الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université 20 août 1955 – Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles.

Thème

Inégalités intégrales de type Ostrowski

Présenté par :
Melle Boukadoum Loubna

Soutenu publiquement : 02/07/ 2025

Devant le jury composé de :

Dr . Khenniche Gania	**M.C.A,**	**Université de Skikda**	**Présidente**
Dr . Nasri Nassima	**M.C.A,**	**Université de Skikda**	**Encadrante**
Dr. Saci Fateh	**M.C.B,**	**Université de Skikda**	**Examinateur**

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté de terminer ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur, Dr Nassima Nasri, pour le soutien et les

Précieux conseils qu'elle m'a apportée. Merci beaucoup.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à

Dr Ghania Khenniche d'avoir accepeter de présider ce jury , ainsi qu'à

Dr Saci Fateh , pour avoir examiner et évaluer ce travail.

En conclusion, je remercie chaleureusement tous ceux qui ont contribués, de prés

ou de loin, à la réalisation de ce mémoire, sans oublier tous les enseignants du ´

département de mathématiques de l'Université de Skikda.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Ceux qui m'ont donnés le sens de la vie.

Mes sœurs

Mon mari

Et tous mes amis.

Loubna

Abstract

In this dissertation , we will focus on the study of real and fractional integral inequalities of the Ostrowski type.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity as well as some integral identities which we will invoke in the sequel .

In the second chapter,we will mention some ostrowski integral inequalities for convex , bounded and lipschitz functions .

the third chapter we will study some ostrowski integral inequalities for preinvex function .

and the final chapter dedicated entirely to the study of fractional integral inequalities of the Ostrowski type .

Keywords

Ostrowski inequality, Hölder inequality , Riemann-Liouville integral , s-preinvex function , convex function

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux inégalités intégrales réelle et fractionnaire de type Ostrowski. .

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique et généralisée, ainsi que des identités intégrales que nous utiliserons dans les chapitres qui suivent .

Dans le deuxième chapitre, nous citons les inégalités intégrales de type Ostrowski pour les fonctions convexe, borne et lipschitzienne .

Dans le troisième chapitre nous étudierons les inégalités intégrales de type Ostrowsk pour les fonction prinvexes.

Et le dernier chapitre est entièrement consacré l'étude des inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski.

mots clés

inégalité d'Ostrowski, inégalité de Hölder, intégration de Riemann-Liouville , fonctions convexes, fonctions s-préinvexes.

ملخص

في هذه المذكرة ، سنركز على دراسة المتراجحات التكاملية الحقيقية و الكسرية من نوع اوستروفسكي .

في الفصل الأول، نذكر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي و المعمم بالاضافة الى بعض المساواة التكاملية التي نستعملها لاحقا .

في الفصل الثاني، سنذكر بعض المتراجحات التكاملية من نوع أوستروفسكي لدوال المحدبة, المحدودة و الليبتشيزية .

في الفصل الثالث نقوم بدراسة بعض المتراجحات التكاملية من نوع أوستروفسكي لدوال المعممة .

والفصل الأخير مخصص كليا لدراسةالمتراجحات التكاملية الكسرية من نوع أوستروفسكي .

الكلمات المفتاحية

متراجحة ستروفسكي , متراجحة هولدر, تكامل ريمان ليوفيل , دالة محدبة , دوال ذات تحدب معمم.

Table des matières

Introduction

Ces dernières années, la théorie des inégalités est devenue un domaine d'étude fascinant. C'est également un domaine d'étude important où les inégalités sont utilisées dans de nombreux scénarios mathématiques. En revanche, les inégalités intégrales ont connu des avancées significatives et de nouvelles approches ont émergé, contribuant à résoudre plusieurs problèmes majeurs en analyse numérique et en théorie de l'approximation lorsque l'estimation d'erreur est nécessaire. De plus, en théorie des probabilités, en analyse réelle, en analyse complexe, etc., ces inégalités intégrales sont largement utilisées. La littérature dans ce domaine est abondante voir

[**1, 3, 6, 14, 18, 22, 23, 24, 38-42, 44, 45, 47-49, 53, 54, 56-59, 61**].

Ce mémoire vise à créer de nouvelles extensions des inégalités intégrales de type Ostrowski et à proposer une introduction rapide à ce type d'inégalité intégrale.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Le premier chapitre présente un bref aperçu de l'intégration fractionnaire, plusieurs identités intégrales pertinentes pour notre recherche et diverses formes de convexité classique et généralisée pour les fonctions à une variable.

Le deuxième chapitre étudie quelques inégalités intégrales classiques de type Ostrowski.

Le troisième chapitre traite les inégalités intégrales classiques de type Ostrowski liée à la convexité généralisée.

Le dernier chapitre se concentrera exclusivement sur les inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre passe en revue quelques types de convexité classique et généralisée, quelques classes de fonctions, quelques fonctions spéciales et certaines identités de fonctions. Concernant la convexité, on peut consulter [**51**].

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.0.1 ([51]) *Un ensemble $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}$ et pour tout $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, nous avons*

$$\boldsymbol{tx} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}.$$

Définition 1.0.2 ([51]) *Une fonction $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{tx} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{tf}\,(\boldsymbol{x}) + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\, \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{y})$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}$ et tout $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Définition 1.0.3 ([4]) *Une fonction positive $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = [\mathbf{0}, \infty)$ est dite $\boldsymbol{s}$-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $\boldsymbol{s} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, si*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{tx} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})^{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

1.0.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de la convexité classique introduite par Hanson [**17**].Dans tous ce qui suit on considère que le sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$,$f : K \subset (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$

Définition 1.0.4 ([60]) *Un ensemble K est dit invexe au point x par rapport à η , si*

$$x + t\eta (y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.0.1 *K est dit un ensemble invexe par rapport à η, si K est invexe en chaque points $x \in K$.*

Définition 1.0.5 ([60]) *Une fonction f sur l'ensemble invexe K est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f (x + t\eta (y, x)) \leq (1 - t) f (x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.0.6 ([25]) *Une fonction positive $f$sur l'ensemble invexe $: K \subset [0, \infty)$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si*

$$f (x + t\eta (y, x)) \leq (1 - t)^s f (x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.0.7 *(voir[46]) , Condition C) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble invex par rapport à η, alors pour tout $a, b \in K$ et $t \in [0, 1]$, on a*

$$\eta(a, a + t\eta(b, a)) = -\eta(b, a)$$

et

$$\eta(a, b + t\eta(a, b)) = (1 - t)\eta(a, b)$$

Remarque 1.0.2 *s'ensuit de la Condition C*

$$\eta(a + t_2\eta(b, a), a + t_1\eta(b, a)) = (t_2 - t_1)\eta(b, a)$$

pour tout $a, b \in K$ *et* $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

1.0.3 Quelques classes de fonctions

Nous rappelons ici, nous passons en revue les significations d'une fonction lipschitzienne et d'une fonction bornée.

Définition 1.0.8 ([12]) *On dit que* f *est bornée sur* $[a, b]$*, s'il existe* m *et* M *deux constantes réelles telles que pour tout* $x \in [a, b]$*, on a*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.0.9 ([12]) *On dit que* f *est lipschitzienne de rapport* L *sur* $[a, b]$*, si pour tout* $x, y \in [a, b]$*, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|.$$

1.0.4 Quelques fonctions spéciales

Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.0.10 ([7]) *Pour tout nombre complexe* z *tel que* $\mathrm{Re}(z) > 0$*, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.0.3 *Pour* $z \in \mathbb{N}$*, on a* $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (z-1)$.

