}$$

Donc $a(.,.)$ est coercive

- la forme linéaire $l(v)$ est continue

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
 |l(v)| &= \left| \int_{-L}^L f v dx \right| \\
 &\leq \|f\|_{L^2(-L, L)} \|v\|_{L^2(-L, L)} \\
 &\leq C(1, s) \|f\|_{L^2(-L, L)} \|v\|_{H_0^s(-L, L)}
 \end{aligned}$$

alors la forme linéaire $l(v)$ est continue

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram le problème (2.12) admet une solution faible est elle est unique.

Chapitre 3

Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Dans ce chapitre, on décrit la méthode générale d'approximation d'une formulation variationnelle définie dans un espace de Hilbert qui servira de base pour l'élaboration de la méthode des éléments finis.

3.1 Approximation interne et système matriciel équivalent

soit V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ et la norme associée $\|\cdot\|_V$. Soient $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V et $f \in V$. On considère la formulation variationnelle générale

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_V \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (3.1)$$

L'approximation interne consiste à considérer une suite V_h de sous - espaces fermés de V de dimension finie (qui sont des espaces de Hilbert car fermés dans V). On s'intéresse alors aux problèmes approchés

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_V \end{cases} \quad (3.2)$$

la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ étant encore coercive et continue sur les sous-espaces V_h , par le théorème de Lax-Milgram, on a existence et unicité de la solution $u_h \in V_h$ du problème (3.2)

soit $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ une base de V_h .

Alors, il existe $u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R}$ tels que la solution $u_h \in V_h$ de (1.2) s'écrit

3.2 Convergence de la méthode

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j^h \phi_j.$$

Pour que l'égalité $a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_V$ ait lieu pour tout $v_h \in V_h$, il faut et il suffit qu'elle ait lieu pour tous les vecteurs de base ϕ_1, \dots, ϕ_N . En utilisant la bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$, le problème (3.2) s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1^h, \dots, u_N^h \in \mathbb{R}^N, \text{ tels que :} \\ \forall i = 1, \dots, N, \sum_{j=1}^N u_j^h a(\phi_j, \phi_i) = \langle f, \phi_i \rangle_V \end{cases} \quad (3.3)$$

En posant $U_h := (u_1^h, \dots, u_N^h)^T \in \mathbb{R}^N$, on obtient que le problème (3.2) est équivalent au problème matriciel $\mathcal{A}_h U_h = b_h$, où $\mathcal{A}_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $b_h \in \mathbb{R}^N$ sont définis par $\mathcal{A}_h := (a(\phi_j, \phi_i))_{i \leq j \leq N}$ et $b_h := (\langle f, \phi_i \rangle_V)_{i \leq j \leq N}$ (1.3)

Pour la suite, on note m et M les constantes de coercivité et de continuité de $a(\cdot, \cdot)$, i.e.

$$\forall u \in V, a(u, u) \geq m \|u\|_V^2, \quad (1.4)$$

et

$$\forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V. \quad (1.5)$$

Proposition 3.1. [3] *On suppose de plus que $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique. Alors, la matrice \mathcal{A}_h définie par (1.3) est définie positive. En particulier, k_h est inversible et donc le système $\mathcal{A}_h U_h = b_h$ admet une solution unique $U_h \in \mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Par définition de k_h , il est clair que si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors \mathcal{A}_h aussi. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$.

On pose $\tilde{\xi} := \xi_1 \phi_1 + \dots + \xi_N \phi_N \in V_h$. puisque $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et coercive, on a

$$\mathcal{A}_h \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a(\phi_i, \phi_j) \xi_i \xi_j = \sum_{i,j=1}^N a(\xi_i \phi_i, \xi_j \phi_j) = a(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \geq m \|\tilde{\xi}\|_V^2 > 0$$

donc \mathcal{A}_h est définie positive.

3.2 Convergence de la méthode

Il reste à montrer que la solution $u_h \in V_h$ de (1.2) est bien une approximation de u . Pour cela, on utilise le résultat suivant

Lemme 3.1. [3] *(Lemme de Céa)*

Soit $u \in V$ la solution de (1.1) et $u_h \in V_h$ la solution de (1.2), alors on a

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où m et M sont donnés par (1.4) et (1.5).

Démonstration :

Soit w_h , en prenant w_h comme fonction test dans (1.1) et (1.2) on obtient

$$a(u, w_h) = (f, w_h)_V = a(u_h, w_h)$$

d'où, par bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$, $a(u - u_h, w_h) = 0$. Soit $v_h \in V_h$, alors $w_h := v_h - u_h \in V_h$ donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} m \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V, \end{aligned}$$

donc on a

$$\forall v_h \in V_h, \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_V$$

Ce qui donne le résultat .

Théorème 3.1. [3] (*Théorème de convergence*) .On suppose qu'il existe un sous-espace v de V dense dans V tel qu'il existe une application linéaire r_h de v dans V_h vérifiant

$$\forall v \in v, \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\|_V = 0 \quad (2.1)$$

L'application r_h est appelée **opérateur d'interpolation** de V sur V_h . alors ,la solution $u_h \in V_h$ de (1.2) converge vers la solution $u \in V$ de (1.1) ,au sens où on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V \quad (2.2)$$

Remarque 3.1. [3] *Le point important du Théorème de convergence est l'existence d'un opérateur d'interpolation .Celle-ci n'est pas immédiate et suivant les espaces de Hilbert V et V_h considérés, il est nécessaire de montrer l'existence de cet opérateur .On appellera les résultats de ce type des **lemmes d'interpolation** .Le théorème de convergence est l'analogue du théorème de Lax pour la méthode des différences finies.Ici la notion de stabilité correspond à la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et la notion de consistance correspond au lemme l'interpolation .*

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque V est dense ,il existe $v \in V$ tel que $\|u - v\|_V \leq \varepsilon$. De plus, l'existence l'opérateur d'interpolation vérifiant (2.1) entraîne qu'il existe $h_0 > 0$ tel que si $h \leq h_0$ alors $\|v - r_h v\|_V \leq \varepsilon$. puisque $r_h v_h \in V_h$, on a d'après le lemme de Céa

3.3 Approximation des élément finis du problème elliptique

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_v &\leq \frac{M}{m} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_v \leq \frac{M}{m} \|u - r_h v\|_v \\ &\leq \frac{M}{m} \|u - v\|_v + \frac{M}{m} \|v - r_h v\|_V \leq \frac{2M}{m} \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat

en résumé l'approximation variationnelle consiste à construire des sous-espace V_h de V dont on détermine une base $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ pour aboutir au système matriciel $\mathcal{A}_h U_h = b_h$. Pour avoir convergence de la méthode et aboutir à un système matriciel simple, il faut que l'espace V_h vérifie

1. qu'il existe un sous-espace dense V sur lequel est défini un opérateur d'interpolation r_h vérifiant (2.1),
2. qu'il existe une base $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ telle que la résolution du système matriciel $\mathcal{A}_h U_h = b_h$ soit économique (typiquement que la matrice \mathcal{A}_h soit creuse).

la méthode des éléments finis repose sur le choix d'espace V_h constitués de fonctions continues localement polynomiales et qui vérifient les deux points précédents.

3.3 Approximation des élément finis du problème elliptique

Afin de résoudre numériquement (2.1), nous développerons un schéma d'éléments finis sur un maillage uniforme.

A cet effet, rappelons tout d'abord la formulation variationnelle associée à notre problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^s(-L, L) \text{ telle que :} \\ \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy = \int_{-L}^L f v dx, \quad \forall v \in H_0^s(-L, L) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Introduisons une partition de l'intervalle $(-L, L)$ comme suit :

$$-L = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N+1} = L$$

avec $x_{i+1} = x_i + h, i = 0, \dots, N$, on appelle \mathbf{m} le maillage composé par les points $x_i : i = 1, \dots, N$, tandis que l'ensemble des points limites est indiqué $\mathbf{m} := \{x_0, x_{N+1}\}$.

