# Plycopié de Cours

Analyse Complexe (Math 4)

Cours et Exercices Corrigés

Bouzettouta Lamine

Université de 20 Aout 1955- Skikda

2021

Plycopié de Cours
Analyse Complexe (Math 4)
Cours et Exercices Corrigés

Bouzettouta Lamine

Université de 20 Aout 1955- Skikda

2021

# CONTENTS

## 0.1 Introduction

*Pourquoi étudier les mathématiques (équations aux dérivées partielles quand on est mathématicien physicien? En dépit de la mode actuelle tendant dévalorisé, non seulement l'utilisation, mais également la simple connaissance des équations aux dérivées partielles dans l'apprentissage et la pratique de la physique, les EDP demeurent un champ de connaissances précieux, indispensable, pour l'étudiant comme pour le chercheur. Il est peut-être utile de rappeler que, comme le disait Galilée, le livre de la Nature est écrit dans le langage des mathématiques. L'objectif du cours des équations de la physique mathématiques est de fournir à l'étudiant les outils mathématiques utilisés dans les cours de physique, géophysique, mécanique, électronique et des autres sciences techniques. Depuis Galilée et Newton les plus grands noms de la physique sont la pour montrer que la connaissance mathématique permet de comprendre et d'utiliser plus facilement des notions physiques précises, de les fonder solidement. Les problèmes commencent à apparaître lorsqu'on l'on cherche à modéliser des solides déformables (souvent supposés idéaux, au moins le temps de la modélisation, la notion d'idéalité d'un objet dépendant évidemment de la situation). Historiquement, les équations sont apparues avec l'équation des cordes vibrantes, introduite par d'Alembert en 1749 dans un texte intitulé Recherches sur la courbe que forme une courbe tendue mise en vibration. Cette équation a une histoire riche en rebondissements qui mériterait une étude approfondie sur le plan historique, et nous nous contenterons ici de donner quelques éléments sur la controverse qui opposa Euler, d'Alembert et Daniel Bernoulli ; en effet, d'Alembert ayant trouvé la forme générale des solutions classiques de l'équation, Bernoulli s'empare de ses travaux et introduit, à sa manière, un développement en série de Fourier des solutions (ce qui imposerait une certaine régularité ), tandis qu'Euler réussit à déterminer la solution générale en fonction du profil initial, qui peut présenter des défauts de régularité ; sa* *solution a pourtant toujours un sens. Les travaux de Bernoulli se retrouveront plus tard dans le célèbre Théorie analytique de la chaleur de Joseph Fourier. La modélisation d'un problème réel utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, acoustique, etc. ), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Equations Différentielles Ordinaires ou par des ´ Equations aux Dérivées Partielles. Les équations aux dérivées partielles (équations de la physique mathématique) sont un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie des distributions. Dans la plupart des cas il est très difficile, voir impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles. Dans certains cas on arrive à montrer que le problème est bien posé (c'est-'a-dire qu'il admet une solution unique) et on peut, parfois, calculer des approximations numériques des solutions. Il existe une infinité d'équations aux dérivées partielles. Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci. Il faut donc se résoudre a restreindre notre champ d'étude. Cet ouvrage contient l'outil qui permet à l'étudiant des sciences et technologies et des sciences physiques d'assimiler les concepts fondamentaux de l'application des équations de la physique mathématique devenues un élément essentiel dans la formation des licenciés, des masters et doctorants. Les étudiants tireront de ce polycopié les démarches et les techniques à suivre pour la compréhension et la résolution des problèmes de la physique mathématique. Le contenu mathématiques de chaque chapitre est limité au strict niveau nécessaire à la compréhension des définitions et des théorèmes accompagnés d'exercices des travaux dirigés, dont l'objectif essentiel l'apprentissage effectif les notions mathématiques introduits dans cette discipline.*

CHAPTER 1

# LES NOMBRES COMPLEXES

## 1.1 L'ensemble des nombres complexes

**Question**: Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.

**Réponse**: Il n'existe pas de nombre réel $x$ qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

**Définition 1.1** Un nombre complexe $z$ s'écrit sous la forme dite algébrique :

$$z = x + iy \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres réels,}$$

et $i$ est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$

■ Le nombre $x$ est appelée la partie réelle de $z$, on note $x = \operatorname{Re}(z)$.

■ Le nombre $y$ est appelée la partie imaginaire de $z$, on note $y = \operatorname{Im}(z)$.

■ L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

**Remarque 1.1** 1. Deux nombres complexes $z$ et $z'$ sont égaux si et seulement si

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$$

2. Si $y = 0$ on dit que $z$ est réel, si $x = 0$ on dit que $z$ est un imaginaire pur.
3. Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.

.

♦ Multiplication: $(x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

♦ Division: $\dfrac{(x+iy)}{(x'+iy')} = \dfrac{(x+iy)(x'-iy')}{(x'+iy')(x'-iy')} = \frac{xx'-ixy'+ix'y-i^2yy'}{x'^2-y'^2} = \frac{xx'+yy'}{x'^2-y'^2} + i\frac{x'y-xy'}{x'^2-y'^2}$

**Remarque 1.2** Soient $z$ et $w$ deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$
5. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$

### 1.1.1 Valeur absolue (ou module)

**Définition 1.2** La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x+iy$ est définie par

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

**Exemple 1.1** $|-3+2i| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Si $z$ et $w$ sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :
**(1)** $|zw| = |z|\,|w|$ **(2)** $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ **(3)** $|\overline{z}| = |z|$ **(4)** $z\overline{z} = |z|^2$
**(5)** $|z+w| \leq |z| + |w|$ (inégalité triangulaire) **(6)** $|z-w| \geq |z| - |w|$

**Remarque 1.3** On a les propriétés suivantes :

1. $\sqrt{x^2} = |x|$ et $x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$
2. $z^2 \neq |z|^2$ si $\mathrm{Im}\,(z) \neq 0$
3. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

**Remarque 1.4** Si $z$ et $w$ sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$ , alors on a :

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

**Exemple 1.2** $\dfrac{1+3i}{2-4i} = \frac{(1+3i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{-1}{2} + \frac{i}{2}$

## 1.2 Représentation graphique des nombres complexes

Un nombre complexe $a+ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points d'un plan des $xy$ appelé plan complexe. À chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P(a, b)$ du plan.

### 1.2.1 Courbes dans le plan complexe

**Cercle**

Le cercle de rayon $r$ et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0 = r|$

**Segments**

Le segment de droite reliant deux points complexes $z_0$ et $z_1$ est l'ensemble des points

$$\{z \in \mathbb{C}/z = (1 - t)\, z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\}$$

**Courbes**

En général, une courbe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ où $f$ est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points

$$\{z \in \mathbb{C} \ / \ z = x + if\,(x) = (x, f\,(x))\,, \ x \in [a, b]\}$$

### 1.2.2 Forme polaire des nombres complexes

Si $P\,(x, y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et est appelé l'amplitude ou l'argument de $z = x + iy$ noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif $Ox$.

On en tire

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

qui est appelée la forme polaire ou forme trigonométrique du nombre complexe $z$.

Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors l'angle est appelé l'argument principal, noté par $Arg\theta$. On a

$$\arg z = Arg\theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

### 1.2.3 Formule de De Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\,,\ z_2 = x_2 + iy_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\,,$ alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\}$$

Une généralisation de (1.1) conduit à

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \left\{\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)\right\}$$

ce qui, si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \left\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\right\}^n = r^n\left\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right\}$$

qui est appelée formule de De Moivre.

### 1.2.4 Racines d'un nombre complexe

Un nombre $z$ est appelé racine $n$-ième d'un nombre complexe $z = a + ib$ si $z^n = a + ib$, et nous écrivons $z = (a+ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a+ib}$. D'après la formule de De Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a+ib)^{\frac{1}{n}} = \left\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\},\ k = 0, 1, 2, ..., n-1 \end{aligned}$$

D'où il résulte qu'il y a $n$ racines $n$-ièmes dfférentes de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$.

**Exemple 1.3** Calculer les racines quatrièmes de 1

On a $\sqrt[4]{1} = \left\{\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)\right\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$

Pour $k = 0$, $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$; $k = 1$, $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

Pour $k = 2$, $z_2 = \cos\pi + i\sin = -1$; $k = 3$, $z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = -i$.

**Exemple 1.4** Calculer $\sqrt[3]{1-i}$

on a

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-i} &= (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right\} \\ &= \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right\},\ k = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

pour $k = 0$, $z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right\}$, $k = 1$, $z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\}$,

$k = 2$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}$

CHAPTER 2

# FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

## 2.1 Fonctions complexes

**Définition 2.1** **Une équation aux dérivées partielles** est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante ($u$ ci-dessous) et les variables indépendantes ($x, y$,... ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme:

$$H\left(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ...\right) = 0, \tag{2.1}$$

où $H$ est une fonction de plusieurs variables. Si $n$ est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le $n$-uplet de variables indépendantes $(x, y, ...)$ appartenant a un domaine $\mathcal{D}$ convenable de $\mathbb{R}^n$.

Une solution de l'équation (2.1) est une fonction $u = u(x, y, ...)$ des variables indépendantes $x, y, ...$ dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de $\mathcal{D}$ et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (2.1), celle-ci est satisfaite.

**Définition 2.2** Un problème est bien posé au sens de Hadamard s'il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue.

La dernière condition est particulièrement significative en physique. Une EDP traduit en général des principes physiques (comme la conservation de la masse, de l'énergie, de la quantité de mouvement) et des modèles (comme la relation effort/déformation dans un ressort, la loi de la gravitation) dans lesquels on peut avoir une confiance raisonnable. Les données (les valeurs des coefficients, conditions aux limites imposées) sont souvent le résultat de mesures et donc peu fiables. Il est souhaitable que la solution de l'équation aux dérivées partielles présente une certaine stabilité si les données venaient à être légèrement perturbées.

## 2.2 Equations linéaire d'ordre 1

On se place, dans ce qui suit, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct. $\mathbf{M}(x, y, z)$ désigne un point de l'espace ; on notera indifféremment $f(\mathbf{M})$ où $f$ la valeur d'une fonction $f$ au point $\mathbf{M}$. Soient $P$, $Q$, $R$ trois fonctions, supposées de classe $C^1$, des variables $x, y, z$. On s'intéresse à la résolution du système différentiel

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2.2}$$

On remarque que le système (2.2) se met également sous la forme

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

ce qui, physiquement, s'interprète comme le fait d'imposer en chaque point que le déplacement infinitésimal soit parallèle à un vecteur donné.

**Définition 2.3** On appelle solution du système (2.2) une courbe $(C)$, dont la tangente en tout point $\mathbf{M}$ de coordonnées $(x, y, z)$ en lequel $P$, $Q$, et $R$ ne s'annulent pas simultanément, est dirigée par le vecteur de coordonnées $(P(\mathbf{M}), Q(\mathbf{M}), R(\mathbf{M}))$.

Rechercher une solution du système (2.2) revient donc à trouver une représentation paramétrique $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de la courbe $(C)$, telle que en tout point de paramètre $t$ :

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = k(t) \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}_{\mathbf{M}(t)}, \tag{2.3}$$

ce qui traduit bien la colinéarité du vecteur tangent à $(C)$ au point $\mathbf{M}(t)$ et du vecteur de composantes $(P, Q, R)_{\mathbf{M}(t)}$.

Si $P$, $Q$, et $R$ ne s'annulent pas en $\mathbf{M}(t)$, alors

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{P(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dy}{dt}}{Q(\mathbf{M}(t))} = \frac{\frac{dz}{dt}}{R(\mathbf{M}(t))} \tag{2.4}$$

Si $P$ (respectivement $Q$, $R$) s'annule en $\mathbf{M}(t)$, alors, il en est de même pour $\frac{dx}{dt}$ (respectivement $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$). On supposera donc, dans ce qui suit, $P$, $Q$, et $R$ non simultanément nuls. Quand elle est possible, la résolution directe du système (2.3) donne une représentation paramétrique d'une courbe solution de (2.2). Puisque le problème est posé dans $\mathbb{R}^3$, une technique alternative pour caractériser une courbe est de la définir comme l'intersection de deux surfaces, ce qui est l'objet de la section suivante.

### 2.2.1 Méthode des courbes caractéristiques

**Définition 2.4** On appelle intégrale première du système (2.2) une fonction $u$ de classe $C^1$ des trois variables $x, y, z$, non constante, et telle que, pour toute solution $C : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$de (2.2), la fonction $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ soit constante.

**Remarque 2.1** Dans cette définition, on voit directement que si $\mathbf{M}_0$ est un point de la courbe solution $(C)$, alors celle-ci est tracée sur la surface $\sum_{u,\mathbf{M}_0}$ décrite implicitement par

$$\sum_{u,\mathbf{M}_0} = \left\{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 / u(\mathbf{M}) = u(\mathbf{M}_0)\right\} \tag{2.5}$$

**Théorème 2.1** *Une fonction $u$ de classe $C^1$ des trois variables $x$, $y$, $z$ est une intégrale première de (2.2) si et seulement si, dans tout domaine où les solutions de (2.2) sont définies, elle vérifie :*

$$P(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + Q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) + R(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = 0. \tag{2.6}$$

**Preuve.** Soit $t \mapsto \mathbf{M}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une solution de (2.2), et $u$ une intégrale première. Par dérivation composée

$$\frac{d}{dt} u(\mathbf{M}(t)) = \frac{dx}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dy}{dt}\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{M}(t)) + \frac{dz}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial z}(\mathbf{M}(t)) = 0. \tag{2.7}$$

On conclut en utilisant le fait que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont respectivement proportionnels à dt dt dt $P$, $Q$, $R$, et que la fonction $t \mapsto u(x(t), y(t), z(t))$ étant constante, le membre de gauche est nul. ■

Géométriquement, l'équation (2.6) correspond à l'orthogonalité du gradient de la fonction décrivant.la surface $\sum_{u,\mathbf{M}_0}$ et du vecteur tangent à la courbe $(C)$ en $\mathbf{M}_0$. En effet, le gradient est normal au plan tangent à la surface. $(C)$ est tracée sur $\sum_{u,\mathbf{M}_0}$, son vecteur tangent appartient donc au plan tangent à la surface.

D'autre part, si $u_1$ et $u_2$ sont deux intégrales premières de (2.2), et si $\mathbf{M}_0$ est un point de la courbe solution $(C)$, alors les surfaces

$$\sum\nolimits_{u_1,\mathbf{M}_0} \quad : \quad u_1(\mathbf{M}) = u_1(\mathbf{M}_0) \tag{2.8}$$

$$\sum\nolimits_{u_2,\mathbf{M}_0} \quad : \quad u_2(\mathbf{M}) = u_2(\mathbf{M}_0), \tag{2.9}$$

contiennent toutes les deux $(C)$.

Il est intéressant de déterminer si $\sum_{u_1,\mathbf{M}_0} \cap \sum_{u_2,\mathbf{M}_0}$ permet de définir $(C)$ et si d'autres intégrales premières contenant $(C)$ peuvent être définies. C'est l'objet de la section suivante.

### 2.2.2 Intégrales premières indépendantes

**Définition 2.5** Trois fonctions $f$, $g$, $h$, de classe $C^1$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$ sont dites fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions différentiables $H$ telles que la fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ soit constante, sont les fonctions constantes.

**Théorème 2.2** *Soient $f$, $g$, $h$ trois fonctions de classe $C^1$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$. Si le jacobien*

$$\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}$$

*ne s'annule pas dans $\Omega$ il, alors, $f$, $g$, $h$ sont fonctionnellement indépendantes.*

**Preuve.** La fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de la définition ci-dessus est constante si et seulement si sa différentielle est nulle. Donc

$$0 = dH = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial f} & \frac{\partial H}{\partial g} & \frac{\partial H}{\partial h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \forall (dx, dy, dz)$$

Si le déterminant de la matrice centrale est non nul, le système admet seulement la solution triviale $\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial f} & \frac{\partial H}{\partial g} & \frac{\partial H}{\partial h} \end{pmatrix} = 0$ correspondant à une fonction $H$ constante. ■

**Théorème 2.3** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de classe $C^1$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^3$. Si la matrice*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix}$$

*est de rang 2, alors, $f$ et $g$ sont fonctionnellement indépendantes.*

**Preuve.** En considérant une fonction $(x, y, z) \mapsto H(f(x, y, z), g(x, y, z))$, on obtient

$$0 = dH = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial f} & \dfrac{\partial H}{\partial g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \forall (dx\ , dy\ , dz)$$

Si la matrice centrale est de rang 2, seule la solution triviale $\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial f} & \frac{\partial H}{\partial g} \end{pmatrix} = 0$ est possible.