Remarque 1.0.4 *Une propriété importante de la fonction gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), z > 0.$$

Fonction bêta

Définition 1.0.11 **([52])** *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *de parties réelles strictement positives par :*

$$\boldsymbol{B(x,y)=\int_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.}$$

Remarque 1.0.5 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante :*

$$\boldsymbol{B(x,y)=\tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

Fonction bêta incomplète

Définition 1.0.12 **([8])** *La fonction bêta incomplète est définie pour tous nombres complexes* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *de parties réelles strictement positives et* $\boldsymbol{\alpha\in(0,1)}$ *par :*

$$\boldsymbol{B_{\alpha}(x,y)=\int_{0}^{\alpha} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.}$$

1.1 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du **17** ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année **1695** quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $\boldsymbol{n=\frac{1}{2}}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe ...". Il a fallu attendre les années **1990** pour voir apparaître les premières conséquences utiles. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est due à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre **1832** et **1837**. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc . Cette théorie n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs vu l'ampleur de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil et en mécanique,équations différentielle.

Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1.1 ([21]) *Soit $f \in L^1[a,b]$, les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $I_{a^+}^{\alpha}f(x)$ et $I_{b^-}^{\alpha}f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a \geq 0$ est définie par*

$$I_{a^+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x < b,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ est la fonction gamma d'Euler.

1.1.1 Quelques inégalités intégrales importantes

Inégalité de Hölder

Théorème 1.1.1 ([43]) *Soit $p > 1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont des fonctions réelles définies sur $[a,b]$, et si de plus $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inégalité d'Hermite-Hadamard

Nous rappelons la fameuse inégalité dite Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes ensuite nous énoncerons sa généralisation pour les fonctions s-convexes

Lemme 1.1.1 ([9]) *Soit $f : [a;b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathring{I}$, $a,b \in I^{\circ}$ avec une fonction convexe, alors :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Lemme 1.1.2 ([10]) *Supposons que $f : [0;\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction s-convexe au second sens, où $s \in (0,1)$ et $a,b \in [0,\infty)$ tel que $a < b$. Si $f \in L^1([a,b])$, alors l'inégalité suivante à lieu :*

$$2^{s-1}f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{1.1}$$

1.1.2 Quelques identités intégrales importantes

Dans cette section, nous exposerons certaines identités établies

Lemme 1.1.3 ([2]) *Soit $\boldsymbol{f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ une fonction différentiable sur $\mathring{\boldsymbol{I}}$ ($\mathring{\boldsymbol{I}}$ l'intérieur de I) où $\boldsymbol{a, b \in I}$ avec $\boldsymbol{a < b}$. Si $\boldsymbol{f\prime \in L^1([a, b])}$, alors pour tout $\boldsymbol{t \in [0, 1]}$, l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\boldsymbol{f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_0^1 f(u)du = (b-a) \int_0^1 k(t) f'(ta + (1-t)b) dt} \tag{1.2}$$

où

$$\boldsymbol{k(t) = \begin{cases} t, t \in [0, \frac{b-x}{b-a}] \\ t - 1, t \in [\frac{b-x}{b-a}, 1] \end{cases}}$$

et $\boldsymbol{x \in [a, b]}$.

Lemme 1.1.4 ([19]) *Soit $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble invex ouvert par rapport à la fonction $\boldsymbol{\eta : A \times A \to \mathbb{R}}$ et $\boldsymbol{a; b \in A}$ avec $\boldsymbol{a < a + \eta(b, a)}$. Supposons que $\boldsymbol{f : A \to \mathbb{R}}$ est une fonction différentiable. Si $\boldsymbol{f'}$ est intégrable sur $\boldsymbol{[a, a + \eta(b, a)]}$, alors l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du} \qquad (1.3) \\ = {} & \boldsymbol{\eta(b, a) \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t f'(a + t\eta(b, a)) dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t) f'(a + t\eta(b, a)) dt \right)} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x \in [a, a + \eta(b, a)]}$.

Lemme 1.1.5 ([62]) *Soit $\boldsymbol{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ fonction différentiable sur $\mathring{\boldsymbol{I}}$ où $\boldsymbol{a, b \in I}$ avec $a < b$. Si $\boldsymbol{f\prime \in L[a, b]}$ alors, pour tout $\boldsymbol{x, t \in [a, b]}$ et $\boldsymbol{\alpha > 0}$ on a :*

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\left[\frac{(x-a)^\alpha + (b-a)^\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}} \right] f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} \left[I^\alpha_{x^+} f(b) + I^\alpha_{x^-} f(a) \right]} \qquad (1.4) \\ = {} & \boldsymbol{\int_0^1 m(t)\, f'(ta + (1-t)\, b)\, dt} \end{aligned}$$

où

$$\boldsymbol{m(t) = \begin{cases} -t^\alpha, t \in [0, \frac{b-x}{b-a}] \\ (1-t)^\alpha, t \in [\frac{b-x}{b-a}, 1] \end{cases}}$$

Lemme 1.1.6 ([31]) *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable avec* $a < a+\eta(b,a)$. *Si* $f\prime \in L_1([a, a+\eta(b,a)])$, *alors l'égalité fractionnaire suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left((\frac{x-a}{\eta(b,a)})^{\alpha} + (1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)})^{\alpha} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[I^{\alpha}_{x^+} f(a+\eta(b,a)) + I^{\alpha}_{x^-} f(a) \right] \\
= \;& \eta(b,a) \left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha} f'(a+t\eta(b,a))dt - \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)^{\alpha} f'(a+t\eta(b,a))dt \right) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales classiques de type Ostrowski

2.1 Inégalité intégrale d'ostrowski

En 1938, Ostrowski prouva le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $f : I \subset [0, \infty] \to \mathbb{R}$, une fonction dérivable à l'intérieur de I ($a, b \in \mathring{I}$ avec $a < b$). Si $|f\prime(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors :*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a)M$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, b]$.

Cette inégalité fournit des estimations d'erreur nette de la valeur d'une fonction par rapport à sa moyenne intégrale. Elles peuvent être utilisées pour calculer les limites d'erreur pour différentes règles de quadrature et pour établir des approximations a priori. Plusieurs extensions et généralisations ont été établies dans les cas continu et discret, ainsi que plusieurs applications en théorie des probabilités et en analyse numérique. Pour plus d'informations, voir [**15, 16, 20, 26-29, 32-37**] et les références qui s'y sont citées.