Maintenant, définissons $K_i := [x_i, x_{i+1}]$ et considérons l'espace discret

$$V_h := \{v \in H_0^s(-L, L) / v|_{K_i} \in P^1\}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Ou P^1 est l'espace des fonctions linéaires continues . Par conséquent, on approchons (2.1) avec le problème discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que :} \\ \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u_h(x) - u_h(y))(v_h(x) - v_h(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy = \int_{-L}^L f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

Si maintenant nous indiquons avec $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ une base de V_h , il sera suffisant que est satisfaite pour toutes les fonctions de la base, puisque n'importe quel élément de V_h , est une combinaison linéaire d'eux. Alors le problème prend la forme suivante :

$$\frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(u_h(x) - u_h(y))(\phi_i(x) - \phi_i(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy = \int_{-L}^L f v_h dx \quad i = 1, \dots, N \quad (3.5)$$

Clairement, de puis $u_h \in V_h$, nous avons

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

Où les coefficients u_j ont priori sont inconnus. De cette façon ,(3.5) est réduit pour résoudre le système linéaire $\mathcal{A}_h u = F$, où la matrice de rigidité $\mathcal{A}_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ a des composants

$$a_{i,j} = \frac{c_{1,s}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))(\phi_j(x) - \phi_j(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \quad (3.6)$$

Alors que le vecteur $F \in \mathbb{R}^N$ est donné par $F = (F_1, \dots, F_N)$ avec

$$F_i = \langle f, \phi_i \rangle = \int_{-L}^L f \phi_i dx \quad i = 1, \dots, N$$

De plus, la base $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ que nous emploierons est la classique dans laquelle chacun ϕ_i est la fonction tente avec $supp(\phi_i) = (x_{i-1}, x_{i+1})$ et vérifie $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. En particulier, pour $x \in x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ la fonction de la base est explicitement définie comme (voir Fig.(3.1))

$$\phi_i(x) = 1 - \frac{|x - x_i|}{h} \quad (3.7)$$

Décrivons maintenant notre algorithme. Avant cela, nous ferons les commentaires préliminaires suivants.

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

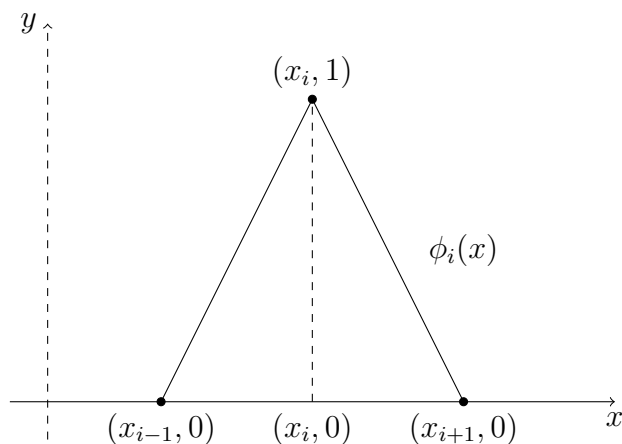


FIGURE 3.1 – Fonction de base $\phi_i(x)$ sur son support (x_{i-1}, x_{i+1}) .

Remarque 3.2. [4] Les faits suivants méritent d'être soulignés :

1. Pour notre implémentation, on utilise des éléments P^1 . En fait, En effet, comme nous l'avons mentionné précédemment, dans ce cas, l'espace $H_0^s(-1, 1)$ coïncide avec $H^s(-1, 1)$, avec équivalence des normes. De ce fait, il n'est pas nécessaire que les fonctions discrètes v_h disparaissent sur la frontière pour avoir une méthode conforme. Par contre, une base P^1 est en effet nécessaire lorsque $s > 1/2$. Par conséquent, par souci de cohérence, et pour ne pas avoir à développer deux méthodes séparées, nous avons décidé d'utiliser des éléments P^1 pour tout $s \in (0, 1)$

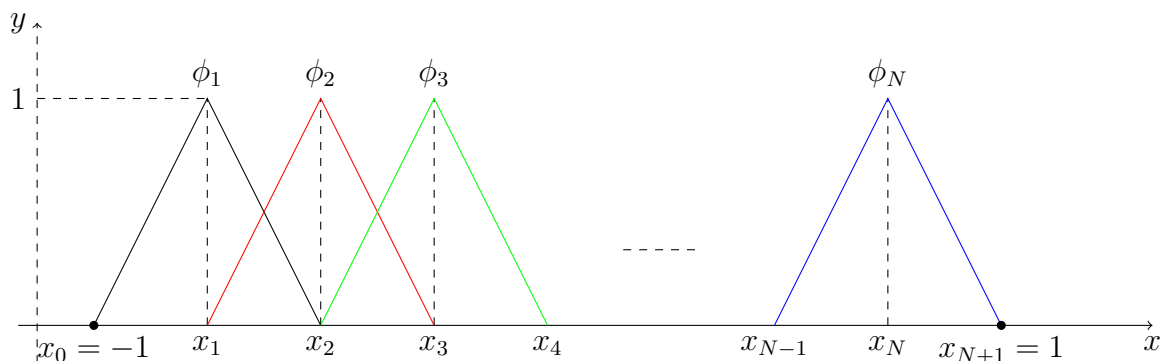


FIGURE 3.2 – Fonctions de base $\phi_i(x)$ sur tout l'intervalle $(-L, L)$.

2. La constante $c_{1,s}$ dans la définition du laplacien fractionnaire est commune à toutes les entrées de la matrice. Par souci de simplicité, nous laisserons tomber cette constante dans les calculs suivants.

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

3. Il est évident d'après la définition (3.6) que \mathcal{A}_h est symétrique. Par conséquent, dans notre algorithme, nous n'aurons que les valeurs $a_{i,j}$ avec $j \geq i$.

4. En raison de la nature non locale du problème, la matrice \mathcal{A}_h est pleine. Cependant, lors du calcul de ses composantes, nous rencontrerons de nombreuses simplifications, dues au fait que $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$ pour $j = i + 2$.

5. En calculant les valeurs $a_{i,j}$, nous ne travaillerons que sur la maille \mathcal{M} , sans considérer les points de l'ensemble $\partial\mathcal{M}$. De cette façon, on assurera que les fonctions de base ϕ_i satisfont les conditions de Dirichlet zéro. En d'autres termes, dans notre approximation EF, nous ne considérons que les fonctions de ϕ_1 à ϕ_N . Au lieu de cela, si nous considérons les points x_0 et x_{N+1} , nous devrions introduire dans notre discrétisation les fonctions de base ϕ_0 et ϕ_{N+1} , qui prennent la valeur 1 à la frontière, ce qui ne serait pas cohérent avec le problème continu pour $s > 1/2$. La figure (3.2) fournit une explication graphique de cette dernière discussion.

ON commençons maintenant à construire la matrice de rigidité \mathcal{A}_h . Cela se fera en trois étapes, puisque les valeurs de la matrice peuvent être calculées en faisant la différentiation de la matrice. de la matrice peuvent être calculées en différenciant trois régions bien définies : le triangle supérieur, correspondant à $j \geq i + 2$; la diagonale supérieure correspondant à $j = i + 1$; et la diagonale correspondant à $j = i$ (voir figure(3.3)).

En fait, comme nous le verrons au cours de nos calculs, dans chacune de ces régions, Les intersections entre les supports des fonctions de base sont différentes, ce qui génère des valeurs différentes de la forme bilinéaire. Dans ce qui suit, nous présenterons brièvement quelles seront les contributions à la matrice à chacune de ces trois étapes, en incluant les calculs complets dans une annexe à la fin du document.

Étape 1 : $j \geq i+2$. Comme nous l'avons mentionné dans la remarque(3.1,3), dans ce cas, nous avons $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$ (voir également la figure(3.4)).

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

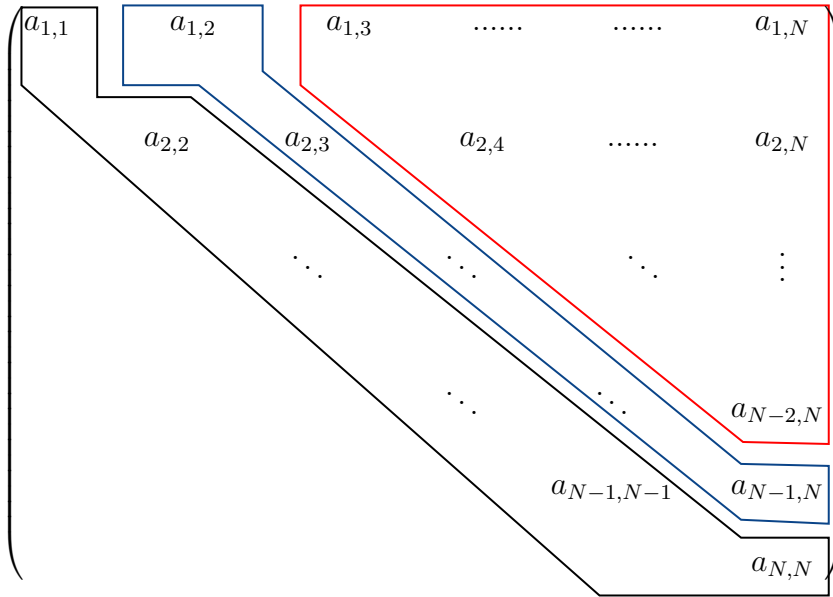


FIGURE 3.3 – Structure de la matrice de rigidité \mathcal{A}_h .

