

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F. S/D.M/...../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

**Stabilité exponentielle d'un système poreux élastique
avec micro-température**

Option : AFA

Par :

1. BOUAFIA Nada
2. KHELKHAL Rihab

Encadré par : FOUGHALI Fouzia

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : GHENAM Karima

MCB U. SKIKDA

Examineur : CHOUGUI Zoulikha

MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

La première personne que nous tenons à remercier est notre encadrante FOUGHALI Fouzia pour l'orientation, la confiance, la patience et ses bonnes explications qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Enfin, nous tenons également à remercier le chef de département du Mathématique « Université Skikda » Mr Bouzetouta Lamin et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes
sincères sentiments,

Pour leur patience illimitée, leur encouragement continu, leur
aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour
leurs grand sacrifices

À mon Mari « Hamza »

À mes chères sœurs << Amira, Meriem, Lamis et Roumaïssa >>.

À mes frères « Djaber, Mohamed »

À mes chers Amis

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce
travail soit possible, je vous dis merci.



Bouafia Nada



DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes
sincères sentiments,

Pour leur patience illimitée, leur encouragement continu, leur
aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour
leurs grand sacrifices

À mes chères sœurs << Nouha, Radja, Noussaiba et Hanaa >>.

À mes frères « Maamoun »

À mes chers Amis

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce
travail soit possible, je vous dis merci.



Khelkhal Rihab

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Introduction	6
1	Préliminaires	11
1.1	Espaces Fonctionnels	11
1.1.1	Espaces fonctionnels linéaires	12
1.1.2	Certaines inégalités intégrales	13
1.1.3	Espaces de Sobolev	14
1.1.4	L'espaces $W^{1,p}$	14
1.1.5	L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$	15
1.1.6	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$	15
1.2	Semi-groupe	16
1.3	Quelques théorèmes utiles	16
1.4	L'approximation de Hille-Yosida	17
1.5	Théorème (Lumer-Phillips)	18
1.6	Théorème de Lax-miligram	18
1.7	Quelques inégalités algébriques	21
1.8	Théorie des Semi-groupes	22
1.9	Théorie de la stabilité de Lyapunov	28

2	Résultat pour l'existence et l'unicité de système	31
2.1	Existence et unicité de la solution	32
2.2	La régularité de la solution	40
3	Résultat pour la stabilité de système	43

Résumé

Dans notre travail, nous examinons un système poreux élastique avec microtempérature. Notre principal résultat est d'étudier la stabilité exponentielle du système par des techniques qui basent sur la construction du fonctionnel de Lyapunov, et nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du système par la méthode du semi-groupe.

Mots-clés : Stabilité exponentielle, théorie du semi-groupe, fonction de Lyapunov.

Abstract

In this work, we considered a system porous-elastic with microtemperature. Our main result is to study the exponential stability of the system by techniques that base on the construction of Lyapunov's functional, and we show the existence and uniqueness of the solution of the system by the semi-group method.

Keywords : Exponential stability, semi-group theory, Lyapunov function.

المخلص

ندرس في هذه المذكرة استقرار أنظمة مكونة من معادلات تفاضلية جزئية زائدية, تتمثل هذه

المعادلات في ما يسمى بالأنظمة المتأثرة بالحرارة, وهذه الأخيرة تتمثل في الأنظمة المسامية تحت

الشروط الابتدائية والحدية.

لقد قمنا بدراسة وجود وحدانية الحل بالإعتماد على أشباه المجموعات والاستقرار الآسي باستعمال

النظرية الطاقوية التي تعتمد على بناء دالة جديدة تسمى دالة اليابونوف.

الكلمات المفتاحية:

الاستقرار الآسي, الأنظمة المسامية, دالة اليابونوف.

Notations

\mathbb{R} : corps des nombres réels.

\mathbb{C} : corps des nombres complexes.

Γ : frontière de Ω

$C^k(\Omega)$: fonctions k fois continument différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).

A : opérateur linéaire.

$D(A)$: domaine de définition de l'opérateur A .

$\mathcal{L}(E, F)$: espace des opérateurs linéaires continus de E dans F .

H_1, H_2 : des espaces de Hilbert des normes respectives $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_{H_2}$

H : espace de Hilbert ou la norme et le produit scalaire sont noté respectivement par $|\cdot|$, (\cdot, \cdot) .

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A .

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert borné.

$\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω

0.1 Introduction

Dans [1], Goodman et Cowin ont proposé une extension de la théorie classique de l'élasticité aux milieux poreux en introduisant le concept d'une théorie continue des matériaux granulaires avec des vides interstitiels dans la théorie des solides élastiques avec des vides. En plus des effets élastiques habituels, les matériaux avec des vides possèdent une microstructure avec la propriété que la masse en chaque point est obtenue comme le produit de la densité de masse de la matrice du matériau par la fraction volumique. En fait, la notion de microtempérature a été utilisée dans la théorie de la thermodynamique pour les matériaux élastiques avec microstructure. En plus des microdéformations de la corde, les éléments microscopiques du continuum possèdent des microtempératures qui reflètent la variation de la température à l'intérieur d'un microvolume. Ainsi, la théorie de la thermélasticité avec des microtempératures a fait l'objet de plusieurs résultats. Nous renvoyons le lecteur aux références [2],[6]. Dans [7], Cowin et Nunziato ont introduit le concept selon lequel les matériaux avec des vides possèdent une microstructure avec la propriété que la masse en chaque point est obtenue comme le produit de la densité de masse de la matrice du matériau par la fraction volumique. Plus tard, Ieşan [8],[10] et Ieşan et Quintanilla [11] ont ajouté la température et les éléments de microtempérature à la théorie. Dans [12], Casas et Quintanilla ont considéré un système unidimensionnel de solides élastiques micromorphiques avec les effets thermiques habituels. Plus précisément, ils ont étudié le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ J\varphi_{tt} = \alpha\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - dw_x + m\theta, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ c\theta_t = k\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - l\varphi_t - k_1 w_x, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ \delta w_t = k_4 w_{xx} - d\varphi_{tx} - k_2 w - k_3 \theta_x, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Ils ont utilisé l'approche du semi-groupe pour prouver la stabilité exponentielle des solutions indépendamment des vitesses de propagation des ondes. Leur méthodologie

est basée sur les arguments proposés dans le livre de Liu et Zheng [13]. L'analyse de la décroissance temporelle des matériaux poro-élastiques unidimensionnels a été initiée dans [14]. L'auteur a montré que la dissipation due à la viscosité poreuse n'est pas suffisante pour garantir la stabilité exponentielle des solutions. Magaña et Quintanilla[15] ont prouvé que la combinaison de la viscoélasticité avec les microtempératures produit une stabilité exponentielle, tandis que la combinaison de la viscoélasticité avec la température manque de stabilité exponentielle. Com

me dans [16], dans ce travail, nous avons considéré le système 1 et montré, en utilisant la méthode des multiplicateurs, que la combinaison de l'amortissement par frottement dans la première équation et les effets de microtempérature sans effet thermique ($k = 0$) stabilise le système de manière exponentielle, quelles que soient les coefficients du système. Ce résultat est nouveau et améliore les résultats récents de la littérature. Les équations d'évolution de base pour les théories unidimensionnelles des matériaux poreux avec température et microtempérature données par :

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} &= Tx - \tau u_t, & J\varphi_{tt} &= H_x + G, \\ \rho\eta_t &= q_x, & \rho E_t &= P_x + q - Q,\end{aligned}\tag{2}$$

Où T est la contrainte, G est la force volumique équilibrée, H est la contrainte équilibrée, η est l'entropie, q est le vecteur de flux de chaleur, P est le premier moment de flux de chaleur, Q est le flux de chaleur moyen et E est le premier moment d'énergie. Les variables u et φ représentent respectivement le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique. Les équations constitutives sont :

$$\begin{aligned}
T &= \mu u_x + b\varphi - \gamma\theta, \\
H &= \delta\varphi_x - dw, \\
G &= -bu_x - \xi\varphi + m\theta, \\
\rho\eta &= \gamma u_x + c\theta + m\varphi, \\
q &= k\theta_x + k_1w, \\
P &= -k_2w_x, \\
Q &= -k_3w - k_1\theta_x, \\
\rho E &= -\alpha w - d\varphi_x,
\end{aligned} \tag{3}$$

où $\alpha = aT_0$, ρ est la masse volumique de référence et w et θ désignent le vecteur de microtempérature et la température mesurée par rapport à la température absolue constante ($T_0 > 0$). Les coefficients $k_1, k_2, k_3, \mu, \delta, \xi, a, k$ et c sont des constantes constitutives qui sont positives. Comme le couplage est pris en compte, b doit être différent de zéro et doit satisfaire à l'inégalité

$$\mu\xi > b^2. \tag{4}$$

Les coefficients γ, m et d sont des constantes qui ne sont pas nécessairement positives. En substituant 3 dans 2 avec $k = \beta = 0$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
\rho u_{tt} &= \mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x - \tau u_t, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\
J\varphi_{tt} &= \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - dw_x + m\theta, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\
c\theta_t &= -\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1w_x, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\
\alpha w_t &= k_2w_{xx} - k_3w - k_1\theta_x - d\varphi_{tx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x), \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), & x \in (0, 1) \\
\varphi_t(x, 0) &= \varphi^1(x), w(x, 0) = w^0(x), \theta(x, 0) = \theta^0(x), & x \in (0, 1)
\end{aligned} \tag{6}$$

ici, $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, w^0, \theta^0$ sont des fonctions données, et les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}
u_x(0, t) &= u_x(1, t) = \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t > 0 \\
\theta(0, t) &= \theta(1, t) = w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, & t > 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Pour éviter ce cas et aussi pour pouvoir utiliser l'inégalité de Poincaré, nous effectuons la transformation suivante : À partir de la première équation de 5, nous observons que

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx + \tau \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{8}$$

si nous prenons $\gamma(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$, alors $\gamma(0) = \int_0^1 u^0(x) dx$ et $\gamma'(0) = \int_0^1 u^1(x) dx$. Nous avons donc le problème de valeur initiale suivant :

$$\rho \gamma''(t) + \tau \gamma'(t) = 0,$$

$$\gamma(0) = \int_0^1 u^0(x) dx, \gamma'(0) = \int_0^1 u^1(x) dx \tag{9}$$

En résolvant 5, nous obtenons

$$\gamma(t) = \int_0^1 u^0(x) dx - \frac{\rho}{\tau} \left(\int_0^1 u^1(x) dx \right) \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\tau} t\right) - 1 \right).$$

