الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

University 20 août 1955 – Skikda
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

مذكرة ماستر

الميدان: رياضيات وإعلام آلي
الشعبة: رياضيات
التخصص: تحليل دالي تطبيقي (AFA)

الموضوع

المقارنة بين فئات الفضاءات الطبولوجية الضبابية

تقديم الطالبة:
إيناس رابوط

يوم المناقشة
2025/07/02

لجنة المناقشة

كمال سليماني	جامعة سكيكدة	أستاذ محاضرأ	رئيسا
عبد الكريم لطرش	جامعة سكيكدة	أستاذ محاضرأ	مؤطرا
زكرياء حامدي	جامعة سكيكدة	أستاذ محاضرب	ممتحنا

السنة الجامعية: 2024-2025

تشكر

بسـم اللـه الرحمـن الرحيـم

≪ رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ ≫

الحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنّا لنهتدي لولا أن هدانا الله.

سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا، إنك أنت العليم الحكيم.

أتقدم بالشكر الجزيل لكل من ساعدني وساهم في تيسير طريقي طيلة مشواري الدراسي، بَدْءا من معلمي الإبتدائي وصولاً إلى أساتذة الجامعة أخصّ منهم أساتذة قسم الرياضيات دون استثناء، وأخصّ من هؤلاء الخاصّة د. عبد الكريم لطرش على توجيهاته القيمة، وملاحضاته البناءة ، وعلى مجهوده المبذولة طيلة فترة إعداد هذه المذكرة، وكذلكم لجنة المناقشة التي تَشَرّفني بقبول مناقشتهم مذكرتي. كما لا يفوتني أن أشكر صديقاتي على دعمهما المتواصل وتشجيعهما، وكن نعم الرفقة في القسم وفي الاقامة.

شكرا لكل من كان لي عونا حسنا ومعينا، ولكل من أحب لي الخير وسعد لأجلي.

والحمـد للـه أوّلا وآخـرا.

ملخص

قمنا في هذا العمل، ببناء ثلات فئات طبولوجيا ضبابية انطلاقا من تعريف Chang للفضاء الطبولوجي الضبابي والتطبيق المستمر ضبابيا، وكذلك تعريف Lowen و Shostak ، وقد سبق تقديم فصل حول نظرية الفئات وآخر حول المنطق الضبابي.

قمنا بإجراء مقارنة بين الفئات الطبولوجية الضبابية المدروسة، توصلنا إلى أن فئة الفضاءات الطبولوجية حسب تعريف Shostak تكون أقوى من فئة الفضاءات الطبولوجية حسب تعريف كل من Lowen و Chang.

الكلمات المفتاحية:

الفضاء الطبولوجي، الفئة، التشاكل الفئوي، المنطق الضبابي، المجموعة الضبابية، فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية.

Résumé

Dans ce travail, nous avons construit trois catégories de topologies floues à partir de la définition de Chang de l'espace topologique flou et de l'application continue floue, ainsi que des définitions de Lowen et de Shostak. Un chapitre a été préalablement consacré à la théorie des catégories, et un autre à la logique floue.
Nous avons ensuite comparé les catégories topologiques floues étudiées, et avons conclu que la catégorie des espaces topologiques flous selon la définition de Shostak est plus forte que celles définies par Lowen et par Chang.

Les mots clés:

Espace topologique, Catégorie, Foncteur, La logique floue, Ensemble flou, Catégorie des espaces topologiques flous.

Abstract

In this work, we constructed three categories of fuzzy topological based on Chang's definition of fuzzy topological space and fuzzy continuous mapping, as well as the definitions of Lowen and Shostak. A chapter was first dedicated to category theory and another on fuzzy logic. We then compared the studied fuzzy topogical categories and concluded that the category of fuzzy topological spaces according to Shostak's definition is stronger than those defined by Lowen and Chang.

Keywords:

Topological space, Category, Fonctor, Fuzzy logic, Fuzzy set, Category of fuzzy topological spaces.

المحتويات

1.0 مقدمة 8

1 تذكير حول الطبولوجيا العامة **10**
1.1 الطبولوجيا 10
1.1.1 أمثلة 11
2.1 التطبيقات المستمرة 11
1.2.1 أمثلة 12

2 مفاهيم عامة حول نظرية الفئات **13**
1.2 الفئات 13
1.1.2 تعريف و أمثلة 13
2.1.2 الأشياء الخاصة في الفئات 17
3.1.2 الفئة الصغيرة 17
2.2 التشاكل الفئوي 18
3.2 التحويلات الطبيعية 19
4.2 التشاكل الفئوي القطري 25

3 مفاهيم عامة حول نظرية المجموعات الضبابية **26**
1.3 المجموعات الضبابية 26
2.3 العمليات على المجموعات الضبابية 29

4 مقارنة بين فئات الفضاءات الطبولوجية الضبابية **36**
1.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Chang 36
1.1.4 التعاريف والرموز 37
2.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Lowen . . . 39

1.2.4 التعاريف و الرموز 39
3.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Shostak . . . 40
1.3.4 التعاريف و الرموز 41
4.4 العلاقة بين TOP و SF-TOP 43
5.4 العلاقة بين CF-TOP و SF-TOP 43
6.4 العلاقة بين CF-TOP و SF-TOP 45
7.4 حوصلة 48

1.0 مقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يمتد علم الطبولوجيا [1] إلى الحضارة الإغريقية إلا أنه لم يظهر بوضعه الحالي إلا مطلع القرن الماضي حين نشر فرشيه Frechet سنة 1906 أطروحته التي تناولت تطبيق المسافة والعلاقة بينه وبين مفهوم الإستمرارية، ثم تجلى أكثر من خلال العالمين ريس Riesz وهاوسدروف Hausdroff [2].

للطبولوجيا فروع عدة لعل أبرزها الطبولوجيا العامة، الطبولوجيا الجبرية، الطبولوجيا التفاضلية والجبر الطبولوجي...

تعتبر نظرية الفئات علم حديث من علوم الرياضيات تولدت نتيجة تداخل بين الطبولوجيا والجبر. إذ تنسب هذه النظرية لكل من العالمين ساندر ماكلين Line Mac Saunder (1909 – 2005) و صامويل إيلنبارغ Eilenberg Samuel (1913 – 1988)، حيث قاما بتعريف المفاهيم الثلاثة لهذه النظرية وهي: الفئة، التشاكل الفئوي والتحويلات الطبيعية. وذلك عبر بحثهما الذي نشر سنة 1945 تحت عنوان النظرية العامة للتطابق الطبيعي [32].

بعدها قام بتطوير هذه النظرية العالم ألكسندر غروثانديك Grothendieck Alexander في ستينيات القرن الماضي [33]. قامت نظرية الفئات بتعميم البنى الرياضية والتطبيقات التي تحافظ على هذه البنى مثل الفضاءات الشعاعية والتطبيقات الخطية، الفضاءات الطبولوجية والتطبيقات المستمرة...

قمنا بتقسيم هذا العمل إلى أربع فصول:

تناولنا في الفصل الأول التعاريف الأساسية في الطبولوجيا العامة و قدمنا بعض الأمثلة عنها، وأخذنا أيضا التطبيقات المستمرة.

ثم شرعنا في الفصل الثاني ببيان بعض المفاهيم العامة لنظرية الفئات حيث قمنا بتعريف الفئة وعززنا التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية، وكذلك عرفنا التشاكلات الفئوية وقدمنا بعض الأمثلة عليها، عرفنا أيضا التحويلات الطبيعية إذ يعتبر من بين المفاهيم الأساسية في نظرية الفئات.

في الفصل الثالث قدمنا التعاريف الأساسية في نظرية المجموعات الضبابية: تعريف المجموعات الضبابية مع العديد من الأمثلة، العمليات على المجموعات الضبابية.

في الفصل الرابع قمنا بتعريف فئة الفضاءات الطبولوجية حسب تعريف Lowen , Chang

[1] الطبولوجيا هي كلمة يونانية تنقسم لغويا إلى: *Top* وتعني المكان و *Logy* وتعني دراسة، وهي بذلك تعني علم المكان[1].

و Shostak ، بعد ذلك قمنا ببناء فئة فضاءات الطبولوجية ضبابية انطلاقا من تعريفاتهم للفضاء الطبولوجي الضبابي والتطبيق المستمر ضبابيا .

في نهاية العمل قمنا بوضع حوصلة على العمل المنجز .

1

تذكير حول الطبولوجيا العامة

قمنا في هذا الفصل بإعطاء تعريف للفضاء الطبولوجي و التطبيقات المستمرة .

1.1 الطبولوجيا

تعريف 1. [5]
لتكن X مجموعة كيفية غير خالية. نقول أن τ_X هي طبولوجيا على X إذا كانت أسرة من المجموعات الجزئية من X تحقق ما يلي:

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $A_1, A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$
3. $\forall i \in I \ ; \ A_i \in \tau \Longrightarrow \underset{i\in I}{\cup} A_i \in \tau$

تعريف 2. [5]
إذا كانت X مجموعة و τ_X طبولوجيا على X فإن الزوج (X, τ_X) يسمى فضاء طبولوجيا.
عناصر τ_X تسمّى المجموعات المفتوحة في الفضاء الطبولوجي (X, τ_X).

