

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLICUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : ANEDP

Thème

Solution analytique et numérique de l'équation de Bagley-Torvik

Présenté par :

M^{lle} Khamkhoum Khaoula

Soutenu publiquement le : 02/07/2025

Devant le jury composé de :

N. Nassri	M.CA,	Université de Skikda	Président
F. Saci	M.C.B,	Université de Skikda	Encadrant
N. Mourah	M.A.A,	Université de Skikda	Examineur
Dj. Mezhoud	M.C.B,	E.N.P Constantine	Invité

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Je rends grâce à Dieu de m'avoir donné la force, la patience, le courage et la volonté nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Dr F. Saci pour la confiance qu'il m'a accordée et pour avoir accepté de m'encadrer tout au long de l'élaboration de ce travail. Je le remercie pour son soutien constant, ainsi que pour ses orientations et conseils précieux, qui ont grandement contribué à l'enrichissement de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements les plus sincères aux membres du jury, qui m'ont honoré(e) en acceptant d'évaluer ce mémoire.

Je n'oublie pas l'ensemble des enseignants qui ont contribué, de près ou de loin, à ma formation tout au long de mes années d'études. Leurs efforts et leur dévouement ont été d'une grande valeur.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de manière directe ou indirecte, à l'aboutissement de ce travail.

À vous tous, un grand merci.

Dédicace

Je remercie Dieu, infiniment, pour Son aide, Sa bénédiction, et pour m'avoir accordé la force et la patience nécessaires à l'accomplissement de ce travail.

Je dédie ce travail modeste à mes chers parents, qui ont toujours été mon soutien tout au long de mon parcours scolaire. Leur présence constante à mes côtés m'a donné la motivation d'atteindre ce rêve.

À mes chères sœurs Siham et Warda, pour leur soutien continu et leur encouragement à chaque étape.

À mes frères : Abdelghani, Yazid, et Youcef, pour leur amour et leur appui indéfectible.

À tous les petits-enfants de la famille, et avec une pensée toute spéciale pour Loubna et Ahlem, qui ont souvent été pour moi une source d'inspiration et de motivation.

À tous ceux qui me sont chers et qui ont, d'une manière ou d'une autre, contribué à ce travail, je partage avec vous la joie de cet accomplissement.

Résumé :

Dans ce travail, nous proposons une étude à la fois mathématique et numérique du problème de Bagley–Torvik, un modèle modélisant divers phénomènes physiques. Pour la résolution analytique, nous mettons en évidence l'utilisation de certaines transformées intégrales classiques ainsi que certaines transformées intégrales récentes, en présentant leurs propriétés et techniques associées. Nous introduisons également une approche semi-analytique basée sur la méthode de décomposition d'Adomian, laquelle fournit une approximation numérique de grande précision.

Mots-clés : Transformée de Laplace ; transformée de Sumudu ; équations différentielles fractionnaires ; la méthode décomposition d'Adomian.

Abstract :

In this work, we propose both a mathematical and numerical study of the Bagley–Torvik problem, a model representing various physical phenomena. For the analytical resolution, we use some classical integral transforms as well as more recent integral transforms, presenting their properties and associated techniques. We also introduce a semi-analytical approach based on the Adomian Decomposition method, which provides a highly accurate numerical approximation.

Keywords : Laplace transform; Sumudu transform; fractional differential equations; Adomian decomposition method.

ملخص:

في هذا العمل، نقترح دراسة تحليلية وعددية في آن واحد لحل مسألة باغلاي-تورفيك Bagley-Torvik، هذه الأخيرة تتمتع بمختلف الظواهر الفيزيائية، حيث تهدف الدراسة للبحث عن الحل التحليلي الدقيق أو الحل التقريبي. في إطار الدراسة التحليلية نسلط الضوء على استخدام بعض التحويلات التكاملية الكلاسيكية وكذلك التحويلات التكاملية الجديدة، مع عرض خصائصها والتقنيات المرتبطة بها. كما تركز المقاربة العددية أو الشبه تحليلية على طريقة التفكيك أو التحليل لأدوميان، والتي تُعطي في هذا العمل تقريب عددي عالي الدقة للحل.

الكلمات المفتاحية: تحويل لابلاس؛ تحويل سومودو؛ المعادلات التفاضلية ذات رتب الاشتقاق الكسرية؛ طريقة تفكيك أدوميان.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions de base	4
1.1 Les transformées intégrales classiques	4
1.1.1 Transformée de Laplace	4
1.1.2 Application sur les équations différentielles	6
1.1.3 Transformée de Sumudu	8
1.1.4 Application sur les équations différentielles	12
1.2 Calcul Fractionnaire	13
1.2.1 Fonction Utiles	13
1.2.2 Les dérivées fractionnaire classique	16
2 Résolution analytique de l'équation de Bagley-Torvik par transformées intégrales	23
2.1 Introduction	23
2.2 Position du problème	25
2.3 Application de la transformée du Sumudu pour résoudre l'équation de Bagley-Torvik	26
2.4 Application de la transformée de Laplace pour résoudre l'équation de Bagley-Torvik	28
3 Résolution analytique de l'équation de Bagley-Torvik par la méthode de décomposition d'Adomian	31
3.1 Introduction	31
3.2 Existence et unicité de la solution	32

3.3	Principe de la méthode de décomposition d'Adomian	35
3.3.1	Forme générale du problème	35
3.3.2	Décomposition de la solution	36
3.3.3	Transformation de l'équation différentielle	36
3.4	Application à l'équation de Bagley-Torvik	38
	Conclusion	42
	Bibliographie	44

Introduction

Le calcul fractionnaire (Calcul différentiel et intégral d'ordre non entier) est une branche des mathématiques qui généralise les notions classiques de dérivation et d'intégration aux ordres réels ou complexes. Né d'une curiosité purement théorique à la fin du XVII^{ème} siècle, ce domaine s'est développé au fil des siècles pour devenir aujourd'hui un outil fondamental dans l'analyse moderne. Sur le plan mathématique, il permet une extension naturelle des opérateurs différentiels et intégraux, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives dans les équations différentielles, les systèmes dynamiques, et le traitement analytique de phénomènes non locaux.

Son importance dépasse largement le cadre mathématique : le calcul fractionnaire joue un rôle clé dans la modélisation de nombreux systèmes physiques et techniques. Il est particulièrement utile pour décrire des processus à mémoire, des matériaux viscoélastiques, et des phénomènes issues de la mécanique, l'électrochimie, et de la bio-ingénierie. Cette capacité à modéliser des comportements complexes et intermédiaires entre les différents états classiques fait du calcul fractionnaire un cadre théorique de plus en plus incontournable dans les sciences appliquées.

La première référence explicite à ce concept remonte à 1695, lorsque le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) souleva, dans une lettre adressée à G.A. de L'Hôpital (1661-1704), la question du sens d'une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Ce n'est toutefois qu'au XIX^{ème} siècle que le calcul fractionnaire a commencé à prendre forme grâce aux travaux fondateurs de Joseph Liouville (1809–1882) et Bernhard Riemann (1826-1866), qui ont formulé les premières définitions rigoureuses de l'intégration et de la dérivation d'ordre non entier. Au XX^{ème} siècle, Michele Caputo (1929-2019) proposa une dérivée fractionnaire mieux adaptée aux conditions initiales physiques, favorisant ainsi son application aux problèmes concrets.

Dans le contexte de la résolution des équations différentielles, notamment celles d'ordre fractionnaire, les transformées intégrales jouent un rôle crucial. Ces outils permettent de transformer des équations différentielles complexes en équations algébriques plus simples à manipuler. Parmi les plus connues :

La transformée de Fourier est utilisée pour décomposer les signaux ou fonctions en leurs composantes fréquentielles, ce qui la rend essentielle dans l'analyse des phénomènes périodiques et dans le traitement du signal. Elle est définie comme suit :

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

La transformée de Laplace est particulièrement efficace pour l'étude des systèmes dynamiques linéaires, en tenant compte naturellement des conditions initiales. Elle est donnée par :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

La transformée de Sumudu, plus récente, se distingue par la conservation des unités physiques de la fonction d'origine. Elle est souvent employée pour résoudre les équations différentielles fractionnaires et s'exprime comme suit :

$$\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u) = \int_0^{\infty} f(ut)e^{-t} dt$$

Il existe également d'autres intégrales transformées utilisées dans le cadre de l'analyse fractionnaire ou dans des domaines spécifiques, telles que la transformée de Mellin, la transformée de Hankel, ou encore la transformée bilatérale de Laplace. Chacune de ces transformées possède ses propres avantages et est choisie en fonction du domaine d'application, de la nature des conditions aux limites, ou encore du comportement asymptotique de la solution recherchée. Cette richesse des outils intégraux illustre l'importance des méthodes analytiques dans le traitement des équations aux dérivées classiques et fractionnaires, et justifie leur place centrale dans les études théoriques comme dans les modélisations physiques.

En parallèle, plusieurs définitions des dérivées fractionnaires ont vu le jour afin de répondre aux exigences diverses de modélisation. Parmi les plus célèbres, la dérivée de Riemann–Liouville, historiquement l'une des premières, repose sur une formulation intégrale classique mais pose certaines difficultés d'interprétation physique des conditions initiales. La dérivée de Caputo s'est

imposée comme alternative privilégiée dans les applications physiques, car elle permet de formuler des conditions initiales de manière naturelle, à l'instar du cadre classique. D'autres approches comme la dérivée de Grünwald–Letnikov ou la dérivée conforme (conformable derivative) proposent des variantes plus simples, conservant les caractéristiques fondamentales du comportement fractionnaire.

Enfin, dans le cadre de la mécanique appliquée, l'équation de Bagley–Torvik constitue un exemple emblématique de l'utilisation du calcul fractionnaire. Elle modélise le comportement dynamique de certains systèmes mécaniques, comme des poutres viscoélastiques ou des structures soumises à des contraintes complexes. Ce type d'équation illustre parfaitement l'efficacité des dérivées fractionnaires pour capter les effets de mémoire et les transitions entre comportement élastique et visqueux.