Par conséquent, si nous posons

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - \int_0^1 u^0(x) dx + \frac{\rho}{\tau} \left(\int_0^1 u^1(x) dx \right) \left(\exp\left(-\frac{\rho}{\tau} t\right) - 1 \right),$$

nous obtenons

$$\int_0^1 \tilde{u}(x, t) dx = 0, \forall t \geq 0.$$

Maintenant, à partir de la quatrième équation de 5 et des conditions aux limites 7, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 w(x, t) dx + \frac{k_3}{\alpha} \int_0^1 w(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

avec

$$\int_0^1 w(x, t) dx = \left(\int_0^1 w^0 dx \right) \exp\left(-\frac{t}{\alpha} k_3\right).$$

Alors, si nous posons

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) - \left(\int_0^1 w^0 dx \right) \exp\left(-\frac{t}{\alpha} k_3\right), \quad t \geq 0, x \in [0, 1]$$

nous arrivons à

$$\int_0^1 \tilde{w}(x, t) dx = 0, \quad t \geq 0$$

et $(\bar{u}, \varphi, \theta, \bar{w})$ satisfait les mêmes équations que celles de 5-7. Dans la suite, nous travaillerons avec \bar{u} et \bar{w} , mais par souci de simplicité, nous écrirons u et w au lieu de \bar{u} et \bar{w} .

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le chapitre 1, nous introduisons les espaces fonctionnels et énonçons les résultats préliminaires nécessaires à notre analyse. Dans le chapitre 2, nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions du système 5-7. Dans le chapitre 3, nous établissons la stabilisation exponentielle uniforme du système en utilisant la méthode des multiplicateurs.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et certains résultats sur les inégalités dans l'espace de Sobolev, aussi, nous donnons les définitions et quelques inégalités intégrales qui jouent un rôle dans notre travail. De plus, en utilisant la théorie du semi-groupe qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail. On désignera par un ouvert borné de R^n .

1.1 Espaces Fonctionnels

espace complet

Définition 1.1 *Un espace normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E .*

Espaces de Banach

Définition 1.2 *Un espace vectoriel normé complet s'appelle espace de Banach.*

Espace de Hilbert

Définition 1.3 *Un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est **complet** pour la norme*

$$(u, v)^{\frac{1}{2}}$$

.

1.1.1 Espaces fonctionnels linéaires

Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.4 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, et soit Ω est un domaine ouvert dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. définir l'espace de Lebesgue norme $L^p(\Omega)$, par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}. \quad (1.1)$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$, noté par

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2)$$

Définition 1.5 *si $p = \infty$, on définit*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0 / |f(x)| \leq C, p.p. \text{ sur } \Omega\} \quad (1.3)$$

on définit

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C \geq 0, |f(x)| \leq C \text{ a.e dans } \Omega\}.$$

Théorème 1.1 *il est bien connu que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|f\|_p$ est un espace de Banach , pour tous $1 \leq p \leq \infty$.*

Définition 1.6 (Espaces $L^2(\Omega)$) *Pour $p = 2$ on note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable c-à-d*

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int |u(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

L'espace linéaire $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{0,\Omega} = \int u(x) v(x) dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Certaines inégalités intégrales

Nous allons donner ici quelques inégalités intégrales importantes. Ces inégalités jouent un rôle important en mathématiques appliquées et aussi, il est très utile dans nos prochains chapitres.

Inégalité de Hölder's

Théorème 1.2 *Inégalité de Hölder's) Soit $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, supposant que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, et $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ alors, $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Inégalité Young's

Lemme 1.1 *Inégalité Young's) soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. alors , $f \times g \in L^r(\mathbb{R})$ et*

$$\|f \times g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}. \quad (1.4)$$

1.1.3 Espaces de Sobolev

1.1.4 L'espaces $W^{1,p}$

Définition 1.7 *(Espaces $W^{1,p}$) l'espace de sobolev $W^{1,p}$ et de défini par :*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \mid \int_I u\varphi' = - \int g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

On pose $H^1(I) = W^{1,2}(I)$, pour $u \in W^{1,p}(I)$ on note $u' = g$

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{1/p}$).

L'espace H^1 est muni de produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}.$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

Proposition 1.1 *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de banach pour $1 \leq p < \infty$. L'espace $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$*

L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.1.5 L'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$

Définition 1.8 *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^{1,p}(I)$ dans $W^{1,p}(I)$. On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.*

L'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}$, l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$.

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.1.6 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$

Définition 1.9 *Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I)\}$$

. On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que $u \in W^{m,p}(I)$ si et seulement s'ils existe m fonctions $g_1, \dots, g_m \in L^p(I)$ telle que :

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, \dots, m$$

, où $D^j \varphi$ désigne la dérivée à l'ordre j de φ , lorsque $u \in W^{m,p}(I)$, on peut donc considérer les dérivées successives $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$ jusqu'à l'ordre m , on les note $Du, D^2u, \dots, D^m u$

l'espace $W^{m,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p},$$

et l'espace H^m est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.2 Semi-groupe

Définition 1.10 Une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'éléments $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ pour $t \geq 0$ forme un semi-groupe de classe C_0 dans X (ou semi-groupe fortement continu), si elle vérifie les conditions suivantes :

$$S(t) = I \quad (\text{identité dans } \mathcal{L}(X)).$$

$$S(t+s) = S(t)S(s) \quad \text{pour tout } t, s \geq 0 \quad (\text{propriété algébrique}).$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|S(t)x - x\|_X = 0 \quad \text{pour tout } x \in X \quad (\text{propriété topologique}).$$

1.3 Quelques théorèmes utiles

Définition 1.11 soit $A : D(A) \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné on dit que A est dissipatif si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

A est dit maximal si $\text{Im}(I - A) = H$ c_d_d

$$\forall f \in H, \quad u \in D(A) \quad \text{telque } (I - A)u = f$$

Théorème 1.3 Remarque 1.1 A est dit monotone si $-A$ est dissipatif ...

Théorème 1.4 (Hille-Yosida) soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(donnée initiale)} \end{cases}$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0$$

1.4 L'approximation de Hille-Yosida

Soit X un espace de Banach.

Lemme 1.2 soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.
- 2) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons :

- 1) $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$
- 2) $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \lambda A R(\lambda, A)x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$

Définition 1.12 La famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_\omega} \in L(X)$ ou $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$ s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A .

Lemme 1.3 soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.
- 2) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisé de Yosida de l'opérateur A alors $\forall \epsilon > 0$ et $\forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|\exp^{tA_\alpha} x - \exp^{tA_\beta} x\| \leq M^2 t e^{\exp(\omega + \epsilon)t} \|A_\alpha x - A_\beta x\|, \quad \forall x \in X \quad t \geq 0.$$

1.5 Théorème (Lumer-Phillips)

Théorème 1.5 soit $A : D(A) \rightarrow H$ un opérateur linéaire de domaine dense dans H . Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contractions si et seulement si :

- 1 A est dissipatif
- 2 il existe un $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = H$

1.6 Théorème de Lax-miligram

Théorème 1.6 soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H^1$ il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H$$

de plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - (\varphi, u) = \text{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - (\varphi, v) \right\}$$

Définition 1.13 soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$. on définit $W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de toutes $f \in L^p(\Omega)$, définie comme

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega), \text{ tel que } \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq m, \text{ où, } \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} \right\}. \quad (1.5)$$

Théorème 1.7 $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach avec leur norme usuelle

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \text{ pour tout } f \in L^p(\Omega). \quad (1.6)$$

Définition 1.14 noté par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(I)$ la fermeture de $C_c^{1,p}(I)$ dans $W^{1,p}(I)$ On note $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

L'espace $W_0^{1,p}$ est un muni de la norme induite par $W^{1,p}$, l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1 .

L'espace $W_0^{1,p}(I)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$

L'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.15 Lorsque $p = 2$, nous préférons désigner par $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ Fourni avec la norme

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (\|\partial^\alpha f\|_{L^2})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

qui à faire $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel avec leur produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

Lemme 1.4 (Inégalité de Sobolev-Poincaré) si

$$\begin{aligned} 2 &\leq q \leq \frac{2n}{n-2}, \text{ pour } n \geq 3, \\ q &\geq 2, \text{ pour } n = 1, 2, \end{aligned}$$

alors

$$\|u\|_q \leq C(q, \Omega) \|\nabla u\|_2, \text{ pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 1.5 (*point carée*) Soit Ω un ouvert borné. Il existe une constante positive C_Ω telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Les suivants sont fondamentaux dans l'étude des résultats des équations aux dérivées partielles

Remarque 1.2 pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$, $\Delta\varphi \in L^2(\Omega)$ et pour Γ Suffisamment lisse, on a

$$\|\varphi(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta\varphi(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.2 la formule de Green) pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma, \quad (1.8)$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est une dérivation normale de u à $\partial\Omega$.

Théorème 1.8 Lax-Milgram) :soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire . Alors sur un espace de Hilbert H qui est :

- **Continue**, c'est -à-dire $\forall u, v \in H, |a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \forall M > 0$.
- **Coercive**, c'est -à-dire $\forall u \in H, |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2, \forall \alpha > 0$.

soit $l(v)$ une forme linéaire **continue** sur H . Alors il existe une unique $u \in H$ tel que :

$$\forall v \in H, a(u, v) = l(v) \quad (1.9)$$

Théorème 1.9 Hille Yosida) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, \infty[, H) \cap C([0, \infty[, D(A)))$$

unique tel que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \text{ (donnée initial)} \end{cases} \quad (1.10)$$

de plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left| \frac{u(t)}{dt} \right| = |Au(t)| \leq \|Au_0\|, \forall t \geq 0 \quad (1.11)$$

1.7 Quelques inégalités algébriques

Depuis notre étude basée sur des inégalités algébriques, nous voulons rappeler quelques-uns ici.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Lemme 1.6 Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si u et v sont des fonctions de $L^2(\Omega)$, alors

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les inégalités de Young

Lemme 1.7 (Les inégalités de Young) pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$ab \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta} \quad (1.12)$$

où δ est une constante positive.