1.1.1 أمثلة

1. لتكن X مجموعة غير خالية، نعرف الأسرتين: τ_X , τ'_X كما يلي:

$$\tau_X = \{X, \emptyset\} \quad , \quad \tau'_X = \mathcal{P}(X)$$

فإن كل من τ_X و τ'_X تعرفان طبولوجيتين على X، حيث أن الأولى تعرف بالطبولوجيا الأضعف على X والثانية تعرف بالطبولوجيا الأقوى على X.

2. لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$
نضع $\tau_X = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{c, a, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$
إن τ_X هي طبولوجيا على X تحقق شروط التعريف 1.

3. لتكن $X = \mathbb{N}$ ولتكن الأسرة τ_X المعرفة كالتالي:

$$\tau_X = \{\emptyset, \mathbb{N}, A_n = \{1, 2, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

إن τ_X تعرف طبولوجيا على $\mathbb{N}$.

تعريف 3. [5]
لتكن X مجموعة اختيارية و τ_1 و τ_2 طبولوجيتين على X. نقول أن τ_2 أقوى من τ_1 إذا كان $\tau_1 \subset \tau_2$.
نقول كذلك في هذه الحالة أنّ τ_1 أضعف من τ_2.

ملاحظة 1.
إذا كانت τ_2 أقوى من τ_1 فإنّ كل مجموعة مفتوحة بالنسبة لـ τ_1 هي مفتوحة بالنسبة لـ τ_2.

2.1 التطبيقات المستمرة

تعريف 4. [5]
ليكن f تطبيق معرف من الفضاء الطبولوجي (X, τ_X) نحو الفضاء الطبولوجي $(X', \tau'_{X'})$. نقول عن التطبيق f أنه مستمر إذا كانت الصورة العكسية وفق f لكل مجموعة مفتوحة في $(X', \tau'_{X'})$ هي مجموعة مفتوحة في (X, τ_X).

1.2.1 أمثلة

1. ليكن (X, τ_X) فضاء طبولوجي. إن التطبيق الحيادي المعرف كما يلي:

$$\begin{aligned} Id : (X, \tau_X) &\longrightarrow (X, \tau_X) \\ x &\longmapsto Id(x) = x \end{aligned}$$

هو تطبيق مستمر.

2. لتكن X مجموعة كيفية غير خالية و $\tau_X = \mathcal{P}(X)$ الطبولوجيا الأقوى، وليكن التطبيق $f : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ حيث (Y, τ_Y) فضاء طبولوجي كيفي.
إن f تطبيق مستمر.

3. لتكن $X = \mathbb{R}$ مزودة بالطبولوجيا العادية τ_X ، و $Y = \mathbb{R}$ مزودة بالطبولوجيا الضعيفة $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$. نعرف التطبيق :

$$f : (\mathbb{R}, \tau_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_Y) \quad f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

إذن التطبيق f مستمر .

2
مفاهيم عامة حول نظرية الفئات

في هذا الفصل نتناول تعاريف أساسية في نظرية الفئات، حيث سنقوم بتعريف الفئة ونعزز التعريف بالعديد من الأمثلة التوضيحية، كما نعرفّ الأشياء الخاصة في الفئات والتشاكلات الفئوية ونقدم بعض الأمثلة عليها.

1.2 الفئات

1.1.2 تعريف و أمثلة

تعريف 5. [10] (الفئة)
الفئة $\underline{C}$ هي كائن رياضي مكون من مجموعتين ويحقق المسلمات التالية :

* المجموعة الأولى مكوّنة من أشياء ونرمز لها بـ $Ob(\underline{C})$ وعناصرها...a, b, c ونكتب $a \in \underline{C}$.

* المجموعة الثانية مكوّنة من مورفيزمات [1] نرمز لها بـ $Mor(\underline{C})$ عناصرها ...f, g, h ونكتب $(f$

[1] تسمى أيضا الأسهم.

من $\underline{C}$).
بحيث :

- لكل مورفيزم f يوجد شيء $a \in \underline{C}$ يسمى المصدر لـ f ونكتب: $a = Dom(f)$.
- لكل مورفيزم f يوجد شيء $b \in \underline{C}$ يسمى الهدف لـ f ونكتب: $b = Cod(f)$.

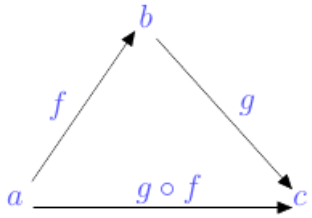
$$a \xrightarrow{f} b$$

* يتحقق إضافة لذلك:

- لكل شيء $a \in \underline{C}$ يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ: Id_a و يسمى المورفيزم الحيادي[2] حيث:

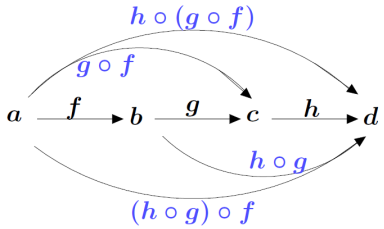
$$a = Dom(Id_a) = Cod(Id_a) \qquad a \xrightarrow{Id_a} a$$

- لكل مورفيزمين f و g حيث : $a \xrightarrow{f} b$ و $b \xrightarrow{g} c$ يوجد مورفيزم وحيد نرمز له بـ $g \circ f$ مصدره a وهدفه c.



بالإضافة إلى الشروط السابقة يجب أن يتحقق مايلي:

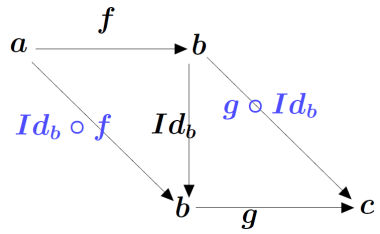
* عملية التركيب على المورفيزمات تكون تجميعية أي أنه من أجل:
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ لدينا: $f : a \longrightarrow b \ , \ g : b \longrightarrow c \ , \ h : c \longrightarrow d$



[2] ويسمى كذلك بالتطبيق المطابق.

* المورفيزم Id هو مورفيزم حيادي بالنسبة لعملية التركيب أي من أجل: $b \xrightarrow{g} c,\ a \xrightarrow{f} b$ لدينا:

$$Id_b \circ f = f \quad و \quad g \circ Id_b = g$$



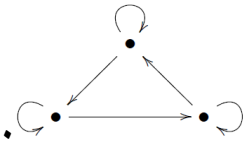
أمثلة 1. (الفئات المنتهية)

(أ) $\underline{0}$ هي الفئة الخالية (الفارغة) بدون أشياء وبدون مورفيزمات.

(ب) $\underline{1}$ هي الفئة المكونة من شيء واحد والمورفيزم الحيادي له .

(ج) $\underline{2}$ الفئة المكونة من شيئين ومورفيزم (دون حساب المورفيزمات الحيادية) .

(د) : وهي الفئة المكونة من شيئين ومورفيزمين متوازيين دون حساب المورفيزمات الحيادية.

(ه) $\underline{3}$ هي فئة مكونة من ثلاثة أشياء وثلاثة مورفيزمات  .

وهكذا فإن الفئات المنتهية تتميز بعدد منتهي من الأشياء والمورفيزمات.

أمثلة 2. (الفئات غير المنتهية)

(أ) الفئة $\underline{Set}$ هي الفئة التي:

- أشياؤها هي عبارة عن مجموعات كيفية.
- مورفيزماتها هي عبارة عن التطبيقات التي تربط بين المجموعات.

إذ يمكن أن نلاحظ أن :

- لكل تطبيق له مجموعة انطلاق و مجموعة وصول (هدف).
- لكل مجموعة A يمكن تعريف التطبيق الحيادي المعرف بـ:

$$\begin{aligned} Id_A : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto Id_A(x) = x \end{aligned}$$

- تركيب التطبيقات معرف دوما وهو تجميعي.
- التطبيق الحيادي حيادي بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات.

(ب)

اسم الفئة	أشياء الفئة	مورفيزمات الفئة
$\underline{Top}$	الفضاءات الطبولوجية	التطبيقات المستمرة
$\underline{Vect}$	الفضاءات الشعاعية	التطبيقات الخطية
$\underline{Grp}$	الزمر	هوميومورفيزم الزمر
$\underline{\mathbb{R}}$	مجموعة الأعداد الحقيقية	الدّوال المستمرة العرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$
$\underline{opsubset}(U \subseteq \mathbb{R})$	المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$	التطبيقات المستمرة المعرفة من U نحو V من $\mathbb{R}$
$\underline{Met}$	الفضاءات المترية	الدوال المقلصة

تعريف 6. [8] (الفئة الجزئية)
لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية غير خالية نقول عن $\underline{D}$ انها فئة جزئية من الفئة $\underline{C}$ إذا حققت ما يلي :

1. $Ob(\underline{D}) \subseteq Ob(\underline{C})$

2. $Mor(\underline{D}) \subseteq Mor(\underline{C})$

وأن المورفيزمات المطابقة الموجودة في $\underline{D}$ هي ذاتها المورفيزمات المطابقة في $\underline{C}$، إضافة لذلك فإن تركيب المورفيزمات في $\underline{D}$ هو ذاته تركيب المورفيزمات في $\underline{C}$.

تعريف 7. [8] (الفئة الثنوية)
لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية غير خالية نعرف الفئة الثنوية للفئة $\underline{C}$ والتي يرمز لها بـ $\underline{C}^{op}$ وتتألف هذه الفئة من :

1/ $Ob(\underline{C}) = Ob(\underline{C}^{op})$

2/ $\forall f : a \longrightarrow b \in \underline{C},\ \exists f' : b \longrightarrow a \in \underline{C}^{op}$

إضافة لذلك فإن جميع شروط الفئة(المذكورة في التعريف5) محققة.