■

**Théorème 2.4** *Soient $f$ et $g$ deux intégrales premières indépendantes du système différentiel*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Q}. \tag{2.10}$$

*Toute intégrale première de ce système s'exprime alors en fonction de $f$ et $g$.*

**Preuve.** Soient $f$ , $g$ et $h$ trois intégrales premières du système différentiel (2.2) avec $f$ et $g$ indépendantes. Alors D'après (2.6)

$$\begin{cases} P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y} + R\frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$$

Comme $P$, $Q$ et $R$ ne sont pas simultanément nuis, la matrice du système ne peut pas être de rang 3 (sinon la seule solution serait la solution triviale). D'après le théorème 2.2, les trois fonctions ne sont pas indépendantes. Il existe donc une fonction $H$ non constante telle que :

$$H(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) = 0,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial f} & \dfrac{\partial H}{\partial g} & \dfrac{\partial H}{\partial h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = 0$$

$f$ et $g$ étant indépendantes, d'après le théorème 2.3 les deux premières lignes sont indépendantes, et donc $\dfrac{\partial H}{\partial h}$ ne peut donc être nul sans que $\dfrac{\partial H}{\partial f}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial g}$ le soient, ce qui est impossible ($H$ non constante). Finalement, $\dfrac{\partial H}{\partial h} \neq 0$; le théorème des fonctions implicites permet alors d'exprimer $h$ en fonction de $f$ et $g$. ■

On arrive donc au résultat suivant :

**Théorème 2.5** *Soient $f$ et $g$ deux intégrales premières indépendantes du système différentiel*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{2.11}$$

*Alors, pour tout couple de réels $(a, b)$, les courbes $C_{ab}$ intersection des surfaces $f(x, y, z) = a$ et $g(x, y, z) = b$, sont les solutions de (2.11).*

**Remarque 2.2** On dispose également d'un mécanisme simple pour construire une nouvelle intégrale première contenant $C_{ab}$. En effet, si $\mathcal{F}$ est une fonction telle que $\mathcal{F}(a) = b$, alors la courbe $C_{ab}$ appartient également à la surface d'équation $h(x, y, z) = 0$, avec

$$h(x, y, z) = \mathcal{F}(f(x, y, z)) - g(x, y, z) \tag{2.12}$$

**Exemple 2.1** Résoudre le problème a valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

où $\lambda > 0$, $f(x)$ est une fonction donnée et $u = u(x, t)$.

**Solution.** Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ et } \frac{dx}{ds} = c, \tag{2.14}$$

on obtient par séparation de variables:

$$t = s + t_0 \text{ et } x = cs + x_0, \tag{2.15}$$

■

nous considérons la fonction $u$ recherchée est $u(s) = u(x(s), t(s))$. En utilisant la règle de chaines et le fait que $u$ est une solution de l'équations aux dérivées partielles (2.13) nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda u, \tag{2.16}$$

la résolution de cette dernière équation différentielle ordinaire par séparation de variables est:

$$\ln u = -\lambda s + k$$

Si nous fixons $u(0) = u_0$, alors nous aurons $u(s) = u_0 e^{-\lambda s}$. Ainsi les courbes caractéristiques sont

$$s \mapsto (x(s), t(s), u(s)) = \left(cs + x_0, s + t_0, u_0 e^{-\lambda s}\right). \tag{2.17}$$

Si nous considérons les conditions initiales: $x_0 = \tau, t_0 = 0$ et $u_0 = f(\tau)$, alors nous obtenons les courbes caractéristiques:

$$s \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau), u(s,\tau)) = \left(cs + \tau, s, f(\tau) e^{-\lambda s}\right). \tag{2.18}$$

Il est possible de déterminer la fonction inverse de $(s,\tau) \mapsto (x(s,\tau), t(s,\tau))$. En effet

$$\begin{cases} s = t, \\ \tau = x - ct, \end{cases} \tag{2.19}$$

donc nous obtenons par substitution la solution du notre problème.

$$u(x,t) = f(x - ct) e^{-\lambda t} \tag{2.20}$$

**Exemple 2.2**

$$xy^2 \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y^2\right) u. \tag{2.21}$$

**Solution.** Le système différentiel caractéristique de l'équation (2.21) s'écrit

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{du}{x^2 + y^2}, \tag{2.22}$$

on déduit du

$$\begin{gathered} \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} \\ g_1 = x^2 - y^2. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Le deuxième et le troisième quotion donne

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} dy &= du \\ \frac{1}{y} dy + \frac{y}{x^2} dy &= du; \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{dx}{xy^2} &= \frac{dy}{x^2 y} \\ \frac{dx}{x} &= \frac{y dy}{x^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{y}dy + \frac{dx}{x} = du;$$

par intégration on obtient

$$\frac{1}{y}dy + \frac{dx}{x} = du \Rightarrow g_2 = \frac{yx}{e^u}$$

La solution implicite s'écrit

$$\Psi = F(g_1, g_2) = F\left(x^2 - y^2, \frac{yx}{e^u}\right)$$

ou encore $g_2 = G(g_1)$, ce qui donne

$$u = \ln \frac{yx}{G(x^2 - y^2)}$$

■

## 2.3 Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires

**Définition 2.6** $a$, $b$, $c$, étant trois fonctions, supposées de classe $C^1$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ on appelle équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre d'inconnue $f$, une équation de la forme :

$$a(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, f(x, y)). \tag{2.24}$$

### 2.3.1 Solutions par les courbes caractéristiques

Une solution $u$ de (2.24) peut être vue comme une fonction associant à un point $(x, y)$ du plan une altitude $z = u(x, y)$, et être interprétée comme une surface de $\mathbb{R}^3$. On choisit alors de rechercher les solutions de (2.24) sous forme implicite, i.e. des fonctions $\varphi$ définissant implicitement $u$ comme solution de (2.24)

$$\varphi(x, y, z) = \text{Constante } z = u(x, y). \tag{2.25}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, en tout point où $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \tag{2.26}$$

f est alors solution de (2.24) si :

$$a(x, y, u(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x, y, u(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x, y, f(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{2.27}$$

$\varphi$ est donc une intégrale première du système

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}. \tag{2.28}$$

Le système (2.28) est appelé système caractéristique de (2.24).

Ceci nous amène donc au théorème suivant :

**Théorème 2.6** *Les solutions de (2.24) sont les intégrales premières du système caractéristique (2.28). Si $\varphi$ et $\phi$ sont deux intégrales premières indépendantes et $F$ une fonction de deux variables non constante, alors les solutions s'écrivent sous forme implicite*

$$F(\phi(x,y,u(x,y)), \varphi(x,y,u(x,y))) = \text{Constante}. \tag{2.29}$$

### 2.3.2 Cas général

Nous généralisons maintenant la théorie que nous avons établie précédemment à la suivante

PDE quasi-linéaires du premier ordre général:

**Définition 2.7** l'EDP quasi-linéaire du premier ordre dans cas général est définie par

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1; x_2, ...x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x_1; x_2, ...x_n, u), \; n \geq 2, \tag{2.30}$$

et le système d'EDO correspondant pour les courbes caractéristiques est

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1; x_2, ...x_n, z), \; i = 1, ..., n. \\ \frac{dz}{dt} = c(x_1; x_2, ...x_n, z). \end{cases} \tag{2.31}$$

Le problème de Cauchy correspondant est donc de trouver la surface intégrale de (2.30) $z = u(x_1; x_2, ...x_n)$ de sorte qu'il passe par la surface initiale paramétrée $S$ de dimension $(n-1)$:

$$\begin{cases} x_i = f_i(s_1; s_2, ...s_{n-1}), \; i = 1, ..., n. \\ z = u_0(s_1; s_2, ...s_{n-1}).. \end{cases} \tag{2.32}$$

Commencent d'abord de trouver les courbes caractéristiques passant par un point sur $S$ paramétrée par $s = (s_1; s_2, ...s_{n-1})$ pour obtenir la solution de (2.31)

$$\begin{cases} x_i = X_i(s_1; s_2, ...s_{n-1}, t), \; i = 1, ..., n. \\ z = Z(s_1; s_2, ...s_{n-1}, t).. \end{cases} \tag{2.33}$$

qui satisfait la donnée initiale donnée en (2.32).

Supposons la condition suivante:

$$J=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n(s)\\ \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial s_1}\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial s_{n-1}} & & & & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix}\Bigg|_S \neq 0, \tag{2.34}$$

sous cette condition et (2.33) on peut résoudre $(s=(s_1;s_2,...s_{n-1}),t)$ en termes de $x_1;x_2,...x_n$, puis par substitution, on obtient la solution $u=Z(x_1;x_2,...x_n)$ de (2.30) qui vérifie la condition initiale (2.32).

**Exemple 2.3** résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=3u,. \\ u(x,y,0)=\phi(x,y). \end{cases} \tag{2.35}$$

la surface initial

$$S: x=s_1,\ y=s_2,\ z=0,\ w=\phi(s_1,s_2),$$

**Solution.** Calculons

$$J=\det\begin{pmatrix} x & y & 1\\ \frac{\partial x}{\partial s_1} & \frac{\partial y}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_1}\\ \frac{\partial x}{\partial s_2} & \frac{\partial y}{\partial s_2} & \frac{\partial z}{\partial s_2}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x & y & 1.\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=-1\neq 0, \tag{2.36}$$

donc le problème (2.35) possède une solution unique. Le système caractéristique est

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x,\ \dfrac{dy}{dt}=2y\\ \dfrac{dz}{dt}=1,\ \dfrac{dw}{dt}=3w.\\ (x,y,z,w)\mid_{t=0}=(s_1,s_2,0,\phi(s_1,s_2)), \end{cases} \tag{2.37}$$

la solution est

$$x=s_1e^t,\ y=s_2e^{2t},\ z=t,\ w=\phi(s_1,s_2)\,e^{3t}.$$

D'après les trois premiers équations, on obtient

$$t=z,\ s_1=xe^{-z},\ s_2=ye^{-2z}.$$

D'où la solution du problème (2.35)

$$w=u(x,y,z)=\phi\left(xe^{-z},ye^{-2z}\right)e^{3z}.$$

■

## 2.3. Equations aux dérivées partielles quasi-linéaires

**Exemple 2.4** Soit l'équation

$$x\,(y-u)\,\frac{\partial u}{\partial x}+y\,(u-x)\,\frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)\,u. \tag{2.38}$$

**Solution.** On cherche une solution implicite $\Psi\,(x,y,u)$ de (2.38)comme intégrale première du système caractéristique

$$\frac{dx}{x\,(y-u)}=\frac{dy}{y\,(u-x)}=\frac{du}{z\,(x-y)}. \tag{2.39}$$

Les intégrales premières sont données par

$$(x,y,z)\mapsto\phi\,(x,y,z)=x+y+z \tag{2.40}$$

et

$$(x,y,z)\mapsto\varphi\,(x,y,z)=xyz \tag{2.41}$$

Les fonctions de la forme $(x,y,z)\mapsto\Psi\,(x,y,z)=F\,(\phi\,(x,y,z)\,,\varphi\,(x,y,z))$ décrivent l'ensemble des intégrales premières.

$$(x,y)\mapsto F\,(x+y+u\,(x,y)\,,xyu\,(x,y))=\text{Constante}.$$

■

**Exemple 2.5** (**Convection d'un scalaire par un champ de vitesse**) soit l'équation de convection mono-dimensionnelle suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2.42}$$

Le système caractéristique associé

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{a}=\frac{du}{0}.$$

Intégrales premières de ce système différentiel

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{a}\Rightarrow x-at=cte$$

d'où

$$\begin{cases} g_1=x-at,\\ g_2=u, \end{cases} \tag{2.43}$$

La forme implicite de la solution

$$\Psi\,(g_1,g_2)=\Psi\,(x-at,u)=0.$$

La solution générale explicite est

$$u\,(x,t)=h\,(x-at)\,.$$

Cette solution est unique. Quant $t=0$, nous avons $u\,(x,t=0)=u_0\,(x)=h\,(x)$ d'où

$$u\,(x,t)=u_0\,(x-at)$$

## 2.4 Equations aux dérivées partielles non linéaires

Dans bien des cas, on rencontre des E.D.P non linéaires, c'est-à-dire que la relation entre les dérivées partielles est non linéaire. Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution comme exemple L'équation de **Burgers** non visqueuse

$$\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

La plupart du temps, on ne sait pas résoudre de manière exacte ces E.D.P non linéaires. Pourtant leur résolution est cruciale tant du point de vue théorique qu'en vue de leurs applications industrielles.

**Définition 2.8** Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendent d'un paramètre $\lambda$ d'équations $F(x, y, z, \lambda) = 0$, on suppose $F$ de classe $C^1$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda}$. On appelle courbe caractéristique de la surface $S_\lambda$ la courbe $\Gamma_\lambda$, si elle existe située sur $S_\lambda$ d'équation

$$\Gamma_\lambda \begin{cases} F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

La surface $\Sigma$ engendrée par les courbes $\Gamma_\lambda$ s'appelle l'enveloppe de la famille $(S_\lambda)$, $\Sigma$ et $S_\lambda$ sont tangentes le long de $\Gamma_\lambda$.

**Définition 2.9** Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendent de deux paramètre $\lambda$ et $\mu$ d'équations $F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ on suppose $F$ de classe $C^2$ et qu'une des dérivées d'ordre 2 en $\lambda$ et $\mu$ est non nulle.

i) On appelle point caractéristique de $S_{\lambda,\mu}$ un point tel que:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \text{ point caractéristique} \\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(x, y, z, \lambda, \mu) = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

l'ensemble des points caractéristiques, (s'il n'est pas vide) forme une surface $\Sigma$ appelée enveloppe de la famille à deux paramètres $(S_{\lambda,\mu})$. Son équation s'obtient en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre les trois équations précédentes. Toutes les surfaces $S_{\lambda,\mu}$ sont tangentes à $\Sigma$ en leurs points caractéristiques.

ii) Soit $\varphi$ une de classe $C^2$, si la famille $F(x, y, z, \lambda, \varphi(\lambda))$ admet une enveloppe $\Sigma_\varphi$, celle ci s'appelle enveloppe à un paramètre de la famille $S_{\lambda,\mu}$, les surfaces $\Sigma_\varphi$ sont tangentes à $\Sigma$.

**Définition 2.10** Soit $z = \varphi(x,y)$, on notera $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Soit $F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$ l'équation d'une surface $S_{\lambda,\mu}$, on supposera $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, on sait que $F$ et $z$ est de classe $C^1$et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi,\lambda,\mu) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi,\lambda,\mu)\, p = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi,\lambda,\mu) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi,\lambda,\mu)\, q = 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Ces deux relations permette de calculer $\lambda$ et $\mu$ qui doivent vérifier $F(x,y,\varphi,\lambda,\mu) = 0$, en reportant les expressions $\lambda$ et $\mu$ dans cette relation on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les surfaces $S_{\lambda,\mu}$ sont solutions.

**Définition 2.11** L'équation aux dérivées partielles associée à la famille $(S_{\lambda,\mu})$ est la relation qu'on obtient en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre les équations:

$$F = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}q = 0.$$

les surfaces $S_{\lambda,\mu}$ sont solutions.de cette équation aux dérivées partielles.

**Remarque 2.3** Le résultat fondamental sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre est le suivant: La famille $(S_{\lambda,\mu})$ et ses enveloppes (à 1 ou 2 paramètres) constituant l'ensemble des solutions.de l'équation associée à la famille.

**Définition 2.12** Soit $(E)$ équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$G(x,y,u,p,q) = 0, \tag{2.47}$$

et

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$$

une famille à deux paramètres de solution de $(E)$. Cette famille s'appelle une intégrale complète de $(E)$. Toute enveloppe à 1 paramètre s'appelle intégrale générale de $(E)$, s'il existe une enveloppe à 2 paramètres, on la nomme intégrale singulière.

**Exemple 2.6** Les sphères

$$(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + z^2 = 1, \tag{2.48}$$

sont solutions de l'équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre les équations suivantes:

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + (x-\mu)^2 + z^2 = 1, \\ 2(x-\lambda) + 2zp = 0 \\ 2(y-\mu) + 2zq = 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

Donc

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + (x-\mu)^2 + z^2 = 1, \\ \lambda = x + zp \\ \mu = y + zq, \end{cases} \tag{2.50}$$

en reportant dans la première équation les expressions de $\lambda$ et $\mu$, on obtient l'équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

$$z^2\left(1 + p^2 + q^2\right) = 1.$$

L'intégrale complète est constituée par toutes les sphères $(x-\lambda)^2 + (x-\mu)^2 + z^2 = 1$, Les enveloppes à 1 paramètre de ces sphères forment les intégrales générales. Les plans $z = -1$ et $z = +1$ sont les intégrales singulières.