1.8 Théorie des Semi-groupes

Définition 1.16 soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire (non borné). \mathcal{A} est appelé dissipatif si $\Re(\mathcal{A}v, v)_x \leq 0, \forall v \in D(\mathcal{A})$. L'opérateur dissipateur \mathcal{A} est appelée m -dissipative si $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjective pour quelque $\lambda > 0$.

Théorème 1.10 Un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \forall x \in D(\mathcal{A}), \lambda > 0, \quad (1.13)$$

Preuve. Supposons que A est dissipatif et fixe $x \in D(\mathcal{A})$ et $\lambda > 0$. alors

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \Re((\lambda - \mathcal{A})x, x)_X$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous concluons que

$$\lambda \|x\|_X^2 \leq \|(\lambda - \mathcal{A})x\|_X \|x\|_X,$$

Qui conduit directement à (1.13). a l'inverse supposer que (1.13) tient et fixe $x \in D(\mathcal{A})$, alors pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\lambda^2 \|x\|_X^2 \leq \lambda \|x\|_X^2 - 2\lambda \Re(\mathcal{A}x, x)_x + \|\mathcal{A}x\|_X^2.$$

En divisant cette inégalité par 2λ , on obtient équivalamment

$$\Re(\mathcal{A}x, x)_x \leq \frac{1}{2\lambda} \|\mathcal{A}x\|_X^2, \lambda > 0.$$

Passer à la limite lorsque λ passe à l'infini donne la dissipativité de A . On peut maintenant prouver certaines propriétés utiles des opérateurs m -dissipatifs. ■

Théorème 1.11 *soit \mathcal{A} est un Opérateur m -dissipatif. ensuite, les propriétés suivantes sont conservées.*

1. \mathcal{A} est fermé.
2. pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est un isomorphisme de $D(\mathcal{A})$ sur X . de plus $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur linéaire borné tel que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3. $D(\mathcal{A})$ est dense dans X .

Preuve. Commençons par le point 1. comme \mathcal{A} est un opérateur m -dissipatif, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, danc par (1.13)il en résulte que $\lambda_0 I - A$ a une inverse bornée. Comme $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est borné, il est également fermé. Alors $\lambda_0 I - A$ est fermé et donc A également.

Pour prouver le point 2, il suffit de prouver que $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$. Pour cela, nous introduisons l'ensemble

$$\Lambda = \{ \lambda \in (0, \infty) \text{ tel que } R(\lambda I - \mathcal{A}) = X \}.$$

Première Λ est ouvert. en effet (1.13) implique que Λ est un sous-ensemble de l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A . Comme $\rho(A)$ est ouvert, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un voisinage de λ inclus dans $\rho(A)$. L'intersection de ce voisinage avec la droite réelle est clairement incluse dans Λ , ce qui prouve que Λ est ouvert. Montrons aussi que Λ est fermé. Soit une

séquence $(\lambda_{-n})_{-n}$ d'éléments de Λ tels que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda > 0 \text{ comme } n \longrightarrow \infty$$

Ensuite, pour un élément quelconque $y \in X$ et tout n , il existe $x_{-n} \in D(A)$ telle que

$$(\lambda_n I - \mathcal{A})_{x_n} = y \tag{1.14}$$

En raison de (1.13), il en résulte que

$$\|x_n\|_X \leq \lambda_n^{-1} \|y\|_X \tag{1.15}$$

Et donc la suite $(x_{-n})_{-n}$ est bornée. Nous appliquons maintenant (1.13) avec $x_n - x_m$ et λ_m on obtien

$$\lambda_m \|x_n - x_m\|_X \leq \|\lambda_m (x_n - x_m) - \mathcal{A}(x_n - x_m)\|_X,$$

et par l'utilisation (1.14) on en déduit que

$$\lambda_m \|x_n - x_m\|_X \leq |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\|_X.$$

et par (1.15), On déduit qu'il existe $x \in X$ tel que x_{-n} converge vers x dans X . Mais (1.14) Alors implique que Ax_{-n} converge vers $\lambda x - y$ et puisque A est fermé, on conclut que $x \in D(A)$ avec $\lambda x - Ax = y$. Cela montre que λ appartient Λ et que la fermeture de Λ est prouvée. En conclusion, Λ est un sous-ensemble ouvert, fermé et non vide de $(0, \infty)$ et donc coincide avec $(0, \infty)$. Terminons par le point 3. Soit $y \in X$ tel que

$$(y, x)_X = 0, x \in D(\mathcal{A}) \tag{1.16}$$

Si nous montrons que

$$(y, \mathcal{A}x)_X = 0, x \in D(\mathcal{A}) \quad (1.17)$$

alors nous allons obtenir ce

$$(y, x - \mathcal{A}x)_X = 0, x \in D(\mathcal{A})$$

Et puisque $R(I - \mathcal{A}) = X$, on déduit que $y = 0$.

il reste alors à montrer (1.17). Soit $x \in D(\mathcal{A})$ est fixé, puis par le point 2, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $x_n \in D(\mathcal{A})$ et

$$x = x_n - \frac{1}{n} \mathcal{A}x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Ceci implique que

$$\mathcal{A}x_n = n(x_n - x)$$

et de la régularité $x, x_{-}\{n\} \in D(\mathcal{A})$, on déduit que $x_{-}\{n\}$ appartient à $D(\mathcal{A}^2)$ et que la prochaine identité

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A} \left(I - \frac{1}{n} \mathcal{A} \right) x_n.$$

Ou équivalent

$$\mathcal{A}x_n = \mathcal{A} \left(I - \frac{1}{n} \mathcal{A} \right)^{-1} \mathcal{A}x.$$

Du point 2, nous savons que

$$\left\| \left(I - \frac{1}{n} \mathcal{A} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

et donc

$$\|\mathcal{A}x_n\|_X \leq \|\mathcal{A}x\|_X.$$

De plus, comme X est un espace de Hilbert, il existe une sous-suite $(\mathcal{A}x_{nk})$ de $(\mathcal{A}x_n)_n$ et $z \in X$ tel que $\mathcal{A}x_{nk}$ Converge faiblement vers z Ceci implique que la suite de paires

$((x_{nk}, \mathcal{A}x_{nk}))_k$ Converge faiblement vers (x, z) dans $X \times X$. Ainsi, par le lemme de Mazur, il existe une autre suite $((\tilde{x}_l, z_l))_l$ Fait de combinaisons convexes de $(x_{nj}, \mathcal{A}x_{nj})$ n garanties (that the that $z_l = \mathcal{A}\tilde{x}_l$) tel que $(\tilde{x}_l, z_l) = (\tilde{x}_l, \mathcal{A}\tilde{x}_l)$ Converge fortement vers (x, z) dans $X \times X$ comme l va à ∞ . comme \mathcal{A} est fermé, nous en déduisons $z = \mathcal{A}x$.

Enfin par (1.18) et (1.16) on a

$$(y, \mathcal{A}x_{nk})_X = n_k (y, x_{nk} - x) = 0$$

et en passant à la limite en k , nous trouvons que (1.17) tient.

Passons maintenant à la notion de semi-groupes linéaires. ■

Définition 1.17 soit $\mathbf{A} : \mathbf{D}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ un opérateur linéaire **non - borné**. on dit que A est **monotone si**

$$(Av; v) \geq 0, \forall v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}) \quad (1.19)$$

A est **maximal monotone si** de plus $R(I + A) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f. \quad (1.20)$$

Remarque 1.3 si A est **maximal monotone**, alors λA est aussi **maximal monotone** pour tout $\lambda \succ 0$. Par contre si A et B sont deux opérateurs **maximaux monotones** alors $A + B$ défini sur $D(A) \cap D(B)$ n'est pas nécessairement **maximal monotone**

Définition 1.18 Une famille à un seul paramètre $(S(t))_{t \geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semigroupe des opérateurs linéaires bornés sur X si

1.

$$S(0) = Id_x,$$

2.

$$S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0.$$

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ z \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$\mathcal{A}z = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)z - z}{t}, \forall z \in D(\mathcal{A})$$

est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ et $D(\mathcal{A})$ est appelé le domaine de \mathcal{A} .

Un semigroupe $(S(t))_{t \geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés est appelée une suite fortement continue (ou un C_0 -semi-groupe) si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)z = z, \forall z \in X. \quad (1.21)$$

Un fortement continue $(S(t))_{t \geq 0}$ sur X satisfaisant

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \forall t \geq 0,$$

est appelé C_0 -Semi-groupe de contractions.

Montrons maintenant quelques propriétés utiles de C_0 - semi-groupe de contractions.

Théorème 1.12 soit $(S(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe de contractions sur X . alors

1. pour tous $x \in X$, l'application $t \rightarrow S(t)x$ est une fonction continue de $[0, \infty)$ dans X .

2. pour tous $x \in X$ et tout $t \geq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x. \quad (1.22)$$

3. pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$, l'élément $\int_0^t S(s)x ds$ appartient à $D(\mathcal{A})$, et

$$\mathcal{A} \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x \quad (1.23)$$

4. pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $t > 0$, l'élément $S(t)x$ appartient à $D(\mathcal{A})$, et the mapping $t \rightarrow S(t)x$ est une fonction différentiable continue de $(0, \infty)$ dans X et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.24)$$

5. pour tout $x \in D(\mathcal{A})$ et tout $t > s \geq 0$, on a

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(u)\mathcal{A}x du = \int_s^t \mathcal{A}S(u)x du.$$

Preuve. Pour le point 1, par (1.21), La propriété de continuité tient trivialement à $t = 0$. maintenant fixer $x \in X$ et prendre un arbitraire $t > 0$ alors pour $h \geq 0$, on a

$$S(t+h)x - S(t)x = S(t)(S(h)x - x),$$

■

1.9 Théorie de la stabilité de Lyapunov

L'étude de la stabilité pour les systèmes évolutives est souvent liée à la construction des fonctionnelles de Lyapunov. La méthode générale de la construction des fonctions de Lyapunov ont proposée par V. Kolmanovskii et L. Shaikhet et déjà utilisée avec succès pour les équations différentielles, pour les équations de différence à temps discret, pour les équations de différence à temps continu, est utilisé ici pour étudier la stabilité des équations évolutive à retard, en particulier, des équations différentielles partielles. On a

l'équation

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = A(t, u(t)) + f_1(t, u_t), t > 0 \\ u(s) = \Psi(s), s \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1.25)$$

Notons par $U(t, \Psi)$ la solution de l'équation (1.25) correspondant à la condition initiale Ψ .