2.1.2 الأشياء الخاصة في الفئات

تعريف 8. [6] (الشيء الإبتدائي)
نقول عن الشيء c من الفئة $\underline{C}$ أنه إبتدائي "$Initial$" إذا كان يشكل المصدر لمورفيزم واحد فقط من الشكل $c \longrightarrow a$ وذلك من أجل كل $a \in C$.

مثال 1.
في الفئة $\underline{Set}$ المجموعة الخالية $\emptyset$ تمثل الشيء الإبتدائي فيها لأنه من أجل كل مجموعة X من $\underline{Set}$ يوجد تطبيق وحيد: وهو التطبيق الخالي.

ملاحظة 2.
إذا كان a شيئاً ابتدائياً في الفئة $\underline{C}$ فإنه يكون شيئاً إنتهائياً في الفئة $\underline{C}^{op}$.

تعريف 9. [6] (الشيء الانتهائي)
نقول عن الشيء t من الفئة $\underline{C}$ أنه نهائي "$Terminal$" إذا كان يشكل الهدف لمورفيزم واحد فقط من الشكل $a \to t$ وذلك من أجل كل $a \in \underline{C}$.

مثال 2.
في الفئة $\underline{Set}$ المجموعة وحيدة العنصر $\star$ تمثل الشيء الإنتهائي فيها حيث من أجل كل مجموعة X من $\underline{Set}$ هناك تطبيق وحيد $f : X \to \star$ يصور كل عناصر المجموعة X بالعنصر الوحيد $\star$.

ملاحظة 3.
إذا كان b شيئاً إنتهائياً في الفئة $\underline{C}$ فإنه يكون شيئاً إبتدائياً في الفئة $\underline{C}^{op}$.

ملاحظة 4.

1- العلاقة $X \to \emptyset$ لا تمثل تطبيقاً وعليه فإن $\emptyset$ لا تمثل شيئاً انتهائياً.

2- التطبيق $X \to \star$ ليس وحيداً وعليه فإن $\star$ لا يمثل شيئاً ابتدائياً.

3.1.2 الفئة الصغيرة

تعريف 10. [8] (الفئة الصغيرة)
نقول عن الفئة أنها صغيرة إذا كانت أشياؤها عبارة عن مجموعات منتهية وكان عدد مورفيزماتها كذلك.

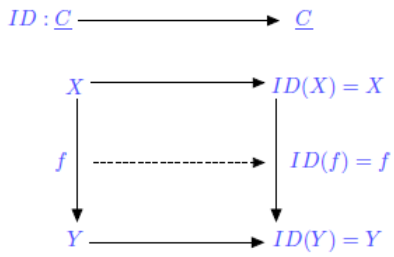
2.2 التشاكل الفئوي

تعريف 11. [10](التشاكل لفئوى)
لتكن $\underline{C}$ ، $\underline{B}$ فئتين غير خاليتين، نعرّف التشاكل الفئوي على أنه علاقة تربط بين الفئة $\underline{C}$ والفئة $\underline{B}$، و نكتب: $T : \underline{C} \longrightarrow \underline{B}$ حيث:
- من أجل كل شيء $a \in \underline{C}$ فإن $T(a) \in B$.
- من أجل كل مورفيزم $f : a \to b$ من $\underline{C}$ يوجد مورفيزم من $\underline{B}$: $Tf : T(a) \to T(b)$ بحيث :
(أ) $T(Id_a) = Id_{T(a)}$ أي أن صورة المورفيزم الحيادي للشيء a بواسطة التشاكل T هو المورفيزم الحيادي لصورته.

(ب) $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ أي أن صورة التركيب بواسطة التشاكل T هي تركيب الصور و ذلك من أجل كل مورفيزمين f ، g قابلين للتركيب.

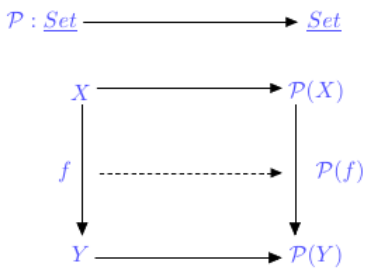
أمثلة 3.

(1) التشاكل الحيادي: لتكن فئة كيفية $\underline{C}$ نعرف التشاكل الحيادي على هذه الفئة كما يلي:



يمكن وببساطة ملاحظة أن ID يمثل تشاكل فئوي على الفئة $\underline{C}$.

(2) لتكن الفئة $\underline{Set}$ نعرف التشاكل $\mathcal{P}$ على الفئة السابقة كما يلي:



حيث:

$$\mathcal{P}(f)(a) = f(a),\ a \in \mathcal{P}(A)$$

ويمكن الملاحظة بأن $\mathcal{P}$ يحقق الشرطين:

(ش 1)

$$(1) \qquad \begin{array}{rcl} Id_{\mathcal{P}(A)} : \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ a & \longmapsto & Id_{\mathcal{P}(A)}(a) = a. \end{array}$$

(2) مجهة أخري لدينا

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(Id_A) : \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ a & \longmapsto & \mathcal{P}(Id_A)(a) = Id_A(a) = a \end{array}$$

من (1) و (2) نجد أن $\mathcal{P}(Id_A) = Id_{\mathcal{P}(A)}$.

(ش 2) من أجل كل من $A, B, C \in \underline{Set}$ ومن أجل f و g من $\underline{Set}$
حيث: $f : A \to B$ و $g : B \to C$ لدينا:

$$(3) \qquad \forall a \subset A : \mathcal{P}(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$(4) \qquad \forall a \subset A : \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)(a) = g(f(a))$$

من (3) و (4) نجد أن $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$ وهو الشرط الثاني لتعريف التشاكل الفئوي.

3.2 التحويلات الطبيعية

تعريف 12. [10] (التحويل الطبيعي)
لتكن $\underline{C}$ و $\underline{D}$ فئتين غير خاليتين وليكن F و G تشاكلين فئويين معرفين من $\underline{C}$ نحو $\underline{D}$. نعرف التحويل الطبيعي T من F نحو G (نقول عن T أيضا أنه المورفيزم الذي يربط بين التشاكلين F و G) كما يلي:

- من أجل كل شيء $A \in \underline{C}$ يوجد مورفيزم وحيد من الفئة D حيث: $T_A : F(A) \longrightarrow G(A)$
- من أجل كل مورفيزم $f : A \longrightarrow B$ من $\underline{C}$ لدينا:

$$G(f) \circ T_A = T_B \circ F(f)$$

معناه المخطط [3] التالي تبادلي:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{T_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{T_B} & G(B) \end{array}$$

مثال 3.

ليكن التشاكل الفئوي التالي $\underline{Vect_K} \longrightarrow \underline{Vect_K}$: ** الذي ينقل كل فضاء شعاعي E إلى الثنوي المضاعف E^{**} الخاص به وكل تطبيق خطي f إلى أثر الأثر الخاص به f^{**} (نذكّر أنّ f^* معرف بـ $f^*(l) = l \circ f$)، يوجد تحويل طبيعي (يرمز له بـ i في الأسفل) معرف من التشاكل الحيادي $\underline{Vect_K} \longrightarrow \underline{Vect_K}$: 1 نحو التشاكل الفئوي ** . والمعرف بالعلاقة:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad i_E \quad} & E^{**} \\ x & \longmapsto & (l \to l(x)) \end{array}$$

حيث أنه من أجل كل تطبيق خطي $f : E \longrightarrow F$ المربع التالي تبادلي:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ F & \xrightarrow[i_F]{} & F^{**} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & (l \to l(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & \longmapsto & (l \to l(f(x))) \end{array}$$

شرح المثال

$$V \in \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \rightsquigarrow V^* = \{h : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \text{خطي } h\}$$

[3] المخطط التبادلي هو مخطط يشمل مجموعة الأشياء (نقاط) والمورفيزمات (مسارات) وتكون فيه جميع المسارات المتجهة في المخطط من نفس نقاط البداية والنهاية تؤدّي إلى نفس النتيجة من حيث البنية. المخطط قد لا يكون تبادليًا، أي أن تركيب المسارات المختلفة في المخطط لا يعطي نفس النتيجة.