**Définition 2.13** Equation au dérivées partielles non linéaires du premier ordre est de la forme

$$G(x, y, z, p, q) = 0, \tag{2.51}$$

avec

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Supposons que

$$X = \frac{\partial G}{\partial x},\ Y = \frac{\partial G}{\partial y},\ Z = \frac{\partial G}{\partial z},\ P = \frac{\partial G}{\partial p} \text{ et } Q = \frac{\partial G}{\partial q}.$$

**Méthode pratique pour trouver une intégrale complète** $G(x, y, z, p, q) = 0$ Le théorème suivant permet de trouver une intégrale complète

**Théorème 2.7** 1) *On cherche unr intégrale première $H$ du système $(S)$suivant*

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pz} = -\frac{dq}{Y + qz},\ \text{telle que } \frac{D(G, H)}{D(p, q)} \neq 0. \tag{S}$$

*2) Pour chaque valeur de $\lambda$, on calcule $p$ et $q$ solutions du système*

$$\begin{cases} G(x, y, z, p, q) = 0, \\ H(x, y, z, p, q) = \lambda, \end{cases} \tag{2.52}$$

*on obtient ainsi $p$ et $q$ fonction de $x, y, z$ et $\lambda$.*

*3) $z$ étant fixé, on résout pour chaque $\lambda$ (et chaque $z$). L'équation*

$$pdx + qdy = 0,$$

*les équations sont définies implicitement par une relation*

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ *est une constante en* $x$ *et* $y$.

*4) On choisit* $x_0$ *fixé on détermine* $\varphi(z)$ *en imposant que*

$$\Phi(\lambda, z, x_0, y) + \varphi(z)$$

*soit solution de*

$$q(z, x_0, y)\, dy - dz = 0.$$

*Alors*

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) + \varphi(z) + \mu$$

*est une intégrale complète de*

$$G(x, y, z, p, q) = 0.$$

*5) Fixant* $y = y_0$ *et en cherchant une fonction* $\Psi$ *de sorte que*

$$\Phi(\lambda, z, x, y_0) + \Psi(z)$$

*soit solution de*

$$pdx - dz = 0.$$

*Alors*

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = \Phi(\lambda, z, x, y) + \Psi(z) + \mu$$

*est une intégrale complète de*

$$G(x, y, z, p, q) = 0.$$

**Exemple 2.7** Trouver une intégrale complète de

$$zpq + p + q = 0.$$

**Solution.** 1) Le système $(S)$ est

$$\frac{dx}{zq-1} = \frac{dy}{zp-1} = -\frac{dz}{2zpq - p - q} = -\frac{dp}{p^2 q} = -\frac{dq}{pq^2}, \qquad (S)$$

comme

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{-qdp + pdq}{0} = \frac{d\left(\frac{p}{q}\right)}{0},$$

$\frac{p}{q}$ est une intégrale première. On vérifie immédiatement que $\frac{D(G,H)}{D(p,q)} \neq 0$.

2) On résout

$$\begin{cases} zpq + p + q = 0, \\ \frac{p}{q} = \lambda \end{cases} \tag{2.53}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p = \frac{\lambda+1}{z}, \\ q = \frac{\lambda+1}{\lambda z}. \end{cases} \tag{2.54}$$

3) $\lambda$ et $z$ étant fixé

$$pdx + qdy = \frac{\lambda+1}{\lambda z}(pdx + qdy).$$

et

$$pdx + qdy = 0$$

équivaut à

$$d(\lambda x + y) = 0,$$

les solutions sont définies par

$$(\lambda x + y) = k$$

donc

$$\Phi(\lambda, z, x, y) = \lambda x + y.$$

4) Soient

$$y = 0,\ \Phi(\lambda, z, x, 0) + \Psi(z) = \lambda x + \Psi(z),$$

et

$$w(z,x) + \Psi(z) = \lambda x + \Psi(z),$$

cette fonction est solution de

$$pdx + dz = 0 \text{ si } \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(x,z)\, p$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\alpha(x,z),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lambda = \alpha(x,z)\frac{\lambda+1}{z} \text{ et } \frac{\partial w}{\partial z} = \Psi'(z) = -\alpha(x,z).$$

Ainsi

$$\alpha(x,z) = \frac{\lambda z}{\lambda+1}\text{et } \frac{\partial w}{\partial z} = \Psi'(z) = -\frac{\lambda z}{\lambda+1},$$

une solution est

$$\Psi(z) = -\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}z^2.$$

Une intégrale complète est alors

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = \lambda x + y - \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}z^2 + \mu = 0,$$

les surfaces correspondantes ont pour équation

$$z^2 = \frac{2(\lambda+1)}{\lambda}(\lambda x + y + \mu).$$

■

## 2.5 Exercices

**Exercice 2.1** *Résoudre le problème a valeur initiale suivant*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + e^x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = x, \end{cases} \tag{2.55}$$

*où* $u = u(x,y)$.

**Solution.** Considérons le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ et } \frac{dx}{ds} = e^x.$$

Nous pouvons résoudre ces équations par séparation de variables:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1 \\ \dfrac{dx}{ds} = e^x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t(s) = s + t_0 \\ x(s) = \ln\left(\dfrac{1}{e^{-x_0} - s}\right), \end{cases} \tag{2.56}$$

Dans ce dernier cas, nous avons posé comme condition initiale $x(0) = x_0$. Si nous considérons maintenant u comme une fonction de $s$ c'est à dire $u(s) = u(x(s), t(s))$, alors par la règle de chaines et le fait que $u$ est une solution de l'EDP, nous obtenons

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = e^x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cette équation différentielle ordinaire peut facilement être résolue. Nous obtenons $x(s) = u_0$. Si nous prenons maintenant comme condition initiale: $x_0 = \tau$, $t_0 = 0$ et $u_0 = \tau$, nous obtenons pour chaque $\tau$, la courbe caractéristique

$$s \to (x(s,\tau), t(s,\tau), u(s,\tau)) = \left(\ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right), s, \tau\right).$$

La fonction $(s,\tau) \to (x(s,\tau), t(s,\tau))$ a une fonction inverse. En effet, $t = s$ et

$$x = \ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - s}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\tau} - t}\right)$$

nous permet de conclure finalement que

$$\tau = \ln\left(\frac{1}{e^{-x} + t}\right)$$

La solution du problème est

$$u(s,t) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x} + t}\right) = \ln\left(\frac{e^{x}}{1 + te^{x}}\right) = x - \ln(1 + te^{x}),$$

■

**Exercice 2.2** *Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0. \tag{2.57}$$

**Solution.** On réécrit, l'équation (2.57) sous la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = z.,$$

on en tire le système différentiel

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{z},$$

des deux premier rapports on déduit l'intégrale première

$$U(x,y) = 2x - y,$$

puis par des rapports extrêmes l'intégrale première

$$V(x,y,z) = ze^{-x}.$$

On vérifie aisément que $U$ et $V$ sont indépendantes, par suite, la solution générale de l'équation (2.57) s'écrit

$$F\left[2x - y, ze^{-x}\right] = 0$$

où

$$z = e^{x} H(2x - y). \tag{2.58}$$

■

**Exercice 2.3** *Déterminer la surface de l'équation aux dérivées partielles linéaire*

$$(2xy-1)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z-2x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=2\left(x-yz\right), \tag{2.59}$$

*qui contient la droite* $(D)$ *d'équation:*

$$(D):\{x=1;\ =0\}.$$

**Solution.** Le système différentiel associé à l'équation (2.59)

$$\frac{dx}{2xy-1}=\frac{dy}{z-2x^2}=\frac{dz}{2\left(x-yz\right)},$$

d'où

$$\frac{2xdx+2ydy+dz}{4x^2y-2x+2yz-4x^2y+2x-2yz}=\frac{2xdx+2ydy+dz}{0},$$

qui donne l'intégrale première

$$U\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z,$$

d'autre part on a

$$\frac{zdx+dy+xdz}{2xyz-z+z-2x^2+2x^2-2xyz}=\frac{zdx+dy+xdz}{0},$$

il en résulte l'intégrale première

$$V\left(x,y,z\right)=y+xz..$$

On vérifie aisément que $U$ et $V$ sont indépendantes, la surface de l'équation (2.59)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z=C^{te}=C_1 \\ y+xz=C^{te}=C_2, \\ x=1, \\ y=0, \end{cases} \tag{2.60}$$

on a de suite

$$1+z=C_1 \text{ et } z=C_2,$$

on en déduit la relation suivante

$$1+C_2=C_1$$

d'où l'équation de la surface chercher

$$x^2+y^2+z\ \ -xz-y-1=0.$$

■

## 2.5. Exercices

**Exercice 2.4** *Déterminer la solution de l'équation*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{2.61}$$

*qui contient la droite définie par*

$$x=z,\ y=4x.$$

**Solution.** En utilisant la notion habituelle, l'équation (2.61) s'écrit

$$p+q-pq=0, \tag{2.62}$$

elle ne contient ni $x$, ni $y$ on en cherche une solution du type

$$z=f\left(\lambda x+y\right), \tag{2.63}$$

$\lambda$ étant paramètre, en remplaçant dans l'équation (2.61) qui donne

$$\left[\left(\lambda f'\left(\lambda x+y\right)\right)-\lambda-1\right]f'\left(\lambda x+y\right)=0, \tag{2.64}$$

on a la solution

$$f\left(\lambda x+y\right)=C^{te},$$

que l'on ne retient pas car elle entraine $z=C^{te}$, ce plan ne peut pas contenir la droite donnée, on résout donc

$$f'\left(\lambda x+y\right)=\frac{df\left(\lambda x+y\right)}{d\left(\lambda x+y\right)}=\frac{\lambda+1}{\lambda},$$

son intégrale générale est

$$f\left(\lambda x+y\right)=\frac{\lambda+1}{\lambda}\left(\lambda x+y\right)+C^{te};$$

pour simplifier les écritures posons $\eta=\lambda+1$, on obtient une intégrale complète de (2.61)

$$z-\eta x-\frac{\eta}{\eta-1}y=C^{te}. \tag{2.65}$$

On écrit alors l'intégrale (2.61)

$$F\left(x,y,z,\eta,\mu\right)=z-\eta x-\frac{\eta}{\eta-1}y+\mu=0, \tag{2.66}$$

on paramètre la droite envisagée

$$x=t,\ y=4t,\ z=t,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} F\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), \eta, \mu\right) = t - \eta t - \dfrac{\eta}{\eta - 1} 4t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), \eta, \mu\right) = 1 - \eta - \dfrac{4\eta}{\eta - 1} = 0, \end{cases} \tag{2.67}$$

on en déduit

$$\eta = -1, \ \mu = 0,$$

on obtient la surface unique

$$z = -x + \frac{1}{2}y \tag{2.68}$$

■

**Exercice 2.5** *Déterminer la solution de l'équation*

$$xy\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1, \tag{2.69}$$

*qui contient la courbe définie par*

$$x = e^{z^2}, \ y = 1. \tag{2.70}$$

**Solution.** Nous avons l'équation

$$G\left(x, y, z, p, q\right) = xypq - 1, \tag{2.71}$$

on lui associe le système

$$\frac{dx}{xyq} = \frac{dy}{xyp} = \frac{dz}{2xypq} = -\frac{dp}{ypq} = -\frac{dq}{xpq}, \tag{$S$}$$

que l'on réécrit sous la forme

$$\frac{\frac{dx}{x}}{yq} = \frac{-\frac{dy}{y}}{-xp} = \frac{dz}{2xypq} = \frac{\frac{dp}{p}}{-yq} = \frac{-\frac{dq}{q}}{xp} \tag{$S$}$$

$$\frac{\frac{dx}{x}}{yq} = \frac{-\frac{dy}{y}}{-xp} = \frac{\frac{dp}{p}}{-yq} = \frac{-\frac{dq}{q}}{xp} = \frac{\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}}{0}, \tag{2.72}$$

on en déduit l'intégrale première

$$G\left(x, y, z, p, q\right) = \frac{xp}{yq} = \lambda, \qquad \lambda = C^{te}. \tag{2.73}$$

On note que

$$\frac{D\left(G, H\right)}{D\left(p, q\right)} = \begin{vmatrix} xyq...xyp \\ \frac{x}{yq}... - \frac{xp}{yq^2} \end{vmatrix} = -2x^2\frac{p}{q} \neq 0. \tag{2.74}$$

Le système

$$\begin{cases} xypq - 1 = 0 \\ \dfrac{xp}{yq} = \lambda, \end{cases} \tag{2.75}$$

admet les solution

$$\begin{cases} p = \dfrac{\epsilon\sqrt{\lambda}}{x}, & \epsilon = \pm 1, \ \lambda > 0, \\ q = \dfrac{\epsilon}{y\sqrt{\lambda}}, \end{cases} \tag{2.76}$$

on résout, à $z$ fixé, 'l'équation

$$pdx + qdy = 0,$$

ou

$$\sqrt{\lambda}\frac{dx}{x} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{dy}{y} = 0,$$

sont intégrale générale est

$$\Phi\left(x, y, z, \lambda\right) = \sqrt{\lambda}\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| = C^{te},$$

on ce fixe arbitrairement $y = y_0 = 1$, et on cherche une fonction $\varphi(z)$ telle que la fonction $W$ donnée par

$$W\left(x, z, \lambda\right) = \Phi\left(x, y, z, \lambda\right) - \varphi\left(z\right),$$

soit solution de l'équation $pdx + dz = 0$, qui s'écrit compte tenu de (2.76)

$$\frac{\epsilon\sqrt{\lambda}}{x}dx + dz = 0;$$

on obtient

$$W\left(x, z, \lambda\right) = \Phi\left(x, y, z, \lambda\right) - \varphi\left(z\right) = \sqrt{\lambda}\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| - \epsilon z = C^{te},$$

l'intégrale complète

$$F\left(x, y, z, \lambda, \mu\right) = \sqrt{\lambda}\ln|x| + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln|y| - \epsilon z + \mu = 0, \qquad \epsilon = \pm 1 \tag{2.77}$$

on paramètre la courbe envisagée:

$$x = e^{t^2}, \ y = 1, \ z = t;$$

on obtient alors le système

$$\begin{cases} F\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), \lambda, \mu\right) = \sqrt{\lambda}t^2 - \epsilon t + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right), \eta, \mu\right) = 2t\sqrt{\lambda} - \epsilon = 0, \end{cases} \tag{2.78}$$

la dernière equation donne

$$t = \frac{\epsilon}{2\sqrt{\lambda}},$$

par substitution on obtient

$$\mu = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}},$$

donc la famille de surfaces à un paramètre $(\lambda)$

$$k\left(x, y, z, \lambda\right) = \lambda \ln |x| + \ln |y| - \epsilon\sqrt{\lambda} z + \frac{1}{4} = 0, \qquad \epsilon = \pm 1 \tag{2.79}$$

on définie l'enveloppe

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}\left(x, y, z, \lambda\right) = \ln |x| - \frac{\epsilon z}{2\sqrt{\lambda}} = 0,$$

qui donne

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\epsilon z}{2 \ln |x|}.$$

en remplaçant dans (2.79) on obtient la surface cherchée

$$z^2 = \left[1 + 4 \ln |y|\right] \ln |x| .$$

■

**Exercice 2.6** *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$z\left(x+y\right) \frac{\partial z}{\partial x} + z\left(x-y\right) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2. \tag{2.80}$$

**Solution.** Le systéme caractéristique est

$$\frac{dx}{z\left(x+y\right)} = \frac{dy}{z\left(x-y\right)} = \frac{dz}{x^2+y^2}, \tag{S}$$

ce qui donne

$$\frac{ydx + xdy - zdz}{0} = \frac{xdx - ydy - zdz}{0},$$

on déduit que

$$d\left\{xy - \frac{z^2}{2}\right\} = 0 \text{ et } d\left\{x^2 - y^2 - z^2\right\} = 0,$$

par intégration; on obtient

$$2xy - z^2 = C_1 \text{ et } x^2 - y^2 - z^2 = C_2,$$

donc la solution générale est

$$F\left(2xy - z^2, x^2 - y^2 - z^2\right) = 0.$$

■

## 2.5. Exercices

**Exercice 2.7** *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$yu\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right)+xu\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)=xy. \tag{2.81}$$

***Solution.*** *Le système caractéristique est*

$$\frac{dx}{yu}=\frac{dy}{xu}=\frac{dz}{xy}, \tag{$S$}$$

*ce qui donne*

$$\begin{aligned} \frac{xdx}{ds}-y\frac{dy}{ds} &= 0, \\ \frac{d\left(x^2\right)}{ds}-\frac{d\left(y^2\right)}{ds} &= 0 \qquad (2.82) \\ \frac{d\left(x^2-y^2\right)}{ds} &= 0 \qquad (2.83) \end{aligned}$$