Ce travail de fin d'études se divise en trois chapitres, dans le **premier chapitre** on introduit essentiellement des généralités sur les transformées intégrales et le calcul fractionnaire. Ensuite, dans le **deuxième chapitre**, on présente une étude analytique de l'équation de Bagley–Torvik en utilisant les transformées intégrales. Finalement, dans le **troisième chapitre**, on discute une technique de résolution semi-analytique de l'équation de Bagley–Torvik en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian.

Notions de base

1.1 Les transformées intégrales classiques

1.1.1 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une transformation mathématique qui permet de transformer une équation différentielle en une expression polynomiale. Cela simplifie considérablement la résolution des équations.

Définition 1.1 Soit f une fonction [6, 11] continue par morceaux de la variable $t \in \mathbb{R}_+$. La transformée de Laplace de f de la variable complexe ou réelle p est définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (1.1)$$

$f(t)$ est appelée l'originale de $\mathcal{L}f(p)$.

La transformée de Laplace d'une fonction existe si l'intégrale (1.1) est convergente.

Transformée inverse de laplace

La fonction originale $f(t)$ peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace $F(p)$ à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(p). \quad (1.2)$$

Propriétés de la transformée de Laplace

1. **Linéarité** : Si a et b sont deux constantes [11] réelles quelconque et f, g sont deux fonctions dont les transformées de Laplace existent, alors

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g). \quad (1.3)$$

2. **Translation** : Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(p) = F(p - \alpha), \operatorname{Re}(p) > \alpha. \quad (1.4)$$

3. **Convolution** : Soient f, g deux fonctions causales et convolables en tout point $t \geq 0$ tels que $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g)$ et $\mathcal{L}(f * g)$ existent. Alors :

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}f(p) \cdot \mathcal{L}g(p). \quad (1.5)$$

4. **Dérivation** : Soit $f \in C^n [0, \infty [$, $n \geq 1$ tels que $f^{(n)}$ d'ordre exponentiel, on a :

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = p^n \mathcal{L}f(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-1-k)}(0), \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.6)$$

5. **Intégration**

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s) ds\right) = \frac{\mathcal{L}f(p)}{p}, \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.7)$$

6. **La transformée de Laplace de quelques fonctions usuelle :**

$f(t), t \geq 0$	$t^\alpha, \alpha > -1$	$E_\alpha(\lambda t^\alpha), \lambda \in \mathbb{R}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^\alpha)$
$F(p)$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \operatorname{Re}(p) > 0$	$\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda}$	$\frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - \lambda}$

Remarque 1.1

Si f n'est pas continue en $t_0 = 0$ alors on remplace $f(0)$ par $f(0^+)$ surtout lorsqu'on utilise une intégration par parties dans une démonstration.

Tableau de transformée de Laplace :

Fonction	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynôme (général)	$t^n y(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
sinus amorti	$e^{-at} \sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
cosinus amorti	$e^{-at} \cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

TABLE 1.1 – Tab de transformées de Laplace.

1.1.2 Application sur les équations différentielles**Application sur les équations différentielles ordinaires****Exemple 1.1**

Résoudre $y''' - 3y'' + 3y' = t^2 e^t$ avec $y'(0) = 0$ et $y(0) = -2$.

Posons $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$, donc

$$\mathcal{L}\{y'''\} - 3\mathcal{L}\{y''\} + 3\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{(s-1)^3}, \quad (1.8)$$

d'où

$$(s^3 Y - s^2 y(0) - y''(0)) - 3(s^2 Y - s y(0) - y'(0)) + 3(s Y - y(0)) - Y = \frac{2}{(s-1)^3}, \quad (1.9)$$

ou encore

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}, \quad (1.10)$$

et

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}, \quad (1.11)$$

d'où

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \right\} (t) \quad (1.12)$$

$$= e^t - te^t - \frac{t^2 e^t}{2} + \frac{t^5 e^t}{60} \quad (1.13)$$

Application sur les équations aux dérivées partielles

Exemple 1.2 Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 16x + \sin x \quad (1.14)$$

où $y = y(x, t)$, avec les conditions $y(0, t) = 0, y(\pi, t) = 16\pi, y_t(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t)|_{t=0} = 0$ et $y(x, 0) = 16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$.

On pose $Y(x, s) = \mathcal{L}(y(x, t))(s)$ (transformée de Laplace par rapport à la variable t).

On prend la transformée de Laplace de l'EDP par rapport à la variable t , on trouve

$$(s^2 Y(x, s) - sy(x, 0) - y_t(x, 0)) - 4 \frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} + Y(x, s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s}. \quad (1.15)$$

Puisque $y(x, 0) = 16x + 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$ et $y_t(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t)|_{t=0} = 0$, on trouve l'équation différentielle suivante (du second ordre par rapport à x) :

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2 + 1)Y = -\frac{4(s^2 + 1)x}{s} - \frac{\sin x}{4s} - 3s \sin(2x) + 2s \sin(3x). \quad (1.16)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$Y(0, s) = \mathcal{L}[y(0, t)](s) = \mathcal{L}[0](s) = 0, \text{ et} \quad (1.17)$$

$$Y(\pi, s) = \mathcal{L}[y(\pi, t)](s) = 16\pi \mathcal{L}[1](s) = \frac{16\pi}{s}. \quad (1.18)$$

D'après la forme du second membre de l'équation (1.14) [en tant que fonction de x] on déduit qu'une solution particulière de (1.14) est de la forme $Y_p(x, s) = ax + b \sin x + c \sin 2x + d \sin 3x$. En dérivant et substituant dans (1.14) et en égalant les coefficients des termes analogues, on trouve

$$Y_p(x, s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2 + 5)} + \frac{12s \sin 2x}{s^2 + 17} - \frac{8s \sin 3x}{s^2 + 37}. \quad (1.19)$$

La solution générale de l'équation homogène associée à (1.14) est de la forme

$$Y_H(x, s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x}, \quad (1.20)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes réelles. La solution générale de (1.14) est donc

$$Y(x, s) = Y_H(x, s) + Y_P(x, s) \quad (1.21)$$

$$= c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}x} + \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s \sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s \sin 3x}{s^2+37} \quad (1.22)$$

Les conditions initiales (1.16) portées en (1.18) donne

$$0 = Y(0, s) = c_1 + c_2, \quad (1.23)$$

et

$$\frac{16\pi}{s} = Y(\pi, s) = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\pi} + \frac{16\pi}{s}, \quad (1.24)$$

donc $c_1 = c_2 = 0$ et

$$Y(x, s) = \frac{16x}{s} + \frac{\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s \sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s \sin 3x}{s^2+37}. \quad (1.25)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse, on trouve la solution cherchée

$$y(x, t) = 16x + \frac{\sin x}{5}(1 - \cos \sqrt{5}t) + 12 \sin 2x \cos \sqrt{17}t - 8 \sin 3x \cos \sqrt{37}t. \quad (1.26)$$

1.1.3 Transformée de Sumudu

Forme intégrale de la transformée de Sumudu

Définition 1.2 [?] La transformée de Sumudu $\mathcal{S}(u)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par l'expression

$$F(u) = \mathcal{S}[f(t)](u) = \mathcal{S}(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt, \quad u \in [-\tau_1, \tau_2], \quad (1.27)$$

ou bien

$$F(u) = \mathcal{S}[f(t)](u) = \mathcal{S}(u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut) dt, \quad u \in [-\tau_1, \tau_2], \quad (1.28)$$

sur l'ensemble,

$$\mathbf{A} = \left\{ f(t) / \exists M, \vartheta_1, \vartheta_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\vartheta_j}}, \text{ Si } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\}. \quad (1.29)$$

Transformée inverse de Sumudu

La formule d'inversion complexe pour la transformée de Sumudu est donnée par :

$$F(t) = S^{-1}[F(S)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u} F\left(\frac{1}{u}\right) e^{ut} du. \quad (1.30)$$

Exemple 1.3 Transformée de Sumudu de la fonction $f(t) = \cos(t)$ est

$$S[f(t)](u) = \frac{1}{1+u^2}. \quad (1.31)$$

En effet $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, en utilisant la forme intégrale (1.27). On trouve

$$S[\cos(t)](u) = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} \left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right] dt \quad (1.32)$$

$$= \frac{1}{2u} \left[\int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{u}-i)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{u}+i)} dt \right] \quad (1.33)$$

$$= \frac{1}{1+u^2}. \quad (1.34)$$

Donc $S[\cos(t)](u) = \frac{1}{1+u^2}$.

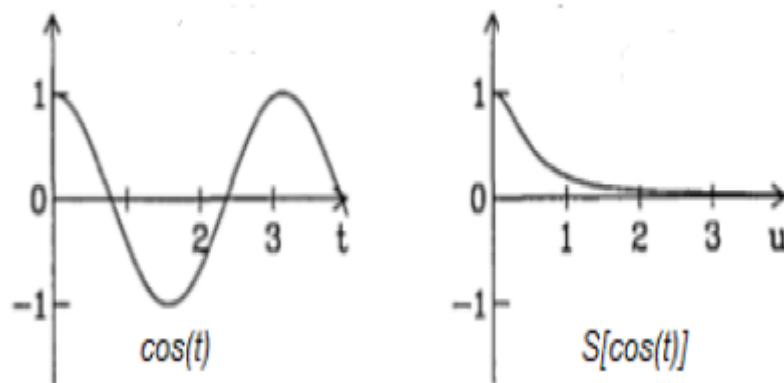


FIGURE 1.1 – Les courbes de $\cos(t)$ et de sa transformée de Sumudu

Remarque 1.2 Le tableau suivant présente la transformée de Sumudu de quelques fonctions.