نظرية 1. [4]
إذا كان f تطبيق خطي من V نحو W.

$$f : V \longrightarrow W$$

فإنه يوجد تطبيق ثنوي لـ f نرمز له بـ f^* معرف كما يلي:

$$f^* : W^* \longrightarrow V^* \quad \text{خطي}$$

حيث:

$$f^*(h) = h \circ f$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} \mathbb{K}$$

أولاً: نعرف التشاكل الفئوي $F \equiv *$

$$F \equiv * : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{Vect}_{\mathbb{K}}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ f \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow f^* = - \circ f \\ W & \longrightarrow & W^* \end{array}$$

-التحقق من شرطي التشاكل:

ش1/ $F(1_V) \stackrel{?}{=} 1_{F(V)}$

$$\begin{array}{rcl} F(1_V) : V^* & \longrightarrow & V^* \\ h & \longmapsto & F(1_V)(h) = h \circ 1_V = h \end{array}$$

ومنه

$$F(1_V)(h) = h$$

إذن: $F(1_V) = 1_{F(V)}$

ش2/ $F(f \circ g) \stackrel{?}{=} F(f) \circ F(g)$

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g^*(m)=m\circ g} \\ W & \longrightarrow & W^* \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f^*(l)=l\circ f} \\ F & \longrightarrow & F^* \end{array}$$

$$F^* \xrightarrow{f^*} W^* \xrightarrow{g^*} V^*$$

(أ)

$$\begin{array}{rcl} g^* \circ f^* : F^* & \longrightarrow & V^* \\ l & \longmapsto & (g^* \circ f^*)(l) = g^* \circ (f^*(l)) \overset{1}{=} g^*(l \circ f) \overset{1}{=} l \circ f \circ g \end{array}$$

من جهة أخرى

(ب)

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \downarrow{\scriptstyle f\circ g} & & \downarrow{\scriptstyle (f\circ g)^*(l)\overset{1}{=}l\circ(f\circ g)=l\circ f\circ g} \\ F & \longrightarrow & F^* \end{array}$$

من (أ) و (ب) نجد:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), ((f \circ g)^* = f^* \circ g^*)$$

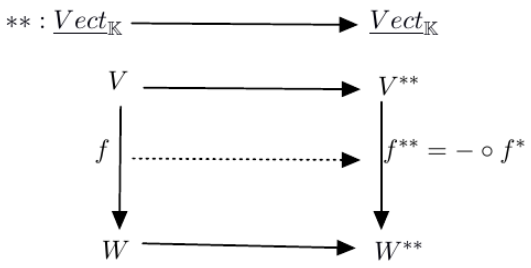
ومنه $F \equiv *$ يمثل تشاكل فئوي.
برهنا على أن $F \equiv *$ بأنه تشاكل فئوي لكي يساعدنا في البرهان على أن $**$ هو كذلك تشاكل فئوي.

ثانياً:

نظرية 2. [7]
إذا كان V فضاء شعاعي فإنه يوجد تطبيق خطي قانوني (طبيعي) η_V معرف بالشكل التالي:

$$\begin{array}{rcl} \eta : V & \longrightarrow & V^{**} \\ v & \longmapsto & \eta_V(v)(h) = h(v) \in \mathbb{K} \end{array}$$

- برهان أن $** : \underline{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \underline{Vect}_{\mathbb{K}}$ المعرف كما يلي :



هو تشاكل فئوي، حيث:

$$f^{**} = h \circ f^*$$

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{h^*} \mathbb{K}$$

التحقق الشروط:

ش1/

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle 1_V} & & \downarrow{\scriptstyle (1_V)^{**}(h) \overset{1}{=} h \circ (1_V)^* = h} \\ V & \longrightarrow & V^{**} \end{array}$$

ش2/

$$(g \circ f)^{**} \overset{?}{=} g^{**} \circ f^{**}$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} F$$

(أ)

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} \\ \downarrow{\scriptstyle g \circ f} & & \downarrow{\scriptstyle (f \circ g)^{**}(h) \overset{1}{=} h \circ (f \circ g)^* = h \circ f^* \circ g^*} \\ F & \longrightarrow & F^{**} \end{array}$$

(ب)

$$\begin{aligned} (g^{**} \circ f^{**})(h) &= g^{**}(f^{**}(h)) \\ &\overset{1}{=} g^{**}(h \circ f^*) \\ &\overset{1}{=} (h \circ f^*) \circ g^* \\ &= h \circ f^* \circ g^* \end{aligned}$$

من (أ) و (ب) نجد

$$(g \circ f)^{**} = g^{**} \circ f^{**}$$

ثالثاً: إثبات أن η تحويل طبيعي من $1_{\underline{Vect}_{\mathbb{K}}}$ إلى $**$

$$\begin{array}{ccc} V & V & \xrightarrow{\eta_V} & V^{**} \\ \downarrow f & \downarrow f & & \downarrow f^{**} \\ W & W & \xrightarrow{\eta_W} & W^{**} \end{array}$$

هل

$$f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$$

$$\begin{aligned} f^{**} \circ \eta_V : V &\longrightarrow W^{**} \\ v &\longmapsto (f^{**} \circ \eta_V)(v) \end{aligned}$$

من أجل $v \in V$ و $h : w \longrightarrow K$ لدينا:

$$\begin{aligned} (f^{**} \circ \eta_V)(v)(h) &= (f^{**}(\eta_V(v))(h) \\ &\overset{1}{=} (\eta_V(v) \circ f^*)(h) \\ &\overset{1}{=} (\eta_V(v))(h \circ f) \\ &\overset{2}{=} (h \circ f)(v) = h(f(v)) \\ &\overset{2}{=} \eta_W(f(v))(h) \\ &= (\eta_W \circ f)(v)(h) \end{aligned}$$

$$f^{**} \circ \eta_V = \eta_W \circ f$$

وعليه η تحويل طبيعي من $1_{\underline{Vect}_{\mathbb{K}}}$ نحو $**$.

شرح المخطط التوضيحي.

1. من الواضح أن x من E
2. بتطبيق الصورة عموديا نجد $f(x) \in F$.
3. بتطبيق الصورة أفقيا

$$i_E(x) \in E^{**} \rightsquigarrow i_E(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} i_E(x) : E^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ l &\longmapsto i_E(x)l \overset{2}{=} l(x) \end{aligned}$$

4. بتطبيق صورة $f(x)$ أفقيا

$$\begin{aligned} i_E(f(x)) : F^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ l &\longmapsto i_E(f(x))(l) = l(f(x)) \end{aligned}$$

تعريف 13. [10] (فئة التشاكلات)
لتكن $\underline{C}$ و $\underline{D}$ فئتين غير خاليتين. نعرّف فئة التشاكلات من $\underline{C}$ إلى $\underline{D}$ والتي رمز لها بـ: $\underline{D}^{\underline{C}} = funct(\underline{C}, \underline{D})$ كما يلي:

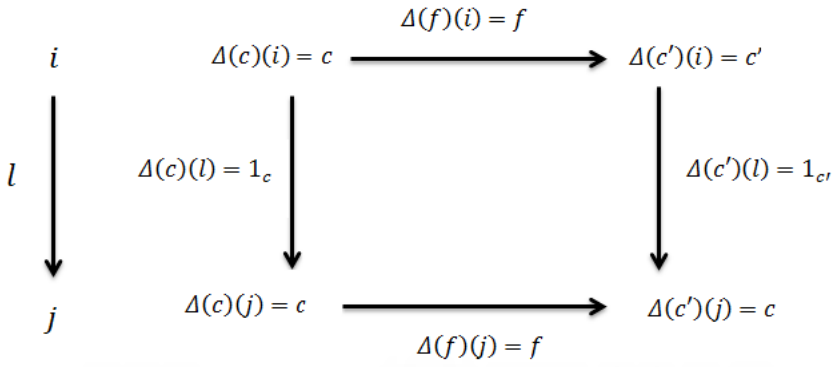
- أشياء الفئة $\underline{D}^{\underline{C}}$ هي التشاكلات الفئوية بين الفئتين $\underline{C}$ و $\underline{D}$.
- المورفيزمات هي التحويلات الطبيعية.

4.2 التشاكل الفئوي القطري

تعريف 14. لتكن $\underline{C}$ فئة كيفية و $\underline{J}$ فئة صغيرة، نعرّف التشاكل الفئوي القطري Δ بالشكل الآتي:

$$\begin{array}{ccc} \Delta: \underline{C} & \longrightarrow & \underline{C}^{\underline{J}} \\ c & \longmapsto & \Delta(c) \\ f \downarrow & & \downarrow \Delta(f) \\ c' & \longmapsto & \Delta(c') \end{array}$$

$\Delta(c) : \underline{C} \longrightarrow \underline{J}$ هو التشاكل الفئوي الثابت
$(\forall i \in \underline{J}, \Delta(c)(i) = c$ و $\forall l \in \underline{J}\ \Delta(c)(l) = 1_c\ ,\ \Delta(f) : \Delta(c) \longrightarrow \Delta(c'))$ هو التحويل الطبيعي المعرّف بـ f من أجل كل $i \in \underline{J}$. نوضح ذلك بالمخطط التالي:



3
مفاهيم عامة حول نظرية المجموعات الضبابية

إن نظرية المجموعات هي أصل العديد من الفروع الرياضية و تقوم على فكرة انتماء العنصر إلى مجموعة ما من عدمه .

1.3 المجموعات الضبابية

تعريف 15. [20] [21] [22] [23]

ليكن X مجموعة غير خالية، **نعرف المجموعة الضبابية** A من X على أنها مجموعة الثنائيات :

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$$

حيث :

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \mu_A(x)$$

و بالتالي، تتميز المجموعة الضبابية A من X بدالة الإنتماء μ_A، التي تربط بين كل عنصر x من X عدد حقيقي في المجال $I = [0,1]$، $\mu_A(x)$ يمثل درجة إنتماء x إلى المجموعة الضبابية A، نلاحظ الحالات الثلاث المحتملة :

1. $\mu_A(x) = 0$، إذا كان x لا ينتمي جزئيا إلى A.
2. $0 < \mu_A(x) < 1$، إذا كان x ينتمي جزئيا إلى A.
3. $\mu_A(x) = 1$، إذا كان x ينتمي تماما إلى A.

يمكن ملاحظة أنه إذا كانت A مجموعة كلاسيكية، يمكن أن تأخذ دالة الإنتماء المقترنة بها القيم 0 أو 1.

في هذه الحالة :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A. \\ 0 & ; x \notin A. \end{cases}$$

ملاحظة 5. 1. تعرف المجموعة الضبابية بدالة الإنتماء التي تتطابق مع مفهوم الدالة المميزة في المنطق الكلاسيكي.