2.2 Inégalités intégrales de type ostrowski pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes au second sens

Dans tout ce qui suit $\boldsymbol{I}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par $\boldsymbol{I}^{\circ}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}^{\circ}$ avec $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{L}^{1}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{s}$ un nombre fixé dans $(\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Théorème 2.2.1 ([55]) *Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \subset [\mathbf{0}, \infty] \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable à l'intérieur de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}^{\circ}$ avec $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. Si $|\boldsymbol{f}'|$ est $\boldsymbol{s}$-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $\boldsymbol{s} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, alors l'inégalité suivante :*

$$
\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{(s+1)(s+2)} \left(\left(1 - (s+2) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{s+1} + 2(s+1) \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^{s+2} \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left(1 - (s+2) \frac{b-x}{b-a} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{s+1} + s \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{s+2} \right) |f'(b)| \right)
\end{aligned}
$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Preuve. D'après le Lemme 1.1.3 et la $\boldsymbol{s}$-convexité de $|\boldsymbol{f}'|$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & (b-a) \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t\, |f'(ta + (1-t)b)|\, dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)\, |f'(ta + (1-t)b)|\, dt \right) \\
\leq\ & (b-a) \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t \left(t^s |f'(a)| + (1-t)^s |f'(b)| \right) dt \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)\left(t^{s}\left|f'(a)\right| + (1-t)^{s}\left|f'(b)\right|\right) dt \Bigg) \\
= \; & (b-a)\left(\left|f'(a)\right| \int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}} t^{s+1} dt + \left|f'(b)\right| \int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}} t(1-t)^{s} dt \right. \\
& \left. + \left|f'(a)\right| \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t) t^{s} dt + \left|f'(b)\right| \int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{s+1} dt \right) \\
= \; & \tfrac{b-a}{(s+1)(s+2)} \left(\left(1-(s+2)\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + 2(s+1)\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}\right)\left|f'(a)\right| \right. \\
& \left. + \left(1-(s+2)\tfrac{b-x}{b-a}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} + s\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}\right)\left|f'(b)\right| \right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé les faits que

$$
\int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}} t^{s+1} dt = \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}, \tag{2.1}
$$

$$
\int_{0}^{\frac{b-x}{b-a}} t(1-t)^{s} dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\tfrac{b-x}{b-a}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+1} - \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}, \tag{2.2}
$$

$$
\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t) t^{s} dt = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1}{s+1}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+1} + \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{s+2}, \tag{2.3}
$$

et

$$
\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1} (1-t)^{s+1} dt = \tfrac{1}{s+2}\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{s+2}, \tag{2.4}
$$

ce qui achève la démonstration.

■

Corollaire 2.2.1 *([55]) Dans le Théorème 2.2.1, si on prend $x = \frac{a+b}{2}$, on obtient l'inégalité du point milieu suivante pour les fonctions s-convexes*

$$
\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{(s+1)(s+2)}\left(1-\tfrac{1}{2^{s+1}}\right)\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right].
$$

De plus si on pose $s = 1$, on obtient l'inégalité du point milieu pour les fonctions convexes

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right].$$

Théorème 2.2.2 *([55]) Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, telle que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve.

D'après le Lemme 1.1.3, l'inégalité de Hölder, l'inégalité d'Hermite-Hadamard et la s-convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & (b-a)\left(\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ & \left. + \left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \end{aligned}$$

$$\leq (b-a)\left(\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\frac{b-x}{b-a}\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\frac{x-a}{b-a}\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$= \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

La démonstration est terminée ■

Remarque 2.2.1 *dans le théorème 2.2.2 ,si on choisit* $\frac{a+b}{2}$ *et* $s=1$ *alors on obtient l'inégalité suivante :*

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[(|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}+(3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Théorème 2.2.3 *([55]) Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, telle que $q>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors l'inégalité suivante :*

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)}\frac{1}{(p+1)^{(}s+2)}\left[(b-x)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(x-a)^2\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve.

D'après le Lemme 1.1.3, l'inégalité de Hölder et du Lemme 1.2 car $|f'|^q$ est s-convexe,o na

$$
\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & (b-a)\left(\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}\left(t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\frac{1}{p+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1\left(t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \frac{b-a}{(s+1)^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}|f'(a)|^q+\left(1-\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}\right)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left(1-\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{s+1}\right)|f'(a)|^q+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{s+1}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 2.2.2 ([55]) *Dans le théorème 2.2.3,si on choisit $x=\frac{a+b}{2}$ alors on obtient l'inégalité suivante :*

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}
$$

De plus si on suppose $f'(a)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'(b)$ et $s=1$, on obtient

$$
\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{4}\right).
$$

Théorème 2.2.4 ([55]) *Soit $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° telle que $f'\in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, telle que $q>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,* *alors l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. D'après le Lemme 1.1.3, l'inégalité de Hölder et et l'inégalité d'Hermite-Hadamard du Lemme 1.2 car, on a

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & (b-a)\left(\int_0^1 |K(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq\ & (b-a)\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^p dt + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ =\ & (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{p+1}+\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 2.2.3 ([55]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.4, de plus si on suppose que $p = q = 2$, on obtient*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|f'(a)|^2+|f'(b)|^2}{s+1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus si on prend $x = \frac{a+b}{2}$ et $s = 1$, on trouve

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{|f'(a)|^2+|f'(b)|^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 2.2.2 *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.4,si de plus on suppose que $p =$*

$q = 2$, $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$ *et* $s = 1$ *on obtient :*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{M(b-a)}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.3 l'inégalité de type ostrowski pour les fonction bornée

Théorème 2.3.1 ([13]) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction absolument continue sur* $[a, b]$ *et* $x \in [a, b]$. *Supposons qu'il existe des fonctions* $m_i, M_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pour* $i = 1, 2$ *vérifiant les propriétés suivantes :* $m_1(x) \leq f'(t) \leq M_1(x)$ *pour presque tout* $t \in [a, x]$, *et* $m_2(x) \leq f'(t) \leq M_2(x)$ *pour presque tout* $t \in [x, b]$, *alors on a*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2(b-a)} \left(m_1(t)(x-a)^2 - M_2(t)(b-x)^2 \right) \\ \leq\ & f(x) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \\ \leq\ & \tfrac{1}{2(b-a)} \left(M_1(t)(x-a)^2 - m_2(t)(b-x)^2 \right). \end{aligned}$$

Preuve. Sur $[a, x]$ on a

$$m_1(x) \leq f'(t) \leq M_1(x) \tag{2.6}$$

En multipliant les membres de (2.6) par $(t - a)$ ensuite intégrant le résultat obtenu par rapport à t sur $[a, x]$, on trouve

$$\int_a^x (t-a)\, m_1(x)\, dt \leq \int_a^x (t-a)\, f'(t)\, dt \leq \int_a^x (t-a)\, M_1(x)\, dt \tag{2.7}$$

(2.7) peut-être réecrite

$$m_1(x) \int_a^x (t-a)\, dt \leq \int_a^x (t-a)\, f'(t)\, dt \leq M_1(x) \int_a^x (t-a)\, dt \tag{2.8}$$

Ainsi on a

$$\tfrac{1}{2}(x-a)^2 m_1(x) \leq (x-a) f(x) - \int_a^x f'(t)\, dt \leq \tfrac{1}{2}(x-a)^2 M_1(x). \tag{2.9}$$

De même sur $[x, b]$ on a

$$m_2(x) \leq f'(t) \leq M_2(x). \tag{2.10}$$

En multipliant les membres de (2.10) par $(t-b)$ ensuite intégrant le résultat obtenu par rapport à t sur $[x, b]$, on trouve

$$\int_x^b (t-b) M_2(x)\, dt \leq \int_x^b (t-b) f'(t)\, dt \leq \int_x^b (t-b) m_2(x)\, dt. \tag{2.11}$$

De (2.11) on a

$$-\tfrac{1}{2} M_2(x)(x-b)^2 \leq -(x-b) f(x) - \int_x^b f(t)\, dt \leq -\tfrac{1}{2} m_2(x)(x-b)^2. \tag{2.12}$$