Définition 1.19 *La solution triviale de l'équation (1.25) est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que.*

$$|u(t, \Psi)| < \varepsilon \text{ pour tout } t \geq 0, \text{ si } |\Psi|_{C_H} = \sup_{s \in [-h, 0]} |\Psi(s)| < \delta. \quad (1.26)$$

Définition 1.20 *La solution triviale de l'équation (1.25) est dite exponentiellement stable si elle est stable et il existe $\lambda > 0$ une constante positive tel que pour tout $\Psi \in C(0, -h, H)$ il existe C (qui peut dépendre sur Ψ) tel que $|u(t, \Psi)| \leq C \exp(-\lambda t)$ pour $t > 0$*

Maintenant, on va faire la démonstration de la théorème du stabilité. supposons qu'il existe une fonctionnelle $V(t, u_t)$ tel que les conditions suivantes soient satisfaites pour certains nombres positives c_1, c_2 et λ

Théorème 1.13

$$|u(t, u_t)| \leq c_1 \exp(\lambda t) |u(t)|^2, t \geq 0 \quad (1.27)$$

$$|u(0, u_0)| \leq c_2 |\Psi|_{C_H}^2 \quad (1.28)$$

$$\frac{d}{dt} V(t, u_t) \leq 0, t \geq 0 \quad (1.29)$$

Alors la solution triviale de l'équation (1.25) est exponentiellement stable. Notons que le théorème ([?]). implique que l'étude de la stabilité de l'équation (1.25) peut être réduit à la construction appropriées de Lyapunov. Pour construire les fonctionnelles de Lyapunov on utilise des procédures formelles

Le procédure des fonctionnelles de Lyapunov

Le procédure consiste en quatre étapes.

1. Etape1

Pour transformer l'équation (1.25) sous la forme

$$\frac{dz(t, u_t)}{dt} A_1(t, u(t)) + A_2(t, u_t) \quad (1.30)$$

où $z(t, \cdot)$ et $A_2(t, \cdot)$ sont des familles d'opérateurs non linéaires,

1. $z(t, 0) = 0$; $A_2(t, 0) = 0$, l'opérateur $A_1(t, \cdot)$ dépendente de t et $u(t)$ mais indépendante pour les valeurs précédentes $u(t + s)$, $s < 0$.

Etape2

supposons que la solution triviale de l'équation

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1(t, y(t))$$

est exponentiellement stable et il existe donc une fonctionnelle de Lyapunov $V(t, y(t))$, qui satisfait les conditions du théorème([?]).

Etape3

La fonctionnelle de Lyapunov $V(t, u_t)$ pour l'équation (1.25) est écrit sous la forme $V = V_1 + V_2$, où

$V_1(t, u_t) = V(t, z(t, u_t))$. L'élément y de la fonction $V(t, y)$ est remplacée la fonctionnelle $z(t, x_t)$ dans la partie gauche de l'équation (1.25) .

Etape4

Généralement, la fonctionnelle $V_1(t, u_t)$ satisfait les conditions du théorème([?]) .

Pour satisfait ces conditions, il est nécessaire de calculer

$\frac{d}{dt} V_1(t, u_t)$ et de l'estimer. Ensuite, la fonctionnelle $V_2(t, u_t)$ peut être choisir de manière standard.

CHAPITRE 2

Résultat pour l'existence et l'unicité de système

Dans ce chapitre, nous présentons le problème poreux qui sera traité dans ce mémoire, puis nous montrons qu'il est bien posé en étudiant l'existence et l'unicité de sa solution par la méthode du semi-groupe.

Notre problème ?? est équivalent à

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x - \tau u_t, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - dw_x + m\theta, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ c\theta_t = -\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1 w_x, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ \alpha w_t = k_2 w_{xx} - k_3 w - k_1 \theta_x - d\varphi_{tx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Sous les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x), \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), & x \in (0, 1) \\ \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), w(x, 0) = w^0(x), \theta(x, 0) = \theta^0(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.2)$$

et les conditions au bords

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(1, t) = \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t > 0 \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1 Existence et unicité de la solution

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème 2.1 2.3 nous utilisons la théorie des semi groupes. Soit

$$U = (u, v, \varphi, \psi, \theta, w)^T$$

et les deux nouvelles variables dépendantes

$$v = u_t, \quad \psi = \phi_t,$$

alors le système 2.1 peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_0(x) = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0)^T, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ -\frac{\mu}{\rho}u_{xx} - \frac{b}{\rho}\varphi_x + \frac{\gamma}{\rho}\theta_x + \frac{\tau}{\rho}v \\ -\psi \\ -\frac{\delta}{J}\varphi_{xx} + \frac{b}{J}u_x + \frac{\xi}{J}\varphi + \frac{d}{J}w_x - \frac{m}{J}\theta \\ \frac{\gamma}{c}v_x + \frac{m}{c}\psi + \frac{k_1}{c}w_x \\ -\frac{k_2}{\alpha}w_{xx} + \frac{k_3}{\alpha}w + \frac{k_1}{\alpha}\theta_x + \frac{d}{\alpha}\psi_x \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

et \mathcal{H} est l'espace d'énergie donné par

$$\mathcal{H} = H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2((0, 1) \times L_*^2(0, 1)),$$

tel que

$$H_*^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap L_*^2(0, 1),$$

$$L_*^2(0, 1) = \left\{ \varphi \in L^2(0, 1) : \int_0^1 \varphi(x) dx = 0 \right\},$$

Pour toute $U = (u, v, \varphi, \psi, \theta, w)^T \in \mathcal{H}$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{w})^T \in \mathcal{H}$, nous équipons \mathcal{H} avec le produit interne défini par

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \rho \int_0^1 u_t \tilde{u}_t dx + \mu \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + J \int_0^1 \phi_t \tilde{\phi}_t dx + b \int_0^1 (u_x \tilde{\phi} + \tilde{u}_x \phi) dx \\ &\quad + \xi \int_0^1 \phi \tilde{\phi} dx + \delta \int_0^1 \phi_x \tilde{\phi}_x dx + a \int_0^1 w \tilde{w} dx + c \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx. \end{aligned}$$

Le domaine de \mathcal{A} est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathcal{H} \mid u \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1); v \in H_*^1(0, 1); \varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1); \\ \psi \in H_0^1(0, 1); \theta \in H_0^1(\Omega); w \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1) \end{array} \right\}$$

où

$$H_*^2(0, 1) = \{ \varphi \in H^2(0, 1) : \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0 \}.$$

Théorème 2.1 *soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe un solution unique $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ du problème 2.4, de plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$*

Preuve. On utilise l'approche du semi groupe. Ce qui veut dire que nous devons montrer que :

\mathcal{A} est maximal monotone.

1) \mathcal{A} **monotone** : Soit $U \in D(\mathcal{A})$. En utilisant le produit scalaire, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \rho \int_0^1 u_{tt} u_t dx + \mu \int_0^1 u_{xt} u_x dx + J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + b \int_0^1 (u_{xt} \varphi + u_x \varphi_t) dx \\ &\quad + \xi \int_0^1 \varphi_t \varphi dx + \delta \int_0^1 \varphi_{xt} \varphi_x dx + \alpha \int_0^1 w_t w dx + c \int_0^1 \theta_t \theta dx. \end{aligned}$$

A partir de 2.5 , on trouve

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx + b \int_0^1 u_t \varphi_x dx - \gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx - \tau \int_0^1 u_t u_t dx + \mu \int_0^1 u_{tx} u_x dx + \delta \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx \\ &\quad - b \int_0^1 u_x \varphi_t dx - \xi \int_0^1 \varphi_t \varphi dx - d \int_0^1 w_x \varphi_t dx + m \int_0^1 \theta \varphi_t dx + b \int_0^1 (u_{tx} \varphi + u_x \varphi_t) dx + \xi \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \\ &\quad - \delta \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx + \int_0^1 (k_2 w_{xx} w - k_3 w w + k_1 \theta_x w + d \varphi_{tx} w) dx + \int_0^1 (-\gamma u_{tx} \theta - m \varphi_t \theta - k_1 u_t \theta) dx \end{aligned}$$

Après la simplification et grace à la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx &= [u_x u_t]_0^1 - \mu \int_0^1 u_{tx} u_x dx \\ \delta \int_0^1 \varphi_t \varphi_{xx} dx &= [\varphi_t \varphi_x]_0^1 - \delta \int_0^1 \varphi_{tx} \varphi_x dx \\ \gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx &= [u_t \theta]_0^1 - \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx \\ d \int_0^1 w_x \varphi_t dx &= [\varphi_t w]_0^1 - d \int_0^1 \varphi_{tx} w dx \\ b \int_0^1 u_{tx} \varphi dx &= [\varphi u_x]_0^1 - b \int_0^1 u_x \varphi_t dx \end{aligned}$$

donc :

$$\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} = k_3 \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + \tau \int_0^1 u_t^2 dx \geq 0. \quad (2.6)$$

Donc \mathcal{A} est monotone.