2. العديد من الباحثين (انظر [29][30][31]) قاموا بتعريف المجموعات الضبابية من X على أنها :

$$A = \{(x, A(x)); x \in X\}$$

حيث $A(x)$ يمثل درجة إنتماء العنصر x إلى A.

مثال 4. لتكن $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ دالة، حيث :

$$\mu_A(x) = |\sin(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن A عبارة عن مجموعة ضبابية من $\mathbb{R}$.

مثال 5. لتكن $\mu_B : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ دالة، حيث :

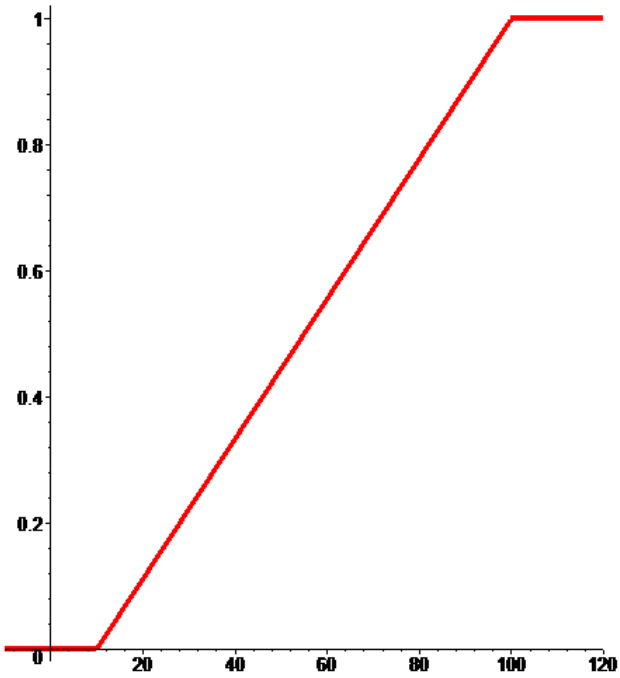
$$\mu_B(n) = \frac{1}{1+n}, \forall x \in \mathbb{R}$$

إذن B عبارة عن مجموعة ضبابية من $\mathbb{N}$.

مثال 6. إن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر بكثير من 10 هي مجموعة ضبابية المعرفة بالدالة المستمرة التالية :

$$\mu_D(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 10. \\ \dfrac{x-10}{90} & ; 10 < x < 100. \\ 1 & ; x \geq 100. \end{cases}$$

يمكننا تمثيل D بالرسم البياني التالي :



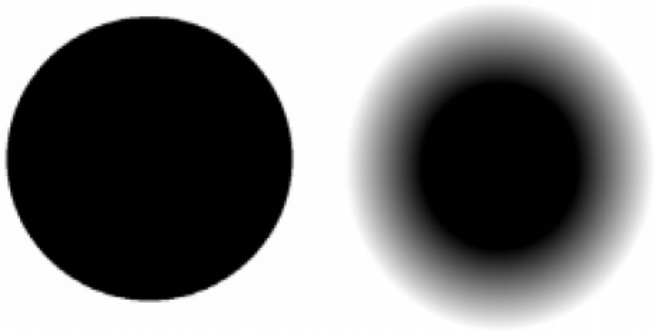
شكل 1.3: المجموعة الضبابية للأعداد الحقيقية الأكبر بكثير من 10

مثال 7. يمكن التعبير عن نسبة الصغر عند الاشخاص باستخدام المجموعات الضبابية ، و ذلك بتعريف المجموعة الضبابية C كتالي:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 0 \leq x \leq 20. \\ \dfrac{40-x}{20} & ; \ 20 < x < 40. \\ 0 & ;\text{غيره}. \end{cases}$$

عمر الشخص 15 معناه بالتأكيد صغير و 100 ليس صغير.

مثال 8. يوضح الشكل التالي بيانيا الفرق بين مجموعة كلاسيكية و مجموعة ضبابية (الغامضة).



شكل 2.3: الفرق بين المجموعة الكلاسيكية (يسار) والمجموعة الضبابية (يمين)

2.3 العمليات على المجموعات الضبابية

بما أن مفهوم المجموعة الضبابية يمكن اعتباره تعميما لمفهوم المجموعة الكلاسيكية، فإن العمليات على المجموعات الضبابية هي تعميم لتلك الموجودة على العمليات الكلاسيكية نقدم هنا العمليات شائعة الإستعمال في نظرية المجموعات الضبابية .

تعريف 16. (الإحتواء)
ليكن A، B مجموعتين ضبابيتين من X، A محتواة في B $(A \subseteq B)$ إذا و فقط إذا كانت :

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

تعريف 17. (المساواة)
تتساوى المجموعتين الضبابيتين A و B إذا تساوتا دالتا إدخالهما معناه:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

ملاحظة 6. إذا كانت $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ لا تتحقق من أجل عنصر x، من X نقول أن A لا تتساوي مع B.

تعريف 18. (الإتحاد)
إتحاد مجموعتين ضبابيتين A و B $(A \vee B)$ يعرف بـ :

$$\mu_{A \vee B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 9. 1. إتحاد A و B حيث :

$$A = \{(1,1); (2,0); (3,0.9); (4,0.1); (5,0.7); (6,0.5)\}$$

$$B = \{(1,0.2); (2,1); (3,0.4); (4,0); (5,0.8); (6,0.2)\}$$

يعطينا :

$$A \vee B = \{(1,1),(2,1),(3,0.9),(4,0,1),(5,0.8),(6,0.5)\}$$

2. إتحاد A و B حيث : $\mu_A(x) = 0.6$ و $\mu_B(x) = 0.4$ من أجل x من X هو :

$$\mu_{A\vee B}(x)_{=} \max\{0.4, 0.6\} = 0.6$$

تعريف 19. (التقاطع)
تقاطع مجموعتين ضبابيتين A و B $(A \wedge B)$ يعرف بـ :

$$\mu_{A\wedge B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 10. 1. تقاطع A و B حيث :

$$A = \{(1,1),(2,0),(3,0.9),(4,0.1),(5,0.7),(6,0.5)\}$$
$$B = \{(1,0.2),(2,1),(3,0.4),(4,0),(5,0.8),(6,0.2)\}$$

هو :

$$A \wedge B = \{(1,0.2),(2,0),(3,0.4),(4,0),(5,0.7),(6,0.2)\}$$

2. تقاطع A و B حيث : $\mu_A(x) = 0.6$ و $\mu_B(x) = 0.4$ من أجل x من X هو :

$$\mu_{A\wedge B}(x) = \min\{0.4, 0.6\} = 0.4$$

تعريف 20. (المتممة)
متممة مجموعة ضبابية A (A^c) تعرف بـ :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 11. لتكن A مجموعة ضبابية من $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$، حيث :

$$A = \{(1,1),(2,1),(3,0.9),(4,0.6),(5,0.4),(6,0.3),(7,0.2),(8,0.1),(9,0),(10,0)\}$$

تعطى المجموعة الضبابية A^c بـ :

$$A^c = \{(1,0),(2,0),(3,0.1),(4,0.4),(5,0.6),(6,0.7),(7,0.8),(8,0.9),(9,1),(10,1)\}$$

تعريف 21. [21][22]

1. يستعمل الرمز ϕ للإشارة إلى المجموعة الضبابية الخالية و المعرفة بـ : $\mu_\phi(x) = 0$، لكل $x \in X$.

2. بالنسبة لـ X، تعطى دالة الإدخال بـ $\mu_X(x) = 1$ لكل $x \in X$.

من التعريفات السابقة للعمليات على المجموعات الضبابية، يمكن إثبات أن :

1. التقاطع و الإتحاد عمليتين تبديليتين و تجميعيتين على المجموعات الضبابية.

2. عملية التقاطع توزيعية على عملية الإتحاد و العكس ...

إلا أنه العمليتين التاليتين لا تتحققان :

1. في المنطق الضبابي $(A \vee A^c \neq X)$، بعبارة أخرى : $\mu_{A \vee A^c} \neq 1$.

2. في المنطق الضبابي $(A \wedge A^c \neq \phi)$، بعبارة أخرى : $\mu_{A \wedge A^c} \neq 0$.