En additionnant (2.9) et (2.12) on obtient

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}(x-a)^2 m_1(x) - \tfrac{1}{2} M_2(x)(x-b)^2 \\ \leq\ & (x-a) f(x) - (x-b) f(x) - \int_x^b f(t)\, dt - \int_a^x f'(t)\, dt \\ \leq\ & \tfrac{1}{2}(x-a)^2 M_1(x) - \tfrac{1}{2} m_2(x)(x-b)^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

En simplifiant (2.13) puis en multipliant les membres de l'inégalité résultante par $\frac{1}{b-a}$ on obtient

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2(b-a)}\left((x-a)^2 m_1(x) - M_2(x)(b-x)^2\right) \\ \leq\ & f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\, dt \\ \leq\ & \tfrac{1}{2(b-a)}\left((x-a)^2 M_1(x) - m_2(x)(b-x)^2\right). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.3.1 **([13])** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction absolument continue sur* $[a, b]$

de dérivée $\boldsymbol{f'}$ *bornée i.e.* $\boldsymbol{m \leq f'(t) \leq M}$ *pour tout* $\boldsymbol{t \in [a,b]}$*, on a*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2(b-a)}\left((x-a)^2 m - M(b-x)^2\right) \\ \leq \; & f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\,dt \\ \leq \; & \tfrac{1}{2(b-a)}\left((x-a)^2 M - m(b-x)^2\right). \end{aligned}$$

Corollaire 2.3.2 ([13]) *Si en prend* $\boldsymbol{x = \frac{a+b}{2}}$*, le Corollaire 2.3.1, devient*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\,dt \right| \leq \tfrac{b-a}{8}(M-m).$$

2.4 l'inégalité de type ostrowski pour les fonctions Lipschitziennes

Théorème 2.4.1 *Soit* $\boldsymbol{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$ *une application* $\boldsymbol{L}$*-lipschitzienne sur* $\boldsymbol{[a,b]}$*, alors*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\,du \right| \leq L(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2}\right] \tag{2.14}$$

pour tout $\boldsymbol{x \in [a,b]}$*. La constante* $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ *est la meilleure possible.*

Preuve. On a

$$\int_a^x (t-a)\,f'(t)\,dt = (x-a)\,f(x) - \int_a^x f(t)\,dt, \tag{2.15}$$

et

$$\int_x^b (t-b)\,f'(t)\,dt = (b-x)\,f(x) - \int_x^b f(t)\,dt. \tag{2.16}$$

En additionnant (2.15) et (2.16), ensuite multipliant les deux membres de l'égalité résultante par $\frac{1}{b-a}$, on trouve

$$f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \tfrac{1}{b-a}\left(\int_a^x (t-a)\,f'(t)\,dt + \int_x^b (t-b)\,f'(t)\,dt\right). \tag{2.17}$$

En appliquant la valeur absolue à l'identité (2.17) et en utilisant le fait que $\boldsymbol{f}$ est lipschitzienne i.e. $\sup|f'(t)| = L$, cette dernière donne

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leq \tfrac{1}{b-a}\left(\int_a^x (t-a)\,|f'(t)|\,dt + \int_x^b (b-t)\,|f'(t)|\,dt\right) \\
&\leq \tfrac{1}{b-a}\left(\int_a^x (t-a)\,dt + \int_x^b (b-t)\,dt\right) L \\
&= \tfrac{1}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}(x-a)^2 + \tfrac{1}{2}(b-x)^2\right) L = \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right)(b-a)L.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Ostrowski pour les fonctions préinvexes

Ce chapitre traite les inégalités intégrales de type Ostrowski liée à la préinvexité

Théorème 3.0.1 ([19]) *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble ouvert invexe par rapport à $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $a, b \in A$ avec $a < a+\eta(b,a)$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et $|f'|$ est une fonction préinvexe sur A. Si $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{6} \left(\left(3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 + 2\left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(a)| \right. \\ & \left. + \left(1 - 3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 + 4\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(b)| \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité (1.1.4), et en utilisant la préinvexité de $|f'|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\
&\leq \eta(b,a) \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right| dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t) \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right| dt \right) \\
&\leq \eta(b,a) \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t \left((1-t) |f'(a)| + t |f'(b)| \right) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t) \left((1-t) |f'(a)| + t |f'(b)| \right) dt \right) \\
&= \eta(b,a) \left(\left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t(1-t)\,dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)^2\,dt \right) |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^2 dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)\,t dt \right) |f'(b)| \right) \\
&= \eta(b,a) \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3 \right) |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3 \right) |f'(b)| \right).
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t(1-t)\,dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^2 dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)\,t dt = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^3.$$

Pour prouver que la constante $\frac{1}{6}$ est la meilleure possible, supposons que (3.1) soit vraie avec une constante $K > 0$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} & \left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\ \leq \; & \eta(b,a) K \left(\left(3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 + 2\left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(a)| \right. \\ & \left. + \left(1 - 3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 + 4\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(b)| \right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Choisissons comme fonction $f(x) = x$, l'inégalité (3.2) reste valable si l'on prend $x = a + \eta(b,a)$. On obtient

$$\frac{\eta(b,a)}{2} \leq 3\eta(b,a) K \Rightarrow \frac{1}{6} \leq K.$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Remarque 3.0.1 ([19]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.0.2, si l'on prend*

— $\eta(b,a) = b - a$ *et* $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$*, on obtient l'inégalité suivante*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(u)\, du \right| \leq \frac{b-a}{8} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right). \tag{3.3}$$

— *Si de plus nous supposons que* $|f'(x)| \leq M$*,* $M > 0$*, on obtient l'inégalité suivante*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(u)\, du \right| \leq M \frac{(b-a)}{4}.$$

— *Si* η *satisfait la condition* C*, d'après la préinvexité de* $|f'|$ *on a*

$$\begin{aligned} |f'(a + t\eta(b,a))| &= |f'(a + \eta(b,a) + (1-t)\eta(a, a+\eta(b,a)))| \\ &\leq t|f'(a+\eta(b,a))| + (1-t)|f'(a)| \end{aligned} \tag{3.4}$$

pour tout $t \in [0,1]$.

— *Et en utilisant l'inégalité (3.4) dans la preuve de Théorème 3.0.2, l'inégalité (3.1)* *devient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{6} \left\{ \left(3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 + 2\left(\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(a)| \right. \\
&\left. + \left(1 - 3\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 + 4\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^3 \right) |f'(a+\eta(b,a))| \right\}. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

On note que d'après la préinvexité de $|f'|$, on a $|f'(a+\eta(b,a))| \leq |f'(b)|$, donc l'inégalité (3.5) est plus fine que l'inégalité (3.1).