*par intégration; on obtient*

$$x^2-y^2=C_1 \text{ et } x^2-u^2=C_2,$$

*donc la solution générale est*

$$F\left(x^2-y^2,x^2-u^2\right)=0,$$

*ou bien*

$$u^2\left(x,y\right)=x^2+G\left(x^2-y^2\right).$$

■

**Exercice 2.8** *Déterminer la solution générale de l'équation*

$$x\left(y^2-u^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}-y\left(u^2+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}=u\left(x^2+y^2\right). \tag{2.84}$$

**Solution.** Le systéme caractéristique est

$$\frac{dx}{x\left(y^2-u^2\right)}=\frac{dy}{-y\left(u^2+x^2\right)}=\frac{du}{u\left(x^2+y^2\right)}$$

en utilisant les propriété de proportions ce qui donne

$$\frac{xdx+ydy+udu}{x^2y^2-x^2u^2-y^2u^2-y^2x^2+u^2x^2+u^2y^2}=\frac{xdx+ydy+udu}{0}=\frac{du}{u\left(x^2+y^2\right)},$$

par intégration; on obtient

$$x^2+y^2+u^2=C_1,$$

et d'une autre part

$$\frac{\dfrac{dx}{x}-\dfrac{dy}{y}}{y^2-u^2+u^2+x^2}=\frac{du}{u\left(x^2+y^2\right)},$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=\frac{du}{u},$$

par intégration; on obtient

$$\frac{yu}{x}=C_2,$$

donc la solution générale est donnée par

$$F\left(x^2+y^2+u^2,\frac{yu}{x}\right)=0,$$

ou bien

$$u\left(x,y\right)=xG\left(x^2+y^2+u^2\right).$$

■

CHAPTER 3

# EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre avec $n$ variables indépendantes est de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = D \tag{3.1}$$

où $A_{ij}$, $B_i$, $C$ et $D$ sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$. Dans cette situation, nous supposerons que les solutions recherchées $u$ ont toutes leurs dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq n$$

continues sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Ceci à comme conséquence que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Nous pouvons alors supposer sans perte de généralités que $A_{ij} = A_{ji}$. Il suffit de remplacer chacune des fonctions $A_{ij}$ avec $i \neq j$ par $\frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}$

## 3.1 Classification

Dans cette section on va donner une classification des Equations aux Dérivées Partielles linéaires du second ordre. A chaque type d'équation correspond un comportement différent des solutions. Notre étude est restreinte au cas où $n = 2$. Ainsi les EDP que nous considérerons initialement seront de la forme suivante:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G, \tag{3.2}$$

où $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ et $G$ sont des fonctions de $x$ et de $y$ qui ne s'annulent pas simultanément. Nous supposerons que $u$, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ et $G$ ont toutes au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

On définit le discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC \tag{3.3}$$

1- L'équation (3.2) est dite **hyperbolique** au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\Delta > 0$.

2- L'équation (3.2) est dite **parabolique** au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\Delta = 0$

3- L'équation (3.2) est dite **elliptique** au point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\Delta <$ 0. Si une EDP est **hyperbolique** (respectivement **parabolique**, **elliptique**) pour tous les points $(x, y)$ du domaine $\mathcal{D}$, on dit alors qu'elle est hyperbolique (respectivement parabolique, elliptique) sur $\mathcal{D}$.

**Exemple 3.1** Pour l'équation.

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{3.4}$$

on a

$$\Delta = B^2 - 4AC = xy^2\,(x-4)$$

1- L'équation (3.4) est **parabolique** dans

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=4\right\}$$

2- L'équation (3.4) est **hyperbolique** dans

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0 \text{ et } y\neq 0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>4 \text{ et } y\neq 0\right\}$$

3- L'équation (3.4) est **elliptique** dans

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<4 \text{ et } y\neq 0\right\}$$

## 3.2 Courbes caractéristiques

Soient

$$\xi = \xi\,(x,y) \;\text{ et }\; \eta = \eta\,(x,y) \tag{3.5}$$

deux nouvelles variables qui sont des fonctions de $x$ et $y$ ayant au moins leurs dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine $\mathcal{D}$ et telles que le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.6}$$

En utilisant la règle de chaînes, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

substituant (3.7)-(3.10) dans l'équation (3.2), on obtient

$$A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_1 u = G_1, \tag{3.11}$$

où

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B_1 = 2A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + B\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$D_1 = A\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + D\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right),$$

$$E_1 = A\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + C\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + D\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + E\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

$$F_1 = F, \ G_1 = G,$$

Nous obtenons $B_1^2 - 4A_1C_1 = J^2\left(B^2 - 4AC\right)$. Ceci prouve que la classification des équations en EDP est invariante sous des changements de coordonnées.

Réciproquement, nous cherchons des coordonnées $(\xi, \eta)$ telles que $A_1 = 0$ ou $C_1 = 0$. Nous pouvons tenter de déterminer un tel changement de coordonnées. Ainsi nous voulons que

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

ou

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

Ces deux équations sont de la même forme

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{3.12}$$

avec $\zeta = \xi$ ou $\eta$. Nous supposerons dans ce qui suit que $\frac{\partial \zeta}{\partial y} \neq 0$. En divisant les deux côtés de l'équation (3.12) par $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2$ on obtient

$$A\left[\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}\right]^2 + B\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}} + C = 0. \tag{3.13}$$

Si nous considérons la courbe de niveau $C_v = \{(x, y) \in \mathcal{D} \,|\zeta(x, y) = v\}$, alors la pente de la tangente $y' = \frac{dy}{dx}$ à cette courbe de niveau $v$ satisfait l'équation

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0, \tag{3.14}$$

où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}.$$

Nous obtenons ainsi deux équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \text{ et } \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

les solutions de ces deux équations, sont appelées les deux courbes caractéristiques $\zeta_1(x, y)$ et $\zeta_2(x, y)$.

## 3.3 Formes canoniques (formes standards)

### 3.3.1 Type hyperbolique

Nous considérons le cas hyperbolique ((i.e $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ sur le domaine $\mathcal{D}$), nous aurons deux coordonnées caractéristiques $(\xi, \eta)$. Après ce changement de coordonnées, nous aurons une équation (3.11) pour laquelle $A_1 = C_1 = 0$ et nous obtenons après avoir divisé les deux côtés par $B_1 \neq 0$ une EDP de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + E_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + F_2 u = G_2. \tag{3.15}$$

l'équation (3.15) est la première **forme canonique** d'une EDP hyperbolique sur un domaine $\mathcal{D}$. Il existe une seconde forme canonique pour une EDP **hyperbolique**. Pour l'obtenir, il suffit de considérer les coordonnées $(\alpha, \beta)$ définies par $\alpha = \xi + \eta, \ \beta = \xi - \eta$. Après ce nouveau changement de coordonnées, l'EDP (3.15) est transformée en une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + D_3 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + E_3 \frac{\partial u}{\partial \beta} + F_3 u = G_3, \tag{3.16}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Type parabolique

Si notre EDP est parabolique sur le domaine $\mathcal{D}$, alors $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ en tout point de $\mathcal{D}$ et nous obtenons qu'une seule équation caractéristique $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A}$. Même en procédant comme pour le cas hyperbolique, nous n'obtiendrons qu'une seule coordonnée caractéristique $\xi(x, y)$. Pour obtenir la seconde coordonnée caractéristique $\eta(x, y)$, il suffit de prendre une fonction $\eta(x, y)$ quelconque ayant au moins des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues sur le domaine $\mathcal{D}$ et telles que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Parce que $B^2 - 4AC = 0$ et que $A_1 = 0$, nous avons que $B = \varepsilon 2\sqrt{AC}$ avec $\varepsilon = 1$ ou $-1$,

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{A}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon\sqrt{C}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} B_1 &= 2A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + B\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right] + 2C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{A}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon\sqrt{C}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon\sqrt{C}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Donc après ce changement de coordonnées, l'équation (3.2) sera transformée en une EDP de la forme

$$C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+E_1\frac{\partial u}{\partial \eta}+F_1u=G_1. \tag{3.17}$$

Après avoir divisé les deux côtés de l'équation (3.2) par $C_1 \neq 0$, nous obtenons la forme canonique d'une EDP parabolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D_1'\frac{\partial u}{\partial \xi}+E_1'\frac{\partial u}{\partial \eta}+F_1'u=G_1', \tag{3.18}$$

**Exemple 3.2** Réduire sous la forme standard l'EDP suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{3.19}$$

**Solution.** L'équation (3.19) est linéaire d'ordre 2 de type parabolique parce que $\Delta = B^2-4AC=0$ pour tous les points de $\mathbb{R}^2$. Donc nous n'avons qu'une seule équation caractéristique

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}=3,$$

la solution de cette équation est

$$\zeta_1(x,y)=3x-y=c.$$

Donc la seule coordonnée caractéristique est

$$\xi(x,y)=3x-y,$$

pour la seconde coordonnée caractéristique, nous choisissons

$$\eta(x,y)=x.$$

Cette fonction a des dérivées partielles d'ordre $m\leq 2$ continues et

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Nous obtenons en utilisant la règle de chaînes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=3\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial u}{\partial \xi\partial \eta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Par substitution dans (3.19), nous obtenons la forme canonique de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-5\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \tag{3.20}$$

■

## 3.3. Formes canoniques (formes standards)

### 3.3.3 Type elliptique

Si l'équation (3.2) est elliptique sur le domaine $\mathcal{D}$, alors ses deux équations caractéristiques sont a valeurs complexes (avec une partie imaginaire non-nulle) et les solutions de ces équations sont conjuguées entre elles. Plus précisément, nous avons les courbes suivantes: $\xi_1(x,y) = c \;\; \zeta_2(x,y) = c'$ et $\zeta_2(x,y) = \overline{\xi_1(x,y)}$, la conjuguée de $\xi_1(x,y)$. Si nous posons $\xi(x,y) = \zeta_1(x,y)$ et $\eta(x,y) = \zeta_2(x,y)$, ces variables ne prennent pas des valeurs réelles. La modification nécessaire est la suivante. Les coordonnées caractéristiques dans le cas elliptique seront $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$ et $\beta = \frac{\xi-\eta}{2i}$ où $i = \sqrt{-1}$. Ceci signifie que $\alpha$ est la partie réelle de $\xi$ et $\beta$ est la partie imaginaire de $\xi$. Après ce changement de coordonnées, nous obtenons comme EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + D_4\frac{\partial u}{\partial \alpha} + E_4\frac{\partial u}{\partial \beta} + F_4 u = G_4, \tag{3.21}$$

Cette équation est la forme canonique de l'équation **elliptique**.

**Exemple 3.3** Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.22}$$

déterminer la forme canonique de l'équation (3.22)

**Solution.** On à

$$\Delta = B^2 - 4AC = -4x^2 \leq 0$$

donc le type de cette équation est parabolique aux points $(x_0, y_0)$ où $x = x_0 = 0$, sinon elle est elliptique. Sur un domaine pour lequel l'équation est elliptique, ses équations caractéristiques sont $y' = ix$ et $y' = -ix$. Les solutions seront $\zeta_1(x,y) = y - i\dfrac{x^2}{2} = c$ et $\zeta_2(x,y) = y + i\dfrac{x^2}{2} = c'$.où $\zeta_2(x,y) = \overline{\xi_1(x,y)}$ sont conjuguées l'une de l'autre. Posons $\xi(x,y) = y - i\dfrac{x^2}{2}$ et $\eta(x,y) = y + i\dfrac{x^2}{2}$Les coordonnées caractéristiques sont

$$\alpha(x,y) = \frac{\xi+\eta}{2} = y \text{ et } \beta(x,y) = \frac{\xi-\eta}{2i} = -\frac{x^2}{2}$$

changement de coordonnées, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -x\frac{\partial u}{\partial \beta}, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\partial u}{\partial \beta}, \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}
\end{aligned}$$

Après ce changement de coordonnées, l'équation canonique sera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\frac{1}{2\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}=0.$$

■

## 3.4 Exercices

**Exercice 3.1** *Soit l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

*a) Déterminer si l'équation est hyperbolique, parabolique ou elliptique.*
*b) Déterminer les équations caractéristiques de cette équation.*
*c) Transformer cette équation dans sa forme canonique*

**Solution.** a) Nous avons $B^2-4ac=8$ Cette équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-4ac}}{2A}=2+\sqrt{2} \\ \dfrac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-4ac}}{2A}=2-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x,y)=y-\left(2+\sqrt{2}\right)$ et $\eta(x,y)=y-\left(2-\sqrt{2}\right)$. En utilisant la règle de chaines, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}-\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(2+\sqrt{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(2-\sqrt{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\left(2+\sqrt{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\left(2-\sqrt{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2+\sqrt{2}}{8}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{2-\sqrt{2}}{8}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Si nous avions utilisé les coordonnées $\alpha = \xi + \eta = 2y - 4x$ et $\beta = \xi - \eta = -2x\sqrt{2}$, alors nous obtiendrions la deuxième forme de l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

■

**Exercice 3.2** *Donner la solution générale de l'équation*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.23}$$

**Solution.** Nous avons $B^2 - 4ac = (xy)^2$. Cette équation est hyperbolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = +\dfrac{dx}{x} \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dx}{x}. \end{cases}$$

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x,y) = \frac{y}{x}$et $\eta(x,y) = xy$. En utilisant la règle de chaines, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} + y\frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + x\frac{\partial u}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

ou encore

$$2(\xi\eta)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Posons $\frac{\partial u}{\partial \xi} = Z$, cette équation devient $2\eta \frac{\partial Z}{\partial \eta} - Z = 0$, qui s'écrit aussi $\frac{dZ}{Z} - Z = \frac{1}{2}\frac{d\eta}{\eta}$, on obtient $Z = \sqrt{|\eta|} h(\xi)$. Donc la solution générale de l'équation est

$$u(x,y) = \sqrt{|xy|} f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy).$$

■

**Exercice 3.3** *Donner la solution générale de l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.24}$$

**Solution.** Nous avons $B^2 - 4ac = 0$. Cette équation est parabolique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x,y) = x$ (par supposition) et $\eta(x,y) = x - y$. En utilisant la règle de chaines, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0,$$

on en tire

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\eta).$$

Donc la solution générale de l'équation est

$$u(x,y) = xf(x-y) + g(x-y) \text{ où } f \text{ et } g \text{ étant 2 fonctions arbitraires.}$$

■

## 3.4. Exercices

**Exercice 3.4** *Donner la solution générale de l'équation*

$$4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial x}+=0 \tag{3.25}$$

**Solution.** Nous avons $B^2-4ac=-4x^2$ Cette équation est elliptique sur tout le plan $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{i}{2} \\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{i}{2}. \end{cases}$$

Les coordonnées caractéristiques sont $\xi(x,y)=x$ et $\eta(x,y)=2y$. En utilisant la règle de chaines, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial \eta}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation, nous obtenons l'équation canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=-\frac{2}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Utilisons le changement de variables $\alpha=x+2iy$ et $\beta=\xi-\eta=x-2iy$, on en tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=2i\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right).\end{aligned}$$

alors nous obtiendrions la forme canonique

$$(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}=0 \tag{3.26}$$

On remarque que

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial u}{\partial \beta}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial \beta}(\alpha u)\right\}, \tag{3.27}$$

et

$$\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial u}{\partial \alpha}=\frac{\partial u}{\partial \beta}\left(\beta\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}(\beta u)\right\}, \tag{3.28}$$

l'équation réduite (3.26) s'écrit aussi $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\partial \beta}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}(\beta u)\right\}=0$, donc la solution générale de l'équation est

$$u(x,y)=\frac{1}{2x}\{f(x+2iy)+g(x-2iy)\}\ \text{où } f \text{ et } g \text{ étant 2 fonctions arbitraires.}$$

■

CHAPTER 4

# MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES (DE FOURIER)

La séparation des variables est une technique simple permettant l'obtention de solutions d'une équation aux dérivées partielles. Elle connaît actuellement un grand intérêt pour la résolution des problèmes non linéaires multidimensionnels à grand nombre d'inconnues.

Considérons une équation aux dérivées partielles dont l'inconnue est une fonction $f$ de deux variables $x$ et $t$, posée sur un domaine prismatique $I_x \times I_t$, où $I_x$ et $I_t$, sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose qu'au moins un des intervalles est borné :

$$I_x = [a, b]\,,\ -\infty < x < x < b < \infty$$

et que l'EDP est « séparée », i.e. de la forme :

$$a_1(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial f}{\partial x} + b_2(x)\frac{\partial f}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(x))\, f(x,t) = h(x,t)\,, \quad (4.1)$$

Le principe de la séparation des variables est de chercher une solution sous la forme :

$$(x,t) \mapsto f(x,t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x,t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} X_i(x)\, T_i(t) \quad (4.2)$$

## 4.1 Propagation de la chaleur dans un barreau métallique

On considère un barreau cylindrique métallique, d'axe $(Ox)$, de longueur $L$, de chaleur massique $c$, de masse volumique $\rho$, et de conductibilité thermique $K$. On désigne par

$\theta : (x,t) \mapsto \theta(x,t)$ la température du barreau. Il est supposé initialement soumis au champ de température $\theta_0 : \theta(x,0) \mapsto \theta_0(x)$.