مثال 12. المجموعتين الضبابيتين A_1، A_2 المعرفتين بـ :

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 40 \leq x < 50. \\ 1 - \dfrac{x-50}{10} & ; \ 50 \leq x < 60. \\ 0 & ; \ 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

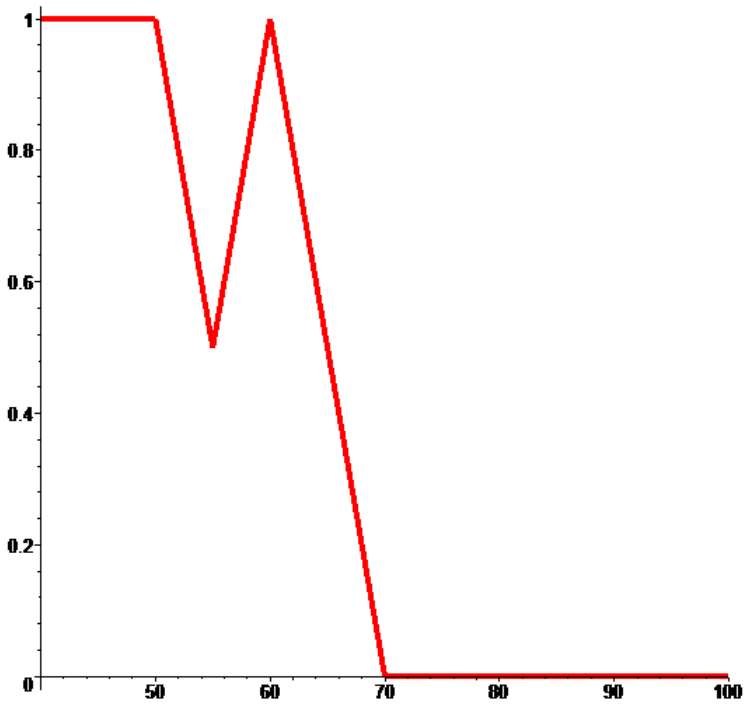
و

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 40 \leq x < 50. \\ \dfrac{x-50}{10} & ; \ 50 \leq x < 60. \\ 1 - \dfrac{x-60}{10} & ; \ 60 \leq x < 70. \\ 0 & ; \ 70 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

لدينا :

$$\mu_{A_1 \vee A_2}(x) = \begin{cases} 1 & ; \ 40 \leq x < 50. \\ 1 - \dfrac{x-50}{10} & ; \ 50 \leq x < 55. \\ \dfrac{x-50}{10} & ; \ 55 \leq x \leq 60. \\ 1 - \dfrac{x-60}{10} & ; \ 60 \leq x \leq 70. \\ 0 & ; \ 70 < x \leq 100. \end{cases}$$

$A_1 \bigvee A_2$ تمثل بالرسم البياني التالي :

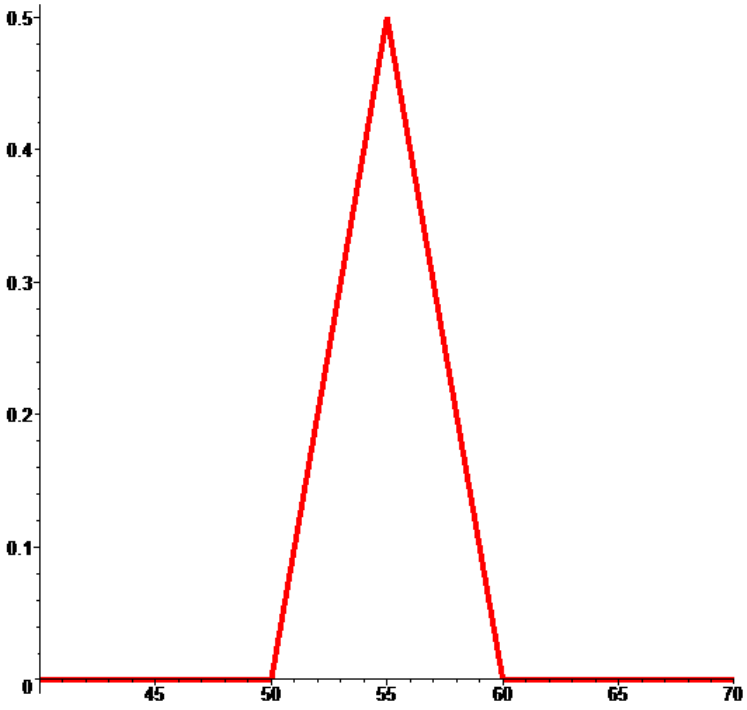


شكل 3.3: إتحاد A_1 و A_2

و تقاطع المجموعتين الضبابيتين A_1 و A_2 يعطى بـ :

$$\mu_{A_1 \wedge A_2}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 40 \leq x < 50. \\ \dfrac{x-50}{10} & ; \ 50 \leq x < 55. \\ 1 - \dfrac{x-50}{10} & ; \ 55 \leq x \leq 60. \\ 0 & ; \ 60 < x \leq 100. \end{cases}$$

التمثيل البياني لـ $A_1 \wedge A_2$ يعطى بـ :

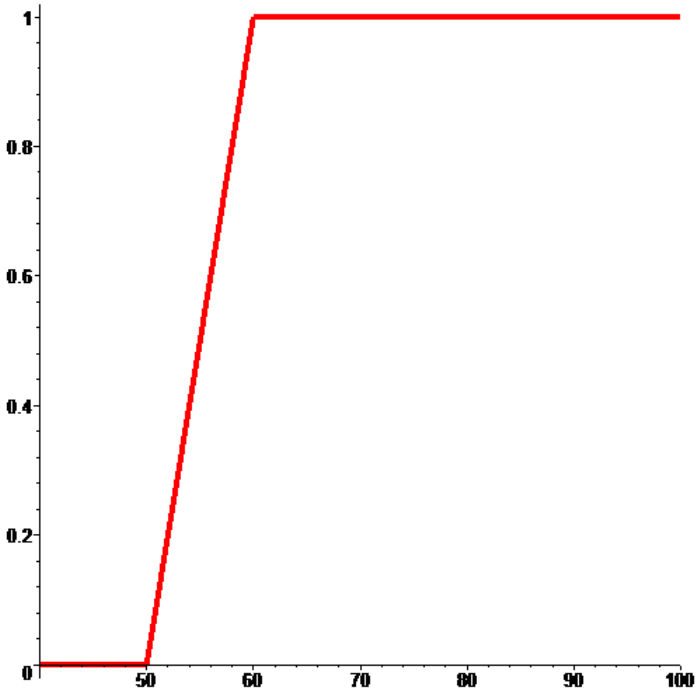


شكل 4.3: تقاطع A_1 و A_2

و متممة A_1 تعطى بـ :

$$\mu_{A_1^c}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ 40 \leq x < 50. \\ \dfrac{x-50}{10} & ; \ 50 \leq x < 60. \\ 1 & ; \ 60 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

الرسم البياني لـ A_1^c يعطى بـ :



شكل 5.3: متممة A_1

بشكل عام،بالنسبة للمجموعات الضبابية ، $A = \{A_i, i \in I\}$ الإتحاد $C = \vee_I A_i$، و التقاطع $D = \wedge_I A_i$، معرفين بـ :

$$\mu_C(x) = sup_I\{\mu_{A_i}(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

$$\mu_D(x) = inf_I\{\mu_{A_i}(x)\}, \forall x \in \mathbb{X}$$

تعريف 22. [24] لتكن A و B مجموعتين ضبابيتين من X و Y على التوالي,
جداء المجموعتين الضبابيتين A و B هو مجموعة ضبابية من $X \times Y$ و المعرف بـ :

$$\mu_{A\times B}(x, y) = min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\}, \forall (x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$$

تعريف 23. [21][22][28]
لتكن X و Y مجموعتين و $f : X \longrightarrow Y$ تطبيق، و لتكن B مجموعة ضبابية من Y، إذن الصورة العكسية للمجموعة الضبابية B بواسطة التطبيق f هو مجموعة ضبابية من X، حيث :

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x)), \forall x \in \mathbb{X}$$

مثال 13. لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $Y = \{d, e, g\}$ مجموعتين، و لتكن B مجموعة ضبابية من Y، حيث : $B = \{(d, 0.2), (e, 0.7), (g, 0.11)\}$
تعطى الدالة $f : X \longrightarrow Y$ معرفة بـ : $f(a) = d, f(b) = d, f(c) = e$، نجد :

$$f^{-1}(B) = \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$$

نظرية 3. [21] ليكن $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ تطبيقين و C مجموعة ضبابية من Z لدينا :

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

البرهان :
يكفي أن نبين ما يلي :

$$\mu_{(g\circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x) \; \forall x \in X$$

ليكن $x \in X$:

$$\mu_{(g\circ f)^{-1}(C)}(x) = \mu_C((g \circ f)(x)) = \mu_C(g(f(x))) = \mu_{g^{-1}(C)}(f(x)) = \mu_{f^{-1}(g^{-1}(C))}(x)$$

و منه

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$$

نظرية 4. [21] لتكن f دالة من X نحو Y، لدينا :

1. $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$، لكل مجموعة ضبابية B من Y.
2. إذا كانت $B_1 \subseteq B_2$، لدينا : $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$، من أجل كل B_1 و B_2 مجموعين ضبابيتين من Y.

4

مقارنة بين فئات الفضاءات الطبولوجية الضبابية

في هذا الفصل ، نعطي ثلاثة تعريفات للفضاء الطبولوجي الضبابي(Chang , Lowen و Shostak) بالإضافة إلى تعريف كل منهم للتطبيق المستمر ضبابيا . بعد ذلك ، نقوم ببناء الفئات الطبولوجية الضبابية (CF-TOP , LF-TOP و SF-TOP) من خلال تحديد بعض العلاقات التي تربط بين الفضاءات الطبولوجية الضبابية والفئات الطبولوجية الضبابية الناتجة عنها .

1.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Chang

كان Chang [12] أول من قدم فكرة في الطبولوجيا الضبابية و ذلك باستخدام المنطق الضبابي ، اعتمد على نفس تعريف الطبولوجيا العادية لتعريف الطبولوجيا الضبابية إذ وضع في تعريفه المجموعات الضبابية بدلا من المجموعات العادية.

1.1.4 التعاريف والرموز

تعريف 24. [12]
لتكن X مجموعة غير خالية. نعرف الطبولوجيا الضبابية T على X على أنها عائلة من المجموعات الضبابية من X تحقق الشروط التالية:

- $\emptyset, X \in T$.
- إذا كان $A_1, A_2 \in T$، فإن $A_1 \wedge A_2 \in T$.
- إذا كان $A_i \in T$ لكل $i \in I$، فإن $\bigvee_I A_i \in T$، حيث I مجموعة كيفية.