2) $(I + A)$ est surjectif

Soit $K = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T \in \mathcal{H}$. Il faut trouver $U \in D(\mathcal{A})$ tel que :

$$(I + \mathcal{A})U = K. \quad (2.7)$$

L'équation ?? est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} u - v = \lambda_1 \in H_*^1(0, 1), \\ \rho_1 v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = \rho\lambda_2 \in L_*^2(0, 1), \rho_1 = \rho + \tau, \\ \varphi - \psi = \lambda_3 \in H_0^1(0, 1), \\ J\psi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = J\lambda_4 \in L^2(0, 1), \\ c\theta + \gamma v_x + m\psi + k_1 w_x = c\lambda_5 \in L^2(0, 1), \\ \alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1 \theta_x + d\psi_x = \alpha\lambda_6 \in L_*^2(0, 1), \alpha_1 = \alpha + \lambda_3 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

a partir de la deuxième et la troisième équations du système ??, nous avons

$$v = u - \lambda_1$$

$$\psi = \varphi - \lambda_3$$

Remplaçant $v = u - \lambda_1$ et $\psi = \varphi - \lambda_3$ dans 2.8 2.8₂ 2.8₄ 2.8₅ et 2.8₆

$$\rho_1 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = h_1 \in L_*^2(0, 1),$$

$$\mu_3 \varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + dw_x - m\theta = h_2 \in L^2(0, 1),$$

$$c\theta + \gamma u_x + m\varphi + k_1 w_x = h_3 \in L^2(0, 1),$$

$$\alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1 \theta_x + d\varphi_x = h_4 \in L_*^2(0, 1),$$

Avec

$$\begin{cases} h_1 = \rho\lambda_2 + \rho_1\lambda_1, \\ h_2 = J(\lambda_3 + \lambda_4), \\ h_3 = c\lambda_5 + \gamma\lambda_{1x} + m\lambda_3, \\ h_4 = \alpha\lambda_6 + d\lambda_{3x}, \\ \mu_3 = J + \xi, \end{cases}$$

Multiplions les équations ??, respectivement par $(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)$ en intégrant par partie sur $(0,1)$, on trouve

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^1 uu_1 dx - \mu \int_0^1 u_{xx}u_1 dx - b \int_0^1 \varphi_x u_1 dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_1 dx = \int_0^1 h_1 u_1 dx \\ \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx - \delta \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_1 dx + b \int_0^1 u_x \varphi_1 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_1 dx - m \int_0^1 \theta \varphi_1 dx = \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx \\ c \int_0^1 \theta \theta_1 dx + \gamma \int_0^1 u_x \theta_1 dx + m \int_0^1 \varphi \theta_1 dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta_1 dx = \int_0^1 h_3 \theta_1 dx \\ \alpha_1 \int_0^1 w w_1 dx - k_2 \int_0^1 w_{xx} w_1 dx + k_1 \int_0^1 \theta_x w_1 dx + d \int_0^1 \varphi_x w_1 dx = \int_0^1 h_4 w_1 dx \end{cases} \quad (2.9)$$

Résoudre 2.9, on considère la formulation variationnelle suivante :

$$B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) = \mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1). \quad (2.10)$$

où $B : [H_*^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2((0,1) \times L_*^2(0,1))]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire définie

par :

$$\begin{aligned}
B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) &= \rho_1 \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + c \int_0^1 \theta \theta_1 dx \\
&+ \alpha_1 \int_0^1 ww_1 dx + k_2 \int_0^1 w_x w_{1x} dx + \gamma \int_0^1 (u_x \theta_1 + u_1 \theta_x) + b \int_0^1 (\varphi u_{1x} + \varphi_1 u_x) dx \\
&+ d \int_0^1 (w_x \varphi_1 + \varphi_x w_1) dx + k_1 \int_0^1 (\theta_x w_1 + \theta_1 w_x) dx + m \int_0^1 (\varphi \theta_1 - \varphi_1 \theta) dx
\end{aligned}$$

et $\mathcal{G} : [H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2((0, 1) \times L_*^2(0, 1))] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction linéaire donnée par

$$\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) = \int_0^1 h_1 u_1 dx + \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx + \int_0^1 h_3 \theta_1 dx + \int_0^1 h_4 w_1 dx \quad (2.13)$$

Maintenant pour $V = H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$ équipé de la norme $\|(u, \varphi, \theta, w)\|_v^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi_x\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2$, en suite nous avons appliquons le théorème de Lax-Milgram pour montrer l'existence de la solution de 2.10. Tout d'abord, on commence par :

la continuité de la forme bilinéaire :

$B(., .)$ continue, alors : ■

$$\exists c > 0 : |B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| \leq c \|(u, \varphi, \theta, w)\|_v \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_v \quad \forall ((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))$$

$$\begin{aligned}
|B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| &= \left| \rho_1 \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + c \right. \\
&\quad \left. + \alpha_1 \int_0^1 ww_1 dx + k_2 \int_0^1 w_x w_{1x} dx + \gamma \int_0^1 (u_x \theta_1 + u_1 \theta_x) + b \int_0^1 (\varphi u_{1x} + u_x \varphi_1) dx \right. \\
&\quad \left. + d \int_0^1 (w_x \varphi_1 + \varphi_x w_1) dx + k_1 \int_0^1 (\theta_x w_1 + \theta_1 w_x) dx + m \int_0^1 (\varphi \theta_1 - \varphi_1 \theta) dx \right| \\
\leq & \rho_1 \int_0^1 |uu_1| dx + \mu \int_0^1 |u_x u_{1x}| dx + \mu_3 \int_0^1 |\varphi \varphi_1| dx + \delta \int_0^1 |\varphi_x \varphi_{1x}| dx \\
&+ c \int_0^1 |\theta \theta_1| dx + \alpha_1 \int_0^1 |ww_1| dx + k_2 \int_0^1 |w_x w_{1x}| dx + \gamma \int_0^1 |(u_x \theta_1 + u_1 \theta_x)| dx \\
&+ b \int_0^1 |(\varphi u_{1x} + u_x \varphi_1)| dx + d \int_0^1 |(w_x \varphi_1 + \varphi_x w_1)| dx \\
&+ k_1 \int_0^1 |(\theta_x w_1 + \theta_1 w_x)| dx + m \int_0^1 |(\varphi \theta_1 - \varphi_1 \theta)| dx.
\end{aligned}$$

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}
|B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| &\leq \rho_1 \|u\|_2 \|u_1\|_2 + \mu \|u_x\|_2 \|u_{1x}\|_2 + \mu_3 \|\varphi\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \delta \|\varphi_x\|_2 \|\varphi_{1x}\|_2 \\
&\quad + c \|\theta\|_2 \|\theta_1\|_2 + \alpha_1 \|w\|_2 \|w_1\|_2 + k_2 \|w_x\|_2 \|w_{1x}\|_2 \\
&\quad + \gamma (\|u_x\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|u_1\|_2 \|\theta_x\|_2) + b (\|\varphi\|_2 \|u_{1x}\|_2 + \|u_x\|_2 \|\varphi_1\|_2) \\
&\quad + d (\|w_x\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi_x\|_2 \|w_1\|_2) + k_1 (\|\theta_x\|_2 \|w_1\|_2 + \|\theta_1\|_2 \|w_x\|_2) \\
&\quad + m (\|\varphi\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|\varphi_1\|_2 \|\theta\|_2) \\
&\leq c (\|u\|_2 + \|u_x\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|\varphi_x\|_2 + \|\theta\|_2 + \|w\|_2 + \|w_x\|_2) \\
&\quad \times (\|u_1\|_2 + \|u_{1x}\|_2 + \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi_{1x}\|_2 + \|\theta_1\|_2 + \|w_1\|_2 + \|w_{1x}\|_2) \\
&\leq c \|(u, \varphi, \theta, w)_V\| \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)_V\|.
\end{aligned}$$

Donc $B(.,.)$ est continue.

La coercivité de la forme bilinéaire

$B(.,.)$ coercive :

$$\exists \alpha > 0 : B((u, \varphi, \theta, w), (u, \varphi, \theta, w)) \geq M_0 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_v^2 \quad \forall (u, \varphi, \theta, w) \in V$$

$$\begin{aligned} |B((u, \varphi, \theta, w), (u, \varphi, \theta, w))| &= \rho_1 \int_0^1 u^2 dx + \mu \int_0^1 u_x^2 dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi^2 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx + c \int_0^1 \theta^2 dx + \alpha_1 \int_0^1 w^2 dx \\ &\geq \min \{ \rho_1, \mu, \mu_3, \delta, c, \alpha_1, k_2 \} \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2 \\ &\geq M_0 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2 . \end{aligned}$$

Donc $B(.,.)$ coercive.

La continuité de la forme linéaire

$\mathcal{G}(.)$ continue, alors :

$$\exists \zeta_2 > 0 : |\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)| \leq \zeta_2 \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_v , \quad \forall (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) \in V.$$

En utilisant l'inégalité de cauchy schwartz, on trouve

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)| &= \left| \int_0^1 h_1 u_1 dx + \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx + \int_0^1 h_3 \theta_1 dx + \int_0^1 h_4 w_1 dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |h_1 u_1| dx + \int_0^1 |h_2 \varphi_1| dx + \int_0^1 |h_3 \theta_1| dx + \int_0^1 |h_4 w_1| dx \\
&\leq \|h_1\|_2 \|u_1\|_2 + \|h_2\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \|h_3\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|h_4\|_2 \|w_1\|_2 \\
&\leq (\|h_1\|_2 + \|h_2\|_2 + \|h_3\|_2 + \|h_4\|_2) \\
&\quad \times (\|u_1\|_2 + \|\varphi_1\|_2 + \|\theta_1\|_2 + \|w_1\|_2) \\
&\leq \zeta_2 \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)_V\|.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{G}(\cdot)$ est continue.