Les conditions aux limites sont homogènes, de type Dirichlet sur le bord gauche ($x = 0$) et de type Robin sur le bord droit ($x = L$), le coefficient d'échange est noté $h$. Toutes les constantes introduites sont bien sûr strictement positives.

Le problème aux frontières ($\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ ) modélisant la diffusion de la chaleur dans le barreau est :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t), \ \forall x \in \left]0,L\right[, \ \forall t > 0, \tag{4.3}$$

$$\theta(0,t) = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t) + h\theta(L,t) = 0, \tag{4.5}$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x). \tag{4.6}$$

Pour obtenir de bonnes propriétés de convergence, on suppose que $\theta_0$ est de carré intégrable et continûment dérivable sur $[0,L]$, et qu'elle vérifie la condition de compatibilité :

$$\theta_0(0) = 0 \text{ et } \frac{\partial\theta_0}{\partial t}(L) + h\theta_0(L) = 0,$$

On commence par rechercher une solution de (4.3) sous la forme :

$$\theta(x,t) = X(x)T(t).$$

Par suite :

$$X(x)T'(t) = \frac{K}{\rho c}X''(x)T(t)$$

$\theta_0$ étant non identiquement nulle, il en est nécessairement de même pour $X$ et $T$. Il existe donc un domaine $[a,b] \times [t_1,t_2]$ de $\mathbb{R}^2$ où $X$ et $T$ ne s'annulent pas. Dans ce domaine, on a donc :

$$\frac{K}{\rho c}\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Le membre de gauche ne dépend que de la variable jc, et celui de droite de la variable t uniquement ; il existe donc une constante $\lambda$ telle que :

$$\frac{K}{\rho c}\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

S'il existe un réel $x_0$ en lequel $X$ s'annule, alors, comme $T$ ne s'annule pas sur $[t_1,t_2]$ on a :

$$X''(x_0)T(t) = 0.$$

La relation

$$\frac{K}{\rho c}X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

est donc encore vérifiée. Par suite, pour tout $x$ de $]0, L[$ :

$$X''(x) - \frac{\rho c}{K}\lambda X(x) = 0,$$

Il faut donc chercher des solutions à l'équation différentielle précédente, la forme de celles-ci changeant avec le signe de $\lambda$ il faut discuter selon les cas.

i. Supposons $\lambda = 0$ ; on aurait alors :

$$X(x) = \alpha x + \beta, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} \theta(0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}(L,t) + h\theta(L,t) = 0 = \alpha + h\alpha L + h\beta, \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$X$ devant être non identiquement nulle, le cas $\lambda = 0$ est à rejeter.

ii. De même, on exclut le cas $\frac{\rho c}{K}\lambda = \omega^2 > 0$, car alors :

$$X(x) = \alpha \cosh(\omega x) + \beta \sinh(\omega x), \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

La condition de Dirichlet en 0 donne $\alpha = 0$, celle de Robin en $L$ donne alors :

$$\beta(h \sinh(\omega L) + \omega \cosh(\omega L)) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

iii. $\frac{\rho c}{K}\lambda$ est donc strictement négatif, on pose $\frac{\rho c}{K}\lambda = -\omega^2$. On a donc :

$$X(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

La condition de Dirichlet en 0 donne $\alpha = 0$, celle de Robin en $L$ donne alors :

$$\beta(\omega \cos(\omega L) + h \sin(\omega L)) = 0, .$$

Les solutions non triviales ($\beta \neq 0$) sont donc obtenues pour :

$$\frac{\omega}{h} + \tan(\omega L) = 0$$

Cette équation admet une infinité dénombrable de solutions que l'on note $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ces solutions sont obtenues graphiquement comme étant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $\omega \mapsto \tan(\omega L)$ et de la droite représentant la fonction $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{h}$ La solution du problème de Sturm-Liouville est donc donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_n = -\dfrac{\rho c}{K}\omega_n^2, \\ X_n(x) = \beta_n \sin(\omega_n x), \end{cases} \tag{4.7}$$

Pour normaliser les fonctions, on calcule :

$$\begin{aligned} 1 &= \beta_n^2 \int_0^L \sin^2(\omega_n x)\,dx = \beta_n^2 \left(\int_0^L \frac{1-\cos(2\omega_n x)}{2}dx\right) = \beta_n^2\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2\omega_n L)}{4\omega_n}\right) \\ &= \beta_n^2\left(\frac{L}{2} - \frac{h}{2(\omega_n^2+h^2)}dx\right) \end{aligned}$$

qui donne l'expression de $\beta_n$. On a alors :

$$X_n(x) = \left(\sqrt{\frac{2(\omega_n^2+h^2)}{h+L(\omega^2+h^2)}}\right)\sin(\omega_n x).$$

On cherche alors la solution de l'EDP sous la forme $\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(t)$. L'équation dans $[0,L]$ devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n'(t) = \frac{K}{\rho c}\sum_{n=1}^{\infty} X_n''(x)\,T_n(t)$$

puis :

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left(T_n'(t) - \lambda_n T_n(t)\right) = 0$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} T_n'(t) - \lambda_n T_n(t) &= 0 \\ T_n(t) &= T_n(0)\,e^{-\lambda_n t} \end{aligned}$$

Pour déterminer les $T_n(0))$, $n \in \mathbb{N}$, on utilise la condition initiale :

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n(0).$$

D'après les hypothèses sur $\theta_0$, on peut développer cette fonction sur la base et on sait qu'il y a convergence quadratique et uniforme de la série donc:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2(\lambda_n+h^2)}{h+L(\lambda_n+h^2)}}\right)\left\{\int_0^L \theta_0(y)\sin(\omega_n y)\,dy\right\}\sin(\omega_n x)\,e^{-\lambda_n t}.$$

## 4.2 Problème de Dirichlet

**Problème de Dirichlet** : Il consiste à trouver une fonction harmonique sur un domaine $\Omega$ et prenant des valeurs données sur la frontière de $\Omega$.

**Théorème 4.1** *(problème de Dirichlet pour le disque). Soit $D(0,R)$ un disque ouvert de centre 0 et de rayon $R$ et soit $u(\theta)$ une fonction $2\pi$-périodique sur le cercle $C = \partial D(0,R)$ Alors, il existe une fonction $f(z)$ continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, harmonique sur le disque ouvert $D(0,R)$ et satisfaisant a $f\left(Re^{i\theta}\right) = u(\theta)$. Cette fonction est unique et est donnée par*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2 - |z|^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta. \quad |z| < R.$$

**Preuve.** Il suffit d'utiliser le théorème précédent. Le problème de Dirichlet pour un cercle est un cas très intéressant. L'invariance rotationnelle de $\Delta$ fournit un indice que le cercle est une forme naturelle pour les fonctions harmoniques. On considère le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \text{ pour } x^2 + y^2 < a^2, \\ u(x,y) = h(\theta), \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } x^2 + y^2 = a^2, \end{cases} \tag{4.8}$$

avec $a$ le rayon du cercle et $h(\theta)$ est une condition au limite. Notre méthode, consiste à séparer les variables en coordonnées polaires

$$u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta),$$

donc on peut écrire

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r,\theta), \tag{4.9}$$

ce qui donne

$$R''(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\,\Theta''(\theta) = 0.$$

En divisant par $R\Theta$ et en multipliant par $r^2$, nous trouvons que

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires, facilement résolues. Quelles sont les conditions aux limites que nous associons à eux? Pour $\Theta$ nous avons besoin a la périodicité;

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta), \text{ pour } -\infty < \theta < \infty. \tag{4.11}$$

Donc

$$\lambda = n^2 \text{ et } \Theta(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta), \text{ pour } n = 1, 2... \tag{4.12}$$

Il y a aussi la solution pour $\lambda = 0$ d'où $\Theta(\theta) = A$. L'équation pour $R(r)$ est facile à résoudre car elle est de type de Euler avec des solutions de la forme $R(r) = r^\alpha$. Puisque $\lambda = n^2$, il se réduit à

$$\alpha(\alpha - 1) r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0,$$

où $\alpha = \pm n$. Donc

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}. \tag{4.13}$$

Ce qui donne d'aprés (4.12) et (4.13) les solutions séparées

$$u(r, \theta) = \left(Cr^n + Dr^{-n}\right)(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)), \text{ pour } n = 1, 2... \tag{4.14}$$

Dans le cas $n = 0$, nous avons besoin d'un second indépendant solution de $(4.10)_2$ C'est $R(r) = \log r$, comme on apprend dans le cours ODE. Nous avons aussi les solutions

$$u(r, \theta) = C + D\log r. \tag{4.15}$$

Toutes les solutions (4.14) et (4.15) que nous avons trouvées sont des fonctions harmoniques le disque $D$, sauf que la moitié d'entre eux sont infinis à l'origine $(r = 0)$. Mais nous n'ont pas encore utilisés des conditions aux limites dont la variable $r$. L'intervalle est $0 < r < a$. Lorsque $r = 0$ certaines des solutions ($r^{-n}$ et $\log r$) sont infinies: sont les rejeter. L'exigence qu'ils soient finis est la "condition limite" quand $r = 0$. En additionnant les solutions restantes, on obtient

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)). \tag{4.16}$$

Finalement, posons $r = a$ on obtient

$$h(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)). \tag{4.17}$$

Ceci est précisément la série complète de Fourier pour $h(\theta)$, donc nous savons que

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi, \\ B_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi. \end{cases} \tag{4.18}$$

Les équations (4.16)-(4.18) constituent la solution complète de notre problème. Maintenant,en subtituent $(4.18)_1$-$(4.18)_2$ dans (4.16) on obtient

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\,d\phi && (4.19) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\{\cos(n\phi)\cos(n\theta) + \sin(n\phi)\sin(n\theta)\}\,d\phi, && (4.20) \end{aligned}$$

il résulte que

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}h(\phi)\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\theta-\phi)\right\}\frac{d\phi}{2\pi}.$$

En écrivent sous forme géométrique de nombres complexes

$$\begin{aligned}&1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\theta-\phi)\\ =\;&1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in(\theta-\phi)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in(\theta-\phi)}\\ =\;&1+\frac{re^{i(\theta-\phi)}}{a-re^{i(\theta-\phi)}}+\frac{re^{-i(\theta-\phi)}}{a-re^{-i(\theta-\phi)}}\\ =\;&\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u(r,\theta)=\left(a^2-r^2\right)\int_0^{2\pi}\frac{h(\phi)}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}\frac{d\phi}{2\pi}. \tag{4.21}$$

La formule (4.21), connue sous le nom formule de Poisson, remplace le triple formules (4.16)-(4.18). eIle exprime toute fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle avec ses valeurs limites. La formule de Poisson peut être écrite de manière géométrique comme suit: soit $X=(x,y)$ un point avec des coordonnées polaires $(r,\theta)$. nous pouvons aussi considérer $X$ comme un vecteur de l'origine $O$ au point $(x,y)$.Et soit $X'$ un point sur la frontière

$$\begin{cases}X: & \text{en coordonnées polaires}\,(r,\theta)\\ X': & \text{en coordonnées polaires}\,(a,\phi)\,,\end{cases}$$

les points $X$ et $X'$ constituent avec l'origine un triangle de côtés $r=|X|\,,\ a=|X'|$ et $|X-X'|$ . Et par la loi de cosinus on a

$$|X-X'|^2=a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2.$$

L'élément de longueur d'arc sur la circonférence est $ds'=ad\phi$. Par conséquent, la formule de Poisson prend la forme alternative

$$u(X)=\left(\frac{a^2-r^2}{2\pi a}\right)\int_{a=|X'|}\frac{u(X')}{|X-X'|^2}ds'. \tag{4.22}$$

pour $X\in D$, où nous écrivons $u(X')=h(\phi)$. Ceci est une courbe intégrale par rapport à longueur d'arc $ds'=ad\phi$, puisque $s'=a\phi$ pour un cercle. Par exemple, en électrostatique la formule (4.22) exprime la valeur du potentiel électrique dû à une répartition des charges sur une bouteille qui sont uniformes sur toute la longueur du cylindre. ■

## 4.2. Problème de Dirichlet

## 4.3 Exercices

**Exercice 4.1** *On considère le problème suivant pour* $x \in ]1, e[\,,\ t > 0$ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(1,t) = u(e,t) = 0, \\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{4.23}$$

*où* $f$ *est une fonction continue sur* $]1, e[$. *Résoudre ce problème (4.23) par la méthode de séparation des variables, en recherchant la solution sous la forme* $u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} X_k(x) T_k(t)$.

**Solution.** 1. On injecte la forme séparée $u(x,t) = X(x) T(t)$ dans l'équation :

$$XT'' = x^2 X'' T + 3x X' T$$

ce qui donne

$$\frac{x^2 X'' + 3x X'}{X} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Les conditions aux limites conduisent à :

$$X(1) = X(e) = 0$$

3. On pose $x = e^z$ et $X(x) = Z(z)$

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dz}{dx} Z' = \frac{Z'}{x} \\ X'' &= \frac{d^2 z}{dx^2} Z' + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 Z'' = -\frac{Z'}{x^2} + \frac{Z''}{x^2} \end{aligned}$$

$$x^2 X'' + 3x X' - \lambda X = Z'' + 2Z' - \lambda Z$$

4.

$$Z(0) = Z(1) = 0$$

5. L'équation caractéristique est donnée par $r^2 + 2r - \lambda = 0$. Son discriminant réduit est $1 + \lambda$. (a) Dans le cas où $1 + \lambda = \omega^2 > 0$, les deux racines réelles distinctes sont $r = -1 \pm \omega$ ce qui conduit à $Z(z) = e^{-z}\left(Ae^{\omega z} + Be^{-\omega z}\right)$, où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A + B = 0 \text{ et } Z(1) = e^{-1}\left(Ae^{\omega} + Be^{-\omega}\right) = 0$$

ce qui conduit nécessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale. (b) Dans le cas où $1 + \lambda = \omega^2 = 0$, la racine double est $r = -1$, ce qui conduit à :$Z(z) = e^{-z}(A + Bz)$, où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A = 0 \text{ et } Z(1) = e^{-1}(A + B) = 0$$

ce qui conduit nécessairement à $A = B = 0$ et il n'existe pas de solution non triviale. (c) i. Dans le cas où $1+\lambda = -\omega^2 < 0$, les deux racines complexes distinctes sont $r = -1 \pm i\omega$, ce qui conduit à :$Z(z) = e^{-z}(A\cos(\omega z) + B\sin(\omega z))$, où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles. Les conditions aux limites imposent alors :

$$Z(0) = A = 0 \text{ et } Z(1) = e^{-1}B\sin(\omega) = 0.$$

Pour obtenir une solution non triviale on doit donc avoir :$\sin(\omega) = 0$ ce qui implique $\omega = k\pi,\ k \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte :

$$Z_k(z) = B_k e^{-z}\sin(k\pi z)$$

et

$$X_k(x) = Z_k(z) = Z_k(\ln x) = B_k e^{-\ln x}\sin(k\pi \ln x)$$

Les vecteurs sont normalisés en choisissant $B_k = \sqrt{2}$.. En injectant la forme $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} X_k T_k$ dans l'équation on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} X_k T_k &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(x^2X_k'' + 3xX_k'\right)T_k = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\lambda_k X_k T_k\\ &\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(T_k'' - \lambda_k T_k\right)X_k = 0\end{aligned}$$

L'indépendance linéaire des $X_k$conduit alors à :

$$T_k'' - \lambda_k T_k = T_k'' + \left(1 + (k\pi)^2\right)T_k = 0$$

de solution générale :

$$T_k(1) = T_k(0)\cos\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right) + \frac{T_k'(0)}{\sqrt{1+(k\pi)^2}}\sin\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right)$$

La deuxième condition initiale impose ensuite :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} T_k'(0)X_k(x) = f(x)$$

## 4.3. Exercices

finalement

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k \frac{\sin(k\pi \ln x)\sin\left(t\sqrt{1+(k\pi)^2}\right)}{x}$$

où

$$u(x,t)\, c_k = 2\frac{\int_1^e \sin(k\pi \ln x) f(y)\, dy \sin(t)}{\sqrt{1+(k\pi)^2}}$$

■

**Exercice 4.2** *Résoudre le problème suivant par la méthode de séparation des variables :*

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \ (x,t) \in ]0,\ell[ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,t) = u_0 e^{-\alpha t}, \ u(\ell,t) = u_0 e^{-\beta t}, \\ \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \end{cases} \tag{4.24}$$