تعرف الثنائية (X, T) على أنها **فضاء طبولوجي ضبابي** ونرمز له ب $(CF\text{-}TOP)$.
* عناصر T تعرف على أنها مجموعات ضبابية مفتوحة.
* نقول عن المجموعة الضبابية من T على أنها مجموعة ضبابية مغلقة إذا كان متممها مجموعة ضبابية مفتوحة.

مثال 14. مثل الطبولوجيا العادية، تحتوي الطبولوجيا الضبابية الاولية فقط على عنصرين هما $\varnothing$، X. بينما الطوبولوجيا الضبابية المنفصلة تضم جميع المجموعات الغامضة في X.

مثال 15. لتكن $X = \{x, y\}$ ، $A = \{(x, 0.6), (y, 0.3)\}$ ، $B = \{(x, 0.2), (y, 0.7)\}$

$$A \bigwedge B = \{(x, 0.2), (y, 0.3)\}$$

و

$$A \bigvee B = \{(x, 0.6), (y, 0.7)\}$$

إذن المجموعة:

$$T = \{\varnothing, X, A, B, A \bigwedge B, A \bigvee B\}$$

تشكل طوبولوجيا ضبابية على X.

تعريف 25. [12] [14]
لتكن X مجموعة غير خالية و τ_1 و τ_2 طوبولوجيتين ضبابيتين على X. نقول أن τ_1 أقوى من τ_2 إذا كان $\tau_2 \subseteq \tau_1$ و نقول في هذه الحالة أن τ_2 أضعف من τ_1 .

تعريف 26. [12] [13] [15]
لتكن (X,T) و (Y,U) فضائين طوبولوجيين ضبابيين و نقول أن دالة

$$f:(X,T)\longrightarrow(Y,U)$$

مستمرة ضبابيا (*CF-continuous*) إذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة ضبابية في Y هي مجموعة مفتوحة ضبابية في X.

مثال 16.
ليكن (X,I^X) الفضاء الطبولوجي الضبابي المنفصل، و (Y,τ_Y) هو فضاء طبولوجي ضبابي كيفي فإن كل تطبيق :

$$f:(X,I^X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$$

يكون مستمرا ضبابيا (البرهان واضح).

مثال 17.
لتكن (X,τ) و (X,γ) فضاءين طبولوجيين ضبابيين و μ و μ' هما دالتا الادخال للمجموعات الضبابية المفتوحة τ و γ على التوالي.
لتكن $id_X:(X,\tau)\longrightarrow(X,\gamma)$ الدالة المعرفة ب $id_X(x)=x$.
إذن تكون τ أقوى من γ إذا وفقط اذا كانت id_X مستمرا ضبابيا .

البرهان :
لنفترض أن τ أقوى من γ ، ولنأخذ B مجموعة ضبابية مفتوحة في γ .
ومنه

$$\mu_{id^{-1}X(B)}(x)=\mu'_B(id_X(x))=\mu'_B(x)$$

و

$$id_X^{-1}(B)=B$$

بالعكس ، إذا كانت id_X مستمرة ضبابيا ، و $B\in\gamma$، فإن: $B=id_X^{-1}(B)\in\tau$

ترميز:
تشكل الفضاءات الطبولوجية الضبابية (CF-TOP) والتطبيقات المستمرة ضبابيا فئة نرمز لها ب CF-TOP .

2.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Lowen

قام Lowen بتعريف فضاء الطبولوجي الضبابي عام 1976 بحيث قام بتغيير تعريف Chang للفضاء الطبولوجي الضبابي وهذا راجع إلى أن هذا الاخير لا تتحقق فيه بعض نتائج الطبولوجية العادية ، على سبيل المثال:

1. بعض الدوال الثابتة من CF-TOP الى CF-TOP لا تكون مستمرة.
2. بعض جداءات الفضاءات المتراصة في CF-TOP لا تكون متراصة ، وهذا يعد تناقضا في الطبولوجيا العادية.

إن تعريف Lowen يضيف شرطا الى تعريف Chang ، حيث يعتبر جميع المجموعات الضبابية الثابتة مجموعات ضبابية مفتوحة.

1.2.4 التعاريف و الرموز

تعريف 27. [16]
الطبولوجيا الضبابية وفقا ل *Lowen* ، أو إختصارا $(LF\text{-}TOP)$ ، عائلة τ من المجموعات الضبابية المعرفة على X ، تحقق الشروط التالية :

1. τ تحتوي على جميع المجموعات الضبابية الثابتة المعرفة على X.
2. إذا كان $A, B \in \tau$ فإن $A \bigwedge B \in \tau$.
3. إذا كانت $A_i \in \tau$ لكل $i \in I$, فإن $\bigvee_I A_i \in \tau$, I مجموعة كيفية.

مثال 18.
في المثال(17) ، المجموعة τ تمثل طبولوجيا ضبابية بالمعنى الذي حدده *Chang* ، لكنها لا تعد كذلك حسب تعريف *Lowen* . بالتالي ، يمكننا أن نضيف إلى τ جميع المجموعات الضبابية الثابتة ، وكذلك تقاطعاتها واتحاداتها مع المجموعات الضبابية الموجودة في τ ، فنحصل بذلك على طبولوجيا ضبابية بالمعنى الذي حدده *Lowen* .

مثال 19.
نأخذ المثال التالي المقترح من طرف *Lowen* . لتكن X مجموعة غير خالية ، والمجموعات الضبابية المفتوحة المعرفة على X هي كما يلي:

$$[\frac{1}{2}, 1]^X \cup \{\alpha, \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ دالة ثابتة تأخذ القيمة حيث } \alpha\}.$$

التحقق من الشروط:

1. حسب التعريف ، من الواضح أن كل دالة ضبابية ثابتة على X تنتمي إلى τ.

2. لتكن $A, B \in \tau$:
إذا كان $A, B \in [\frac{1}{2}, 1]^X$ ، فإن $A \bigwedge B \in [\frac{1}{2}, 1]^X$.
إذا كانت A, B دالتين ثابتتين ، فإن $A \bigwedge B = min\{A, B\} = A$ أو $B \in \tau$.
وإذا كانت $A = \alpha \leq \frac{1}{2}$ ، $B \in [\frac{1}{2}, 1]^X$ ، فإن $\mu_B(x) \geq \frac{1}{2}$ ، وبالتالي $A \bigwedge B = A \in \tau$.

3. إذا كان $A_i \in \tau \ , \forall i \in \Delta$. وإذا كان $A_i \ , \forall i$ مجموعة ضبابية ثابتة أقل من أو تساوي $\frac{1}{2}$ ، فإن $\bigvee A_i$ تكون مجموعة ثابتة تنتمي إلى τ.
اذا وجد $\exists A_j, A_j \in [\frac{1}{2}, 1]^X$, فإن
$\bigvee A_i = sup\{\mu_{Ai} : i \in \Delta\} = sup\{\mu_{Aj} : A_j \in [\frac{1}{2}, 1]^X\} \in [\frac{1}{2}, 1]^X$.

إذن τ تمثل طبولوجيا ضبابية على X $(LF\text{-}TOP)$.

تعريف 28. [17] لتكن (X, τ) فضاء $(LF\text{-}TOP)$. نعرف الفضاء الطبولوجي $(X, \iota(\tau))$ كما يلي :

$$\iota(\tau) = \{\iota(A),\ A \in \tau\}$$

مع :

$$\iota(A) = \{\alpha(A),\ \alpha \in [0, 1)\},\ \alpha(A) = \{x \in X : A(x) > \alpha\}$$

تعريف 29. [16] (الاستمرارية الضبابية حسب *Lowen*)
لتكن $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ دالة بين فضاءين طبولوجيين ضبابيين $(LF\text{-}TOP)$ ، نقول أن f مستمرا ضبابيا $(LF\text{-}continuous)$ إذا وفقط إذا كانت

$$f : (X, \iota(T)) \longrightarrow (Y, \iota(S))$$

مستمرا .

ترميز:
تشكل الفضاءات الطبولوجية الضبابية (LF-TOP) و التطبيقات المستمرة ضبابيا فئة نرمز لها ب LF-TOP .

3.4 انشاء فئة الفضاءات الطبولوجية الضبابية حسب تعريف Shostak

تم تقديم مفهوم الطبولوجيا الضبابية لأول مرة سنة 1968 من قبل Chang ، حيث اعتمد على تعريف يستند إلى عائلة من المجموعات الضبابية التي تحقق ثلاث بديهيات أساسية . لاحقا ، في

سنة 1976 ، اقترح Lowen تعديلا على هذا التعريف من خلال تعديل الشرط الأول ، حيث قدم مجموعات ضبابية ثابتة على أنها مجموعات مفتوحة . غير أن هذين التعريفين للطبولوجيا الضبابية لم يأخذا بعين الاعتبار درجة انفتاح المجموعات الضبابية ، وهو ما اعتبره Shostak [27] نقطة ضعف في كلا النموذجين .
انطلاقا من هذا ، قدم Shostak في عام 1985 تعريفا جديدا لفضاء طبولوجي ضبابي من خلال توسيع المفهومين السابقين (Chang و Lowen) ، حيث اقترح تعريف الطبولوجيا الضبابية بمفهوم Chang على أنها تطبيق $\tau : I^X \longrightarrow \{0,1\}$ ، تحقق :

1. $\tau(0) = \tau(1) = 1$.

2. إذا كانت $\tau(A) = \tau(B) = 1$ ، فإن $\tau(A \bigwedge B) = 1$.