D'après le théorème de **Lax-Milgram** on conclut qu'il existe une solution unique $(u, \varphi, \theta, w) \in V$, satisfaisant

$$B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) = \mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1), \quad \forall (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) \in V.$$

2.2 La régularité de la solution

A partir de 2.8, si on prend $(\varphi_1, \theta_1, w_1) = (0, 0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2((0, 1) \times L_*^2(0, 1))$ dans 2.8₁, on a

$$\rho_1 \int_0^1 u u_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_1 dx + b \int_0^1 \varphi u_{1x} dx = \int_0^1 h_1 u_1 dx \quad \forall u_1 \in H_*^1(0, 1). \quad (2.14)$$

De plus, l'équation 2.14 est également vraie pour tout $u_1 \in C^1([0, 1]) \subset H_*^1(0, 1)$. Par conséquent, on a :

$$\mu \int_0^1 u_x \Psi_x dx = \int_0^1 (h_1 + \rho_1 u + \gamma \theta_x + b \varphi_x) \Psi dx, \forall \Psi \in C^1([0, 1]). \quad (2.15)$$

Ainsi, en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$u_x(1)\Psi(1) - u_x(0)\Psi(0) = 0, \forall \Psi \in C^1([0, 1]).$$

Donc

$$u_x(1) = u_x(0) = 0.$$

par conséquent, on arrive à

$$u \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

De même, si nous prenons $(u_1, \theta_1, w_1) = (0, 0, 0) \in H_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$ dans $(??)_2$, on a

$$\mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + b \int_0^1 u_x \varphi_1 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_1 dx - m \int_0^1 \theta \varphi_1 dx = \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1),$$

d'où

$$\delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx = \int_0^1 (h_2 - \mu_3 \varphi - b u_x - d w_x + m \theta) \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1). \quad (2.16)$$

Notant que

$$h_2 - \mu_3 \varphi - b u_x - d w_x + m \theta \in L^2(0, 1),$$

et

$$\varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1).$$

Alors, l'équation 2.16 prend la forme

$$\int_0^1 (h_2 + \delta\varphi_{xx} - \mu_3\varphi - bu_x - dw_x + m\theta)\varphi_1 dx = 0, \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1),$$

et on obtient

$$\mu_3\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + dw_x - m\theta = h_2.$$

Cela donne l'équation 2.16.

De la même façon, on peut montrer que

$$\theta \in H_0^1(\Omega), w \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

Par conséquent, il existe un unique $U \in D(\mathcal{A})$ tel que (??) est satisfait. Donc, \mathcal{A} est un opérateur monotone maximal et \mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} . En appliquant le théorème de Hille-Yosida, on arrive à la démonstration du théorème 2.1.

CHAPITRE 3

Résultat pour la stabilité de système

Dans ce chapitre, nous étudions un problème de système poreux-elastique, notre principal résultat est d'étudier la stabilité du système par la technique du multiplicateur qui est basé sur la construction du fonctionnel de Lyapunov.

Théorème 3.1 *Soit (u, φ, θ, w) la solution de (2.1). Alors, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 tel que*

$$E(t) \leq \beta_1 E(0) \exp^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour prouver cette décroissance exponentielle, nous avons besoin quelques lemmes importants

Lemme 3.1 *La fonction énergétique E , définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho u_t^2 + J \varphi_t^2 + C \theta^2 + \alpha w^2 + \mu u_x^2 + \delta \varphi_x^2 + \xi \varphi^2] dx, \quad (3.1)$$

satisfait

$$E'(t) \leq -\tau \int_0^1 u_t^2 dx - k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx. \quad (3.2)$$

Preuve. Multipliant la première équation de (3.1) par u_t , la deuxième équation de (3.2) par φ_t , intégrant sur $(0, 1)$ et en les résumant, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [\rho u_t^2 + J \varphi_t^2 + C \theta^2 + \alpha w^2 + \mu u_x^2 + \delta \varphi_x^2 + \xi \varphi^2] dx, \\ & = -\tau \int_0^1 u_t^2 dx - k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

En multipliant par (3.1) (3.2) (3.3) $(u_t, \varphi_t, \theta, w)$ respectivement, et intégrant sur $(0, 1)$, et en les sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^1 u_{tt} u_t dx - \mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx + \tau \int_0^1 u_t u_t dx = 0 \\ & J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - \delta \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \xi \int_0^1 \varphi \varphi_t dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0 \\ & C \int_0^1 \theta_t \theta dx + \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0 \\ & \alpha \int_0^1 w_t w dx - k_2 \int_0^1 w_{xx} w dx + k_3 \int_0^1 w w dx + k_1 \int_0^1 \theta_x w dx + d \int_0^1 \varphi_{tx} w dx = 0 \end{aligned}$$

On fait l'intégration par partie et d'après les conditions aux bords, nous trouvons

$$\begin{aligned} -\mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx &= \mu \int_0^1 u_x u_{tx} dx - \mu [u_x u_t]_0^1 = \mu \int_0^1 u_x u_{tx} dx \\ -b \int_0^1 \varphi_x u_t dx &= b \int_0^1 \varphi u_{tx} dx - b [u_x u_t]_0^1 = b \int_0^1 \varphi u_{tx} dx \\ -\delta \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx &= \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{tx} dx - \delta [\varphi_x \varphi_t]_0^1 = \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{tx} dx \\ b \int_0^1 u_x \varphi_t dx &= -b \int_0^1 u \varphi_{tx} dx + b [u u_t]_0^1 = -b \int_0^1 u \varphi_{tx} dx \\ \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx &= -\gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx + \gamma [u_t \theta]_0^1 = -\gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx \\ k_2 \int_0^1 w_{xx} w dx &= -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_2 [w_x w]_0^1 = -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx \\ k_1 \int_0^1 \theta_x w dx &= -k_1 \int_0^1 \theta w_x dx + k_1 [\theta w]_0^1 = -k_1 \int_0^1 \theta w_x dx \\ d \int_0^1 \varphi_{tx} w dx &= -d \int_0^1 \varphi_t w_x dx + d [\varphi_t w]_0^1 = -d \int_0^1 \varphi_t w_x dx \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx + \tau \int_0^1 u_t^2 dx = 0 \\ & \frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi^2 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0 \\ & \frac{C}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx - \gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0 \\ & \alpha \frac{d}{dt} \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx - k_1 \int_0^1 \theta w_x dx - d \int_0^1 \varphi_t w_x dx = 0 \end{aligned}$$

Par addition, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left\{ \rho \int_0^1 u_t^2 + J \int_0^1 \varphi_t^2 + C \int_0^1 \theta^2 + \alpha \int_0^1 w^2 + \mu \int_0^1 w_x^2 \right. \\
& \left. + \tau \int_0^1 u_t^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left\{ \rho \int_0^1 u_t^2 + J \int_0^1 \varphi_t^2 + C \int_0^1 \theta^2 + \alpha \int_0^1 w^2 + \mu \int_0^1 w_x^2 + \delta \int_0^1 \varphi_x + \xi \int_0^1 \varphi^2 \right\} dx \\
& = -\tau \int_0^1 u_t^2 dx - k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2 Soit (u, φ, θ, w) la solution de (2.1) (2.2). Puis pour toute constante positive ε_1, δ la fonctionnelle

$$I_1(t) = J \int_0^1 \varphi \varphi_t dx - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx, t \geq 0, \quad (3.4)$$

satisfait

$$I_1'(t) \leq -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + C_0 \int_0^1 w^2 dx + C_0 \int_0^1 \theta^2 dx \quad (3.5)$$

$$+ C_0 \int_0^1 u_t^2 dx + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + C_0 \int_0^1 u_x^2 dx. \quad (3.6)$$

Preuve. Différencier $I_1(t)$, en utilisant (??)₂, on obtient

$$I_1'(t) = J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 u_{tt} \int_0^x \varphi(y) dy dx - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 u_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx, t \geq 0.$$

$$\begin{aligned}
I_1'(t) &= J \int_0^1 \varphi_t^2 dx + J \int_0^1 \frac{1}{J} (\delta \varphi_{xx} - bu_x - \xi \varphi - dw_x + m\theta) \varphi dx \\
&\quad - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho} (\mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x - \tau u_t) \int_0^x \varphi(y) dy \right) dx - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 u_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx.
\end{aligned}$$

Par intégration par partie sur $[0, 1]$ avec les conditions aux limites, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1'(t) &= J \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \xi \int_0^1 \varphi^2 dx - b \int_0^1 u_x \varphi dx - d \int_0^1 w_x \varphi dx \quad (3.7) \\
&\quad + m \int_0^1 \theta \varphi dx + b \int_0^1 u_x \int_0^x \varphi_x(y) dy dx - \frac{b^2}{\mu} \int_0^1 \varphi_x \int_0^x \varphi(y) dy dx \\
&\quad + \frac{b\gamma}{\mu} \int_0^1 \theta_x \int_0^x \varphi(y) dy dx + \frac{b\tau}{\mu} \int_0^1 u_t \int_0^x \varphi(y) dy dx - \frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 (u_t \int_0^x \varphi_t(y) dy) dx.
\end{aligned}$$

Par l'utilisation de l'inégalité de Young, on trouve :

$$-b \int_0^1 u_x \varphi dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \quad (3.8)$$

$$-d \int_0^1 w_x \varphi dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + C_0 \int_0^1 w_x^2 dx \quad (3.9)$$

$$m \int_0^1 \theta \varphi dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (3.10)$$

$$b \int_0^1 u_{xx} \int_0^x \varphi(y) dy dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \quad (3.11)$$

$$\frac{b^2}{\mu} \int_0^1 \varphi_x \int_0^x \varphi(y) dy dx \leq \frac{b^2}{2\mu} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^x \varphi_x^2 dx \quad (3.12)$$

$$\frac{b\gamma}{\mu} \int_0^1 \theta_x \int_0^x \varphi(y) dy dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \quad (3.13)$$

$$\frac{b\tau}{\mu} \int_0^1 u_t \int_0^x \varphi(y) dy dx \leq \frac{\epsilon}{12} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx \quad (3.14)$$

$$\frac{b\rho}{\mu} \int_0^1 u_t \int_0^x \varphi_t(y) dy dx \leq \frac{C}{\epsilon_1} \int_0^x \varphi_t^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx, \quad (3.15)$$

Insertion (3.8), (3.9), (3.10), (3.11), (??), (3.13), (3.14) et (3.15) dans (3.7), on obtient (3.5). ■

Lemme 3.3 soit (u, φ, θ, w) être la solution de (??), le fonctionnel

$$I_2(t) = \rho \int_0^1 u_t u dx, t \geq 0, \quad (3.16)$$

satisfait

$$I_2'(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx + C_0 \int_0^1 (\varphi + \theta)^2 dx. \quad (3.17)$$

Preuve. Par différenciation de $I_2(t)$ nous avons

$$I_2'(t) = \rho \int_0^1 u_{tt} u dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx, \quad (3.18)$$

$$= \rho \int_0^1 \frac{1}{\rho} (\mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x - \tau u_t) u dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx, \quad (3.19)$$

$$= \mu \int_0^1 u u_{xx} dx + b \int_0^1 u \varphi_x dx - \gamma \int_0^1 u \theta_x dx - \tau \int_0^1 u u_t dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx, t \geq 0. \quad (3.20)$$