*où $a, b, \alpha, \beta, u_0$ et $\ell$ des réels strictement positifs tels que, $a\pi^2 > b\ell^2 = b\ell^2 = b\ell^2$*

**Solution.** On commence par rendre homogènes les conditions aux limites en cherchant un relèvement (le domaine prismatique suggère une fonction affine de $x$) :

$$U(x,t) = u_0\left(e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + \frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right)$$

$U$ est régulier et vérifie les conditions aux limites. On pose ensuite $v = u - U$, $v$ est solution de :

$$\begin{aligned} a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv + \frac{\partial v}{\partial t} &= -\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \frac{\partial U}{\partial t}\right) \\ &= u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right) \end{aligned}$$

et doit satisfaire les conditions :

$$\begin{aligned} v(0,t) &= v(\ell,t) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} v &= \lim_{t\to\infty} u - U = 0. \end{aligned}$$

Posons $v = XT$ ce qui donne

$$a\frac{X''}{X} = -b - \frac{T'}{T} = \lambda$$

les conditions aux limites conduit à $X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right)$. On injecte enfin la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n T_n$ dans l'EDP

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell}\right)T_n + T_n'\right) = u_0\left((b-\alpha)e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right).$$

On projette alors le second membre sur la base : il faut donc calculer les projections de $x \to 1$ et $x \to \dfrac{x}{\ell}$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell \sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right)dx &= \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\\ \frac{\sqrt{2}}{\ell\sqrt{\ell}}\int_0^\ell \sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right)dx &= \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1},\end{aligned}$$

donc, pour tout entier naturel $n$, à :

$$\left(b-\frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right)T_n+T_n' = u_0\frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left((b-\alpha)\,e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)+(b-\beta)\,\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right).$$

Par hypothèse : $b-\frac{an^2\pi^2}{\ell^2}<0$, ce qui donnerait une exponentielle croissante en solution du problème homogène, incompatible avec l'hypothèse de solution nulle à l'infini. On cherche donc une solution particulière qui tend vers 0 en l'infini, et donc :

$$T_n\left(t\right)=\left(b-\frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right)T_n+T_n' = u_0\frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\dfrac{an^2\pi^2}{\ell^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\dfrac{an^2\pi^2}{\ell^2}-\beta}e^{-\beta t}\right),$$

ce qui conduit à :

$$v\left(x,t\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_0\frac{2}{n\pi}\left(\frac{b-\alpha}{b-\dfrac{an^2\pi^2}{\ell^2}-\alpha}e^{-\alpha t}+(-1)^{n+1}\frac{b-\beta}{b-\dfrac{an^2\pi^2}{\ell^2}-\beta}e^{-\beta t}\right)\sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right),$$

étant donné que le second membre est $C^1$, on a convergence uniforme des séries spatiales. Par ailleurs, les $|T_n|$ sont bornés et décroissants (pour $n$ croissant) ; il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions de $(x,t)$) sur tout segment temporel. ■

## 4.3. Exercices

# CHAPTER 5

# QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CLASSIQUES

Ce chapitre a pour objectif d'étudier quelques équations classiques de la physique.

## 5.1 Equation de Laplace

L'équation de Laplace $\Delta u = 0$, fut ainsi nommée en hommage au mathématicien et physicien Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Introduite, à l'origine, en mécanique newtonienne, elle apparaît également en astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique, etc.

Dans ce qui suit, $u$ désigne a priori une fonction de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^d$, dont on affinera les propriétés par la suite.

## 5.2 Fonctions harmoniques

**Définition 5.1** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une fonction $v \in C^2(\Omega)$ est dite **harmonique** dans $\Omega$ si $\Delta v = 0$ dans $\Omega$.

**Exemple 5.1** La partie réelle et imaginaire des fonctions holomorphes sont harmoniques

En effet,

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

les deux parties

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2, \\ u(x,y) = xy, \end{cases}$$

**Définition 5.2** Soit $\sum$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ :

$$\sum = \left\{ x \in \mathbb{R}^d / |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = 1 \right\}.$$

La mesure superficielle de $\sum$ est $d\sigma$ telle que $dx = drds = drr^{d-1}d\sigma$. On note $\sum_d = \int_{\sum} d\sigma$ la surface de la sphère unité. La boule unité a alors pour volume $\frac{\sum_d}{d}$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $x = r\sigma$ où $r = |x| \in \mathbb{R}^+$ et $\sigma = \dfrac{x}{|x|} \in \sum$. $(r, \sigma)$ forment les coordonnées polaires de $x$.

**Proposition 5.1** ***(Laplacien d'une fonction radiale)*** *Une fonction $u$ est radiale si elle ne dépend que de $r$, son laplacien vaut alors :*

$$\Delta u(r) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)(r). \tag{5.1}$$

**Preuve.** On pose $u(x) = v(r)$, on a $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_i}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_i}{r}, \\ \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{x_i^2}{r^3}. \end{cases}$$

■

**Remarque 5.1** Dans le cas $d = 3$ :

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r^2}(r). \tag{5.2}$$

Dans de nombreux problèmes, il est intéressant d'étudier comment le problème se comporte en moyenne sur la sphère de rayon $r$.

**Définition 5.3** (Radiaiisation) On appelle **radialisée** de la fonction $u$ la fonction $\tilde{u}$ telle que :

$$\tilde{u}(r) = \int_{\sum} u(r\sigma)\, d\sigma \tag{5.3}$$

**Proposition 5.2** *La radialisation commute avec le laplacien:*

$$\Delta\tilde{u} = \widetilde{\Delta u} = \int_{\sum} (\Delta u)(r\sigma)\, d\sigma. \tag{5.4}$$

**Preuve.** soit $v$ défini par : $v(r) = \int_{\sum} u(r\sigma)\, d\sigma$. Ainsi : $\tilde{u}(x) = v(|x|)$, et

$$\Delta \tilde{u}(x) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{d-1} \frac{dv}{dr} \right) (|x|).$$

On peut supposer $u$ définie sur $\mathbb{R}^d$; on a alors :

$$\frac{dv}{dr}(r) = \int_{\sum} \operatorname{grad}(u) . \sigma d\sigma = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{B(0,r)} \Delta u dx. \tag{5.5}$$

Ce qui donne

$$r^{d-1} \frac{dv}{dr}(r) = \int_{B(0,r)} \Delta u dx = \int_{s=0}^{r} s^{d-1} \int_{\sum} (\Delta u)(r\sigma)\, d\sigma, \tag{5.6}$$

et donc

$$r^{d-1} \Delta v = \frac{d}{dr} \left( r^{d-1} \frac{dv}{dr}(r) \right) = r^{d-1} \int_{\sum} (\Delta u)(r\sigma)\, d\sigma. \tag{5.7}$$

■

A l'opposé des fonctions radiales, on trouve les fonctions sphériques.

**Définition 5.4** Une fonction est sphérique si elle ne dépend que de $\sigma$. Une fonction sphérique est naturellement invariante par homothétie, en particulier si une fonction $u$ est sphérique, alors comme

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{r^2 \partial \sigma_i^2} \text{on a } \Delta u(x) = \frac{1}{r} (\Delta u)(\sigma).$$

**Définition 5.5** On appelle laplacien sur la sphère ou opérateur de Laplace-Beltramï, la trace $\Delta_\sigma$ du laplacien sur la sphère :

$$\Delta_\sigma u(\sigma) = \Delta_x u \left( \frac{x}{|x|} \right)_{x=\sigma}.$$

**Proposition 5.3** ***Décomposition du laplacien en coordonnées polaires***

$$\Delta u(r\sigma) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) (r\sigma) + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma u(r\sigma). \tag{5.8}$$

**Preuve.** Une façon de démontrer ce résultat est d'utiliser la densité des fonctions à variables séparées $\overline{u(x) = u(r)\, w(\sigma)}$ dans l'espace des fonctions $C^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. ■

**Remarque 5.2** 1· Dans $\mathbb{R}^2$, en coordonnées polaires

$$\Delta_\sigma u(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(\cos(\theta), \sin(\theta)). \tag{5.9}$$

2· Dans $\mathbb{R}^3$, en coordonnées sphériques « usuelles », ($\phi$ est la l**ongitude**, $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude)

$$\Delta u\,(r\sigma) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)(r\sigma) + \frac{1}{r^2}\Delta_\sigma u\,(r\sigma)\,. \tag{5.10}$$

$$\Delta_\sigma u\,(\sigma\,(\theta;\phi)) = \left[\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]u\,(\sigma\,(\theta;\phi))\,. \tag{5.11}$$

**Proposition 5.4** *(Formule de Green)*

sont harmoniques.où $|S\,(x,r)| = r^{n-1}\,|S\,(0,1)|\,.$

**Preuve.** Une fois la première formule établie, la deuxième en découle immédiatement, comme on va le voir. Définissons, pour $x \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petitPar le changement de variable $x = ry$, on obtient

$$\varphi\,(r) = \frac{1}{|S\,(ry,r)|}\int_{S(ry,r)}\varphi\,(ry)\,dS\,(ry)\,.$$

■

## 5.3 Noyau de Poisson (Formule de Poisson)

**Théorème 5.1** *(formule de Poisson). Soit $u$ une fonction harmonique dans le disque ouvert $D\,(0,R)$, et continue dans le disque fermé $\overline{D}\,(0,R)$. Alors*

$$u\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2 - |z|^2\right)}{\left|Re^{i\theta} - z\right|^2}d\theta,\ \forall z \in D\,(0,R)\,,$$

*ou, ce qui revient au même, en posant $z = \rho e^{i\alpha},\ \rho < R$,*

$$u\left(Re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)(R^2 - \rho^2)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta.$$

**Preuve.** Comme $D\,(0,R)$ est simplement connexe et $u$ est une fonction harmonique sur $D\,(0,R)$, alors il existe une fonction $f$ holomorphe sur $D\,(0,R)$ telle que : $u = \operatorname{Re} f$. Soit $C$ le cercle de centre 0 et de rayon $r$ tel que: $0 < r < R$ La formule intégrale de Cauchy, s'´ecrit

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f\,(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ \forall\,|z| < r, \tag{5.12}$$

Soit $z^* = \dfrac{r^2}{\overline{z}}$, le point symétrique de $z$ par rapport au cercle $C$. Comme $z$ est à l'intérieur du cercle $C$, alors $z^*$ se trouve à l'extérieur de celui-ci. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy,

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f\,(\zeta)}{\zeta - z^*}d\zeta,\ \forall\,|z| < r, \tag{5.13}$$

et on obtient par soustraction (5.13) de (5.12), l'expression

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*}\right)d\zeta. \tag{5.14}$$

Or

$$z^* = \frac{r^2}{\overline{z}} = \frac{|\zeta|^2}{\overline{z}} = \frac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}},$$

et

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta\left(\overline{\zeta} - \overline{z}\right)} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta\,|\zeta - z|^2},$$

donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta\,|\zeta - z|^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta,\ \forall\,|z| < r$$

d'es lors,

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta,\ \forall\,|z| < r$$

et en posant $z = \rho e^{i\alpha},\ \rho < r$, on obtient

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(re^{i\theta}\right)\left(r^2 - \rho^2\right)}{|re^{i\theta} - \rho e^{i\alpha}|^2}d\theta,\ \forall\rho < r$$

or

$$\left|re^{i\theta} - \rho e^{i\alpha}\right|^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha),$$

donc

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(re^{i\theta}\right)\left(r^2 - \rho^2\right)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta,\ \forall\rho < r.$$

Fixons $\rho$ et $\alpha$ et remarquons que cette formule est vraie pour tout $r$ vérifiant:$\rho < r < R$. Notons aussi que $r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha) > 0$ pour $\rho < r$. Par hypothèse $u$ est continue dans le disque fermé $\overline{D}(0, R)$ et comme pour $\rho < r$, $r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha) \neq 0$ alors l'expression $\dfrac{u\left(re^{i\theta}\right)\left(r^2 - \rho^2\right)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}$ en tant que fonction de $r$ et $\theta$ est continue et en outre, pour $\rho$ et $\alpha$ fixés, elle est uniformément continue sur le compact : $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \dfrac{R + r}{2} \leq r \leq R$. Par conséquent, lorsque $r \to R$,

$$\frac{u\left(re^{i\theta}\right)\left(r^2 - \rho^2\right)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} \to \frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2 - \rho^2\right)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}$$

uniformément en $\theta$, ce qui implique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(re^{i\theta}\right)\left(r^2 - \rho^2\right)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2 - \rho^2\right)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta$$

Finalement,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2-\rho^2\right)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\left(\theta-\alpha\right)}d\theta.$$

■

**Note** : La fonction $\dfrac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\theta}-z\right|^2}$ ou $\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\left(\theta-\alpha\right)}$ porte le nom de **noyau de Poisson**.

**Théorème 5.2** *Soit $u\left(X'\right) = h\left(\phi\right)$ Une fonction continue sur un cercle $C = \partial D$. Alors la formule de Poisson (4.21), ou (4.22), détermine l'unique fonction harmonique sur $D$ pour laquelle.*

$$\lim_{X\to X_0} u\left(X\right) = h\left(X_0\right), \qquad \forall X_0 \in C. \tag{5.15}$$

Cela signifie que $u\left(X\right)$ est une fonction continue sur $\overline{D} = D \cup C$. elle est différentiable à toutes ordres à l'intérieur de $D$.

La formule de Poisson a plusieurs conséquences importantes.

**PROPRIETE DE LA VALEUR MOYENNE**

**Théorème 5.3** *Soit $u$ une fonction harmonique dans un disque $D$., continue sur sa fermeture $\overline{D}$. Alors la valeur de $u$ au centre de $D$ est égale à la moyenne de $u$ sur sa circonférence.*

**Preuve.** Choisissons des coordonnées avec l'origine $O$ au centre du cercle. Poson $X = 0$ dans la formule de Poisson (4.22), ou bien $r = 0$ dans (4.21). Alors

$$u\left(0\right) = \left(\frac{a^2}{2\pi a}\right)\int_{a=|X'|}\frac{u\left(X'\right)}{a^2}ds'. \tag{5.16}$$

C'est la moyenne de $u$ sur la circonférence $|X'| = a$. ■

## 5.4 Fonctions de Green

Les identités du **Green** pour le Laplacien conduisent directement au principe du maximum et au principe de Dirichlet sur la minimisation de l'énergie. La fonction du **Green** est une sorte de solution universelle pour les fonctions harmoniques dans un domaine. Tous les autres fonctions harmoniques peuvent être exprimées en termes de celui-ci. Combiné avec la méthode de la réflexion, la fonction du **Green** conduit d'une manière très directe à la solution des problèmes aux limites dans les géométries spéciales. George Green était intéressé par les nouveaux phénomènes de l'électricité et du magnétisme au début du 19ème siècle.