Théorème 3.0.2 ([19]) *Soit $A \subset R$ un sous ensemble ouvert invexe par rapport à $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ et $a, b \in A$ avec $a < a + \eta(b,a)$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que $|f'|^q$ est fonction préinvexe sur $[a, a+\eta(b,a)]$ pour un certain nombre fixé $q > 1$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ et η satisfait à la Condition C, alors l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \eta(b,a) \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^2 \left(\frac{|f'(a+\eta(b,a))|^q + |f'(x)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \right) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour chaque $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité (1.1.4), et en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right| \\
\leq\;& \eta(b,a)\left(\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} \left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int\limits_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\;& \eta(b,a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Notons aussi que la préinvexité de $|f'|^{q}$ sur $[a,a+\eta(b,a)]$, et la condition C, on a

$$\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}\leq t\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^{q}+(1-t)\left|f'(a)\right|^{q}. \qquad (3.8)$$

de la même manière on a

$$\left|f'(a+(1-t)\eta(b,a))\right|^{q}\leq(1-t)\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^{q}+t\left|f'(a)\right|^{q}. \qquad (3.9)$$

En additionnant (3.8) et (3.9) on trouve

$$\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}+\left|f'(a+(1-t)\eta(b,a))\right|^{q}\leq\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^{q}+\left|f'(a)\right|^{q}. \qquad (3.10)$$

En intégrant (3.10) par rapport à t sur $[0,t]$, on arrive

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\left| f'\left(a + t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q + \left| f'\left(a + (1-t)\,\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q \right) dt \\
= \; & \int_0^1 \left| f'\left(a + t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt + \int_0^1 \left| f'\left(a + (1-t)\,\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt \\
= \; & \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du + \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du \\
= \; & \tfrac{2}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du \\
\leq \; & \int_0^1 \left(\left| f'\left(a + \eta\left(b,a\right)\right)\right|^q + \left| f'\left(a\right)\right|^q \right) dt \\
= \; & \left(\left| f'\left(a + \eta\left(b,a\right)\right)\right|^q + \left| f'\left(a\right)\right|^q \right) \int_0^1 dt \\
= \; & \left(\left| f'\left(a + \eta\left(b,a\right)\right)\right|^q + \left| f'\left(a\right)\right|^q \right).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\tfrac{2}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du \leq \left(\left| f'\left(a + \eta\left(b,a\right)\right)\right|^q + \left| f'\left(a\right)\right|^q \right),$$

d'où

$$\int_a^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du \leq \eta\left(b,a\right) \tfrac{\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q + \left|f'(a)\right|^q}{2}. \tag{3.11}$$

Ainsi d'après (3.11) on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} \left| f'\left(a + t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt &= \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_a^x \left| f'\left(u\right)\right|^q du \\
&\leq \tfrac{x-a}{\eta(b,a)} \tfrac{\left|f'(x)\right|^q + \left|f'(a)\right|^q}{2},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 \left| f'\left(a + t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt &= \tfrac{1}{\eta(b,a)} \int_x^{a+\eta(b,a)} \left| f'\left(u\right)\right|^q du \\
&\leq \tfrac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)} \tfrac{\left|f'(a+\eta(b,a))\right|^q + \left|f'(x)\right|^q}{2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En substituant (3.12) et (3.13) dans (3.7), on obtient le résultat désiré. ∎

Corollaire 3.0.1 ([19]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.0.2 Si l'on suppose que* $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$, *alors*

$$\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} M \left(\frac{(x-a)^2 + (a+\eta(b,a)-x)^2}{\eta(b,a)}\right)$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Corollaire 3.0.2 ([19]) *Sous les hypothèses du Théorème 3.2. Si l'on choisit* $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{|f'(a+\eta(b,a))|^q + \left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.3 ([19]) *Si on utilise la préinvexité de* $|f'|^q$ *i.e.* $\left|f'\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\right|^q \leq \frac{1}{2}|f'(a)|^q + \frac{1}{2}|f'(a+\eta(b,a))|^q$, *le Corollaire 3.2 donne*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{\eta(b,a)}{4} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(a+\eta(b,a))|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(a+\eta(b,a))|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Remarque 3.0.2 ([19]) *Si l'on prend* $\eta(b,a) = b-a$, *le Corollaire 3.3, devient*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{16} \left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(3|f'(b)|^q + |f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

En prenant $a_1 = 3|f'(a)|^q$, $b_1 = |f'(b)|^q$, $a_2 = 3|f'(b)|^q$, $b_2 = |f'(a)|^q$ *dans* *l'inégalité algébrique ci-dessous*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s \tag{3.14}$$

pour $(0 < s < 1)$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ *et* $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$, *car* $0 < 1/q < 1$ *puisque* $q > 1$, *on obtient l'inégalité suivante*

$$\left| f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right).$$

3.0.1 Inégalités intégrales de type Ostrowski pour les fonctions s-préinvexe

Théorème 3.0.3 ([30]) *Soit* $f : K \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$. *Si* $|f'|$ *est* s*-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$, *alors nous avons l'inégalité suivante*

$$\left| f(x) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \leq \tfrac{\eta(b,a)}{(s+1)(s+2)}\left[\Psi_1 |f'(a)| + \Psi_2 |f'(b)|\right], \tag{3.15}$$

où

$$\Psi_1 = 1-(s+2)\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} + s\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2} \tag{3.16}$$

et

$$\Psi_2 = 1-(s+2)\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} + 2(s+1)\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2}. \tag{3.17}$$

Preuve. D'après le lemme 1.4 et les propriétés de la valeur absolue, nous avons

$$\begin{aligned} &\left| f(x) - \tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\ \leq\ & \eta(b,a)\left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t\,|f'(a+t\eta(b,a))|\,dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)\,|f'(a+t\eta(b,a))|\,dt\right) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Puisque $|f'|$ est une fonction s-préinvexe au second sens, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\
\leq\ & \eta(b,a) \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t(1-t)^s |f'(a)| + t^{s+1} |f'(b)| dt \right. \\
& \left. + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)^{s+1} |f'(a)| + (1-t) t^s |f'(b)| dt \right) \\
=\ & \eta(b,a) \left(\left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t(1-t)^s dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)^{s+1} dt \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left(\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{s+1} dt + \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t) t^s dt \right) |f'(b)| \right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t(1-t)^s dt &= -\frac{1}{(s+1)} \frac{x-a}{\eta(b,a)} \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} \\
& \quad + \frac{1}{(s+1)(s+2)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2} \\
\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{s+1} dt &= \frac{1}{s+2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2} \\
\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t)^{s+1} dt &= \frac{1}{s+2} \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2} \\
\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^1 (1-t) t^s dt &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} - \frac{1}{s+1} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} + \frac{1}{s+2} \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+2}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

En substituant (3.20) dans (3.19), on trouve le résultat voulu. ■

Corollaire 3.0.4 ([30]) *Dans le Théorème 3.0.4, si l'on choisit* $\eta(b,a) = b - a$ *et*

$s = 1$, *on obtient l'inégalité suivante*

$$
\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{1}{6(b-a)^2} \left\{ \left((b-a)^3 - 3(b-a)(b-x)^2 + 4(b-x)^3 \right) |f'(a)| \right. \\
& \left. + \left((b-a)^3 - 3(b-a)(x-a)^2 + 4(x-a)^3 \right) |f'(b)| \right\}.
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.0.5 ([30]) *Dans le Théorème 3.0.4, si l'on prend* $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, *on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$
\left| f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \leq \frac{\eta(b,a)}{(s+1)(s+2)} \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) \left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).
$$

Théorème 3.0.4 ([30]) *Soit* $f : K \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$, *et soit* $q > 1$ *telle que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* $|f'|^q$ *est fonction* s*-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$, *alors l'inégalité suivante*

$$
\begin{aligned}
& \left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}} (s+1)^{\frac{1}{q}}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+\frac{1}{p}} \right. \\
& \times \left(\left(1 - \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+s}\right) |f'(a)|^q + \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+s} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+\frac{1}{p}} \\
& \left. \times \left(\left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+s} |f'(a)|^q + \left(1 - \left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{1+s}\right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Preuve. D'après le lemme 1.1.4 et les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder

, on a

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\
\leq\ & \eta(b,a) \left(\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right|^{q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left. \left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)^{p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right|^{q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
=\ & \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right|^{q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left. \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} \left| f'(a+t\eta(b,a)) \right|^{q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right). \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|$ est une fonction s-préinvexe au second sens, on en déduit

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(u)du \right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} \left((1-t)^{s} |f'(a)|^{q} + t^{s} |f'(b)|^{q} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left. \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} \left((1-t)^{s} |f'(a)|^{q} + t^{s} |f'(b)|^{q} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
=\ & \frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(|f'(a)|^{q} \int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} (1-t)^{s} dt + |f'(b)|^{q} \int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left. \left(1 - \frac{x-a}{\eta(b,a)} \right)^{\frac{p+1}{p}} \left(|f'(a)|^{q} \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)^{s} dt + |f'(b)|^{q} \int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} t^{s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right), \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} (1-t)^s dt &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}, \\
\int_0^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^s dt &= \frac{1}{s+1}\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}, \\
\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} (1-t)^s dt &= \frac{1}{s+1}\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}, \\
\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1} t^s dt &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1}\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En substituant (3.24) dans (3.23), on trouve le résultat voulu ■

Corollaire 3.0.6 ([30]) *Si l'on prend $s = 1$ dans le Théorème 3.0.5, on obtient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \Bigg(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 \left(\left(2-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(a)|^q + \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^2 \left(\left(1-\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(a)|^q + \left(1+\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.7 ([30]) *Dans le Corollaire 3.0.6, si l'on choisit $\eta(b,a) = b-a$, on obtient l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f(x) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}}} \Bigg(\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(\left(1+\tfrac{b-x}{b-a}\right)|f'(a)|^q + \tfrac{x-a}{b-a}|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \left(1-\tfrac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(\tfrac{b-x}{b-a}|f'(a)|^q + \left(1+\tfrac{x-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.8 ([30]) *Dans le Théorème 3.0.5, si l'on choisit $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$, alors on* *obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left|f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|\leq\frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(s+1)^{\frac{1}{q}}2^{2+\frac{s}{q}}}$$
$$\times\left(\left(\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(a)|^{q}+\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Corollaire **3.0.9** ([30]) *Dans le Corollaire 3.0.8, si l'on prend* $s=1$*, on obtient l'inégalité du point milieu suivante*

$$\left|f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|$$
$$\leq\frac{\eta(b,a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}4^{1+\frac{1}{q}}}\left(\left(3|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(a)|^{q}+3|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Chapitre 4

Inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski

Dans ce chapitre nous allons examiner quelques inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski.

4.1 Inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski pour les fonctions convexes

Théorème 4.1.1 *Soit* $\boldsymbol{f : [a,b] \to \mathbb{R}}$*, une fonction différentiable sur* $\boldsymbol{[a,b]}$ *avec* $\boldsymbol{a < b}$ *telle que* $\boldsymbol{f' \in L^1([a,b])}$*. Si* $\boldsymbol{|f'|}$ *est convexe dans* $\boldsymbol{[a,b]}$ *et* $\boldsymbol{x \in [a,b]}$ *avec* $\boldsymbol{\alpha > 0}$*, alors l'inégalité fractionnaire suivante :*

$$\begin{aligned}
&\left|\left[\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha+1}}\right] f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[I_{x^+}^{\alpha} f(b) + I_{x^-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{\alpha+2}\left[\left(\frac{(b-x)^{\alpha+2}}{(b-a)^{\alpha+2}} + \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[\frac{1}{\alpha+1}+\frac{b-x}{b-a}\right]\right)|f'(a)|\right. \\
&\left. + \left(\frac{(x-a)^{\alpha+2}}{(b-a)^{\alpha+2}} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[\frac{1}{\alpha+1}+\frac{x-a}{b-a}\right]\right)|f'(b)|\right]
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x \in [a,b]}$*,* $\boldsymbol{\Gamma}$ *est la fonction gamma d'Euler.*

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux de membres de l'identité du Lemme 1.1.5 et en utilisant la convexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{(b-a)^{\alpha+1}}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(J_{x^+}^{\alpha}f(b)+J_{x^-}^{\alpha}f(a)\right)\right| \\
\leq\; & \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \\
\leq\; & \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt \\
& +\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}\left(t\left|f'(a)\right|+(1-t)\left|f'(b)\right|\right)dt \\
=\; & \left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha+1}dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}tdt\right)\left|f'(a)\right| \\
& +\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}(1-t)dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt\right)\left|f'(b)\right| \\
=\; & \left(\frac{(b-x)^{\alpha+2}-(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(b-a)^{\alpha+2}}+\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+1}\right)\left|f'(a)\right| \\
& +\left(\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+1}-\frac{(b-x)^{\alpha+2}-(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(b-a)^{\alpha+2}}\right)\left|f'(b)\right|,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les faits que

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha+1}dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha}tdt=\frac{(b-x)^{\alpha+2}-(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(b-a)^{\alpha+2}}+\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+1},$$

et

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha}(1-t)dt+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^{1}(1-t)^{\alpha+1}dt=\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+1}-\frac{(b-x)^{\alpha+2}-(x-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(b-a)^{\alpha+2}}.$$

La preuve est finie. ■

Corollaire 4.1.1 ([62]) *Dans le Théorème 4.1.1, si on prend $x=\frac{a+b}{2}$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha}f(b)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha}f(a)\right)\right| \\
\leq\; & \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(\frac{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|}{2}\right).
\end{aligned}$$

Théorème 4.1.2 ([62]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable sur (a,b) avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est convexe dans $[a,b]$, telle que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité fractionnaire*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(J_{x^+}^\alpha f(b) + J_{x^-}^\alpha f(a)\right)\right| \\
\leq\ &\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{|f'(x)|^q+|f'(a)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a,b]$, où $\alpha > 0$ et Γ est la fonction gamma d'Euler.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux de membres de l'identité du Lemme 1.1.5, l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(x-a)^\alpha+(b-x)^\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left(J_{x^+}^\alpha f(b) + J_{x^-}^\alpha f(a)\right)\right| \\
\leq\ &\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)^{\alpha p} dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ &\left(\frac{1}{\alpha p+1}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \\
&+\left(\frac{1}{\alpha p+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Comme $|f'|^q$ est convexe, d'après l'inégalité d'Hermite-Hadamard on a

$$\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{b-x}{b-a}\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}, \tag{4.2}$$

et

$$\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{x-a}{b-a}\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}. \tag{4.3}$$

En substituant (4.2) et (4.3) dans (4.1), on trouve le résultat désiré. ■

Corollaire 4.1.2 *si on prend* $x = \frac{a+b}{2}$ *dans le théorème 2.6.2 on obtient l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned}&\left|f(\tfrac{a+b}{2}) + \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b) + I^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a)\right]\right| \\ \leq\ & \tfrac{(b-a)}{4(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\tfrac{|f'(\frac{a+b}{2})|^{q}+|f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(\frac{a+b}{2})|^{q}+|f'(a)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