Par intégration par partie sur $[0, 1]$ avec les conditions aux limites, on trouve :

$$I_2'(t) = \mu \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 u_x \varphi dx + \gamma \int_0^1 u_x \theta dx - \tau \int_0^1 u u_t dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx, t \geq 0-$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$b \int_0^1 u_x \varphi dx \leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + C_0 \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad (3.21)$$

$$- \gamma \int_0^1 u_x \theta dx \leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + C_0 \int_0^1 \theta^2 dx, \quad (3.22)$$

utiliser les inégalités de Young et Poincaré

$$-\tau \int_0^1 uu_t dx \leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + C_0 \int_0^1 u_t^2 dx. \quad (3.23)$$

En remplaçant (3.21), (3.22), (3.23), dans (??), on a (??). ■

Lemme 3.4 soit (u, φ, θ, w) être la solution de (??). Ensuite, le fonctionnel

$$I_3(t) = C \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \alpha w(y) + d\varphi_x \right) dy dx - \frac{md}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad (3.24)$$

satisfait

$$I_3'(t) \leq \frac{-k_1 C}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^1 (\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2) dx + C_0 \left(1 + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \int_0^1 w_x^2 dx \quad (3.25)$$

$$+ C_0 \left(1 + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \int_0^1 u_t^2 dx + C_0 \left(1 + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \int_0^1 w^2 dx. \quad (3.26)$$

Preuve. En différenciant $I_3(t)$ et en intégrant par parties, nous avons

$$I_3'(t) = C \int_0^1 \theta_t \left(\int_0^x \alpha w(y) + d\varphi_x \right) dy dx + C \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \alpha w_t(y) + d\varphi_{tx} \right) dy dx - \frac{md}{2} \int_0^1 \varphi \varphi_t dx, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} I_3'(t) &= C \int_0^1 \frac{1}{C} (-\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1 w_x) \int_0^x (\alpha w(y) + d\varphi_x) dy dx \\ &\quad + C \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \alpha \frac{1}{\alpha} (k_2 w_{xx} - k_3 w - k_1 \theta_x - d\varphi_{tx}) \right. \\ &\quad \left. + d\varphi_{tx} \right) dy dx - md \int_0^1 \varphi \varphi_t dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_3(t) &= -\gamma \int_0^1 u_{tx} \int_0^x (\alpha w(y) + d\varphi_x) dy dx - m \int_0^1 \varphi_t \int_0^x (\alpha w(y) + d\varphi_x) dy dx \\
&\quad -k_1 \int_0^1 w_x \int_0^x (\alpha w(y) + d\varphi_x) dy dx + Ck_2 \int_0^1 \theta \int_0^x w_{xx} dy dx \\
&\quad -Ck_3 \int_0^1 \theta \int_0^x w dy dx - Ck_1 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x dy dx - md \int_0^1 \varphi \varphi_t dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I'_3(t) &= -\gamma\alpha \int_0^1 u_{tx} \int_0^x w(y) dy dx - \gamma d \int_0^1 u_{tx} \int_0^x \varphi_x dy dx - m\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w(y) dy dx \\
&\quad -md \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \varphi_x dy dx - k_1\alpha \int_0^1 w_x \int_0^x w(y) dy dx - k_1d \int_0^1 w_x \int_0^x \varphi_x dy dx \\
&\quad +Ck_2 \int_0^1 \theta \int_0^x w_{xx} dy dx - Ck_3 \int_0^1 \theta \int_0^x w dy dx \\
&\quad -Ck_1 \int_0^1 \theta \int_0^x \theta_x dy dx - md \int_0^1 \varphi \varphi_t dx
\end{aligned}$$

Par intégration par partie sur $[0, 1]$ avec les conditions aux limites, on trouve :

$$\begin{aligned}
I'_3(t) &= -k_1\alpha \int_0^1 w^2 dx + Ck_1 \int_0^1 \theta^2 dx + \gamma\alpha \int_0^1 u_t w dx + \gamma d \int_0^1 u_t \varphi_x dx \\
&\quad +k_1d \int_0^1 w_x \varphi dx - Ck_2 \int_0^1 \theta w_x dx - m\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w(y) dy dx \\
&\quad -Ck_3 \int_0^1 \theta \int_0^x w dy dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ck_2 \int_0^1 \theta w_x dx &\leq \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx \\
-Ck_3 \int_0^1 \theta \int_0^x w dy dx &\leq \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx \\
\gamma \alpha \int_0^1 u_t w dx &\leq c_0 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx \\
-\gamma d \int_0^1 u_t \varphi_x dx &\leq \frac{c_0}{\epsilon_2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\
k_1 d \int_0^1 w_x \varphi dx &\leq \frac{c_0}{\epsilon_2} \int_0^1 w_x^2 dx + \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx \\
-m\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w(y) dy dx &\leq \epsilon_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c_0}{\epsilon_2} \int_0^1 w^2 dx
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, on obtient (??). ■

Lemme 3.5 soit (u, φ, θ, w) être la solution de (??). Ensuite, le fonctionnel

$$I_4(t) = J\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w(y) dy dx + Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi dx + \frac{mJk_1}{2C} \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad (3.28)$$

satisfait, l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
I_4'(t) &\leq \frac{-Jd}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + C_0 \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \int_0^1 w_x^2 dx \quad (3.29) \\
&\quad + \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx + \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx + C_0 \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3}\right) \int_0^1 w^2 dx \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Preuve. Différencier $I_4(t)$ et en utilisant (??)₃, on obtient

$$\begin{aligned}
I_4'(t) &= J\alpha \int_0^1 \varphi_{tt} \int_0^x w(y) dy dx + J\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_t(y) dy dx + Jk_1 \int_0^1 \theta_t \varphi dx \\
&+ Jk_1 \int_0^1 \varphi_t \theta dx + \frac{mJk_1}{C} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx, \\
&= J\alpha \int_0^1 \frac{\delta}{J} (\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - dw_x + m\theta) \int_0^x w(y) dy dx \\
&+ J\alpha \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \frac{1}{\alpha} (k_2 w_{xx} - k_3 w - k_1 \theta_x - d\varphi_{tx}) dy dx \\
&+ Jk_1 \int_0^1 \frac{1}{C} (-\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1 w_x) \varphi dx + Jk_1 \int_0^1 \varphi_t \theta dx + \frac{mJk_1}{C} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx, \\
&= \alpha\delta \int_0^1 \varphi_{xx} \int_0^x w(y) dy dx - \alpha b \int_0^1 u_x \int_0^x w(y) dy dx - \alpha\xi \int_0^1 \varphi \int_0^x w(y) dy dx \\
&- \alpha d \int_0^1 w_x \int_0^x w(y) dy dx + m\alpha \int_0^1 \theta \int_0^x w(y) dy dx + Jk_2 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_{xx} dy dx \\
&- Jk_3 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w dy dx - Jk_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \theta_x dy dx - Jd \int_0^1 \varphi_t \int_0^x \varphi_{tx} dy dx \\
&- \frac{\gamma Jk_1}{C} \int_0^1 u_{tx} \varphi dx - \frac{mJk_1}{C} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx - \frac{Jk_1^2}{C} \int_0^1 w_x \varphi dx \\
&+ Jk_1 \int_0^1 \varphi_t \theta dx + \frac{mJk_1}{C} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx, \\
&= -dJ \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha d \int_0^1 w^2 dx + \alpha\delta \int_0^1 \varphi_{xx} \int_0^x w(y) dy dx \\
&- \alpha b \int_0^1 u_x \int_0^x w(y) dy dx - \alpha\xi \int_0^1 \varphi \int_0^x w(y) dy dx \\
&+ m\alpha \int_0^1 \theta \int_0^x w(y) dy dx + Jk_2 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_{xx} dy dx \\
&- Jk_3 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w dy dx - \frac{\gamma Jk_1}{C} \int_0^1 u_{tx} \varphi dx - \frac{Jk_1^2}{C} \int_0^1 w_x \varphi dx.
\end{aligned}$$

Par intégration par partie sur $[0, 1]$ avec les conditions aux limites, on trouve :

$$\begin{aligned}
I'_4(t) &= -dJ \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha d \int_0^1 w^2 dx - \alpha \delta \int_0^1 \varphi_x w dx + \alpha b \int_0^1 u w dx \\
&\quad - \alpha \xi \int_0^1 \varphi \int_0^x w(y) dy dx + m\alpha \int_0^1 \theta \int_0^x w(y) dy dx + Jk_2 \int_0^1 \varphi_t w_x dx \\
&\quad - Jk_3 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w dy dx + \frac{\gamma Jk_1}{C} \int_0^1 u_t \varphi dx - \frac{Jk_1^2}{C} \int_0^1 w_x \varphi dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et Pointcaré et Cauchy-Schwarz :

$$\alpha \delta \int_0^1 \varphi_{xx} \int_0^x w(y) dy dx \leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 w^2 dx$$

$$\alpha b \int_0^1 u w dx \leq \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{C_0}{\delta_2} \int_0^1 w^2 dx$$

$$\alpha \xi \int_0^1 \varphi \int_0^x w(y) dy dx \leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 w^2 dx$$

$$m\alpha \int_0^1 \theta \int_0^x w(y) dy dx \leq \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{C_0}{\delta_3} \int_0^1 w^2 dx \quad \blacksquare$$

$$Jk_2 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w_{xx} dy dx \leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + C_0 \int_0^1 w_x^2 dy dx$$

$$Jk_3 \int_0^1 \varphi_t \int_0^x w dy dx \leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + C_0 \int_0^1 w^2 dx$$

$$\frac{\gamma Jk_1}{C} \int_0^1 u_{tx} \varphi dx \leq \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx$$

$$\frac{Jk_1^2}{C} \int_0^1 w_x \varphi dx \leq \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx + \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx$$

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov $L(t)$ par

$$L(t) = NE(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + N_3 I_3(t) + N_4 I_4(t), \quad (3.31)$$

tel que N, N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des constantes positives.