**FORMULE DE GREEN** Nous commençons à partir de la règle du produit

$$(vu_x)_x = v_x u_x + vu_{xx},$$

et la même chose avec les dérivés $y$ et $z$. Cela conduit à l'identité

$$\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u.$$

Ensuite, nous intégrons et utilisons le théorème de divergence sur le côté gauche pour obtenir

$$\int_{\partial\Omega=\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial v}d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega} v\Delta u dx, \tag{5.17}$$

où $\frac{\partial u}{\partial v} = n \cdot \nabla u$ est la dérivée directionnelle par rapport à la normale vers l'extérieur de $\Omega$. C'est la première formule de Green. Il est valable pour toute région solide $\Omega$ et une paire de fonctions $u$ et $v$. Par exemple, nous pourrions prendre $v = 1$ pour obtenir

$$\int_{\partial\Omega=\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v}d\Gamma = \int_{\Omega} \Delta u dx. \tag{5.18}$$

Comme application immédiate de (5.18), considérons le problème de Neumann dans n'importe quel domaine $\Omega$ sauvant

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{dans } \Omega, , \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = h(x) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{5.19}$$

Par (5.18) nous avons

$$\int_{\partial\Omega=\Gamma} h(x)\, d\Gamma = \int_{\Omega} f(x)\, dx. \tag{5.20}$$

## 5.5 Exercices

**Exercice 5.1** *Supposons que $u$ est une fonction harmonique sur $\Omega$, et que $B(x,r) \subset \Omega$. Démontrer que*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = \int_{B(x,r)} u(y)\, dy$$

**Solution.** Nous savons que $\phi(r) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y)$; nous démontrons que $\phi'(r) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\phi(r) &= \frac{d}{dr}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS(y) = \frac{d}{dr}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS(z) \\ &= \int_{\partial B(0,1)} Du(x+rz).zdS(z) = \int_{\partial B(x,r)} Du(y).\frac{y-x}{r}dS(y) \\ &= \int_{\partial B(x,r)} Du(y).\nu(y)\, dS(y) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} .\nu(y) \underbrace{\operatorname{div} Du(y)}_{=0} dy, \end{aligned}$$

d'où

$$\phi'(r) = 0.$$

■

**Exercice 5.2** *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique non négative.*

*Démontrer que pour tout domaine connexe borné $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ il existe une constante $C = C(d, \Omega', \Omega) > 0$ telle que $\sup_{\Omega'} u \leq C \ \inf_{\Omega'} u$.*

**Solution.** Soit $y \in \Omega$ et $B_{3R}(y) \subset \Omega$. Alors pour $x_1,\ x_2 \in B_R(y)$ on a

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{B_R(x_1)} u dx \leq \frac{1}{\omega_d R^d} \int_{B_{2R}(y)} u dx \\ u(x_2) &= \frac{1}{\omega_d (3R)^d} \int_{B_{"R}(x_2)} u dx = \frac{1}{\omega_d (3R)^d} \int_{B_{2R}(y)} u dx \end{aligned}$$

d'où on conclut que

$$u(x_1) \leq 3^d u(x_2),\ \text{pour tout } x_1,\ x_2 \in B_R(y).$$

Cette inégalité entraine que

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u.$$

■

**Exercice 5.3** *Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique. Démontrer que $u \in C^\infty(\Omega)$.*

**Solution.** Soit $x \in \Omega$ et $B_\varepsilon \subset \Omega$ la boule de centre $x$ et de rayon $\varepsilon > 0$ On applique la formule de Green avec $v = \Gamma(x - \cdot)$et $\Omega$ remplacé par $\Omega \backslash B_\varepsilon$. Comme $\Gamma(x-y)$ est harmonique en $y$ pour $y \neq x$, on obtient

$$\int_{\Omega \backslash B_\varepsilon} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right) d\sigma + \int_{B_\varepsilon} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \right) d\sigma \tag{5.21}$$

Il est facile 'à voir que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \Gamma \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma \right| &= \left| \Gamma(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma \right| \leq d\omega_d \epsilon^{d-1} \sup_{\partial B_\varepsilon} |\nabla u| \to 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon} \Gamma \frac{\partial u}{\partial v} d\sigma &= -\frac{\epsilon^{1-d}}{d\omega_d} \int_{\partial B_\varepsilon} u d\sigma \to -u(x), \end{aligned}$$

quand $\epsilon \to 0^+$. En utilisant ces relations pour passer à la limite dans (5.21) lorsque $\epsilon \to 0^+$, d'où le résultat. ■

CHAPTER 6

# EQUATIONS DES ONDES

Les équations des ondes et de la chaleur sont dites d'évolution car elles modélisent en général un phénomène instationnaire, évoluant avec le temps $t$. L'équation de Poisson est quant à elle stationnaire: elle modélise en général un phénomène' à l'équilibre dans l'espace ´$\mathbb{R}^d$.Nous n'étudierons pas ici le cas non-linéaire. Les équations de Poisson et de la chaleur modélisent des phénomènes de diffusion, comme celle de la chaleur, de la matière (par exemple un polluant dans une rivière, ou des bactéries dans un organe, etc.), ou encore d'une ´ charge électrique. L'équation de Poisson pour $f = 0$, aussi appelée équation de Laplace. L'équation des ondes modélise des phénomènes de propagation, comme celle du son, de la lumière. Dans ce chapitre on va résoudre l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

## 6.1 Formule de d'Alemberd

**Equation des ondes dans $\mathbb{R}$** On considère le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\ c\in\mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = f(x), \qquad \text{pour } x\in\mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_t(x,0) = g(x), \quad \text{pour } x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Grâce au changement de variables

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct, \end{cases} \tag{6.2}$$

on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 0. \tag{6.3}$$

Le domaine de $u$ étant connexe on trouve

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta). \tag{6.4}$$

où $F$ et $G$ sont des fonctions d'une variable réelle de classe $C^2$, et on a

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \tag{6.5}$$

La solution générale de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}$ est donc obtenue par superposition de $v$, solution de

$$v_t - cv_x = 0; \; v(x, t) = F(x + ct),$$

et de $w$, solution de

$$w_t + cw_x = 0; \; w(x, t) = G(x - ct),$$

solutions de deux équations de transport, qui se propagent, sans changer de forme, vers la gauche pour $v$ et vers la droite pour $w$. En utilisant les conditions initiales de (6.1) on trouve

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\,dy + \lambda \text{ et } G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(y)\,dy - \lambda. \tag{6.6}$$

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$, le problème (6.1) admet une solution unique de classe $C^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, donnée par la formule de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy. \tag{6.7}$$

## 6.2 Formule de Kirchhoff

La formule de Kirchhoff est induite à partir de la méthode des moyenne sphérique.

### 6.2.1 Méthode des moyennes sphériques

**Définition 6.1** Soit $h \in C^0(\mathbb{R}^d)$, $(d \geq 2)$ on définit la moyenne sphérique de $h$ sur la sphère $S^{d-1}(x, r)$ par

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}}\int_{|y-x|=r} h(y)\,dS_y = \frac{1}{\omega_d}\int_{|\xi|=1} h(x + r\xi)\,dS_\xi. \tag{6.8}$$

La fonction $M_h$ est ainsi définit pour tout $r \in \mathbb{R}$ et on a $M_h(x, r) = M_h(x, -r)$. Si $M_h \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors $M_h \in C^\alpha(\mathbb{R}^{d+1})$.

En particulier si $h \in C^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ on calcule

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) = \frac{1}{r^{d-1}} \Delta_x \left( \int_0^r \rho^{d-1} M_h(x,\rho)\, d\rho \right).$$

On en déduit l'équation de Darboux, vérifiée par toute moyenne sphérique d'une fonction $h$ de classe $C^2$

$$\begin{cases} \left( \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{d-1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r), \\ M_h(x,0) = h(x) \\ \frac{\partial}{\partial r} M_h(x,0) = h(0). \end{cases} \tag{6.9}$$

**Application a l'équation des ondes**

Soit $u \in C^2\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+\right)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t), & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = f(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_t(x,0) = g(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{6.10}$$

**Définition 6.2** On définit la moyenne sphérique de $u$ par

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t)\, dS_\xi, \text{avec } u(x,t) = M_u(x,0,t). \tag{6.11}$$

Grâce a l'équation de Darboux (6.9), on a

$$\Delta_x M_u = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u,$$

or, par un calcul direct on obtient

$$\Delta_x M_u = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} \right).$$

Donc $M_u$ est solution, pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, de l'équation d'Euler-Darboux-Poisson :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(x,r,t) = c^2 \left( \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{d-1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x,r,t), \text{ pour } (r,t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ M_u(x,r,0) = M_f(x,r), & \text{pour } r \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial M_u}{\partial t}(x,r,0) = M_g(x,r), & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.12}$$

On a donc transformé l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$ en une équation aux dérivées partielles avec variables scalaires $r$ et $t$.

### 6.2.2 Equation des ondes dans $\mathbb{R}^3$

On se propose de résoudre le problème (6.10) pour $d = 3$. En utilisant (6.12) on montre que la fonction $v(r,t) = rM_u(x,r,t)$ est solution de l'équation des ondes pour $d = 1$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(r,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,t)\,, \text{ pour } (r,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ v(r,0) = rM_f(x,r)\,, \qquad \text{pour } r \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(r,0) = rM_g(x,r)\,, \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.13}$$

D'où, grâce à (6.7) et du fait que $M_f$ et $M_g$ sont paires en $r$:

$$\begin{aligned} M_u(x,r,t) &= \frac{1}{r} v(r,t) = \frac{1}{2r}\left((ct+r) M_f(x,ct+r) - (ct-r) M_f(x,ct-r)\right) \\ &+ \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} \rho M_g(x,\rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Finalement, en faisant tendre $r$ vers 0, on obtient la représentation suivante d'une solution $u$ de (6.10) pour $d = 3$.

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[tM_f(x,ct)\right] + tM_g(x,ct)\,, \tag{6.15}$$

et la formule de **Kirchhoff** pour le problème (6.10) en dimension 3

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y)\, S_y\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y)\, S_y. \tag{6.16}$$

Grâce au changement de variables $y = x + ct\xi$, l'équation (6.16) devient

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \left(f(x+ct\xi) + ct\nabla f(x+ct\xi).\xi + tg(x+ct\xi)\right) dS_\xi. \tag{6.17}$$

**Remarque 6.1** Les formules (6.15) et (6.17) montrent que l'on perd de la régularité. En e et si $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ et $g \in C^{\alpha-1}(\mathbb{R})$, alors $M_f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$ et $M_g \in C^{\alpha-1}(\mathbb{R})$ et u est de classe $C^{\alpha-1}$ pour $t > 0$. Donc $u$ est moins régulière que sa valeur initiale $u(x,0)$ ou, autrement dit, des petites irrégularités dans la condition initiale $f$ peuvent s'accumuler en $t > 0$ et rendre $u(\cdot,t)$ moins régulière.

### 6.2.3 Equation des ondes dans $\mathbb{R}^2$

Pour obtenir la solution de l'équation des ondes pour $d = 2$ nous allons utiliser la méthode de descente de Hadamard:

La solution de l'équation aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^2$ est considérée comme étant une solution de l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$ indépendante de la variable $x_3$.

La solution $u(x_1, x_2, t)$ est donnée par la formule de Kirchhoff (6.16) avec $x_3 = 0$.

Les conditions initiales sont $f(y) = f(y_1, y_2)$, $g(y) = g(y_1, y_2)$. Pour $\tilde{x} = (x_1, x_2, 0)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$ on a $ct = |\tilde{y} - \tilde{x}| = \sqrt{(\tilde{y}_1 - x_1)^2 + (\tilde{y}_2 - x_2)^2 + \tilde{y}_3^2}$.

L'intégrale sur les points $\tilde{y}$ de la sphère $S^2(\tilde{x}, ct)$ devient une intégrale sur les $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$du disque $B_2(x, ct)$, où $x = (x_1, x_2)$. On obtient la **formule de Poisson** pour l'équation des ondes en dimension deux

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|<ct} \frac{f(y)}{\sqrt{(ct)^2 - |y-x|^2}} dy\right] + \frac{1}{2\pi c}\int_{|y-x|<ct} \frac{g(y)}{\sqrt{(ct)^2 - |y-x|^2}} dy. \tag{6.18}$$

## 6.3 Exercices

**Exercice 6.1** *Considérer la solution de d'Alembert de l'équation d'onde pour le déplacement initial $f(x)$ et la vitesse initiale $g(x)$ suivants:*

*a)* $f(x) = x$ *et* $g(x) = 0$. *b)* $f(x) = 0$ *et* $g(x) = x$. *c)* $f(x) = \sin x$ *et* $g(x) = -c\cos x$.
*d)* $f(x) = \sin x$ *et* $g(x) = c\cos x$.

**Solution.** a) $f(x) = x$ et $g(x) = 0$, alors la solution de d'Alembert est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) = x.$$

b) $f(x) = 0$ et $g(x) = x$, alors la solution de d'Alembert est

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy = xt.$$

c) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -c\cos x$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) - \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}(\sin(x+ct) + \sin(x-ct)) - \frac{1}{2}(\sin(x+ct) - \sin(x-ct)) \\
&= \sin(x-ct).
\end{aligned}$$

d) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = c\cos x$, alors la solution de d'Alembert est

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct)+\sin(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \cos(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+ct)+\sin(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin(x+ct)-\sin(x-ct)\right) \\ &= \sin(x+ct). \end{aligned}$$

■

**Exercice 6.2** *Déterminons le déplacement vertical* $u(x,t)$ *d'une corde idéale de longueur* $\pi$ *solution de l'équation d'onde*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \\ \textit{si le déplacement vertical initial est} \\ u(x,0) = f(x) = x^3 - \dfrac{3\pi}{2}x^2 + \dfrac{\pi^2}{2}x^2, \textit{pour } x \in [0,\pi] \\ \textit{et la vitesse initiale nulle,} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

**Solution.** En appliquent la méthode de séparation de variables, nous avons que la solution est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right)\right]$$

avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \text{ et } . \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

sont les séries de Fourier impaires de $f(x)$ et $g(x)$, c'est- a-dire que nous avons

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx \text{ et } . \left(\frac{n\pi}{\ell}\right) b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.$$

Comme $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,\pi]$, nous obtenons que $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons aussi en intégrant par parties que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\ell}\left(x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{2}x^2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{6\left[(-1)^n + 1\right]}{n^3} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Donc nous obtenons que la solution est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6\left[(-1)^n+1\right]}{n^3}\right)\sin(nx)\cos(nt).$$

■

## 6.3. Exercices

**Exercice 6.3** *Pour tout* $x \in ]0,1[$*et tout* $y \in ]0,1[$, *on pose* :$A(x,y) = \int_0^1 P(t,y)\cos(\pi x t)\,dt$

*a) Exprimer* $C[g](x,y)$ *en fonction de* $A(x,y)$ *et de* $A(1-x,y)$.

*b) Pour* $x$ *fixé, déterminer la limite de* $C[g](x,y)$ *quand* $y$ *tend vers* 1 *par valeurs inférieures.*

*c) En déduire la valeur de* $I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du$ *pour tout* $x$.

**Solution.** a) Comme $x \in ]0,1[$et tout $y \in ]0,1[$, et par définition on a

$$\begin{aligned} C[g](x,y) &= \frac{\pi(1-y)}{\sin(ny)}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x t)+\cos(\pi(1-x)t)}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}dt, \\ A(x,y) &= \int_0^1 \cos(\pi x t)\frac{1-y^2}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}dt \end{aligned}$$

donc

$$A(1-x,y) = \int_0^1 \cos(\pi(1-x)t)\frac{1-y^2}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}dt$$

Une comparaison des 2 expressions donne :

$$C[g](x,y) = \frac{\pi}{(1+y)\sin(\pi y)}(A(x,y)+A(1-x,y))$$

b) Si $y$ tend vers $1^-$, $A(x,y) = \int_0^1 \cos(\pi x t)\frac{1-y^2}{y^2-2y\cos(\pi t)+1}dt$ end vers 1, comme $\varphi(t) = \cos(\pi x t)$ qui est bien continue sur $[0,1]$

$$\lim_{y\to 1^-} C[g](x,y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$$

c) Pour tout $x \in ]0,1[$et tout $y \in ]0,1[$ on à

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du,\ C[g](x,y) = \int_0^1 v^{x-1}\frac{1}{1+vy}dv \\ C[g](x,y)+C[g](1-x,y) &= \int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv \end{aligned}$$

La question précédente nous donne $\lim_{y\to 1^-}\int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$, Si on peut dire

$$\lim_{y\to 1^-}\int_0^1 \frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv = \int_0^1 \lim_{y\to 1^-}\frac{v^{x-1}+v^{-x}}{1+vy}dv.$$

Alors on aura prouver $I(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$. ■

CHAPTER 7

# EQUATIONS DE LA CHALEUR

Soit le problème de la chaleur suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, \qquad\qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.1}$$

L'approche d'Evan: trouver une solution invariante sous l'échelle de dilatation $u(x,t) \to \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$.

$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$ pour tout $\lambda > 0$ et $\alpha$, $\beta$ deux Constantes qui doit être déterminées.