Fonction	Transformée de Sumudu
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n = 1, 2, \dots$	u^{n-1}
$\delta(t)$	$\frac{1}{u}$
$\delta(t - a)$	$\frac{e^{-\frac{a}{u}}}{u}$
$H(t - a)$	$e^{-\frac{a}{u}}$
te^{at}	$\frac{u}{(1-au)^2}$

TABLE 1.2 – Transformée de Sumudu de quelques fonctions.

Propriétés de la transformée de Sumudu

1 Linéarité

Soient $f(t)$ et $g(t)$ en A , et les deux constantes α et β [2]

$$\mathcal{S}[\alpha f(t) + \beta g(t)](u) = \alpha \mathcal{S}[f(t)](u) + \beta \mathcal{S}[g(t)](u). \quad (1.35)$$

2 Multiplication par un scalaire

Si la transformée [4] de Sumudu de $f(t)$ est $\mathcal{S}(u)$. Pour toute constante c , on a

$$\mathcal{S}[f(ct)](u) = \mathcal{S}(cu). \quad (1.36)$$

3 Multiplication par un paramètre

Propriétés 1.1 Soit $\mathcal{S}(u)$ la transformée [5] de Sumudu de la fonction $f(t)$ dans \mathbf{A} , la transformée de Sumudu de la fonction $tf(t)$ est donnée par

$$\mathcal{S}[tf(t)](u) = u \frac{d[u\mathcal{S}(u)]}{du}. \quad (1.37)$$

Propriétés 1.2 Si $\mathcal{S}[f(t)](u) = \mathcal{S}(u)$, alors

$$\mathcal{S} \left[t^2 f(t) \right] (u) = u^4 \frac{d^2 \mathcal{S}(u)}{du^2} + 4u^3 \frac{d\mathcal{S}(u)}{du} + 2u^2 \mathcal{S}(u). \quad (1.38)$$

Propriétés 1.3 Soit $\mathcal{S}(u)$ la transformée de Sumudu de $f(t)$ dans \mathbf{A} et $\mathcal{S}_k(u)$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $\mathcal{S}(u)$ par rapport à u . La transformée de Sumudu de la fonction $[t^n f(t)]$ est donnée par

$$\mathcal{S} [t^n f(t)] (u) = u^n \sum_{k=0}^n a_k^n u^k \mathcal{S}_k(u), \quad (1.39)$$

où

$$a_0^n = n!, a_n^n = 1, a_1^n = n(n!). \quad (1.40)$$

Et pour $k = 2, 3, \dots, n-2$,

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k)a_k^{n-1}. \quad (1.41)$$

4 Intégration

Si la transformée [12] de Sumudu de $f(t)$ est $\mathcal{S}(u)$, alors la transformée de Sumudu de sa primitive est

$$\mathcal{S} \left[\int_0^t f(x) dx \right] (u) = u \mathcal{S}(u). \quad (1.42)$$

5 Dérivation

Propriétés 1.4 Si la transformée [12] de Sumudu de $f(t)$ est $\mathcal{S}(u)$, alors la transformée de Sumudu de $f'(t)$ est

$$\mathcal{S} [f'(t)] (u) = \frac{\mathcal{S}(u) - f(0)}{u} = \frac{\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}(0)}{u}. \quad (1.43)$$

Propriétés 1.5 Soit $f \in \mathbf{A}$ avec $\mathcal{S}(u)$ sa transformée de Sumudu. Alors

$$\mathcal{S} [t f'(t)] (u) = u \frac{d\mathcal{S}(u)}{du}. \quad (1.44)$$

Théorème 1.1 Si $F(u)$ est la transformée de sumudu de $f(t)$ alors la transformée de sumudu de la dérivée d'ordre α est définie comme suit.

$$\mathcal{S} \left[\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \right] = \frac{1}{u^\alpha} \left[F(u) - \sum_{k=0}^{n-1} u^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} \right] \quad (1.45)$$

cela signifie que :

$$S \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = \frac{1}{u} [F(u) - y(0)] \quad (1.46)$$

$$S \left[\frac{d^{(2)}f(t)}{dt^{(2)}} \right] = \frac{1}{u^2} \left[F(u) - y(0) - u \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right] \quad (1.47)$$

La transformée de sumudu de la dérivée fractionnaire de caputu est bien définie comme

$$S [{}^c D_t^\alpha f(t)] = u^{-\alpha} S[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} u^{-\alpha+k} f^{(k)}(0) \quad m-1 \leq \alpha \leq m. \quad (1.48)$$

1.1.4 Application sur les équations différentielles

Exemple 1.4

Considérons l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = 1, \quad (1.49)$$

avec la condition initiale, $y(0) = 0$.

On applique la transformée de Sumudu sur (1.49), on obtient

$$S[y'(t) + y(t)] = S[1]. \quad (1.50)$$

D'après la linéarité de Sumudu, on a

$$S[y'(t)] + S[y(t)] = S[1], \quad (1.51)$$

et comme

$$S[1] = 1 \text{ et } S[y'(t)] = \frac{S[y(t)]}{u}. \quad (1.52)$$

Donc, (1.51) devient

$$\frac{S[y(t)]}{u} + S[y(t)] = 1, \quad (1.53)$$

ce qui implique,

$$S[y(t)] \left(\frac{1+u}{u} \right) = 1. \quad (1.54)$$

D'où

$$S[y(t)] = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}. \quad (1.55)$$

Maintenant, on applique la transformée inverse de Sumudu pour (1.55), on obtient

$$y(t) = S^{-1} \left(1 - \frac{1}{1+u} \right) (t) = S^{-1}(1)(t) - S^{-1} \left(\frac{1}{1+u} \right) (t). \quad (1.56)$$

La solution de (1.49) est

$$y(t) = 1 - e^{-t}. \quad (1.57)$$

1.2 Calcul Fractionnaire

1.2.1 Fonction Utiles

Fonction Gamma, fonction Bêta et fonction Mittag-Leffler sont dites des fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

1.2.1.1 Fonction Gamma et ses propriétés

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma on l'appelle aussi fonction d'Euler notée $\Gamma(z)$.

Définition 1.3 (La fonction Gamma)

La fonction [?] Gamma est une fonction complexe à variable complexe définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \Re(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.58)$$

Propriétés 1.6

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, en particulier $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Sur l'axe réel on a : $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(0_+) = +\infty$. En plus, elle est continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$ et pour les valeurs négatives $\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \sqrt{\pi}$

Exemple 1.5

1. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi}$.

$$2. \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

$$3. \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

$$4. \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

1.2.1.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux [?] cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.4 (fonction Bêta)

La fonction Bêta ou "fonction de Bessel" est donnée par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad (1.59)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$.

Exemple 1.6 par exemple pour trouver :

$$\begin{aligned} B(2, 3) &= \int_0^1 t(t-1)^2 dt \\ &= \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Propriétés 1.7

1. Le changement de variable $u = 1 - t$ permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x, y) = B(y, x).$$

2. Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivants :

$$B(x, y) = \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1} dt,$$

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt,$$

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

1.2.1.3 Lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

Propriétés 1.8

La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$\forall x, y > 0$ on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.60)$$

1.2.1.4 Fonction Mittag-Leffler

La fonction [?] exponentielle, e^z , joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (1.61)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.62)$$

Remarque 1.3 Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.61) de la définition (1.62), il résulte que :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x).$$

en effet, par définition on a,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.63)$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1) + \beta)} \quad (1.64)$$

$$= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{xx^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \quad (1.65)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} \quad (1.66)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \quad (1.67)$$

Exemple 1.7 La fonction Mittag-Liffler se réduit à des fonctions simples, à titre d'exemple on a :

$$\begin{aligned} E_{1,1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \\ E_{1,2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x} \\ E_{2,1}(x^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x). \end{aligned}$$

Remarque 1.4

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2.2 Les dérivées fractionnaire classique

De nombreux mathématiciens ont contribué à l'élaboration de la théorie de la dérivation d'ordre non entier, et différentes définitions de cet opérateur ont vu le jour. Dans cette section, nous allons présenter les définitions les plus familières : celle de Riemann- Liouville et de Caputo.

1.2.2.1 Intégration Fractionnaires de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\text{Re}(\alpha) > 0$), selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répétée n -fois.

$$\begin{aligned} (I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad x > a, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Définition 1.5 [13] Soit $f \in L^1[a, b]$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, l'intégrale

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad -\infty < a < +\infty, \quad (1.68)$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α , et l'intégrale

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad -\infty < b < +\infty, \quad (1.69)$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α .

Théorème 1.2 Si $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha > 0$, l'intégrale $(I^\alpha f)(x)$ existe pour tout $x \in [a; b]$ et l'on a $I^\alpha \in L^1[a, b]$. [13]

Exemple 1.8 Soit la fonction $f(x) = (x - a)^\beta$ alors :

$$I^\alpha(x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt.$$

On pose $t = a + (x - a)v$, et on obtient :

$$I^\alpha(x - a)^\beta = \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - v)^{\alpha-1} v^\beta dv.$$

En utilisant la formule (1.59) et la proposition 1.4, on arrive à :

$$\begin{aligned} I^\alpha(x - a)^\beta &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0.5, \beta = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} (x)^{1.5} = \frac{\sqrt{x^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Propriétés 1.9 Soit $f \in C^n([a, b])$, pour x fixé, l'application $\alpha \rightarrow (I^\alpha f)(x)$ définie pour $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine $\operatorname{Re}(\alpha) > -n$.

Théorème 1.3 Pour $f \in C[a, b]$, l'intégrale [9] fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe

$$I^\alpha \left(I^\beta f \right) (x) = I^{\alpha+\beta} f(x), \text{ pour } \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (1.70)$$

Preuve. La preuve s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction Bêta d'Euler.