4.2 Inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski pour les fonctions s-préinvexe

Théorème 4.2.1 ([31]) *Soit* $f : [a, a + \eta(b, a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $\eta(b, a) > 0$ *et* $f' \in L^1([a, a + \eta(b, a)])$. *Si* $|f'|$ *est* s*-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0, 1]$, *alors l'inégalité fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned}&\left|\left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha} + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}\right) f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}}\left(J^{\alpha}_{x^{-}} f(a) + J^{\alpha}_{x^{+}} f(a + \eta\,(b,a))\right)\right| \\ \leq\ & \eta\,(b,a)\left(\left(B_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}\,(\alpha+1, s+1) + \tfrac{1}{s+\alpha+1}\left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1}\right)|f'\,(a)| \right. \\ & \left. + \left(\tfrac{1}{s+\alpha+1}\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1} + B\,(s+1, \alpha+1) - B_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}\,(s+1, \alpha+1)\right)|f'\,(b)|\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a + \eta(b, a)]$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux de membres de l'identité du Lemme 1.1.6, et en utilisant la s-préinvexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}+\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}}\left(J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(a+\eta(b,a))\right)\right| \\
\leq\;& \eta(b,a)\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right) \\
\leq\;& \eta(b,a)\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f'(a)\right|+t^{s}\left|f'(b)\right|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f'(a)\right|+t^{s}\left|f'(b)\right|\right)dt\right) \\
=\;& \eta(b,a)\left(\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha}(1-t)^{s}dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha+s}dt\right)\left|f'(a)\right|\right. \\
&\left.+\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha+s}dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha}t^{s}dt\right)\left|f'(b)\right|\right) \\
=\;& \eta(b,a)\left(\left(B_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{\alpha+s+1}\left(\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1}\right)\left|f'(a)\right|\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{\alpha+s+1}\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1}+B_{\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}}(s+1,\alpha+1)\right)\left|f'(b)\right|\right)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha}(1-t)^{s}dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha+s}dt \\
=\;& B_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}(\alpha+1,s+1)+\frac{1}{\alpha+s+1}\left(\frac{a+\eta(b,a)-x}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha+s}dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha}t^{s}dt \\
=\;& \frac{1}{\alpha+s+1}\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+s+1}+B(s+1,\alpha+1)-B_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}(s+1,\alpha+1).
\end{aligned}$$

La preuve est finie. ■

Corollaire 4.2.1 ([31]) *Dans le Théorème 4.2.1, si l'on choisit* $x = \frac{2a+\eta(b,a)}{2}$*, on obtient l'inégalité fractionnaire du point milieu suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \tfrac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}} \left(J^{\alpha}_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}-} f(a) + J^{\alpha}_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}+} f(a+\eta(b,a)) \right) \right| \\
\leq\ & \eta(b,a) \left(\left(B_{\frac{1}{2}}(\alpha+1, s+1) + \tfrac{1}{(s+\alpha+1)2^{\alpha+s+1}} \right) |f'(a)| \right. \\
&\left. + \left(\tfrac{1}{(s+\alpha+1)2^{\alpha+s+1}} + B(s+1,\alpha+1) - B_{\frac{1}{2}}(s+1,\alpha+1) \right) |f'(b)| \right).
\end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 ([31]) *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $\eta(b,a) > 0$ *et* $f' \in L^1([a, a+\eta(b,a)])$ *et soit* $q > 1$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Si* $|f'|^q$ *est* s*-préinvexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0,1]$*, alors l'inégalité fractionnaire suivante*

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha} + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha} \right) f(x) - \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}} \left(J^{\alpha}_{x-} f(a) + J^{\alpha}_{x+} f(a+\eta(b,a)) \right) \right| \\
\leq\ & \eta(b,a) \left(\tfrac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\tfrac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left(\left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(1 - \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\right) |f'(a)|^q + \left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\left(1 - \tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1} |f'(a)|^q + \left(1 - \left(\tfrac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $x \in [a, a+\eta(b,a)]$.

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux de membres de l'identité du Lemme 1.1.6, l'inégalité de Hölder, et en utilisant la s-préinvexité de $|f'|$, on a

$$
\begin{aligned}
& \left|\left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}+\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\eta(b,a))^{\alpha}}\left(J_{x^{-}}^{\alpha}f(a)+J_{x^{+}}^{\alpha}f(a+\eta(b,a))\right)\right| \\
\leq\ & \eta(b,a)\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt+\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|dt\right) \\
\leq\ & \eta(b,a)\left(\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}\left|f'(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \eta(b,a)\left(\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}} t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{0}^{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}\left((1-t)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+t^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}(1-t)^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{x-a}{\eta(b,a)}}^{1}\left((1-t)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}+t^{s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \eta(b,a)\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times\left(\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\left(1-\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\frac{1}{s+1}\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left.+\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\left(1-\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\left|f'(a)\right|^{q}+\frac{1}{s+1}\left(1-\left(\frac{x-a}{\eta(b,a)}\right)^{s+1}\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est finie. ■

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'examiner des inégalités intégrales de type Ostrowski et de se familiariser avec certaines outils d'analyse nécessaires à la démonstration de tels problèmes.

Dans le premier chapitre, nous avons passé en revue quelques identités et plusieurs formes classiques et généralisées de convexité.

Dans le deuxième chapitre, nous avons utilisé certaines formes de convexité pour étudier plusieurs inégalités intégrales classiques de type Ostrowski.

Dans le troisième chapitre, nous avons utilisé la convexité généralisée pour explorer quelques inégalités intégrales classiques de type Ostrowski.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes concentrés sur les inégalités intégrales fractionnaires de type Ostrowski.

Bibliographie

[1] M. B. Almatrafi, W. Saleh, A. Lakhdari, F. Jarad and B. Meftah, On the multiparameterized fractional multiplicative integral inequalities. J. Inequal. Appl. 2024, Paper No. 52, 27 pp.

[2] M. Alomari and M. Darus, Some Ostrowski type inequalities for convex functions with applications, RGMIA 13 (1) (2010) article No. 3. Preprint.

[3] H. Angulo, J. Gimenez, A. M. Moros and K. Nikodem, On strongly h-convex functions. Ann. Funct. Anal. 2 (2011), no. 2, 85–91.

[4] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[5] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[6] T. Chiheb, N. Boumaza and B. Meftah, Some new Simpson-like type inequalities via preqausiinvexity. Transylv. J. Math. Mech, 12 (2020), no. 1, 1-10.

[7] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[8] A. R. DiDonato, M.P. Jarnagin : The efficient calculation of the incomplete beta-function ratio for half-integer values of the parameters a, b. Math. Comp. 21 (1967), no. 100, 652–662.

[9] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić, and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[10] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Math. 31 (1998), no. 3, 633–642.

[11] S. S. Dragomir, The Ostrowski's integral inequality for Lipschitzian mappings and applications. Comput. Math. Appl. 38 (1999), no. 11-12, 33–37.

[12] S. S. Dragomir, On the midpoint quadrature formula for Lipschitzian mappings and applications. Kragujevac J. Math. 22 (2000), 5–11.

[13] S. S. Dragomir, Improvements of Ostrowski and generalised trapezoid inequality in terms of the upper and lower bounds of the first derivative. Tamkang J. Math. 34 (2003), no. 3, 213–222.

[14] S. S. Dragomir, nequalities of Hermite-Hadamard type for $\boldsymbol{h}$-convex functions on linear spaces. Proyecciones 34 (2015), no. 4, 323–341.