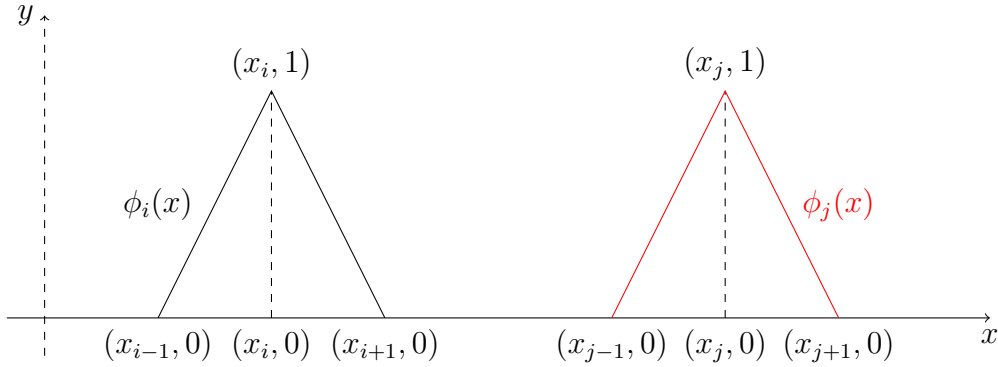


FIGURE 3.4 – Fonctions de base $\phi_i(x)$ et $\phi_j(x)$ pour $j \geq i + 2$. Dans ce cas, les supports sont disjoints.

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))(\phi_j(x) - \phi_j(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
 &= \int_{x_{j+1}}^{+\infty} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy + \int_{x_{j+1}}^{+\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + \int_{x_{j+1}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \dots dx dy \\
 &+ \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \dots dx dy \\
 &+ \int_{-\infty}^{x_{j-1}} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + \int_{-\infty}^{x_{j-1}} \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \dots dx dy
 \end{aligned}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Par conséquent, (3.6) se réduit à calculer uniquement l'intégrale :

$$a_{i,j} = -2 \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)\phi_j(y)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \quad (3.8)$$

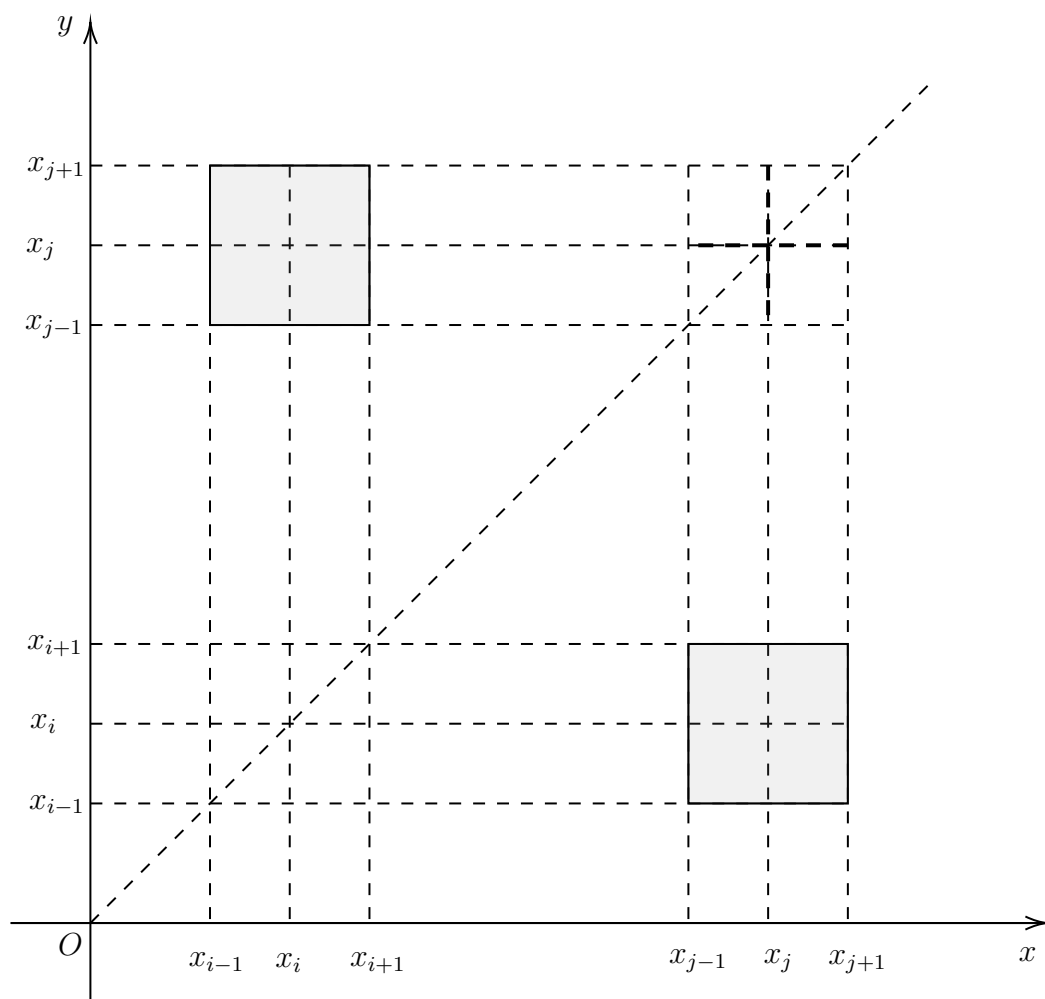


FIGURE 3.5 – Interactions entre la fonction de base ϕ_i et ϕ_j lorsque $j \geq i + 2$.

Dans la figure (3.5), nous donnons un schéma de la région d'interaction (surlignée en gris) entre les fonctions de base dans ce cas. Ce sont les seules régions dans lesquelles (3.8) sera différente de zéro. Maintenant, compte tenu

3.3 Approximation des élément finis du problème elliptique

de la définition de la fonction de base (3.7), l'intégrale (3.8) devient

$$a_{i,j} = -2 \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x - x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y - x_j|}{h}\right)}{|x - y|^{1+2s}} dx dy$$

On utilise le changement de variables suivant :

$$\frac{|x - x_i|}{h} = \hat{x}, \quad \frac{|y - x_j|}{h} = \hat{y} \quad (3.9)$$

Donc on a $dx = h d\hat{x}$ et $dy = h d\hat{y}$.

Ensuite, en réécrivant (avec quelques abus de notations puisqu'il n'y a pas de confusion possible) $\hat{x} = x$ et $\hat{y} = y$, on obtient

$$a_{i,j} = -2h^{1-2s} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1 - |x|)(1 - |y|)}{|x - y + i - j|^{1+2s}} dx dy \quad (3.10)$$

L'intégrale (3.10) peut être calculée explicitement de la manière suivante.

Tout d'abord, pour simplifier la définissons $k = j - i$. Alors Nous avons :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= -2h^{1-2s} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1 - |x|)(1 - |y|)}{|x - y + i - j|^{1+2s}} dx dy = -2h^{1-2s} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(1 - |x|)(1 - |y|)}{|x - y - k|^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - x)(1 - y)}{(y - x - k)^{1+2s}} dx dy - 2h^{1-2s} \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{(1 + x)(1 - y)}{(y - x - k)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{(1 - x)(1 + y)}{(y - x - k)^{1+2s}} dx dy - 2h^{1-2s} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{(1 - x)(1 - y)}{(y - x - k)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \end{aligned}$$

Au début on va calcule B_1

$$\begin{aligned} B_1 &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1 - x)(1 - y)}{(y - x + k)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(y - x + k)^{1+2s}} dx dy - 2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-x}{(y - x + k)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-y}{(y - x + k)^{1+2s}} dx dy - 2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(y - x + k)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} (B_1^1 + B_1^2 + B_1^3 + B_1^4) \end{aligned}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

calcul de B_1^1

$$\begin{aligned}
 B_1^1 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{-1}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2s} \frac{1}{(y-x+k)^{2s}} \Big|_0^1 \right) dy = \frac{1}{2s} \left(\int_0^1 \frac{1}{(y-1+k)^{2s}} dy - \int_0^1 \frac{1}{(y+k)^{2s}} dy \right) \\
 &= \frac{1}{2s} \left(\frac{1}{(1-2s)} \frac{1}{(y-1+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 - \frac{1}{(1-2s)} \frac{1}{(y+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left[\frac{2}{(k)^{2s-1}} - \frac{1}{(k-1)^{2s-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2s-1}} \right]
 \end{aligned}$$

calcul de B_1^2

$$B_1^2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-x}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{-x}{(y-x+k)^{1+2s}} dx \right) dy$$

dans ce cas on utilise l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
 B_1^2 &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{2s} \frac{x}{(y-x+k)^{2s}} \Big|_0^1 - \frac{-1}{2s} \int_0^1 \frac{1}{(y-x+k)^{2s}} dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2s} \left(\frac{-1}{(y-1+k)^{2s}} - \int_0^1 \frac{-1}{(y-x+k)^{2s}} dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{2s} \left(\int_0^1 \frac{-1}{(y-1+k)^{2s}} dy - \frac{1}{(1-2s)} \left(\int_0^1 \frac{1}{(y-1+k)^{2s-1}} dy - \int_0^1 \frac{1}{(y+k)^{2s-1}} dy \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2s} \left(-\frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{1}{(k)^{2s-1}} - \frac{1}{(k-1)^{2s-1}} + \frac{1}{(2-2s)} \left(\frac{1}{(y-1+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{(y+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 \right) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left[\frac{1}{(k-1)^{2s-1}} - \frac{1}{(k)^{2s-1}} - \frac{1}{(2-2s)} \left(\frac{2}{(k)^{2s-2}} - \frac{1}{(k+1)^{2s-2}} - \frac{1}{(k-1)^{2s-2}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

calcul de B_1^3

$$\begin{aligned}
 B_1^3 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{-y}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy = \int_0^1 y \int_0^1 \frac{-1}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy \\
 &= \int_0^1 y \left(\frac{-1}{2s} \frac{1}{(y-x+k)^{2s}} \Big|_0^1 \right) dy = \frac{1}{2s} \left(\int_0^1 \frac{y}{(y+k)^{2s}} dy - \int_0^1 \frac{y}{(y-1+k)^{2s}} dy \right)
 \end{aligned}$$