En effet :

$$\begin{aligned} \left[I^\alpha \left(I^\beta f \right) \right] (x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} \left(I^\beta f \right) (s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x - s)^{\alpha-1} (s - t)^{\beta-1} f(t) dt ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_t^x (x - s)^{\alpha-1} (s - t)^{\beta-1} ds \right] dt, \end{aligned}$$

et par le changement de variable $s = t + (x - t)\mu$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[I^\alpha \left(I^\beta f \right) \right] (x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\pi)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \right] dt \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha+\beta-1} dt \\ &= I^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

■

1.2.2.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.6 Soit $f \in L^1[a, b]$ et $n - 1 < p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée [13]

$${}^{\text{RL}}D_{a+}^p f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(I_{a+}^{n-p} f(x) \right) \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b] \quad (1.72)$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville à gauche de la fonction f , et la dérivée

$${}^{\text{RL}}D_{b-}^p f(x) = \left(\frac{-d}{dx} \right)^n \left(I_{b-}^{n-p} f(x) \right) \quad (1.73)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-p-1} f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b], \quad (1.74)$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Riemann-Liouville à droite de la fonction f .

Exemple 1.9

1. La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

Si $p > 0$, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, sa valeur est :

$${}^{\text{RL}}D^p c = \frac{c}{\Gamma(1-p)} (x-a)^{-p}.$$

2. La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville.

Soit $p > 0$ tel que $n - 1 < p < n$ et $\beta > -1$ alors on a :

$${}^{\text{RL}}D^p f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(I^{n-p} (x-a)^\beta \right),$$

d'après le résultat de l'exemple 2, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{\text{RL}}D^p f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - p + \beta + 1)} (x - a)^{\beta + n - p} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - p + \beta + 1)} \frac{d^n}{dx^n} [(x - a)^{\beta + n - p}] \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n - p + \beta + 1)} \frac{\Gamma(\beta + n - p + 1)}{\Gamma(\beta - p + 1)} (x - a)^{\beta - p}. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x - a)^m = m(m - 1) \dots (m - n + 1)(x - a)^{m - n} \quad (1.75)$$

$$= \frac{\Gamma(m + 1)}{\Gamma(m - n + 1)} (x - a)^{m - n}. \quad (1.76)$$

En particulier, lorsque $p = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$${}^{\text{RL}}D^{0.5} x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Propriétés 1.10

1. Composition avec l'intégrale fractionnaire

Soit $p > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors on a :

$${}^{\text{RL}}I^p D^p f(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.77)$$

Donc l'opérateur de dérivation [13, 9] fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse à droite de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

2. Composition avec les dérivées d'ordre entier

Si les dérivées fractionnaires ${}^{\text{RL}}D^p f$ et ${}^{\text{RL}}D^{p+n} f$ existent pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\frac{d^n}{dx^n} [{}^{\text{RL}}D^p f(x)] = {}^{\text{RL}}D^{n+p} f(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.78)$$

mais, on a :

$${}^{\text{RL}}D^p \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = {}^{\text{RL}}D^{n+p} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^{k-p-n}}{\Gamma(k - p - n + 1)} f^{(k)}(a). \quad (1.79)$$

On déduit alors que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée d'ordre entière ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad \text{pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

3. Composition avec les dérivées fractionnaires

Pour $f \in L^1[a, b]$, $n - 1 < p < n$ et $m - 1 < q < m$ alors :

$${}^{RL}D^p \left[{}^{RL}D^q f(x) \right] = {}^{RL}D^{p+q} f(x) - \sum_{k=1}^m \left[{}^{RL}D^{q-k} f(a) \right] \frac{(x-a)^{-p-k}}{\Gamma(1-p-k)}, \quad (1.80)$$

et

$${}^{RL}D^q \left[{}^{RL}D^p f(x) \right] = {}^{RL}D^{p+q} f(x) - \sum_{k=1}^n \left[{}^{RL}D^{p-k} f(a) \right] \frac{(x-a)^{-q-k}}{\Gamma(1-q-k)}. \quad (1.81)$$

Par conséquent, les deux opérateurs de dérivation fractionnaires ${}^{RL}D^p$ et ${}^{RL}D^q$ ne commutent que si :

- $p = q$.
- $[{}^{RL}D^{q-k} f(a)] = 0$, pour tout $k = 1, 2, \dots, m$.
- $[{}^{RL}D^{p-k} f(a)] = 0$, pour tout $p = 1, 2, \dots, n$.

4. La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de RiemannLiouville est :

$$\mathcal{L} \left[{}^{RL}D^q f \right] (z) = z^n \mathcal{L} \left[I^{n-q} f \right] (z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j (I^{n-q} f) \right] (0^+) \quad (1.82)$$

$$= z^q \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^j (I^{n-q} f) \right] (0^+), \quad (1.83)$$

où $n - 1 < q < n$.

1.2.2.3 Approche de Caputo

Nous allons maintenant présenter une définition modifiée de la dérivation fractionnaire, cette définition a été développée pour surmonter les limitations de la définition de Riemann-Liouville liées à la modélisation des phénomènes réels par des équations fractionnaires.

Définition 1.7 [13] Soit f une fonction telle que $\frac{d^n}{dx^n}f \in L^1[a, b]$ et $n - 1 < p < n$ où $n \in \mathbb{N}^*$, alors la dérivée

$${}^C D_{a^+}^p f(x) = I_{a^+}^{n-p} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \quad (1.84)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^x (x-t)^{n-p-1} f^{(n)}(t) dt, \quad \forall x \in [a, b], \quad (1.85)$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo à gauche de la fonction f , et la dérivée

$${}^C D_{b^-}^p f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-p} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) \quad (1.86)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-p)} \int_x^b (t-x)^{n-p-1} f^{(n)}(t) dt, \quad \forall x \in [a, b], \quad (1.87)$$

est appelée dérivée fractionnaire d'ordre p au sens de Caputo à droite de la fonction f .

Exemple 1.10

1. La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo.

La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^C D^p c = 0.$$

2. La dérivée $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Caputo.

Soit $p > 0$ tel que $n - 1 < p < n$ avec $\beta > n - 1$. On a d'abord, d'après (1.76) :

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n}.$$

alors

$$\begin{aligned} {}^C D^p (x-a)^\beta &= I^{(n-p)} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x-a)^\beta \right] \\ &= I^{n-p} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} (x-a)^{\beta-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} I^{(n-p)} \left[(x-a)^{\beta-n} \right], \end{aligned}$$

d'après le résultat de l'exemple 2, on obtient :

$${}^C D^p (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-p)} (x-a)^{\beta-p}.$$

En particulier, lorsque $p = 0.5, \beta = 0.5$ et $a = 0$, on obtient :

$${}^C D^{0.5} x^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

Propriétés 1.11

1. Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est continue sur $[a, b]$ on a :

$${}^C D^p I^p f(x) = f(x), \quad (1.88)$$

et

$$I^p {}^C D^p f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a). \quad (1.89)$$

Alors l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire du même ordre, mais il n'est pas un inverse à droite [13, 9].

2. La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo est :

$$\mathcal{L} [{}^C D^q f] (z) = z^{q-n} \mathcal{L} [f^{(n)}] (z) \quad (1.90)$$

$$= z^{q-n} \left[z^n \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} f^{(j)}(0^+) \right] \quad (1.91)$$

$$= z^q \mathcal{L}[f](z) - \sum_{j=0}^{n-1} z^{q-1-j} f^{(j)}(0^+), \quad (1.92)$$

où $n-1 < q < n$.

3. Composition avec les dérivées fractionnaires

Si $0 < p, q \leq 1$ avec $p+q \leq 1$ et f de classe C^1 , alors :

$$\left({}^C D^p \circ {}^C D^q \right) f = {}^C D^{p+q} f = \left({}^C D^q \circ {}^C D^p \right) f. \quad (1.93)$$

1.2.2.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Théorème 1.4 Soit $n-1 < p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit f une fonction telle que ${}^C D^p f$ et ${}^{RL} D^p f$ existent, alors :

$${}^C D^p f(x) = {}^{RL} D^p f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} f^{(k)}(a). \quad (1.94)$$

Résolution analytique de l'équation de Bagley-Torvik par transformées intégrales

2.1 Introduction

L'équation de Bagley–Torvik constitue l'un des modèles fondamentaux du calcul fractionnaire. Elle a été formulée pour la première fois en 1972 par les chercheurs américains Ralph L. Bagley (né en 1922, décédé en 2008) et Peter J. Torvik (né en 1933), dans le cadre d'une étude expérimentale portant sur le comportement dynamique d'une plaque mince et élastique immergée verticalement dans un fluide viscoélastique. Cette démarche visait à remédier aux limites des équations différentielles classiques dans la modélisation de systèmes physiques présentant à la fois des effets instantanés et des effets à mémoire.

L'équation intègre deux types de dérivées : une dérivée ordinaire d'ordre deux, qui représente l'inertie du système, et une dérivée fractionnaire d'ordre, permettant de modéliser les effets de dissipation à mémoire, typiques des milieux viscoélastiques. Grâce à cette combinaison, elle rend possible l'analyse de phénomènes où l'évolution du système dépend non seulement de son état actuel, mais aussi de son histoire temporelle. Ce caractère non local et mémoriel est fondamental dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques.

- L'équation de Bagley–Torvik s'est révélée particulièrement efficace dans la modélisation d'une variété de phénomènes physiques et techniques, parmi lesquels :
- Le mouvement d'une plaque élastique dans un fluide viscoélastique (modèle original);

- Les vibrations de structures flexibles en génie mécanique et civil ;
- Le comportement dynamique d'un bras robotique souple soumis à des excitations externes ;
- Les systèmes de contrôle à mémoire dans les applications d'automatisation ;
- La diffusion de chaleur dans des matériaux à comportement non instantané ;
- Les circuits électriques fractionnaires comportant des composants passifs non linéaires ;
- Le fonctionnement de matériaux intelligents, tels que les capteurs piézoélectriques ;

Grâce à sa capacité à capturer des comportements complexes, cette équation joue aujourd'hui un rôle central dans l'analyse des systèmes dynamiques à mémoire, et constitue un outil essentiel en mathématiques appliquées, physique des matériaux, et ingénierie des systèmes.