Lemme 3.6 *soit (u, φ) être la solution de (??). Ensuite, il existe deux constantes positives b_1 et b_2 telles que la fonction fonctionnelle de Lyapunov (??) satisfait*

$$b_1 E(t) \leq L(t) \leq b_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.32)$$

Preuve. Soit \blacksquare

Preuve. (Théorème 3.1) soit

$$L(t) = NE(t) + N_1I_1(t) + N_2I_2(t) + N_3I_3(t) + N_4I_4(t),$$

alors

$$L'(t) = NE'(t) + N_1I_1'(t) + N_2I_2'(t) + N_3I_3'(t) + N_4I_4'(t)$$

Alors, d'apres

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & N(-\tau \int_0^1 u_t^2 dx - k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx) + N_1(-\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ & - \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + C_0 \int_0^1 w^2 dx + C_0 \int_0^1 \theta^2 dx + C_0 \int_0^1 u_t^2 dx \\ & + C(1 + \frac{1}{\epsilon_1}) \int_0^1 \varphi_t^2 dx + C_0 \int_0^1 u_x^2 dx) + N_2(-\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx \\ & + \rho \int_0^1 u_t^2 dx + C_0 \int_0^1 (\varphi + \theta)^2 dx) + N_3(\frac{-k_1 C}{2} \int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^1 (\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \varphi^2) dx + C_0(1 + \frac{1}{\epsilon_2}) \int_0^1 w_x^2 dx \\ & + C_0(1 + \frac{1}{\epsilon_2}) \int_0^1 u_t^2 dx + C_0(1 + \frac{1}{\epsilon_2}) \int_0^1 w^2 dx) \\ & + N_4(\frac{-Jd}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi^2 dx \\ & + C_0(1 + \frac{1}{\delta_1}) \int_0^1 w_x^2 dx + \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx \\ & + \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx + C_0(1 + \frac{1}{\delta_1}) \int_0^1 w_x^2 dx + \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx \\ & + \frac{C_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx + \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx + C_0(1 + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3}) \int_0^1 w^2 dx) \end{aligned}$$

$$L'(t) \leq -C_w \int_0^1 w^2 dx - C_{w_x} \int_0^1 w_x^2 dx - C_{\varphi_t} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - C_{u_x} \int_0^1 u_x^2 dx \quad (3.33)$$

$$-C_{\varphi_x} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - C_\varphi \int_0^1 \varphi^2 dx - C_{u_t} \int_0^1 u_t^2 dx - C_\theta \int_0^1 \theta^2 dx \quad (3.34)$$

dans

$$C_w = Nk_3 - N_1c_0 - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4c_0(1 + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3}),$$

$$C_{u_t} = N\tau - N_1c_0 - N_2\rho - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4\frac{c_0}{\delta_1},$$

$$C_{w_x} = Nk_2 - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4c_0(1 + \frac{1}{\delta_1})$$

$$C_{\varphi_t} = N_4\frac{dJ}{2} - N_3\epsilon_2 - N_1c(1 + \frac{1}{\epsilon_1})$$

$$C_\varphi = N_1\frac{\mu_1}{2} - N_2c_0 - N_3\epsilon_2 - N_4\delta_1$$

$$C_\theta = N_3\frac{k_1c}{2} - N_1c_0 - N_2c_0 - N_4\delta_3$$

$$C_{\varphi_x} = N_1\frac{\delta}{2} - N_3\epsilon_2 - N_4\delta_1$$

$$C_{u_x} = N_2\frac{\mu}{2} - N_4\delta_2 - N_1c_0$$

Maintenant, en fixant $\epsilon_2 = \frac{1}{N_3}$, $N_2 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{N_4}$, $\delta_2 = \frac{\mu N_1}{4}$ et $\delta_3 = \frac{k_1 c N_3}{4 N_4}$, nous obtenons

$$C_w = Nk_3 - N_1c_0 - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4c_0(1 + \frac{4}{\mu N_1} + \frac{4N_4}{k_1 c N_3}),$$

$$C_{w_x} = Nk_2 - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4c_0(1 + N_4), \quad C_{u_x} = \frac{\mu}{4} - N_1c_0,$$

$$C_{u_t} = N\tau - N_1c_0 - \rho - N_3c_0(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}) - N_4^2c_0,$$

$$C_{\varphi_x} = N_1\frac{\delta}{2} - 2, \quad C_{\varphi_t} = N_4\frac{dJ}{2} - N_1c(1 + \frac{1}{\epsilon_1}) - 1,$$

$$C_\varphi = N_1\frac{\mu_1}{2} - c_0 - 2, \quad C_\theta = N_3\frac{k_1c}{4} - c_0 - N_1c_0.$$

Tous ces termes (du côté droit de l'équation (3.33)) deviennent négatifs si nous choisissons nos paramètres correctement. Tout d'abord, choisissez N suffisamment grand de sorte que

Ensuite, on choisit N_1 assez grand pour que

$$N_1 > \frac{4}{\delta}.$$

et

$$N_1 > \frac{2}{\mu_1}(c_0 + 2)$$

Une fois que N_1 est fixé, on choisit alors N_4 assez grand pour que

$$N_4 \frac{dJ}{2} - N_1 c \left(1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right) > 0,$$

$$N_4 > \frac{2}{dJ} N_1 c \left(1 + \frac{1}{\epsilon_1}\right).$$

Pour tout N_1 et N_4 , choisir N_3 suffisamment grand pour que

$$N_3 \frac{k_1 c}{4} - c_0 - N_1 c_0 > 0,$$

$$N_3 > \frac{4}{k_1 c} (c_0 + N_1 c_0).$$

Enfin, nous choisissons N assez grand (encore plus grand pour que (3.32) reste valide) pour que

$$N > \frac{1}{k_3} \left[N_1 c_0 + N_3 c_0 \left(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}\right) + N_4 c_0 \left(1 + \frac{4}{\mu N_1} + \frac{4N_4}{k_1 c N_3}\right) \right],$$

$$N > \frac{1}{\tau} \left[N_1 c_0 + \rho + N_3 c_0 \left(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}\right) + N_4^2 c_0 \right],$$

$$N > \frac{1}{k_2} \left[N_4 c_0 (1 + N_4) - N_3 c_0 \left(1 + \frac{c_0}{\epsilon_2}\right) \right].$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq -\beta_1 \int_0^1 (u_t^2 + \varphi_t^2 + \theta^2 + w^2 + u_x^2 + \varphi^2 + \varphi_x^2) dx \\ &\leq -\beta_2 E(t) \end{aligned}$$

pour certaines constantes positives β_1 et β_2 . En gardant à l'esprit la remarque sur l'équivalence

entre $E(t)$ et $I(1)$, nous déduisons que

$$L'(t) \leq -d_1 L(t), \quad t \geq 0, \tag{3.35}$$

donc $d_1 = \frac{\beta_2}{k_2} \geq 0$. Une intégration simple de (3.35) donne

$$L(t) \leq L(0) \exp^{-d_1 t}, \quad t \geq 0,$$

■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Goodman MA, Cowin SC. Une théorie continue pour les matériaux granulaires. Arch Rational Mech Anal 1972 ;44(4) :249-266.
- [2] Chirita S, Ciarletta M, D'Apice C. Sur la théorie de la thermoélasticité avec des microtempératures. J Math Anal Appl. 2013 :397(1) :349-361.
- [3] Cowin SC, Nunziato JW. Matériaux élastiques linéaires avec des vides. J Elasticity. 1983 ;13(2) :125-147.
- [4] leşan D, Quintanilla R. Sur une théorie de la thermoélasticité avec des microtempératures. I Thermal Stresses. 2000 :23(3) :199-215.
- [5] Hachelfi M, Djehabla A, Tatar N. Sur la décroissance de l'énergie pour les systèmes thermoélastiques linéaires par effets de microtempérature. Eurasian J Math Comput Appl. 2018 :6 :29-37.
- [6] Apalara TA. Sur la stabilité du système élastique poreux avec des microtempératures. J Therm Stresses. 2019 ;42(2) :265-278.
- [7] Cowin SC, Nunziato JW. Matériaux élastiques linéaires avec des vides. J Elasticity. 1983 ;13(2) :125-147. doi :10.1007/BF00041230.
- [8] leşan D. Une théorie des matériaux thermoclastiques avec des vides. Acta Mech, 1986 ;60(1-2) :67-89.

- [9] Teşan D. Sur une théorie des solides élastiques micromorphes avec des microtempératures. I Thermal Stresses. 2001 ;24(8) :737-752.
- [10] Teşan D. Modèles thermoélastiques des milieux continus. Dordrecht : Springer, 2004.
- [11] Teşan D. Quintanilla R. Une théorie des mélanges thermoviscoélastiques poreux. J Thermal Stresses. 2007 ;30(7) :693-714.
- [12] Casas PS, Quintanilla R. Stabilité exponentielle en thermoélasticité avec des microtempératures. Int J Eng Sci. 2005 ;43(1-2) :33-47.
- [13] Liu Z, Zheng S. Semi-groupes associés aux systèmes dissipatifs. Boca Raton : Chapman and Hall/CRC ; 1999.
- [14] Quintanilla R. Décroissance lente pour la clasticité poreuse unidimensionnelle. Appl Math Lett. 2003 ;16(4) :487-491.
- [15] Magana A, Quintanilla R. Sur la décroissance temporelle des solutions dans les théories unidimensionnelles des matériaux poreux. Int J Solids Struct. 2006 ;43(11-12) :3414-3427.
- [16] Dridi H, Djebable A. Sur la stabilisation des matériaux élastiques poreux linéaires par l'effet de microtempérature et l'amortissement poreux. Ann Univ Ferrara, 2020 ;2(66) :13-25.
- [17] Hao Wei I. Résultats d'existence globale et de stabilité pour un système de thermoélasticité non linéaire de type III de Timoshenko avec retard. Boundary Value Problems, 2018 ;66 :13-25.
- [18] Kafini M, Messaoudi SA, Mustafa MI, et al. Résultats de bien-poséité et de stabilité dans un système de type III de thermoclasticité de type Timoshenko avec retard. Z Angew Math Phys. 2015 ;66 :1499-1517.
- [19] Liu Z., Zheng S. Semi-groupes associés aux systèmes dissipatifs. Boca Raton ; Chapman and Hall ; 1999. (Pitman Research Notes Math. ; 398).