3.3 Approximation des élément finis du problème elliptique

on utilise l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}
B_1^3 &= \frac{1}{2s} \left(\frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{y}{(y+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(y+k)^{2s-1}} dy \right) \right) \\
&+ \frac{1}{2s} \left(-\frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{y}{(y-1+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(y-1+k)^{2s-1}} dy \right) \right) \\
&= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{1}{(k+1)^{2s-1}} - \frac{1}{(2-2s)} \frac{1}{(y+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{(k)^{2s-1}} + \frac{1}{(2-2s)} \frac{1}{(y-1+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left[\frac{1}{(k+1)^{2s-1}} - \frac{1}{(k)^{2s-1}} + \frac{1}{(2-2s)} \left(\frac{2}{(k)^{2s-2}} - \frac{1}{(k+1)^{2s-2}} - \frac{1}{(k-1)^{2s-2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

calcul de B_1^4

$$B_1^4 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(y-x+k)^{1+2s}} dx dy = \int_0^1 -y \left(\frac{-x}{(y-x+k)^{1+2s}} dx \right) dy$$

on intégrons par partie plusieurs fois :

$$\begin{aligned}
B_1^4 &= \int_0^1 -y \left(\frac{-1}{2s} \frac{x}{(y-x+k)^{2s}} \Big|_0^1 - \frac{-1}{2s} \int_0^1 \frac{1}{(y-x+k)^{2s}} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{2s} \int_0^1 y \left(\frac{1}{(y-1+k)^{2s}} + \frac{1}{1-2s} \frac{1}{(y-x+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 \right) dy \\
&= \frac{1}{2s} \left(\int_0^1 \frac{y}{(y-1+k)^{2s}} dy + \frac{1}{(1-2s)} \left(\int_0^1 \frac{y}{(y-1+k)^{2s-1}} dy - \int_0^1 \frac{y}{(y+k)^{2s-1}} dy \right) \right) \\
&= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{y}{(y-1+k)^{2s-1}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(y-1+k)^{2s-1}} dy \right. \\
&+ \frac{1}{(2-2s)} \left[\frac{y}{(y-1+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(y-1+k)^{2s-2}} dy - \frac{y}{(y+k)^{2s-2}} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(y+k)^{2s-2}} dy \right] \\
&= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{1}{(k)^{2s-1}} + \frac{1}{(2-2s)} \left(\frac{1}{(k)^{2s-2}} + \frac{1}{(k)^{2s-2}} - \frac{1}{(k+1)^{2s-2}} \right) \right. \\
&+ \frac{1}{(3-2s)} \left(-\frac{1}{(k)^{2s-3}} + \frac{1}{(k-1)^{2s-3}} + \frac{1}{(k+1)^{2s-3}} - \frac{1}{(k)^{2s-3}} \right) \\
&= \frac{1}{2s} \frac{1}{(1-2s)} \left(\frac{1}{(k)^{2s-1}} + \frac{1}{(2-2s)} \left(\frac{2}{(k)^{2s-2}} - \frac{1}{(k+1)^{2s-2}} \right) \right. \\
&+ \frac{1}{(3-2s)} \left(\frac{1}{(k-1)^{2s-3}} + \frac{1}{(k+1)^{2s-3}} - \frac{2}{(k)^{2s-3}} \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$B^1 = -2h^{1-2s}(B_1^1 + B_1^2 + B_1^3 + B_1^4)$$

$$B^1 = \frac{1}{4s(1-2s)} \left[2(k)^{1-2s} - \frac{(k+1)^{2s-2} - (k-1)^{2s-2}}{(1-s)} - \frac{2(k)^{2s-3} - (k+1)^{2s-3} - (k-1)^{2s-3}}{(1-s)(3-2s)} \right]$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

De la même manière, on calcule chacun B_i , $i = 2, 3, 4$, alors nous avons :

$$B^2 = \frac{1}{4s(1-2s)} \left[-2(k)^{1-2s} - \frac{2(k+1)^{2s-2} - 2(k)^{2s-2}}{(1-s)} - \frac{2(k+1)^{2s-3} - (k)^{2s-3} - (k+2)^{2s-3}}{(1-s)(3-2s)} \right]$$

$$B^3 = \frac{1}{4s(1-2s)} \left[-2(k)^{1-2s} - \frac{2(k)^{2s-2} - 2(k-1)^{2s-2}}{(1-s)} - \frac{2(k-1)^{2s-3} - (k)^{2s-3} - (k-2)^{2s-3}}{(1-s)(3-2s)} \right]$$

$$B^4 = \frac{1}{4s(1-2s)} \left[2(k)^{1-2s} - \frac{(k+1)^{2s-2} - (k-1)^{2s-2}}{(1-s)} - \frac{2(k)^{2s-3} - (k-1)^{2s-3} - (k+1)^{2s-3}}{(1-s)(3-2s)} \right]$$

et comme

$$a_{i,j} = -2h^{1-2s}(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$$

Donc On obtient

$$a_{i,j} = -h^{1-2s} \frac{4(k+1)^{(3-2s)} + 4(k-1)^{(3-2s)} - 6(k)^{(3-2s)} - (k+2)^{(3-2s)} - (k-2)^{(3-2s)}}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)} \quad (3.11)$$

Nous remarquons que, lorsque $s = 1/2$, le numérateur et le dénominateur de l'expression ci-dessus sont nuls. Ainsi, dans ce cas particulier, il ne serait pas possible d'introduire la valeur que nous venons de rencontrer dans notre code.

Néanmoins, cette difficulté peut être surmontée de deux façons au moins :
1. en fixant $s = 1/2$ dans B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, avant de calculer ces intégrales ;
2. en calculant la limite $s \rightarrow 1/2$ dans(3.10).

Cependant, comme nous avons déjà les expressions de $a_{i,j}$ pour un s général, la seconde approche est en fait directe et plus rapide. En effet, nous pouvons facilement calculer

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \frac{1}{2}} -h^{1-2s} \frac{4(k+1)^{(3-2s)} + 4(k-1)^{(3-2s)} - 6(k)^{(3-2s)} - (k+2)^{(3-2s)} - (k-2)^{(3-2s)}}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)} \\ = -4(k+1)^2 \log(k+1) - 4(k-1)^2 \log(k-1) + 6k^2 \log(k) \\ + (k+2)^2 \log(k+2) + (k-2)^2 \log(k-2) \end{aligned}$$

Étape 2 : $j = i + 1$. C'est le cas le plus lourd, car c'est celui qui présente le plus d'interactions entre les fonctions de base (voir Fig. (3.6)).