2.2 Position du problème

P. J. Torvik et R. L. Bagley ont étudié le mouvement d'une plaque rigide $y(t)$ de masse m et d'aire A immergée dans un fluide newtonien d'extension infinie avec une densité ρ et une viscosité μ . Cette plaque est reliée par un ressort sans masse de raideur K à un point fixe, où une force externe $f(t)$ lui est appliquée pour $t > 0$, voir Figure 2.1. Notez que le déplacement $y(t)$ de la plaque est mesuré par rapport au point d'équilibre t_0 où le poids de la plaque est compensé par la force exercée par le ressort et la force de flottabilité expérimentée par la plaque.

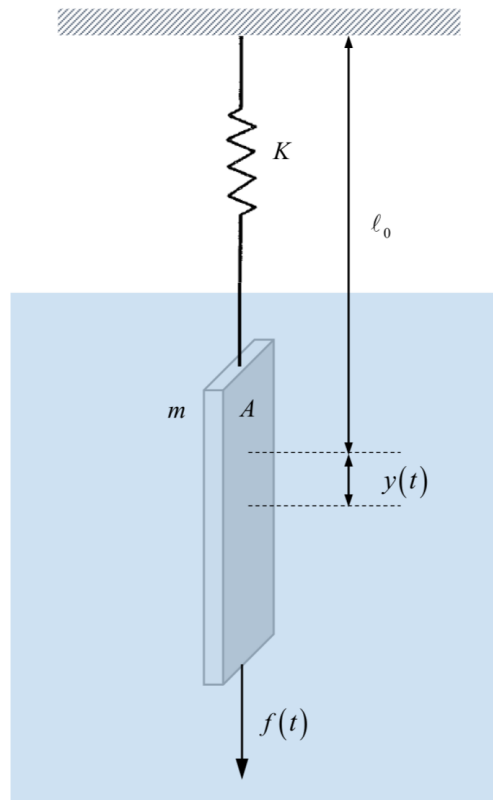


FIGURE 2.1 – Plaque immergée dans un fluide newtonien, reliée par un ressort sans masse.

Le mouvement de la plaque est gouverné par l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$ay^{(2)} + by^{(\alpha)}(t) + cy(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad \alpha(1, 2)$$

- $y(t)$: la fonction inconnue dépendant du temps.
- $y''(t)$: La dérivée seconde de $y(t)$ par rapport au temps représentant une accélération dans les systèmes dynamiques.

- $y^{(\alpha)}(t)$: La dérivée fractionnaire d'ordre α de $y(t)$ selon une définition donnée (par exemple celle de Rilmann-Liouville ou de Caputo).
- $a = m, b = 2A\sqrt{\mu\rho}, c = K$.
- $f(t)$: fonction de forçage externe qui peut être nulle pour l'étude du cas homogène.

2.3 Application de la transformée du Sumudu pour résoudre l'équation de Bagley-Torvik

Exemple 2.1

Nous considérons l'équations de Bagley-Torvik suivante :

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) + y^{\frac{3}{2}}(t) + y(t) = 1 + t. \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

On applique la transformée de sumudu à chaque terme de l'équation, ainsi qu'à la dérivée fractionnaire au sens de caputo :

$$S[y^2(t)] + S[y^{\frac{3}{2}}(t)] + S[y(t)] = S[1] + S[t]. \quad (2.2)$$

ce qui veut dire

$$\frac{1}{u^2} \left[F(u) - y(0) - u \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right] + u^{-\frac{3}{2}} [F(u)] - \sum_{k=0}^1 u^{-\frac{3}{2}+k} y^k(0) + F(u) = 1 + u \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{u^2} F(u) - \frac{1}{u^2} y(0) - \frac{1}{u} y'(0) + u^{-\frac{3}{2}} F(u) - u^{-\frac{3}{2}} y(0) - u^{-\frac{1}{2}} y'(0) + F(u) = 1 + u. \quad (2.4)$$

en utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\frac{1}{u^2} F(u) + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} F(u) - \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} + F(u) = 1 + u. \quad (2.5)$$

alors

$$F(u) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) = \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} + 1 \right) + \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} + u \right) \quad (2.6)$$

$$F(u) = 1 + \frac{\frac{1}{u} + \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} + u}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} + 1} \quad (2.7)$$

$$F(u) = 1 + u^2 \quad (2.8)$$

En appliquant la transformée inverse de Sumudu on obtient

$$y(t) = S^{-1}[F(u)] = S^{-1}[1 + u^2] \quad (2.9)$$

$$y(t) = 1 + t^2 \quad (2.10)$$

Exemple 2.2

Nous considérons [?] l'équation de Bagley-Torvik suivante :

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) + y^{(\frac{3}{2})}(t) + y(t) = \frac{15}{4}\sqrt{t} + \frac{15}{8}\sqrt{\pi t} + t^2\sqrt{t}, & t \geq 0 \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

on applique la transformée de Sumudu aux deux membres de l'équation, ainsi qu'à la dérivée fractionnaire au sens de caputo :

$$S[y^{(2)}(t)] + S[y^{(\frac{3}{2})}(t)] + S[y(t)] = S\left[\frac{15}{4}\sqrt{t}\right] + S\left[\frac{15}{8}\sqrt{\pi t}\right] + S[t^2\sqrt{t}]. \quad (2.12)$$

d'où

$$\frac{1}{u^2} \left[F(u) - y(0) - u \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right] + u^{-\frac{3}{2}}[F(u)] - \sum_{k=0}^1 u^{-\frac{3}{2}+k} y^{(k)}(0) + F(u) = \frac{15}{8}u^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi} + \frac{15}{8}\sqrt{\pi u} + \frac{15}{8}\sqrt{\pi u^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.13)$$

les conditions initiales nous mène à

$$\frac{1}{u^2}[F(u)] + u^{-\frac{3}{2}}[F(u)] + F(u) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}u^{\frac{1}{2}} \left(1 + u^{\frac{1}{2}} + u^2 \right) \quad (2.14)$$

alors

$$F(u) \left(\frac{1 + u^2 + u^{\frac{1}{2}}}{u^2} \right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}u^{\frac{1}{2}} \left(1 + u^{\frac{1}{2}} + u^2 \right) \quad (2.15)$$

$$F(u) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}u^{\frac{5}{2}} \quad (2.16)$$

on a : $S\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = u^n \Rightarrow S^{-1}\{u^n\} = \frac{t^n}{n!}.$

l'application de la transformée inverse de Sumudu nous donne

$$S^{-1}\left\{u^{\frac{5}{2}}\right\} = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right)} = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}} \quad (2.17)$$

$$y(t) = t^{\frac{5}{2}} \quad (2.18)$$

2.4 Application de la transformée de Laplace pour résoudre l'équation de Bagley-Torvik

Exemple 2.3

On considère l'équation de Bagley-Torvik suivante :

$$\begin{cases} y^{(\frac{3}{2})}(t) + y(t) = t^4 - 8t + \frac{64t^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}} \\ y(0) = 0, y'(0) = -8. \end{cases} \quad (2.19)$$

on applique la transformée de Laplace à la dérivée fractionnaire aux sens de Caputo, à chaque terme de l'équation différentielle précédente :

$$L \left[y^{(\frac{3}{2})}(t) + y(t) \right] = L \left[t^4 - 8t + \frac{64t^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}} \right] \quad (2.20)$$

$$L \left[y^{(\frac{3}{2})}(t) \right] + L[y(t)] = L[t^4] - 8L[t] + \frac{64}{5\sqrt{\pi}}L[t^{\frac{5}{2}}] \quad (2.21)$$

$$S^{\frac{3}{2}}Y(S) - \sum_{k=0}^1 S^{\frac{3}{2}-k-1}y^{(k)}(0) + Y(S) = \frac{24}{S^5} - \frac{8}{S^2} + \frac{24}{S^{\frac{7}{2}}} \quad (2.22)$$

$$\frac{S^2Y(S) - Sy(0) - y'(0)}{S^{\frac{1}{2}}} + Y(S) = \frac{24}{S^5} - \frac{8}{S^2} + \frac{24}{S^{\frac{7}{2}}} \quad (2.23)$$

si on applique les conditions initiales, on obtient

$$\frac{S^2Y(S) + 8}{S^{\frac{1}{2}}} + Y(S) = \frac{24}{S^5} - \frac{8}{S^2} + \frac{24}{S^{\frac{7}{2}}} \quad (2.24)$$

$$Y(S)(S^{\frac{3}{2}} + 1) = \frac{24 - 8S^3 + 24S^{\frac{3}{2}} - 8S^{\frac{3}{2}}}{S^5} \quad (2.25)$$

$$Y(S) = \frac{24(S^{\frac{3}{2}} + 1) - 8S^3(S^{\frac{3}{2}} + 1)}{(S^{\frac{3}{2}} + 1)S^5} \quad (2.26)$$

$$Y(S) = \frac{24}{S^5} - \frac{8}{S^2} \quad (2.27)$$

on a : $L[y(t)] = Y(S)$.