[15] S. S. Dragomir, Ostrowski and trapezoid type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions with bounded derivatives. Fract. Differ. Calc. 10 (2020), no. 2, 307–320.

[16] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui, New fractional inequalities of Ostrowski type. Transylv. J. Math. Mech. 5 (2013), no. 2, 103–106.

[17] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981) 545-550.

[18] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Some new inequalities of Simpson type for strongly $\boldsymbol{s}$-convex functions. Afr. Mat. 26 (2015), no. 5-6, 741–752.

[19] İ. İşcan, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are preinvexe. Bull. Iranian Math. Soc. 40 (2014), no. 2, 373–386.

[20] A. Kashuri, B. Meftah, P. O. Mohammed, A. A. Lupaş, B. Abdalla, Y. S. Hamed and T. Abdeljawad, Fractional weighted Ostrowski-type inequalities and their applications. Symmetry, 13 (2021), no. 6, 968.

[21] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[22] U. S. Kirmaci, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Appl. Math. Comput. 147 (2004), no. 1, 137–146.

[23] A. Lakhdari, W. Saleh, B. Meftah and A. Iqbal, Corrected dual-Simpson-type inequalities for differentiable generalized convex functions on fractal set. Fractal and Fractional, 6 (2022), no. 12, 710.

[24] A. Lakhdari and B. Meftah, Some fractional weighted trapezoid type inequalities for preinvex functions. nt. j. nonlinear analysis appl. 13 (2022), no. 1, 3567-3587.

[25] J.-Y. Li, On Hadamard-type inequalities for s-preinvex functions. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) 27(2010), no. 4, p. 003.

[26] B. Meftah, Some new Ostrwoski's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are r-convex. Int. J. Anal. 2016, Art. ID 6749213, 7 pp.

[27] B. Meftah, Ostrowski inequalities for functions whose first derivatives are logarithmically preinvex. Chin. J. Math. (N.Y.) 2016, Art. ID 5292603, 10 pp

[28] B. Meftah and K. Boukerrioua, Some new Ostrowski type inequalities on time scales for function of two independent variables. J. Interdiscip. Math. 20 (2017), no. 2, 397-415.

[29] B. Meftah, New Ostrowski's inequalities. Rev. Colombiana Mat. 51(2017), no. 1, 57–69.

[30] B. Meftah, Ostrowski inequality for functions whose first derivatives are s-preinvexe in the second sense. Khayyam J. Math. 3 (2017), no. 1, 61–80.

[31] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are s-preinvexe in the second sense. Int. J. Anal. Appl. 15 (2017), no. 2, 146–154.

[32] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are φ-preinvexe. J. Adv. Math. Stud. 10 (2017), no. 3, 335-347.

[33] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for n-times differentiable mappings which are quasi-convex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 32 (2017), no. 3, 319–327.

[34] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are logarithmically convex. Ann. Math. Sil. 32 (2018), no. 1, 275–284.

[35] B. Meftah, Some Ostrowski 's inequalities for functions whose n^{th} derivatives are s-convex. An Univ Oradea Fasc. Mat. 25 (2018), no. 2, 185–212.

[36] B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly beta-convex. Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 39 (2019), no. 4, Mathematics, 126–147.

[37] B. Meftah and A. Azaizia, Fractional Ostrowski-type fractional integral inequalities for functions whose first derivatives are MT-preinvex. Matua Rev. Programa Mat. 2019, 6, 33–43.

[38] B. Meftah, Fractional Hermite-Hadamard type integral inequalities for functions whose modulus of derivatives are co-ordinated $\log$-preinvex. Punjab Univ. J. Math. (Lahore) 51 (2019), no. 2, 21–37.

[39] B. Meftah, M. Benssaad, W. Kaidouchi and S. Ghomrani, Conformable fractional Hermite-Hadamard type inequalities for product of two harmonic s-convex functions. Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), no. 4, 1495–1506.

[40] B. Meftah, M. Merad, N. Ouanas and A. Souahi, Some new Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose nth derivatives are convex. Acta Comment. Univ. Tartu. Math. 23 (2019), no. 2, 163–178.

[41] B. Meftah, A. Lakhdari and D. C. Benchettah, Some new Hermite-Hadamard type integral inequalities for twice differentiable s-convex functions. Comput. Math. Model. 33 (2022), no. 3, 330–353.

[42] B. Meftah and A. Lakhdari, Dual Simpson type inequalities for multiplicatively convex functions. Filomat 37 (2023), no. 22, 7673–7683.

[43] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[44] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[45] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[46] S. R. Mohan and S. K. Neogy, On invexe sets and preinvexe functions. J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), no. 3, 901–908.

[47] N. Nasri, F. Aissaoui, K. Bouhali, A. Frioui, B. Meftah, K. Zennir and T. Radwan, Fractional weighted midpoint-type inequalities for s-convex functions. Symmetry, 15 (2023),no. 3, 612.

[48] N. Nasri, B. Meftah, A. Moumen and H. Saber, Fractional $\mathbf{3/8}$-Simpson type inequalities for differentiable convex functions. AIMS Math. 9 (2024), no. 3, 5349–5375.

[49] N. Nasri, B. Meftah and A. Lakhdari, Left-Radau-type inequalities via multiplicative s-convexity. J. Interdiscip. Math. 28 (2025), no. 2, 521–541.

[50] A. M. Ostrowski, Über die Absolutabweichung einer differentiebaren Funktion van ihrem Integralmittelwert, Comment. Math. Helv., 10 (1938), 226–227.

[51] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[52] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[53] W. Saleh, A. Lakhdari, T. Abdeljawad and B. Meftah, On fractional biparameterized Newton-type inequalities. J. Inequal. Appl. 2023, Paper No. 122, 18 pp.

[54] W. Saleh, A. Lakhdari, A. Kilicman, A. Frioui and B. Meftah, Some new fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions with co-ordinated extended (s, m)-prequasiinvex mixed partial derivatives. Alex. Eng. J. 72 (2023), 261-267.

[55] E. Set, M. E. Özdemir, M. Z. Sarikaya, New inequalities of Ostrowski's type for s-convex functions in the second sense with applications. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 27 (2012), no. 1, 67–82.

[56] Y. Sun and H. Yin, Some Integral Inequalities of Simpson Type for Strongly Extended s-Convex Functions. Advances in Pure Mathematics, 6 (2016), no.11, 745-753.

[57] M. Tunç, E. Göv, and Ü. Şanal, On tgs-convex function and their inequalities. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), no. 5, 679–691.

[58] M. Tunç, U. Sanal and E. Gov, Some Hermite-Hadamard inequalities for $beta$-convex and its fractional applications. New Trends in Mathematical Sciences, 3 (2015), no 4, p. 18.

[59] Y. Wang, S.-H. Wang and F. Qi, Simpson type integral inequalities in which the power of the absolute value of the first derivative of the integrand is s-preinvexe. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 151–159.

[60] T. Weir and B. Mond, Pre-invexe functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

[61] B.-Y. Xi and F. Qi, Inequalities of Hermite-Hadamard type for extended s-convex functions and applications to means. J. Nonlinear Convex Anal. 16 (2015), no. 5, 873–890.

[62] Ç. Yildiz, M. E. Özdemir and M. Z. Sarikaya, New generalizations of Ostrowski-like type inequalities for fractional integrals. Kyungpook Math. J. 56 (2016), no. 1, 161–172.