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

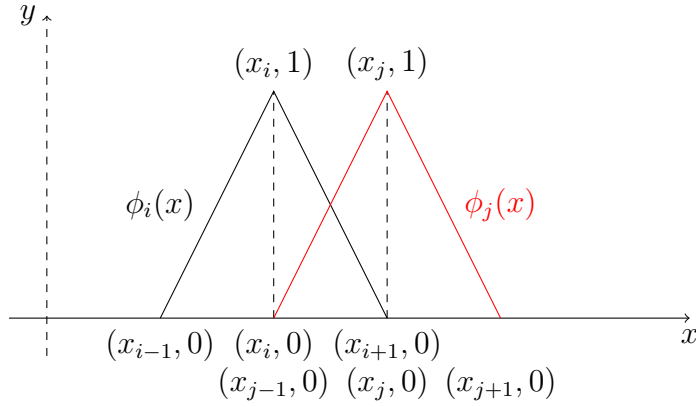


FIGURE 3.6 – Fonctions de base $\phi_i(x)$ et $\phi_{i+1}(x)$. Dans ce cas, l'intersection des supports est l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

D'après (3.6), et en utilisant la symétrie de l'intégrale par rapport à la bissectrice $y = x$, nous avons

$$\begin{aligned}
 a_{i,i+1} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))(\phi_{i+1}(x) - \phi_{i+1}(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
 &= \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy + 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dots dx dy + 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_i} \dots dx dy \\
 &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dots dx dy + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{-\infty}^{x_i} \dots dx dy + \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{x_i} \dots dx dy \\
 &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6
 \end{aligned}$$

Dans la figure (3.7), nous donnons un schéma des régions d'interactions entre les fonctions de base ϕ_i et ϕ_{i+1} éclairant le domaine d'intégration du Q_i . Les régions en gris sont celles qui produisent une contribution à $a_{i,i+1}$, tandis que dans les régions en blanc, les intégrales seront nulles. Calculons maintenant les termes $Q_i, i = 1, \dots, 6$, séparément.

Calcul de Q_1 et Q_6 . Puisque $\phi_i = 0$ sur le domaine d'intégration, on peut facilement vérifier que $Q_1 = Q_6 = 0$. Ceci n'est pas surprenant puisque, d'après la figure A2, ces régions d'intégration sont en dehors de la région d'interaction des fonctions de base.

Calcul de Q_2 et Q_5 :

Remarquez tout d'abord qu'en raison de la symétrie (voir figure (3.7)), nous avons $Q_2 = Q_5$. De plus, en raison des interactions des fonctions de base, nous voyons que

$$Q_2 = 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)(\phi_{i+1}(x) - \phi_{i+1}(y))}{|x - y|^{1+2s}} dx dy$$

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

obtenons les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i(x) \phi_{i+1}(x) \left(\int_{x_{i+1}}^{+\infty} \frac{dy}{|x-y|^{1+2s}} \right) dy - 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x) \phi_{i+1}(y)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\
&= \frac{1}{s} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|x-x_{i+1}|}{h}\right)}{(x_{i+1}-x)^{2s}} dx \\
&\quad - 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y-x_{i+1}|}{h}\right)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\
&= Q_2^1 + Q_2^2
\end{aligned}$$

Les deux intégrales ci-dessus peuvent être calculées explicitement. En effet, en employant le changement de variables

$$\frac{x_{i+1}-x}{h} = \hat{x}$$

de plus

$$1 - \frac{x-x_i}{h} = \frac{h-x+x_i}{h} = \frac{x_{i+1}-x_i-x+x_i}{h} = \frac{x_{i+1}-x}{h} = \hat{x}$$

puis en renommant $\hat{x} = x$, Q_2^1 devient :

$$\begin{aligned}
Q_2^1 &= \frac{h^{1-2s}}{s} \int_0^1 x^{1-2s} (1-x) dx \\
&= \frac{h^{1-2s}}{s} \left(\int_0^1 x^{1-2s} dx - \int_0^1 x^{2-2s} dx \right) \\
&= \frac{h^{1-2s}}{s} \left(\frac{1}{2-2s} x^{2-2s} \Big|_0^1 - \frac{1}{3-2s} x^{3-2s} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{h^{1-2s}}{s} \left(\frac{1}{2-2s} - \frac{1}{3-2s} \right) \\
&= \frac{h^{1-2s}}{s(2-2s)(3-2s)}
\end{aligned}$$

Pour calculer Q_2^2 , on utilise le changement de variable (3.9), alors on obtient :

$$\begin{aligned}
Q_2^2 &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)(1-y)}{(y-x+1)^{1+2s}} dx dy \\
&= -2h^{1-2s} B_1 \quad \text{avec } K = 1 \\
&= h^{1-2s} \frac{2^{2-2s} + s - 2}{s(1-s)(3-2s)}
\end{aligned}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Donc

$$Q_2 = Q_2^1 + Q_2^2 = h^{1-2s} \frac{2^{2-2s} + s - 3}{s(1-s)(3-2s)}$$

Calcul de Q_3

Dans ce cas, nous prenons simplement en compte les intervalles dans lesquels les fonctions de base sont supportées, de sorte que nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_3 &= -2 \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)\phi_{i+1}(y)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\ &= \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y-x_{i+1}|}{h}\right)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right) \left(1 - \frac{|y-x_{i+1}|}{h}\right)}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable (3.9), et nous obtenons

$$\begin{aligned} Q_3 &= -2h^{1-2s} \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{(1+x)(1-y)}{(y-x+1)^{1+2s}} dx dy \\ &= -2h^{1-2s} B_2 \quad \text{avec } k = 1 \end{aligned}$$

donc

$$Q_3 = h^{1-2s} \frac{13 - 5 \cdot 2^{3-2s} + 3^{3-2s} + s(2^{4-2s} - 14) + 4s^2}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}$$

Calcul de Q_4 :

Dans ce cas, nous sommes à l'intersection des supports de ϕ_i et ϕ_{i+1} . Par conséquent, nous avons

$$Q_4 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))(\phi_{i+1}(x) - \phi_{i+1}(y))}{|x-y|^{1+2s}} dx dy$$

De plus, nous remarquons que, cette fois-ci, il est possible que $x = y$, ce qui signifie que Q_4 pourrait être une intégrale singulière.

Pour faire face à cette difficulté, nous allons exploiter la définition explicite de la fonction de base. (voir aussi Fig. (3.8))

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= 1 - \frac{x-x_i}{h}, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \\ \phi_{i+1}(x) &= 1 - \frac{x_i-x}{h}, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \end{aligned}$$

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

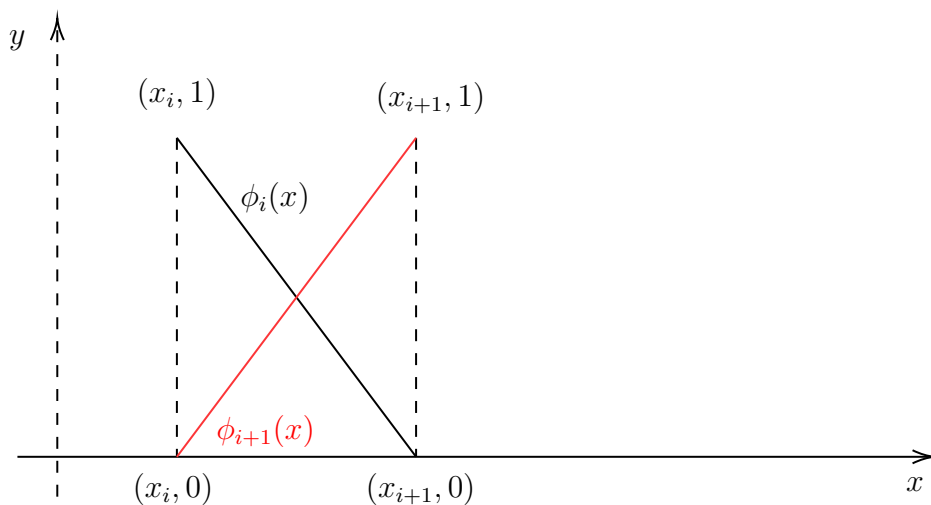


FIGURE 3.8 – Fonctions $\phi_i(x)$ et $\phi_{i+1}(x)$ sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}) .

Par conséquent,

$$(\phi_i(x) - \phi_i(y))(\phi_{i+1}(x) - \phi_{i+1}(y)) = \left(\frac{y-x}{h}\right) \left(\frac{x-y}{h}\right)$$

toujours on utilise le changement de variable (3.9) et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} Q_4 &= -h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^{1-2s} dx dy \\ &= -h^{1-2s} \left(\int_0^1 \int_0^x (x-y)^{1-2s} dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y-x)^{1-2s} dy dx \right) \\ &= h^{1-2s} \left(-\int_0^1 \int_0^x -(x-y)^{1-2s} dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y-x)^{1-2s} dy dx \right) \\ &= h^{1-2s} \frac{1}{2-2s} \left(\int_0^1 (y-x)^{2-2s} \Big|_0^x dx - \int_0^1 (x-y)^{2-2s} \Big|_x^1 dx \right) \\ &= h^{1-2s} \frac{1}{2-2s} \left(\int_0^1 x^{2-2s} dx - \int_0^1 (1-x)^{2-2s} dx \right) \\ &= h^{1-2s} \frac{1}{2-2s} \frac{1}{3-2s} \left(x^{3-2s} \Big|_0^1 - (1-x)^{3-2s} \Big|_0^1 \right) \\ &= h^{1-2s} \frac{1}{2-2s} \frac{1}{3-2s} (2) = h^{1-2s} \frac{2}{2(1-s)(3-2s)} \\ &= \frac{h^{1-2s}}{(1-s)(3-2s)} \end{aligned}$$

Conclusion. Les éléments $a_{i,i+1}$ sont maintenant donnés par la somme $2Q_2 + Q_3 + Q_4$, selon les valeurs correspondantes que nous avons calculées.