Maintenant, on applique la transformée inverse de Laplace

$$L^{-1}[Y(S)] = L^{-1} \left[\frac{24}{S^5} - \frac{8}{S^2} \right] \quad (2.28)$$

$$y(t) = t^4 - 8t \quad (2.29)$$

Exemple 2.4

On considère l'équation de Bagley-Torvik suivante :

$$\begin{cases} y^{(2)} + y^{\frac{3}{2}}(t) + y(t) = t^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

on applique la transformée de Laplace sur l'équation différentielle principale du problème précédent

$$L \left[y^{(2)} + y^{\frac{3}{2}}(t) + y(t) \right] = L \left[t^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{t}{\pi}} \right] \quad (2.31)$$

$$L \left[y^{(2)} \right] + L \left[y^{\frac{3}{2}}(t) \right] + L[y(t)] = L[t^2] + L[2] + \frac{4}{\sqrt{\pi}}L[\pi] \quad (2.32)$$

$$s^2Y(s) - \sum_{k=0}^1 s^k y^{(2-k)}(0) + s^{\frac{3}{2}}Y(s) - \sum_{k=0}^1 s^{\frac{3}{2}-k-1} y^{(k)}(0) + y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{2}{s^{\frac{3}{2}}} \quad (2.33)$$

$$s^2Y(s) + s^{\frac{3}{2}}Y(s) + Y(s) = \frac{2 + 2s^2 + 2s^{\frac{3}{2}}}{s^3} \quad (2.34)$$

on simplifie :

$$Y(s) = \frac{2}{s^3}. \quad (2.35)$$

On applique la transformée inverse de Laplace

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[\frac{1}{s^3} \right] \quad (2.36)$$

$$y(t) = t^2 \quad (2.37)$$

Il est à noter qu'il existe d'autres transformées intégrales récentes peuvent être utilisées pour résoudre l'équation de Bagley-Torvik.

transformée intégrale	Expression
transformée de pourreza	$T[f(t)] = v \int_0^{\infty} e^{-v^2 t} f(t) dt$
transformée de shehu	$S[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{v} t} f(t) dt$
transformée de Elzaki	$E[f(t)] = v \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{v}} dt$
transformée de Ara	$T[f(t)] = v \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-vt} f(t) dt$
transformée de Sadik	$S[f(t)] = \frac{1}{vB} \int_0^{\infty} e^{-vBt} f(t) dt$
transformée de Sawi	$S[f(t)] = \frac{1}{v^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v^2}} f(t) dt$
transformée de Tarig	$T[f(t)] = \frac{1}{v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{v^2}} f(t) dt$

TABLE 2.1 – Tableau de quelques transformées intégrales classiques et récentes

Résolution analytique de l'équation de Bagley–Torvik par la méthode de décomposition d'Adomian

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires ont vu leur champ d'application croître rapidement ces dernières décennies, notamment dans les domaines de la viscoélasticité, l'électrochimie, la dynamique des systèmes complexes ou encore la mécanique des fluides. Dans ce contexte, la méthode de décomposition d'Adomian offre une alternative analytique prometteuse aux méthodes classiques (Laplace, transformées intégrales, schémas numériques) pour résoudre ce type d'équation.

la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) constitue une méthode semi-analytique puissante pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et partielles, linéaires ou non linéaires, y compris celles contenant des dérivées fractionnaires.

La méthode a été introduite par George Adomian dans les années 1980, initialement pour traiter des systèmes stochastiques et non linéaires. Son objectif était de contourner les difficultés liées à la linéarisation des problèmes physiques complexes, tout en conservant une approche analytique rigoureuse. Elle a depuis été appliquée avec succès à une large variété de modèles, incluant les équations de Schrödinger, Navier–Stokes, les problèmes d'ondes non linéaires, et de nombreux

modèles en physique et en ingénierie.

Cette méthode repose sur la décomposition de la solution cherchée en une série infinie, et sur la linéarisation des termes non linéaires via des polynômes spécifiques appelés polynômes d'Adomian.

Elle présente plusieurs avantages notables :

- Elle ne requiert ni linéarisation, ni transformation intégrale (Laplace ou Fourier), ni discrétisation.
- Elle est applicable à une vaste classe d'équations incluant les modèles fractionnaires.
- Les calculs restent symboliques et peuvent être facilement automatisés dans des logiciels comme Maple ou Mathematica.

3.2 Existence et unicité de la solution

Définition 3.1 Une fonction réelle ou complexe $f(x)$, $x > 0$, est dite dans l'espace C_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, s'il existe un nombre réel p , $p > \alpha$, tel que

$$f(x) = x^p f_1(x)$$

avec une fonction $f_1(x)$ dans $C[0, \infty)$.

C_α est un espace vectoriel et l'ensemble des espace C_α est ordonné par inclusion selon

$$C_\alpha \subset C_\beta \Leftrightarrow \alpha \geq \beta. \quad (3.1)$$

Théorème 3.1 L'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville J^μ , $\mu \geq 0$, est une application linéaire de l'espace C_α , $\alpha \geq -1$, en lui-même, c'est-à-dire,

$$J^\mu : C_\alpha \rightarrow C_{\mu+\alpha} \subset C_\alpha.$$

Remarque 3.1 Dans le cas où $f \in C_\alpha$ pour une valeur $\alpha \geq -1$ et pour $\mu \geq 1$ on a $J^\mu f \in C_0 \subset C[0, \infty)$.

Il est important de noter que l'opérateur J^μ , $\mu > 0$, a la représentation convolutionnelle suivante dans l'espace C_α , $\mu \geq -1$:

$$(J^\mu f)(x) = (h_\mu \circ f)(x), \quad h_\mu(x) := x^{\mu-1}/\Gamma(\mu), \quad f \in C_\alpha \quad (3.2)$$

où

$$(g \circ f)(x) = \int_0^x g(x-t)f(t)dt, \quad x > 0$$

est la convolution de Laplace. Pour la convolution de Laplace elle-même, l'inclusion.

$$g \circ f \in C_{\alpha_1+\alpha_2+1} \subseteq C_{-1}, \quad f \in C_{\alpha_2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq -1 \quad (3.3)$$

est vraie. La représentation (3.2) et la commutativité de la convolution de Laplace (voir [6], [20]) conduisent à la propriété suivante de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$(J^\delta J^\eta f)(x) = (J^\eta J^\delta f)(x), \quad f \in C_\alpha, \alpha \geq -1, \delta \geq 0, \eta \geq 0.$$

Ensuite, en utilisant l'associativité de la convolution de Laplace et l'intégrale d'Euler de première espèce pour l'évaluation de $h_\delta \circ h_\eta(x)$, nous obtenons

$$(J^\delta J^\eta f)(x) = (J^{\eta+\delta} f)(x), \quad f \in C_\alpha, \alpha \geq -1, \delta \geq 0, \eta \geq 0, \quad (3.4)$$

également bien connu. En particulier, il découle de (3.4) que

$$\underbrace{(J^\mu \dots J^\mu f)}_n(x) = (J^{\eta^\mu} f)(x), \quad f \in C_\alpha, \alpha \geq -1, \mu \geq 0, n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Il est évident que la dérivée de Caputo (3) n'est pas définie sur l'ensemble de l'espace C_{α^-} . Introduisons un sous-espace de C_α , qui convient pour traiter la dérivée de Caputo.

Définition 3.2 Une fonction $f(x), x > 0$, est dite être dans l'espace

$$C_\alpha^m, m \in N_0 = N \cup \{0\}, \text{ si } f^{(m)} \in C_\alpha.$$

Remarque 3.2 L'espace C_α^m ne coïncide pas avec l'espace $C_\alpha^{(m)} = \{f : \text{il existe } p > \alpha, f \in C^m[0, \infty) \text{ such that } f(x) = x^p \tilde{f}(x)\}$, considéré dans [14]. Par exemple, si $f(x) = \cos(x)/\sqrt{x}, x > 0$, alors $f \in C_{-1}^{(1)}, f \notin C_{-1}^1$ et pour la fonction $f(x) \equiv 1, x > 0$, on a $f \notin C_0^{(1)}, f \in C_0^1$.

Nous énonçons cinq des propriétés de l'espace C_α^m , qui seront utilisées dans les discussions ultérieures.

- 1) C_α^m est un espace vectoriel.
- 2) $C_\alpha^0 \equiv C_\alpha$.

3) Si $f \in C_\alpha^m$ pour une valeur $\alpha \geq -1$ et un indice $m \geq 1$, alors $f^{(k)}(0+) := \lim_{x \rightarrow 0+} f^{(k)}(x) < +\infty, 0 \leq k \leq m - 1$, et la fonction.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ f(0+), & x = 0 \end{cases}$$

est dans $C^{m-1}[0; \infty)$.

Théorème 3.2 Soit $f \in C_{-1}^m, m \in \mathbb{N}_0$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo $D_*^\mu f, 0 \leq \mu \leq m$, est bien définie et l'inclusion.

$$D_*^\mu f \in \begin{cases} C_{-1}, & m - 1 < \mu \leq m, \\ C^{k-1}[0; \infty) \subset C_{-1}, & m - k - 1 < \mu \leq m - k, k = 1, \dots, m - 1 \end{cases}$$

est vrai.

Théorème 3.3 Soit $f \in C_{-1}^m, m \in \mathbb{N}$ et $m - 1 < \mu \leq m$. Alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo sont liées par la relation :

$$(D^\mu f)(x) = (D_*^\mu f)(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0+)}{\Gamma(1+k-\mu)} x^{k-\mu}, \quad x > 0. \quad (3.6)$$

Théorème 3.4 Soit $\mu > \mu_1 > \dots > \mu_n \geq 0, m_i - 1 < \mu_i \leq m_i, m_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$. Le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} (D_*^\mu y)(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i (D_*^{\mu_i} y)(x) = g(x), \\ y^{(k)}(0) = c_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, m - 1, m - 1 < \mu \leq m, \end{cases} \quad (3.7)$$

où la fonction g est supposée dans C_{-1} si $\mu \in \mathbb{N}$, dans C_{-1}^1 si $\mu \notin \mathbb{N}$, et la fonction inconnue $y(x)$ doit être déterminée dans l'espace C_{-1}^m , a une solution, unique dans l'espace C_{-1}^m , de la forme.

$$y(x) = y_g(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k u_k(x), \quad x \geq 0. \quad (3.8)$$

où

$$y_g(x) = \int_0^x t^{\mu-1} E_{(\cdot), \mu}(t) g(x-t) dt \quad (3.9)$$

est une solution du problème (3.7) avec des conditions initiales nulles, et le système de fonctions

$$u_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \sum_{i=l_k+1}^n \lambda_i x^{k+\mu-\mu_i} E_{(\cdot),k+1+\mu-\mu_i}(x), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (3.10)$$

remplit les conditions initiales $u_k^{(l)}(0) = \delta_{kl}, k, l = 0, \dots, m-1$.