Posons $\lambda = \dfrac{1}{t}$

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} u\left(\frac{1}{t^\alpha} x, 1\right) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

et soit $y = \frac{x}{t^\beta}$. Cherchons une équation pour $v$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \frac{1}{t^\alpha} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\left(\frac{-\beta x_j}{t^{\beta+1}}\right) \\ &= \frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} D_x v\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\left(\frac{x}{t^{\beta+1}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} u(x,t) &= \frac{1}{t^\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{1}{t^\beta} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\frac{1}{t^{2\beta}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$$

implique que

$$\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) + \frac{\beta}{t^{\alpha+1}} Dv(y).y + \frac{1}{t^{\alpha+2\beta}} \Delta v = 0$$

posons $\lambda = \frac{1}{t}$, $\beta = \frac{1}{2}$ donc

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} Dv(y).y + \Delta v = 0.$$

Supposons que: v est un vecteur, $v(y) = w(r) = w(|y|)$

$$\begin{aligned} D_i w(|y|) &= w'(|y|) \frac{y_i}{|y|} \\ Dv(y).y &= w'(|y|) \frac{|y|^2}{|y|} = w'(r) r \end{aligned}$$

on obtient une équation différentielle de $w$

$$\alpha w + \frac{1}{2} w'(r) r + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

Posons $\alpha = \frac{n}{2}$

$$\frac{n}{2} w + \frac{1}{2} w' r + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

En multipliant par $r^{n-1}$

$$\frac{n}{2} r^{n-1} w + \frac{1}{2} r^n w' + w'' + (n-1) r^{n-2} w' = 0.$$

$$\frac{1}{2} (r^n w)' + \left(r^{n-1} w'\right)' = 0.$$

Par intégration on obtient

$$\frac{1}{2} r^n w + r^{n-1} w' = a = \text{constante},$$

supposons que $r^n w \to 0$, $r^{n-1} w' \to 0$ quand $r \to \infty$ alors $a = 0$ et

$$w(r) = b e^{-\frac{1}{4} r^2}$$

et

$$v(y) = w(r) = w(|y|) = b e^{-\frac{1}{4}|y|^2}, \ y = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Donc

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(y) = \frac{b}{t^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4t}}.$$

**Définition 7.1** La fonction

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4t}}, & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \\ 0, & \text{pour } t < 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

est appelée la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

**Lemme 7.1** *Si $\Phi(x,t)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t)\,dy = 1$$

**Preuve.** On à

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dydx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \pi.
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy \tag{7.3}$$

Changer les coordonnées posons $z = \dfrac{y}{\sqrt{4t}},\ dz = \dfrac{1}{(4t)^{\frac{n}{2}}}dy$ donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{\pi^{n+2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = 1. \tag{7.4}$$

■

La résolution du problème à valeur initiale pour l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = g, \qquad\qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.5}$$

**Théorème 7.1** *Supposons que $g$ soit continu et borné sur $\mathbb{R}^n$, elle vérlfie*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,g(y)\,dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,dy \tag{7.6}$$

*pour $x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$. Alors*

*(i)* $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \backslash (0,\infty))$.

*(ii)* $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ *dans* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

*(iii)* $lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$ *if* $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,\infty)$.

**Remarque 7.1** (i) La solution dans $C^{\infty}$ pour tout termes positives sous le signe d'intégrale.

(ii) Supposons que $g > 0,\ g \equiv 0$ à l'extérieure de la boule $B(0,1) \in \mathbb{R}^n$, alors $u(x,t) > 0$ dans

$\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, "vitesse infinie de propagation".

**Preuve.** $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ est infiniment différentiable.

(i) L'intégrale existe pour tout $x,\ t$, et nous pouvons différencier sous le signe intégral.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ puisque $\Phi(y,t)$ est une solution.

(iii) La donnée au bord: $\epsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ tel que $|g(x_0) - g(x)| < \epsilon$ pour $|x_0 - x| < \delta$. Alors

pour $|x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$,

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)(g(y) - g(x_0))\, dy \right| \\ &\leq \int_{B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy, \end{aligned}$$

pour $|x_0 - x| < \delta$. et $|x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$ implique par la fonction de Green sur le demi espace

$$\frac{1}{2}|x_0 - x| \leq |x-y|$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16t}} dy \\ &\leq \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \to 0 \end{aligned}$$

quand $t \to 0$

$$|u(x,t) - g(x_0)| < 2\epsilon \text{ si } |x_0 - x| < \frac{\delta}{2}$$

et $t$ assez petit si $|(x,t) - (x_0,t)|$ est assez petit. ■

## 7.1 L'équation de la chaleur non homogène

Soit le problème de chaleur non homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.7}$$

**Le principe de Duhamel** $\Phi(x-y,t-s)$ est la solution de l'équation de la chaleur. Pour $x>0$ fixé, la fonction

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\,f(y,s)\,dy$$

est la solution du

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,s)-\Delta u(\cdot,s)=0, \text{ pour } (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(s,\infty), \\ u(\cdot,s)=f(\cdot,s), \qquad \text{pour } x\in\mathbb{R}^n.t=s.\end{cases} \tag{7.8}$$

Le principe de Duhamel: c'est la solution (7.7) donnée par

$$u(x,t)=\int_0^t u(x,t;s)\,ds,$$

équivalente à

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\,f(y,s)\,dyds. \tag{7.9}$$

La solution de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t), \text{ pour } (x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0)=g, \qquad \text{pour } x\in\mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{7.10}$$

est donnée par

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t)\,g(y)\,dyds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y,t-s)\,f(y,s)\,dyds.$$

## 7.2 Formule de la valeur moyenne pour l'équation de la chaleur

**Définition 7.2** $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$ et $r>0$. Définisson la boule de chaleur

$$E(x,t;r)=\left\{(y,s)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid s<t, \Phi(x-y,t-s)\geq\frac{1}{r^n}\right\}$$

$x$ et $t$ sur le bord de $E(x,t;r)$.

**Théorème 7.2** *Supposons que $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*\right)$, $f$ à un support compact, alors la solution de l'équation non homogène est donnée par (7.9).*

**Preuve.** Changement de coordonnées

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y, t-s)\, dyds.$$

Par dérivation sous le signe d'intégrale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial f}{\partial t}(x-y,t-s)\, dyds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)\, dyds,$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y,t-s)\, dyds,$$

tous ces dérivés sont continues

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\, dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)\, dyds \\
&= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\, dyds \\
&\quad + \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\, dyds + K \\
&= I_\epsilon + J_\epsilon + K.
\end{aligned}$$

$$|J_\epsilon| \le \left(\sup\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| + \sup\left|D^2 f\right|\right) . \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\, dyds = \epsilon \to 0 \text{ quand } \epsilon \to 0$$

$$\begin{aligned}
|I_\epsilon| &= \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(y,s)\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_x\right)}_{=0} f(x-y,t-s)\, dyds \\
&\quad \underbrace{-\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)\, dy}_{-K} + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\epsilon) f(x-y,t-\epsilon)\, dy
\end{aligned}$$

finalement

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right)(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\epsilon) f(x-y,t-\epsilon)\, dy = f(x,t).$$

■

## 7.3 Exercices

**Exercice 7.1** *a) Montrer que l'équation de la chaleur (en trois dimensions)*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{7.11}$$

*est égale en coordonnées sphériques:* $x = r\sin\varphi\cos\theta,\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z = r\cos\varphi$ *à*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right).$$

*b) Si la surface d'une sphère solide homogène de rayon $R$ est gardée à température constante $0\ C$, si la température initiale dans la sphère est indépendante de et de $\theta$ et $\varphi$ est donnée par $u(r,0) = f(r)$, alors montrer que les solutions $u(r,t)$ de l'équation (7.11) indépendantes de $\theta$ et $\varphi$ sont des solutions du problème:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right),\ \ \forall t \geq 0 \\ u(R,t) = 0,\quad u(r,0) = f(r)\,,\ .\forall r \in [0,R]\,. \end{cases} \tag{7.12}$$

*c) En supposant que $u(r,t)$ est une fonction bornée et en posant $v(r,t) = ru(r,t)$ dans le problème (7.12),montrer que nous obtenons le nouveau problème:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2},\ \ \forall t \geq 0 \\ v(R,t) = v(0,t) = 0,\ \ v(r,t) = rf(r)\,,\ \ \forall r \in [0,R]\,. \end{cases} \tag{7.13}$$

*Déterminer la solution formelle $u(r,t)$ du problème (7.12) en obtenant premièrement la solution formelle $v(r,t)$de (7.13) au moyen de la méthode de séparation de variables.*

**Solution.** a) a) Nous avons que

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),\ \ \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right).$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{x^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&\quad - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r} + \frac{2x^2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\partial r} \\
&\quad - \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\partial \theta} + \frac{(y^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\
&\quad + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{y^2z(x^2+y^2+z^2) - 2x^2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\
&+ \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{2y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \\
&+ \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{(x^2+z^2)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} \\
&- \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{x^2z(x^2+y^2+z^2) - 2y^2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \\
&+ \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2z\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

Conséquemment

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{(x^2+y^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial u}{\partial r} \\
&+ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Puis que $x^2+y^2+z^2 = r^2$ et $x^2+y^2 = r^2\sin^2\varphi$, nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Alors l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques est

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

b) Dans ce cas, $u(r,\theta,\varphi,t)$est indépendant de $\theta$ et $\varphi$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

Conséquemment l'équation de la chaleur se simplifie a la nouvelle équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

## 7.3. Exercices

De plus nous avons les conditions $u(R,t) = 0, \quad u(r,0) = f(r), \forall t \geq 0 . \forall r \in [0,R]$ .c) Nous devons donc résoudre le problème: suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right), \ \forall t \geq 0 \\ u(R,t) = 0, \quad u(r,0) = f(r), . \forall r \in [0,R] \\ \text{et } u \text{ est une fonction bornée.} \end{cases} \tag{7.14}$$

Si nous utilisons la nouvelle fonction $v$ définie par $v = ru$, alors $u = vr^{-1}$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r^{-1} \frac{\partial v}{\partial t}, \ \frac{\partial u}{\partial r} = -r^{-2} v + r^{-1} \frac{\partial v}{\partial r} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 2r^{-3} v - 2r^{-2} \frac{\partial v}{\partial r} + r^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

En substituant dans l'EDP de (7.14), nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \ \forall t \geq 0 \\ v(R,t) = 0, \quad v(r,0) = rf(r), . \forall r \in [0,R] \\ \text{et } v(0,t) = 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

Cette dernière condition vient du fait que la fonction $u$ est bornée. Nous allons maintenant résoudre le problème:(7.15) par la méthode de séparation de variables. Pour ce faire, nous allons premièrement considérer le problème intermédiaire:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \ \forall t \geq 0 \\ v(R,t) = 0, \quad \text{et } v(0,t) = 0 \ . \forall r \in [0,R] . \end{cases} \tag{7.16}$$

Posons $v(r,t) = F(r) G(t)$. Alors en substituant dans l'équation de la chaleur, nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 F}{dr^2} - \lambda F = 0 \\ \dfrac{dG}{dt} - \lambda c^2 G = 0. \\ \text{avec } F(0) = G(0) = 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

Considérons le cas $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\nu^2$ avec $\nu > 0$ alors la solution générale de $F'' - \lambda F = 0$ est $F(r) = A\cos(\nu r) + B\sin(\nu r)$. Et comme $F(0) = A = 0$, $F(R) = A\cos(\nu R) + B\sin(\nu R) = 0$, alors $A = 0$ et $B\sin(\nu R) = 0$. Conséquemment. $\nu = \dfrac{n\pi}{R}$et $\lambda = -\left(\dfrac{n\pi}{R}\right)^2$, où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. De plus pour ce $\lambda = \lambda_n$, $F(r) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{R} r\right)$.

Nous pouvons aussi déterminer la solution générale de $G' - \lambda c^2 G = 0$ lorsque $\lambda = \lambda_n$. Nous obtenons que $F(t) = D_n e^{\left(-\left(\frac{cn\pi}{R}\right)^2 t\right)}$ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, donc la solution du problème (7.17) est

$$v_n(r,t) = a_n e^{\left(-\left(\frac{cn\pi}{R}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right).$$

## 7.3. Exercices

Conséquemment

$$u_n(r,t) = a_n r^{-1} e^{\left(-\left(\frac{cn\pi}{R}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right),$$

est une solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \ \forall t \geq 0 \\ u(R,t) = 0, .\forall r \in [0,R] \\ \text{et } u \text{ est une fonction bornée.} \end{cases} \tag{7.18}$$

Comme cette dernière équation est linéaire, nous pouvons additionner ces solutions. Nous obtenons ainsi que

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} e^{\left(-\left(\frac{cn\pi}{R}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right).$$

Maintenant nous ajoutons la condition

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right) = f(r).$$

Nous obtenons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right)$ est la série de Fourier impaire de la fonction $rf(r)$. Ainsi

$$a_n = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r)\sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right) dr.$$

En conclusion, la solution formelle du problème est

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{-1} e^{\left(-\left(\frac{cn\pi}{R}\right)^2 t\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right) \text{ avec } a_n = \frac{2}{R}\int_0^R rf(r)\sin\left(\frac{n\pi}{R} r\right) dr.$$

■

**Exercice 7.2** ***(de la valeur moyenne)*** *Sit $\Omega$ un ouvert, $u \in C_1^2(\Omega_T)$ solution de l'équation de la chaleur. Alors*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t;r)} u(y,s)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dyds, \ \forall E(x,t;r) \in \Omega_T.$$

**Solution.** Traduire dans le temps et l'espace pour supposer $x = 0, \ t = 0$ d'où $E(r) = E(0,0;r)$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(r)} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2} dyds, .$$

l'aidé c'est de calculé $\Phi'(r)$ , donc on a

$$\Phi(-y,-s) > 1,$$

d'où

$$\frac{1}{(4\pi(-s))^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(-s)}} \geq 1,$$

ce qui équivalent à

$$\frac{1}{\left(4\pi\left(\frac{-s}{r^2}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(-s)}} \geq 1,$$

$h(y,s) = (ry, r^2 s)$ est une application de $E(1)$ dans $E(r)$ .Changement de coordonnées

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(r)} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds &= \frac{1}{4r^n}\int\int_{h(E(1))} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds, \\
\int_{h(\Omega)} f(x)\,dx &= \int_{\Omega}.(f\circ h)(x).|\det(Dh)|\,dx \\
&= \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(r)} u\left(ry,r^2 s\right)\frac{|ry|^2}{\left(r^2 s\right)^2} r^{n+2}dyds \\
&= \frac{1}{4}\int\int_{E(r)} u\left(ry,r^2 s\right)\frac{|y|^2}{s^2}dyds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi'(r) &= \frac{1}{4}\int\int_{E(1)}\left\{\sum_i \frac{\partial u}{\partial y_i}\left(ry_i,r^2 s\right).y_i\frac{|y|^2}{s^2} + \frac{\partial u}{\partial s}\left(ry_i,r^2 s\right).2rs\frac{|y|^2}{s^2}\right\}dyds \\
&= \frac{1}{4}\int\int_{E(1)}\left\{Du(y,s).\frac{y\,(y\backslash r)^2}{r\,(s\backslash r^2)^2} + \frac{\partial u}{\partial s}(y,s).2r\frac{|y\backslash r|^2}{s\backslash r^2}\right\}\frac{1}{r^{n+2}}dyds \\
&= \frac{1}{4r^{n+2}}\int\int_{E(1)}\left\{Du(y,s).y\frac{|y|^2}{s^2} + 2\frac{\partial u}{\partial s}(y,s).\frac{|y|^2}{s}\right\}dyds \qquad (7.19) \\
&= :A+B
\end{aligned}$$

La boule de chaleur est définie par $\Phi(-y,-s) = \frac{1}{r^n}$, donc

$$\frac{1}{(r\pi(-s))^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{(-4s)}} = \frac{1}{r^n}.$$

Maintenant, nous Définissons

$$\psi(y,s) = \frac{n}{2}\ln(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\ln r.$$

On remarque que $\psi(y,s)=0$ sur $\partial E(0,0;r)$ ce qui implique $\psi(y,s)=0$ sur $\partial E(s)$

$$D\psi(y)=\frac{y}{2s}$$

on à d'après la formule (7.19).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(r)}4\frac{\partial u}{\partial s}(y,s).D\psi dyds\\
&= 0-\frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}\sum_{i=1}^{n}\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial y_i}y_i\psi+4\frac{\partial u}{\partial s}\psi\right)dyds\\
&= -\frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}\left\{4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial y_i}y_i\psi+4n\frac{\partial u}{\partial s}\psi\right\}dyds\\
&= \frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}4\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\left(-\frac{n}{2s}-\frac{|y|^2}{4s}\right)-n\frac{\partial u}{\partial s}\psi\right]dyds\\
&= \frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}\left\{-4n\frac{\partial u}{\partial s}\psi-\sum_{i=1}^{n}\frac{2n}{s}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\right\}dyds
\end{aligned}$$

Collectons ses termes on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi'(r) &= A+B\\
&= \frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}\left\{-4n\Delta u\psi-\frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\right\}dyds\\
&= \frac{1}{4r^{n+1}}\int\int_{E(1)}\left\{4n\Delta uD\psi-\frac{2n}{s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_i}y_i\right\}dyds=0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\Phi$ est constante. Donc

$$\Phi(r)=\lim_{r\to 0}\Phi(r)=u(0,0)\lim_{r\to 0}\underbrace{\frac{1}{4r^n}\int\int_{E(r)}\frac{|y|^2}{s^2}dyds}_{=1}=u(0,0)$$

■

# BIBLIOGRAPHY


[1] R. Bédard, Notes pour le cours Calcul I (Sigle: MAT 4112), offert par le département de mathématiques de l'Universit e du Québec a Montréal, 2007.

[2] C. David, P. Gossflet, Equations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2015.

[3] R. Courant, D. Hilbert. Methods of mathematical physics. Wiley-VCH, édition de 1989.

[4] A. Martin, Exercices résolus Equations aux dérivées partielles . Dunod, Paris 1991.

[5] H. Reinhard, Equations aux dérivées partielles introduction. Dunod, Paris 1991.