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

En particulier, nous avons

$$a_{i,i+1} = h^{1-2s} \frac{3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}$$

si $s \neq 1/2$. Si $s = 1/2$, au contraire, on a

$$a_{i,i+1} = \lim_{s \rightarrow 1/2} h^{1-2s} \frac{3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)} = 9 \ln 3 - 16 \ln 2$$

Étape 3 : $j = i$. En dernier lieu, nous remplissons la diagonale de la matrice $\mathcal{A}h$, qui rassemble les valeurs correspondant au cas $\phi_i(x) = \phi_j(x)$ (voir Fig. (3.9)).

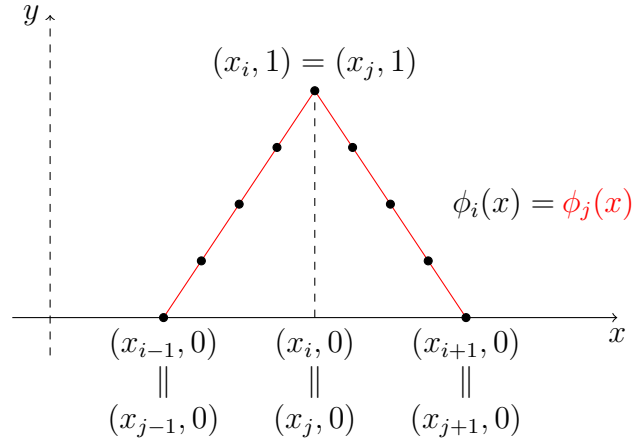


FIGURE 3.9 – Fonctions de base $\phi_i(x)$ et $\phi_j(x)$. Dans ce cas, les deux fonctions coïncident.

Nous avons :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\ &= \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy + 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \dots dx dy \\ &+ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + 2 \int_{x_{-\infty}}^{x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \dots dx dy + \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \dots dx dy \\ &+ \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \dots dx dy \\ &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{aligned}$$

Dans la figure ((3.10)), nous donnons un schéma des régions d'interactions entre les fonctions de base $\phi_i(x)$ et $\phi_i(y)$ éclairant le domaine d'intégration du

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

R_i . Les régions en gris sont celles qui produisent une contribution à $a_{i,i}$, tandis que sur les régions en blanc les intégrales seront nulles. Calculons maintenant

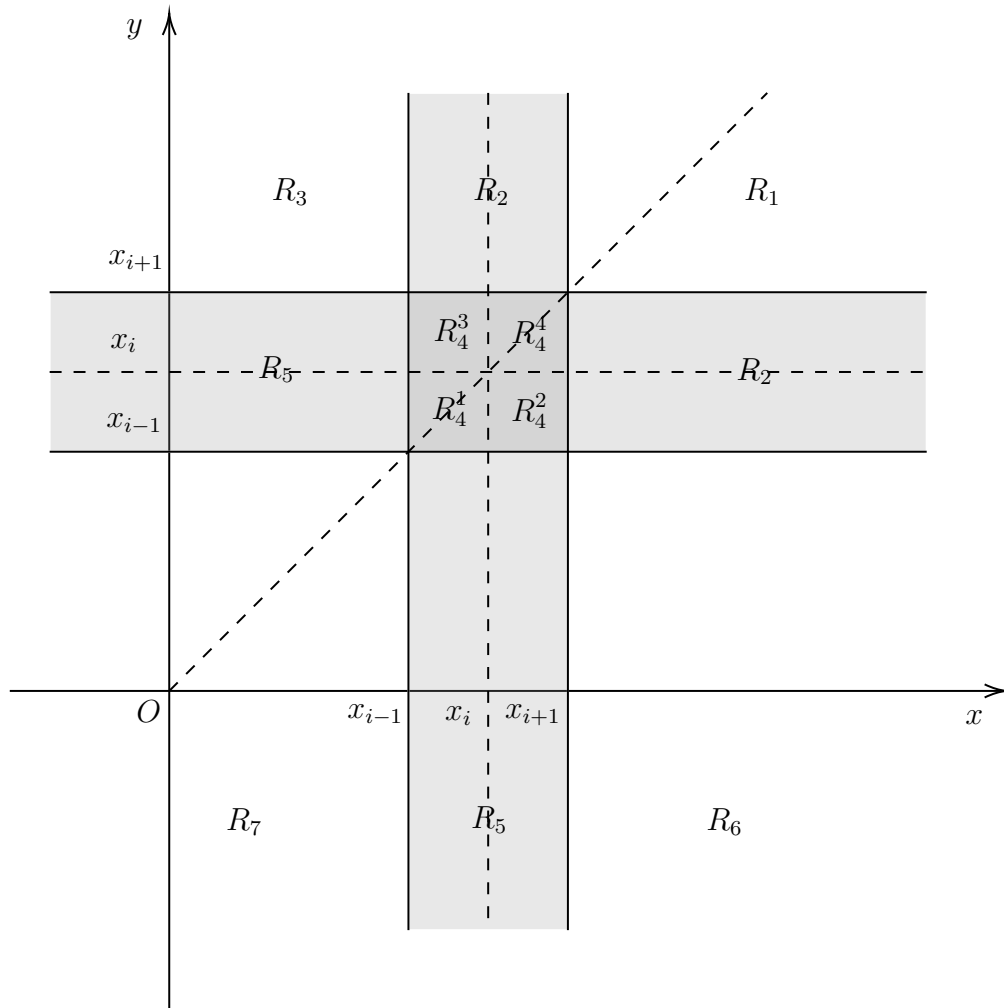


FIGURE 3.10 – Interactions entre la fonction de base $\phi_i(x)$ et $\phi_i(y)$.

les termes R_i , $i = 1, \dots, 7$, séparément. Tout d'abord, d'après la figure (3.10), nous avons que $R_1 = R_3 = R_6 = R_7 = 0$. Ceci est dû au fait que les régions correspondantes sont toutes éloignées du support des fonctions de base.

Calcul de R_2 . Puisque $\phi_i(y) = 0$ sur le domaine des intégrations, nous

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

avons

$$\begin{aligned}
 R_2 &= 2 \int_{x_{i+1}}^{+\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)^2}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left(\int_{x_{i+1}}^{+\infty} \frac{1}{(y-x)^{1+2s}} dy \right) dx \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left(-\frac{1}{2s} \frac{1}{(y-x)^{2s}} \Big|_{x_{i+1}}^{+\infty} \right) dx \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left[-\frac{1}{2s} \left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{(x_{i+1}-x)^{2s}} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{s} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)^2}{(x_{i+1}-x)^{2s}} dx \\
 &= \frac{1}{s} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right)^2}{(x_{i+1}-x)^{2s}} dx
 \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable (3.9) donc on obtient

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \frac{h^{1-2s}}{s} \int_{-1}^1 \frac{(1-|x|)^2}{(1-x)^{2s}} dx = \frac{h^{1-2s}}{s} \left[\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{(1-x)^{2s}} dx + \int_{-1}^0 \frac{(1+x)^2}{(1-x)^{2s}} dx \right] \\
 &= \frac{h^{1-2s}}{s} \left[\int_0^1 (1-x)^{2-2s} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)^{2s}} dx + \int_{-1}^0 \frac{2x}{(1-x)^{2s}} dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(1-x)^{2s}} dx \right] \\
 &= \frac{h^{1-2s}}{s} (R_2^1 + R_2^2 + R_2^3 + R_2^4)
 \end{aligned}$$

calcul de R_2^1

$$\begin{aligned}
 R_2^1 &= \int_0^1 (1-x)^{2-2s} dx = - \int_0^1 -(1-x)^{2-2s} dx = -\frac{1}{3-2s} (1-x)^{2-2s} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{3-2s}
 \end{aligned}$$