La fonction

$$E_{(\cdot),\beta}(x) = E_{(\mu-\mu_1, \dots, \mu-\mu_n),\beta}(\lambda_1 x^{\mu-\mu_1}, \dots, \lambda_n x^{\mu-\mu_n}) \quad (3.11)$$

est un cas particulier de la fonction multivariée de Mittag-Leffler et les nombres naturels $l_k, k = 0, \dots, m-1$, sont déterminés à partir de la condition

$$\begin{cases} m_{l_k} \geq k+1, \\ m_{l_k+1} \leq k. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans le cas où $m_i \leq k, i = 0, \dots, m-1$, nous fixons $l_k := 0$, et si $m_i \geq k = 1, i = 0, \dots, m-1$, alors $l_k := n$.

3.3 Principe de la méthode de décomposition d'Adomian

Tout d'abord, on présente un aperçu sur la méthode de décomposition d'Adomian de manière générale.

3.3.1 Forme générale du problème

$$Lu + Ru + Nu = g(t) \quad (3.13)$$

avec :

- L : opérateur linéaire inversible,
- R : partie linéaire restante,
- N : opérateur non linéaire,
- g : second membre.

3.3.2 Décomposition de la solution

La solution générale de l'équation donnée est décomposée sous la forme d'une série infinie

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \quad (3.14)$$

où u_0 est la solution de l'équation $Lu = g$.

Chaque terme u_n de la série représente une approximation successive de la solution, permettant d'atteindre une précision arbitraire en considérant un nombre suffisant de termes.

3.3.3 Transformation de l'équation différentielle

À partir de l'équation (3.13), nous pouvons écrire :

$$Lu = g - Ru - Nu \quad (3.15)$$

comme L est inversible, une expression équivalente est :

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.16)$$

Pour les problèmes à valeurs initiales, nous définissons L^{-1} pour $L \equiv \frac{d^n}{dt^n}$ comme l'opérateur d'intégration définie n fois de 0 à t . En effet, pour l'opérateur $L \equiv \frac{d^2}{dt^2}$, nous avons :

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0) \quad (3.17)$$

Par conséquent :

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.18)$$

En outre, pour les problèmes aux valeurs limites, la résolution pour u donne :

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.19)$$

où A et B sont des constantes déterminées par les conditions aux limites.

Les trois premiers termes dans l'équation (3.18) ou (3.19) sont identifiés comme u_0 dans la décomposition supposée $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

De plus, pour le traitement du terme non-linéaire, on suppose que Nu est analytique, ce qui nous mène à écrire

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (3.20)$$

où les A_n sont les polynômes d'Adomian, tels que

$$A_0 = f(u_0) \quad (3.21)$$

$$A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0) \quad (3.22)$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) \quad (3.23)$$

$$A_3 = u_3 \frac{d}{du_0} f(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) \quad (3.24)$$

⋮

Ces polynômes peuvent être déterminés à partir de la formule générale (pour $n \geq 1$) :

$$A_n = \sum_{m=1}^n c(m, n) f^{(m)}(u_0) \quad (3.25)$$

Par conséquent, la solution générale devient :

$$u = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}Nu \quad (3.26)$$

$$= u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.27)$$

où :

$$u_0 = \phi + L^{-1}g \quad \text{et} \quad L\phi = 0 \quad (3.28)$$

Cette formulation conduit à la relation de récurrence fondamentale :

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \quad (3.29)$$

L'algorithme de la méthode d'Adomian se résume aux étapes suivantes :

1. **Initialisation** : Calculer u_0 à partir des conditions initiales/aux limites et du terme source
2. **Itération** : Utiliser u_0 connu pour déterminer successivement tous les composants $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ grâce à l'équation (3.29)
3. **Assemblage** : Substituer ces composants dans l'équation (3.41) pour obtenir la solution u

Remarque 3.3 *La convergence de cette méthode a été rigoureusement établie par plusieurs auteurs [...]*

Remarque 3.4 *Il est à souligner que la méthode de décomposition d'Adomian présente plusieurs avantages remarquables :*

- **Universalité** : *Applicable aux équations linéaires et non linéaires, ordinaires et aux dérivées partielles*
- **Pas de linéarisation requise** : *Traite directement les non-linéarités sans approximation préalable*
- **Convergence rapide** : *La série converge généralement très rapidement pour les problèmes physiques réels*
- **Simplicité algorithmique** : *Les composants de la solution en série peuvent être facilement calculés*
- **Flexibilité** : *Adaptable aux problèmes à valeurs initiales et aux valeurs limites*

3.4 Application à l'équation de Bagley-Torvik

Dans cette section on applique la méthode de décomposition de domaine Adomian, cette méthode offre une approche analytique et systématique pour résoudre les équations différentielles fractionnaires, faisant le lien entre les mathématiques appliquées et les applications en ingénierie. En effet, la méthode évite la linéarisation ou la perturbation et gère naturellement les dérivées fractionnaires.

On considère l'équation différentielle fractionnaire dont le sens de dérivation est de type Riemann-Liouville

$$AD_t^2 x(t) + BD_t^{3/2} x(t) + Cx(t) = g(t) \quad (3.30)$$

où $A \neq 0$ et $B, C \in \mathbb{R}$. avec les conditions initiales homogènes suivantes :

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \quad (3.31)$$

ces conditions correspondent à l'état d'équilibre au début d'un processus dynamique.

Nous adoptons la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre ce problème. Dans le cadre de cette méthode, nous supposons que la solution peut s'exprimer sous la forme d'une série infinie

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + \dots$$

Cette décomposition permet de transformer le problème initial en une séquence de sous-problèmes plus simples à résoudre.

L'équation (3.30) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \frac{B}{A} \frac{d^{3/2}}{dt^{3/2}}x(t) + \frac{C}{A}x(t) = \frac{g(t)}{A} \quad (3.32)$$

pour appliquer la méthodologie d'Adomian, nous identifions les différents opérateurs :

L'opérateur linéaire facilement inversible : $Lx = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$

L'opérateur linéaire restant : $Rx = \frac{d^{3/2}}{dt^{3/2}}x(t)$

La partie non-linéaire : $Nx = \frac{C}{A}x(t)$ (qui est en fait linéaire dans ce cas particulier)

alors

$$Nx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{C}{A}x(t) \quad (3.33)$$

où les polynômes d'Adomian s'écrivent comme suit

$$A_0 = f(x_0) = \frac{C}{A}x_0 \quad (3.34)$$

$$A_1 = x_1 \frac{d}{dx_0} f(x_0) = \frac{C}{A}x_1 \quad (3.35)$$

$$A_2 = x_2 \frac{d}{dx_0} f(x_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{dx_0^2} f(x_0) = \frac{C}{A}x_2 \quad (3.36)$$

$$A_3 = x_3 \frac{d}{dx_0} f(x_0) + x_1 x_2 \frac{d^2}{dx_0^2} f(x_0) + \frac{x_1^3}{3!} \frac{d^3}{dx_0^3} f(x_0) = \frac{C}{A}x_3 \quad (3.37)$$

⋮

et ainsi de suite. Alors, la méthode de décomposition d'Adomian, nous donne

$$x(t) = x(0) + tx'(0) + \frac{1}{A}L^{-1}f(t) - \frac{B}{A}L^{-1} \left[D_t^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \right] - \frac{C}{A}L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \quad (3.38)$$

En tenant compte des conditions initiales homogènes, cette expression se simplifie en :

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{A}L^{-1}f(t)}_{x_0(t)} - \frac{B}{A}L^{-1} \left[D_t^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \right] - \frac{C}{A}L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \quad (3.39)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} f(t) - \frac{B}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} \left[D_t^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \right] - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \\ &= \frac{1}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} f(t) - \frac{B}{A} \frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right] - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \end{aligned}$$

où, il est à noter que les terme de décomposition sont définis récursivement par

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{A} D_t^{-2} f(t), \\ x_1(t) &= -\frac{B}{A} D_t^{-1/2} x_0(t) - \frac{C}{A} D_t^{-2} x_0(t), \\ x_2(t) &= -\frac{B}{A} D_t^{-1/2} x_1(t) - \frac{C}{A} D_t^{-2} x_1(t), \\ &\vdots \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les termes d'ordre supérieur. Par conséquent, la solution générale du problème (3.30) – (3.31) est

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{A} \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} f(t) \\ &\quad - \frac{B}{A} \left[\frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} x_0(t) + \frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} x_1(t) + \frac{d^{-1/2}}{dt^{-1/2}} x_2(t) + \dots \right] \\ &\quad - \frac{C}{A} \left[\frac{d^{-2}}{dt^{-2}} x_0(t) + \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} x_1(t) + \frac{d^{-2}}{dt^{-2}} x_2(t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Cette expression constitue la base pour l'analyse numérique et la comparaison avec d'autres méthodes de résolution disponibles dans la littérature.

Considérons maintenant un cas particulier où le second membre de l'équation de Baley-Torvik (3.30) est donné par

$$f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

cette fonction modélise une force constante appliquée sur l'intervalle $[0, 1]$, puis supprimée brusquement après $t = 1$. Ce type de chargement est fréquent dans les tests mécaniques à charge impulsionnelle. Cette fonction peut s'exprimer à travers la fonction en échelon unité (Heaviside function) $u(t)$, comme suit

$$f(t) = 8(u(t) - u(t - 1))$$

en utilisant la propriété suivante

$$D_t^{-2}u(t) = \frac{t^2}{2}u(t), \quad D_t^{-2}u(t - 1) = \frac{(t - 1)^2}{2}u(t - 1),$$

on obtient la forme explicite du premier terme

$$x_0(t) = \frac{8}{A} \left[\frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t - 1)^2}{2}u(t - 1) \right]$$

Cette expression donne une approximation initiale du comportement du système sous excitation limitée dans le temps.