3.3 Approximation des éléments finis du problème elliptique

calcul de R_2^2

$$\begin{aligned} R_2^2 &= \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)^{2s}} dx = - \int_{-1}^0 \frac{-1}{(1-x)^{2s}} dx = -\frac{1}{1-2s} \left(\frac{-1}{(1-x)^{2s-1}} \Big|_{-1}^0 \right) \\ &= -\frac{1}{1-2s} (1 - 2^{2s-1}) = \frac{1}{1-2s} (2^{2s-1} - 1) \end{aligned}$$

calcul de R_2^3 Dans ce cas on utilise l'intégration par partie :

$$\begin{aligned} R_2^3 &= 2 \int_{-1}^0 \frac{x}{(1-x)^{2s}} dx = -2 \int_{-1}^0 \frac{-x}{(1-x)^{2s}} dx \\ &= -2 \frac{1}{1-2s} \left(\frac{x}{(1-x)^{2s-1}} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)^{2s-1}} dx \right) \\ &= \frac{2}{1-2s} \left(-\frac{1}{(2)^{2s-1}} - \frac{1}{2-2s} \frac{1}{(1-x)^{2s-2}} \Big|_{-1}^0 \right) \\ &= \frac{2}{1-2s} \left(-\frac{1}{(2)^{2s-1}} - \frac{1}{2-2s} (1 - 2^{2-2s}) \right) \\ &= -\frac{2^{2-2s}}{1-2s} + \frac{1}{(1-2s)(1-s)} (2^{2-2s} - 1) \end{aligned}$$

calcul de R_2^4

Dans ce cas aussi on utilise l'intégration par partie deux fois :

$$\begin{aligned} R_2^4 &= \int_{-1}^0 \frac{x^2}{(1-x)^{2s}} dx = - \int_{-1}^0 \frac{-x^2}{(1-x)^{2s}} dx \\ &= -\frac{1}{1-2s} \left(\frac{x^2}{(1-x)^{2s-1}} \Big|_{-1}^0 - 2 \int_{-1}^0 \frac{x}{(1-x)^{2s-1}} dx \right) \\ &= \frac{1}{1-2s} \left(\frac{1}{(2)^{2s-1}} + \frac{2}{2-2s} \left(\frac{x}{(1-x)^{2s-2}} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x)^{2s-1}} dx \right) \right) \\ &= \frac{1}{1-2s} \left(2^{1-2s} - \frac{2^{1-2s}}{(1-s)} + \frac{1}{(1-s)(3-2s)} \frac{1}{(1-x)^{2s-3}} \Big|_{-1}^0 \right) \\ &= \frac{1}{1-2s} \left(2^{2-2s} - \frac{2^{1-2s}}{1-s} + \frac{1}{(1-s)(3-2s)} (2^{3-2s} - 1) \right) \end{aligned}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Donc

$$\begin{aligned} R_2 &= R_2^1 + R_2^2 + R_2^3 + R_2^4 \\ &= h^{1-2s} \frac{4s - 6 + 2^{3-2s}}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)} \end{aligned}$$

si $s \neq 1/2$. Si $s = 1/2$, nous avons

$$R_2 = \frac{h^{1-2s}}{2s} \int_{-1}^1 \frac{(1-|x|)^2}{(1-x)} dx = 2 \ln(16) - 4$$

Calcul de R_4 :

Dans ce cas, nous sommes à l'intersection des supports de $\phi_i(x)$ et $\phi_i(y)$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} R_4 &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \dots dx dy + \int_0^1 \int_{-1}^0 \dots dx dy + \int_{-1}^0 \int_0^1 \dots dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \dots dx dy \\ &= R_4^1 + R_4^2 + R_4^3 + R_4^4 \end{aligned}$$

De plus, nous remarquons que, pour des raisons de symétrie, nous avons $R_4^2 = R_4^3$. Par conséquent, nous pouvons calculer seulement l'un de ces deux termes et ajouter sa valeur deux fois lors de la construction de la matrice \mathcal{A}_h . Remarquez également que dans ces deux régions, il ne peut pas arriver que $x = y$. D'autre part, R_4^1 et R_4^4 peuvent être des intégrales singulières, et nous les traiterons comme nous l'avons fait précédemment.

Calcul de R_4^1 :

En utilisant à nouveau l'expression explicite des fonctions de base, nous trouvons

$$(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2 = \frac{|x-y|^2}{h^2}$$

3.3 Approximation des élément finis du problème elliptique

puis, On utilise le changement de variables (3.9) on obtient

$$\begin{aligned}
R_4^1 &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy = h^{1-2s} \int_0^1 \int_0^1 |x - y|^{1-2s} dx dy \\
&= h^{1-2s} \left(\int_0^1 \int_0^x (x - y)^{1-2s} dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y - x)^{1-2s} dy dx \right) \\
&= h^{1-2s} \left(- \int_0^1 \int_0^x -(x - y)^{1-2s} dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y - x)^{1-2s} dy dx \right) \\
&= h^{1-2s} \frac{1}{2 - 2s} \left(\int_0^1 (y - x)^{2-2s} \Big|_0^x dx - \int_0^1 (x - y)^{2-2s} \Big|_x^1 dx \right) \\
&= h^{1-2s} \frac{1}{2 - 2s} \left(\int_0^1 x^{2-2s} dx - \int_0^1 (1 - x)^{2-2s} dx \right) \\
&= h^{1-2s} \frac{1}{2 - 2s} \frac{1}{3 - 2s} \left(x^{3-2s} \Big|_0^1 - (1 - x)^{3-2s} \Big|_0^1 \right) \\
&= h^{1-2s} \frac{1}{2 - 2s} \frac{1}{3 - 2s} (2) = h^{1-2s} \frac{2}{2(1 - s)(3 - 2s)} \\
&= \frac{h^{1-2s}}{(1 - s)(3 - 2s)}
\end{aligned}$$

Dans la même manière, on calcule $R_4^2 = R_4^3$ et R_4^4 , alors nous avons :

$$\begin{aligned}
R_4^2 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
&= \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{(\phi_i(x) - \phi_i(y))^2}{|x - y|^{1+2s}} dx dy \\
&= h^{1-2s} \frac{2s^2 - 5s + 4 - 2^{2-2s}}{s(1 - 2s)(1 - s)(3 - 2s)} \\
&= R_4^3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_4^4 &= h^{1-2s} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 |x - y|^{1-2s} dy dx \\
&= \frac{h^{1-2s}}{(1 - s)(3 - 2s)} = R_4^1
\end{aligned}$$

En additionnant les valeurs que nous venons de calculer, nous obtenons donc

$$R^4 = 2(R_4^1 + R_4^2) = \begin{cases} h^{1-2s} \frac{8 - 8s - 2^{3-2s}}{2s(1 - 2s)(1 - s)(3 - 2s)}, & s \neq \frac{1}{2} \\ 8 - 8 \ln 2, & s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chapitre 3. Méthode des élément finis et approximation variationnelle

Calcul de R_5

Puisque, encore une fois, $\phi_i(y) = 0$ sur le domaine d'intégration, nous avons

$$\begin{aligned}
 R_5 &= 2 \int_{-\infty}^{x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)^2}{|x-y|^{1+2s}} dx dy \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left(\int_{-\infty}^{x_{i-1}} \frac{1}{|x-y|^{1+2s}} dy \right) dx \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left(-\frac{1}{2s} \frac{1}{(x-y)^{2s}} \Big|_{-\infty}^{x_{i-1}} \right) dx \\
 &= 2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i(x)^2 \left[-\frac{1}{2s} \left(\frac{1}{(x-x_{i-1})^{2s}} - \frac{1}{-\infty} \right) \right] dx \\
 &= \frac{1}{s} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\phi_i(x)^2}{(x-x_{i-1})^{2s}} dx = \frac{1}{s} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\left(1 - \frac{|x-x_i|}{h}\right)^2}{(x-x_{i-1})^{2s}} dx
 \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable (3.9) donc on obtient

$$\begin{aligned}
 R_5 &= \frac{h^{1-2s}}{s} \int_{-1}^1 \frac{(1-|x|)^2}{(1+x)^{2s}} dx \\
 &= h^{1-2s} \frac{4s-6+2^{3-2s}}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)} = R_2
 \end{aligned}$$

si $s \neq 1/2$. Si $s = 1/2$, nous avons

$$R_5 = \frac{h^{1-2s}}{2s} \int_{-1}^1 \frac{(1-|x|)^2}{(1+x)} dx = 8 \ln(2) - 4$$

Conclusion. Les éléments $a_{i,i}$ sont maintenant donnés par la somme $2R_2 + R_4$, selon les valeurs que nous avons calculées. En particulier, nous avons

$$a_{i,i} = \begin{cases} \frac{h^{1-2s} (2^{3-2s} - 4)}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & s \neq \frac{1}{2} \\ 8 \ln 2, & s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Conclusion. En résumé, nous avons les valeurs suivantes pour les éléments de la matrice de rigidité \mathcal{A}_h :

pour $s = 1/2$:

$$a_{i,j} = -h^{1-2s} \begin{cases} \frac{4(k+1)^{3-2s} - 4(k-1)^{3-2s} - 6k^{3-2s} - (k+2)^{3-2s} - (k-2)^{3-2s}}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & k = j-i, k \\ \frac{3^{3-2s} - 2^{5-2s} + 7}{2s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & j = i+2 \\ \frac{2^{3-2s} - 4}{s(1-2s)(1-s)(3-2s)}, & j = i \end{cases}$$

3.4 Résultats numériques

Par contre, pour $s = 1/2$, on a

$$a_{i,j} = \begin{cases} -4(j-i+1)^2 \log(j-i+1) - 4(j-i-1)^2 \log(j-i-1) + (j-i)^2 \log(j-i) \\ +4(j-i+2)^2 \log(j-i+2) - 4(j-i-2)^2 \log(j-i-2), & j \geq i+2 \\ 56 \ln(2) - 36 \ln(3), & j = i+2 \\ 9 \ln(3) - 16 \ln(2), & j = i+1 \\ 8 \ln(2), & j = i \end{cases}$$

Remarque 3.3. [4] Nous rappelons les faits suivants :

2. La valeur de chaque élément $a_{i,j}$ est donnée explicitement et ne dépend que de i, j, s et h . En d'autres termes, lors de l'approximation du côté gauche de (3.5), aucune intégration numérique n'est nécessaire.