Les termes suivants $x_1(t), x_2(t), \dots$ sont obtenus par intégration fractionnaire directe des termes précédents

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{B}{A^2} \frac{d^{-1/2}x_0(t)}{dt^{-1/2}} - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}x_0(t)}{dt^{-2}} \\ &= 8 \left[-\frac{B}{A^2} \frac{u(t) t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{C}{A^2} \frac{u(t) t^2}{\Gamma(3)} + \frac{B}{A^2} \frac{u(t - 1)(t - 1)^{5/2}}{\Gamma(7/2)} + \frac{C}{A^2} \frac{u(t - 1)(t - 1)^4}{\Gamma(5)} \right], \\ x_2(t) &= -\frac{B}{A^2} \frac{d^{-1/2}x_1(t)}{dt^{-1/2}} - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}x_1(t)}{dt^{-2}} \\ &= 8 \left[\frac{B^2}{A^3} \frac{u(t) t^3}{\Gamma(4)} + \frac{2BC}{A^3} \frac{u(t) t^{9/2}}{\Gamma(11/2)} + \frac{C^2}{A^3} \frac{u(t)^6}{\Gamma(7)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B^2}{A^3} \frac{u(t - 1)(t - 1)^3}{\Gamma(4)} - \frac{2BC}{A^3} \frac{u(t - 1)(t - 1)^{9/2}}{\Gamma(11/2)} - \frac{C^2}{A^3} \frac{u(t - 1)^6}{\Gamma(7)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= -\frac{B}{A^3} \frac{d^{-1/2}x_2(t)}{dt^{-1/2}} - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}x_2(t)}{dt^{-2}} \\
 &= 8 \left[\frac{B^3 u(t) t^{7/2}}{A^4 \Gamma(9/2)} + \frac{3B^2C u(t) t^5}{A^4 \Gamma(6)} + \frac{3BC^2 u(t) t^{13/2}}{A^4 \Gamma(15/2)} + \frac{C^3 u(t)^8}{A^4 \Gamma(9)} \right. \\
 &\quad + \frac{B^3 u(t-1)(t-1)^{7/2}}{A^4 \Gamma(9/2)} + \frac{3B^2C u(t-1)(t-1)^5}{A^4 \Gamma(6)} \\
 &\quad \left. + \frac{3BC^2 u(t-1)(t-1)^{13/2}}{A^4 \Gamma(15/2)} + \frac{C^3 u(t-1)(t-1)^8}{A^4 \Gamma(9)} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4(t) &= -\frac{B}{A^4} \frac{d^{-1/2}x_3(t)}{dt^{-1/2}} - \frac{C}{A} \frac{d^{-2}x_3(t)}{dt^{-2}} \\
 &= 8 \left[\frac{B^4 u(t)^4}{A^5 \Gamma(5)} + \frac{4B^3C u(t)^{11/2}}{A^5 \Gamma(13/2)} + \frac{6B^2C^2 u(t)^7}{A^5 \Gamma(8)} + \frac{4BC^3 u(t)^{17/2}}{A^5 \Gamma(19/2)} + \frac{C^4 u(t)^{10}}{A^5 \Gamma(11)} \right. \\
 &\quad - \frac{B^4 u(t-1)(t-1)^4}{A^5 \Gamma(5)} - \frac{4B^3C u(t-1)(t-1)^{11/2}}{A^5 \Gamma(13/2)} \\
 &\quad \left. - \frac{6B^2C^2 u(t-1)(t-1)^7}{A^5 \Gamma(8)} - \frac{4BC^3 u(t-1)(t-1)^{17/2}}{A^5 \Gamma(19/2)} - \frac{C^4 u(t-1)(t-1)^{10}}{A^5 \Gamma(11)} \right].
 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

D'où, la solution du problème est devenue comme suit

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{8}{A} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{C}{A}\right)^r t^{2(r+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-B}{A}\right)^j \frac{(j+r)! u(t) t^{j/2}}{j! \Gamma\left(\frac{j}{2} + 2r + 3\right)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{C}{A}\right)^r (t-1)^{2(r+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{-B}{A}\right)^j \frac{(j+r)! u(t-1)(t-1)^{j/2}}{j! \Gamma\left(\frac{j}{2} + 2r + 3\right)} \right] \\
 &= \frac{8}{A} \left[u(t) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{C}{A}\right)^r t^{2(r+1)} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{(r)} \left(\frac{-B}{A} t^{1/2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - u(t-1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left(\frac{C}{A}\right)^r (t-1)^{2(r+1)} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^{(r)} \left(\frac{-B}{A} (t-1)^{1/2}\right) \right], \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

où, $E_{\lambda, \mu}(z)$ est la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres.

$$E_{\lambda, \mu}^{(r)}(y) \equiv \frac{d^r}{dy^r} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+r)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda r + \mu)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

La solution (3.41) coïncide avec la solution obtenue par Podlubny [10] en utilisant la fonction de Green fractionnaire.

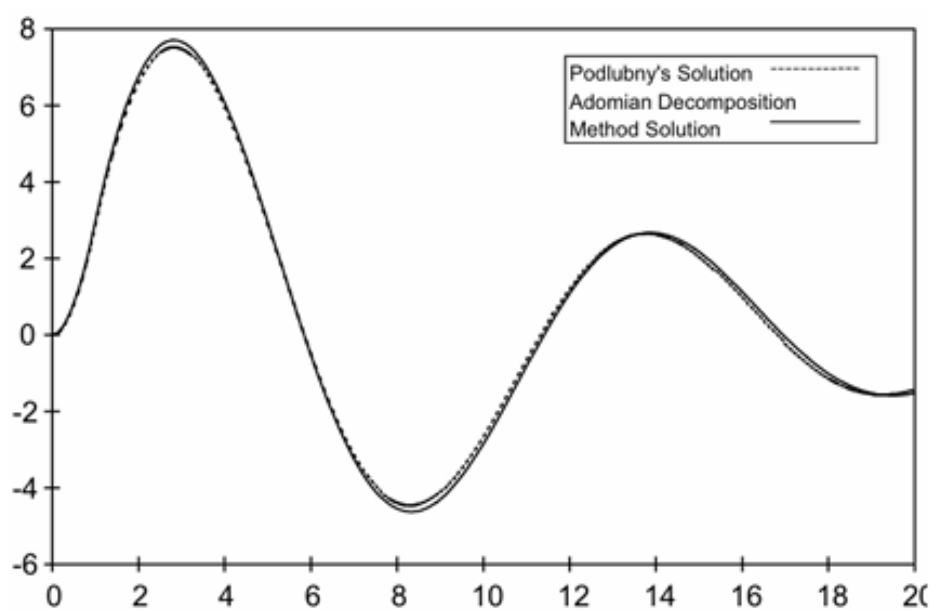


FIGURE 3.1 – Comparison de la solution par la méthode de décomposition d'Adomian et la solution numérique du Podlubnys

Conclusion

Dans ce travail on a présenté l'aspect théorique et l'approche pratique dans l'étude de l'équation de Bagley–Turvik, considérée comme un modèle mathématique pertinent pour représenter certains phénomènes physiques à mémoire, notamment dans les milieux viscoélastiques.

Sur le plan analytique, nous avons utilisé des outils puissants tels que la transformée de Laplace et la transformée de Sumudu, qui nous ont permis d'obtenir des solutions exactes et d'analyser le comportement de l'équation. Par ailleurs, nous avons combiné cette approche analytique avec une méthode numérique à travers la méthode de décomposition d'Adomian, reconnue pour son efficacité dans le traitement des équations différentielles non linéaires et complexes, tout en offrant une alternative valable aux méthodes classiques. Les résultats obtenus confirment l'efficacité de cette approche mixte et permettent une meilleure compréhension du comportement dynamique de l'équation.

Enfin, il convient de souligner que les équations différentielles fractionnaires, et en particulier l'équation de Bagley–Turvik, offrent de vastes perspectives de recherche, en raison de leur capacité à modéliser avec précision des systèmes physiques complexes.

Bibliographie

- [1] Adomian G., Solving Frontier Problems of Physics : The Decomposition method, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [2] Asiru. M. A., Further properties of the Sumudu transform and its applications. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol : 33, N= 3, 441 –449, 2002.
- [3] Bagley R.L., Torvik P.J., On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials, ASME J. Appl. Mech. 51 (1984) 294–298.
- [4] Belgacem F. B. M., Karaballi. A. A., Kalla. S. L., Analytical Investigation of The Sumudu Transform and Applications to Integral Production Equations. Journal of Mathematical Problems in Engineering, Vol : 2003, N= 3, 103 – 118, 2003.
- [5] Belgacem. F. B. M., Abdullatif. K. A. , Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Vol : 2006, Article ID 91083, 1 – 23, 2006.
- [6] Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [7] Lesfari A., Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace. Ellipses Édition Marketing S.A., 2012.
- [8] Miller K.B., Ross B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [9] Oldham K.B., Spanier J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York, London, 1974.

- [10] Pedas A., Tamme E., On the convergence of spline collocation methods for solving fractional differential equations. *J Comput Appl Math* 235 :3502–3514, 2011.
- [11] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, CA, USA, 1999.
- [12] Spiegel M. R., *Theory and problems of Laplace transforms*. Schaum Publishing Co., New York, 1965.
- [13] Watugala. G.K. , Sumudu transform : A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems . *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol : 24, N=1, 35 – 43, 1993.