3. Pour $s = 1/2$, les éléments $a_{i,j}$ ne dépendent pas de la valeur de h qui, à son tour, est une fonction de N . Ceci implique que, dans ce cas particulier, quel que soit le nombre de points que nous considérons dans notre maillage, la matrice \mathcal{A}_h aura toujours les mêmes entrées.

3.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les simulations numériques correspondant à l'algorithme précédemment décrit, et nous fournissons une discussion complète des résultats obtenus. Tout d'abord, nous testons numériquement la précision de notre méthode pour la résolution de l'équation elliptique (2.1) en l'appliquant au problème suivant :

$$\begin{cases} (-d_x^2)^s u = 1, & x \in (-1, 1) \\ u \equiv 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans ce cas particulier, la solution unique de (3.12) peut être calculée exactement et elle est donnée dans Gettoor (1961). Elle se lit comme suit :

$$u(x) = \frac{2^{-2s} \pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right) \Gamma(1+s)} (1-x^2)^s. \quad (3.13)$$

Dans (3.11), nous montrons une comparaison pour différentes valeurs de s entre la solution exacte (3.13) et l'approximation numérique calculée.

Nous considérons ici $N = 50$. On peut remarquer que lorsque $s = 0,1$ (et aussi pour d'autres petites valeurs de s), la solution calculée est dans une certaine mesure différente de la solution exacte. Cependant, il faut être prudent avec ce résultat et une analyse plus précise de l'erreur doit être effectuée.

Chapitre 3. Méthode des élément fins et approximation variationnelle

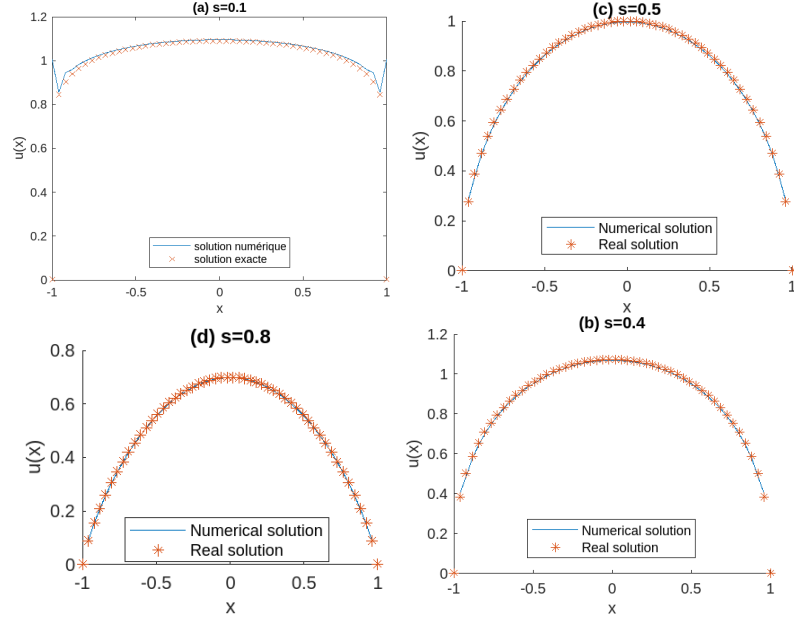


FIGURE 3.11 – Tracé pour différentes valeurs de s .

Dans le même esprit que dans Acosta et al . (2017 b), le calcul de l'erreur dans l'espace $H_0^s(-1, 1)$ peut être facilement effectué en utilisant la définition de la forme bilinéaire, à savoir

$$\|u - u_h\|_{H_0^s(-1,1)}^2 = a(u - u_h, u - u_h) = a(u, u - u_h) = \int_{-1}^1 f(x)(u(x) - u_h(x))dx,$$

où nous avons utilisé la condition d'orthogonalité $a(v_h, u - u_h) = 0 \forall v_h \in V_h$

Pour ce test particulier, puisque $f \equiv 1$ dans $(-1, 1)$, le problème se réduit donc à

$$\|u - u_h\|_{H_0^s(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 (u(x) - u_h(x))dx \right)^{1/2}$$

où le côté droit peut être facilement calculé, puisque nous disposons de la formule fermée

$$\int_{-1}^1 u dx = \frac{\pi}{2^{2s} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{3}{2}\right)}.$$

et le terme correspondant à $\int_{-1}^1 u_h$ peut être réalisé numériquement.

Dans la figure (3.12), nous présentons les erreurs de calcul évaluées pour différentes valeurs de s et h . Les taux de convergence indiqués sont de l'ordre (en h) de $1/2$. Ceci est en accord avec le résultat suivant :

3.4 Résultats numériques

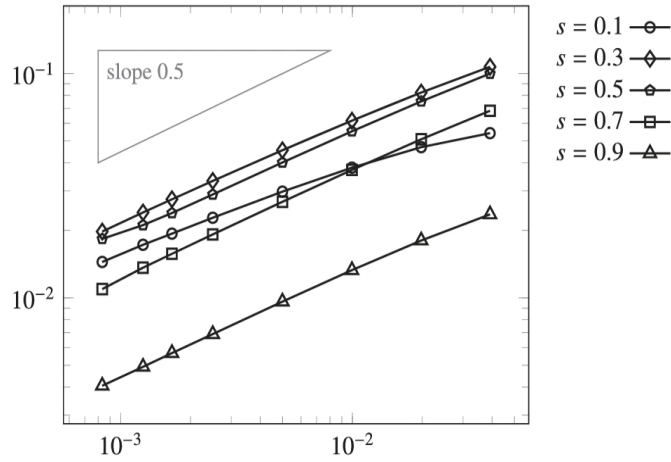


FIGURE 3.12 – Convergence de l'erreur.

Théorème 3.2. [4] (Acosta et al., 2017b)

Pour la solution u de (3.3) et son approximation EF u_h donnée par (3.5), si h est suffisamment petit, les estimations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H_0^s(-1,1)} &\leq Ch^{1/2} |\ln h| \|f\|_{C^{1/2-s}(-1,1)} & \text{si } s < 1/2 \\ \|u - u_h\|_{H_0^s(-1,1)} &\leq Ch^{1/2} |\ln h| \|f\|_{L^\infty(-1,1)} & \text{si } s = 1/2 \\ \|u - u_h\|_{H_0^s(-1,1)} &\leq \frac{C}{2s-1} h^{1/2} (|\ln h|)^{1/2} \|f\|_{C^\beta(-1,1)} & \text{si } s > 1/2, \beta > 0 \end{aligned}$$

où C est une constante positive ne dépendant pas de h .

En outre, la figure (3.12) montre que le taux de convergence est maintenu même pour de petites valeurs de s . Cela confirme que le comportement montré dans la figure (3.11) n'est pas en contradiction avec les résultats théoriques connus.

En effet, comme il est bien connu que la notion de trace n'est pas définie pour les espaces $H_s(-1, 1)$ avec $s \leq 1/2$ (voir Lions et Magenes, 1972 ; Tartar, 2007), il est en quelque sorte naturel que nous ne puissions pas nous attendre à une convergence ponctuelle dans ce cas.

Conclusion

La matrice \mathcal{A}_h a la structure d'une matrice à N diagonales, ce qui signifie que la valeur de ses éléments restent constantes le long de ses diagonales. Ceci est en analogie avec la matrice tridiagonale approximant l'opérateur de Laplace classique. Notez cependant que dans notre cas, nous obtenons une matrice complète. Ceci est cohérent avec la nature non locale de l'opérateur Laplace. que nous discrétisons.

Bibliographie

- [1] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, Enrico Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. math. 136(2012) 521-573.
- [2] Haïm. Brézis. Analyse fonctionnelle, Théorie et application. Dunod,PARIS-éFrance, 1999.
- [3] Dominique Azé, Element d'analyse convexes et variationnelle, Mathématique pour le 2 cycle, ISBN 2-7298-9751-8 ellipser / éditions mareketing S.A, 1997 Paris.
- [4] Biccari, Umberto et Hernández-Santamaria, V. (2019). Controlability of a one-dimensional fractional heat equation : theoretical and numerical aspects. IMA Jornal of Mathematical control and information, 36(4), 1199-1235.