3. إذا كان $\tau(A_\alpha) = 1$ ، لكل $\alpha \in \Delta$ ، فإن $\tau(\bigvee A_\alpha) = 1$.

و افترض طبولوجيا ضبابية بمعنى Lowen كتطبيق $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$ ، تحقق :

1. $\tau(c) = 1$ ، لكل مجموعة ضبابية ثابتة .

2. إذا كانت $\tau(A) = \tau(B) = 1$ ، فإن $\tau(A \bigwedge B) = 1$.

3. إذا كان $\tau(A_\alpha) = 1$ ، لكل $\alpha \in \Delta$ ، فإن $\tau(\bigvee A_\alpha) = 1$.

1.3.4 التعاريف و الرموز

تعريف 30. [27]
نسمي **طبولوجيا ضبابية** على X كل تطبيق τ معرف من $[0,1]^X$ إلى $[0,1]$ ، يحقق الشروط الثلاثة التالية :

1. $\tau(0) = \tau(1) = 1$.

2. إذا كانت $\mu, \vartheta \in [0,1]^X$ ، فإن $\tau(\mu \bigwedge \vartheta) \geq \tau(\mu) \bigwedge \tau(\vartheta)$.

3. إذا كانت $\mu_i \in [0,1]^X$ ، لكل $i \in I$ ، فإن $\tau(\bigvee_I A_i) \geq \bigwedge_I \tau(A_i)$ ، حيث I مجموعة كيفية .

⋆ يسمى العدد الحقيقي $\tau(\mu)$ درجة الانفتاح المجموعة الضبابية μ.
⋆ تعرف ثنائية (X, τ) على أنها فضاء طبولوجي ضبابي نرمز لها ب $(SF\text{-}TOP)$ ، حيث X مجموعة كيفية و τ طبولوجيا ضبابية على X (بمفهوم *Shostak*) .

مثال 20.
ليكن X مجموعة غير خالية . التطبيق $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$ المعرف كما يلي :

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } \theta = X \quad \theta = \emptyset. \\ 0 & \text{إذا كانت } \theta \notin \{X, \emptyset\}. \end{cases}$$

هي طبولوجيا ضبابية على X.

مثال 21.
ليكن $X = \{a, b\}$. نعرف المجموعتين الضبابيتين A و B في X كما يلي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x = a. \\ 0 & \text{إذا كان } x = b. \end{cases} \quad , \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x = a. \\ 1 & \text{إذا كان } x = b. \end{cases}$$

نعرف التطبيق $\tau : I^X \longrightarrow [0,1]$ كما يلي :

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } \theta = X \quad \theta = \emptyset. \\ 0.15 & \text{إذا كانت } \theta = A. \\ 0.80 & \text{إذا كانت } \theta = B. \\ 0.1 & \text{إذا كانت } \theta \notin \{X, \emptyset, A, B\}. \end{cases}$$

التطبيق τ هو طبولوجيا ضبابية على X.

تعريف 31. [27]
لتكن τ_1 و τ_2 طبولوجيتين ضبابيتين على X . نقول أن τ_1 أقوى τ_2 إذا تحقق $\tau_1(\mu) \geq \tau_2(\mu)$, لكل $\mu \in I^X$.

تعريف 32. [27]
لتكن (X, τ) و (Y, δ) فضائين طبولوجيين ضبابيين $(SF\text{-}TOP)$ ، نقول أن التطبيق $f : X \longrightarrow Y$ **مستمر ضبابيا** ***(SF-continuous)*** إذا تحقق :

$$\tau(f^{-1}(\vartheta)) \geq \delta(\vartheta)$$

لكل $\vartheta \in [0,1]^Y$.

مثال 22.
ليكن $X = \{a, b, c, d\}$. نعرف المجموعتين الضبابيتين A و B في X كما يلي :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x = b, d. \\ 0 & \text{إذا كانت } x = a, c. \end{cases} \quad , \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x = a, c. \\ 0 & \text{إذا كانت } x = b, d. \end{cases}$$

لكل $i = \overline{1,2}$ ، نعرف التطبيقين $\tau_i : I^X \longrightarrow [0,1]$ كما يلي :

$$\begin{cases} \tau_i(X) = \tau_i(\emptyset) = 1 \quad , \quad i \in \{1,2\} \\ \tau_1(A) = \tau_1(B) = \dfrac{1}{2} \\ \tau_2(A) = \tau_2(B) = 1 \\ \tau_i(C) = 0, \ \forall C \in \{\emptyset, X, A, B\}, \quad i \in \{1,2\} \end{cases}$$

فإن التطبيق $id : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ هو تطبيق مستمر ضبابيا $(SF\text{-}continuous)$.

ترميز:
تشكل الفضاءات الطبولوجية الضبابية (SF-TOP) و التطبيقات المستمرة ضبابيا فئة نرمز لها ب SF-TOP.

4.4 العلاقة بين TOP و SF-TOP

نظرية 5. [34]
ليكن (X, δ) فضاء طبولوجيا . نعرف التطبيق $\omega_\delta : I^X \longrightarrow I$ ، المعرف بواسطة :

$$\omega_\delta(A) = sup\{\alpha \in I : \mu_{A^{-1}}(]\alpha, 1]) \in \delta\}$$

طبولوجيا ضبابية على X $(SF\text{-}TOP)$.

5.4 العلاقة بين CF-TOP و SF-TOP

نظرية 6. [26]
ليكن (X,T) فضاء طبولوجيا ضبابيا $(CF\text{-}TOP)$. لكل $\beta \in]0,1]$ ، نعرف التطبيق : $T^\beta : I^X \longrightarrow I$ كما يلي :

$$T^\beta(A) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } A \in \{\emptyset, X\}. \\ \beta & \text{إذا كانت } A \in T \setminus \{\emptyset, X\}. \\ 0 & \text{عدا ذلك.} \end{cases}$$

هو طبولوجيا ضبابية على X $(SF\text{-}TOP)$.

البرهان :

1. $T^{\beta}(X) = T^{\beta}(\emptyset) = 1$

2. لتكن $A, B \in I^X$ لدينا حالتان :
إذا كان $T^{\beta}(A) = 0$ أو $T^{\beta}(B) = 0$ فإن:

$$T^{\beta}(A) \bigwedge T^{\beta}(B) = 0 \leq T^{\beta}(A \bigwedge B).$$

أما إذا كان $T^{\beta}(A) \neq 0$ و $T^{\beta}(B) \neq 0$ (أي $A, B \in T, A \bigwedge B \in T$) ، فإن لدينا حالتين:

(ا) إذا كان $A \bigwedge B = \emptyset$ أو $A \bigwedge B = X$:فإن $T^{\beta}(A \bigwedge B) = 1$ إذن:

$$T^{\beta}(A) \bigwedge T^{\beta}(B) \leq 1 = T^{\beta}(A \bigwedge B).$$

(ب) إذا كان A أو $B \in T \setminus \{\emptyset, X\}$:فإن

$$T^{\beta}(A) \bigwedge T^{\beta}(B) = \beta \leq T^{\beta}(A \bigwedge B).$$

3. الآن، إذا كانت $A_i \in I^X$ ، لدينا ثلاث حالات :

(ا) $\bigwedge T^{\beta}(A_i) = 0 \leq \bigvee T^{\beta}(A_i)$.

(ب) إذا كان $\bigwedge T^{\beta}(A_i) = 1$, فإن $\forall i,\ A_i \in \{\emptyset, X\}$, ومنه

$$\bigvee A_i \in \{\emptyset, X\}, T^{\beta}(\bigvee A_i) = 1 = \bigwedge T^{\beta}(A_i).$$

(ج) إذا كان $\bigwedge T(A_i) = \beta$ فإن :
$\forall i,\ T^{\beta}(A_i) \geq \beta$ أي . $\forall i,\ T^{\beta}(A_i) \in \{1, \beta\}$ وهذا يعني $\forall i,\ (A_i) \in T$ ،
و بما أن T طبولوجيا ضبابية(CF-TOP)
فإن $\bigvee A_i \in T$, وبما أن $T^{\beta}(\bigvee A_i) \in \{1, \beta\}$,
فإننا نتحصل على :

$$T^{\beta}(\bigvee A_i) \geq \beta = \bigwedge T^{\beta}(A_i).$$

و بالتالي ، فإن الثنائية (X, T^{β}) تشكل فضاء طبولوجيا ضبابيا SF-TOP .

نظرية 7. [26]
ليكن (X,τ) فضاء طبولوجي ضبابي $SF\text{-}TOP$ ، ولكل $\alpha \in]0,1]$, نعرف :

$$\tau_\alpha = \{A : A \in I^X, \tau(A) \geq \alpha\}$$

حينها تكون ثنائية (X,τ_α) فضاء طبولوجي ضبابي $CF\text{-}TOP$.

البرهان :
ليكن $\tau_\alpha = \{A : A \in I^X, \tau(A) \geq \alpha\}, \alpha \in]0,1]$ ، لدينا :
$\tau(\emptyset) = \tau(X) = 1 \geq \alpha$, فإن : $\emptyset, X \in \tau_\alpha$.
إذا كانت $A, B \in I^X$ أي $A, B \in \tau_\alpha$, وبما أن : $\tau(A) \geq \alpha$ و $\tau(B) \geq \alpha$ ، فإن :

$$\tau(A \bigwedge B) \geq \tau(A) \bigwedge \tau(B) \geq \alpha$$

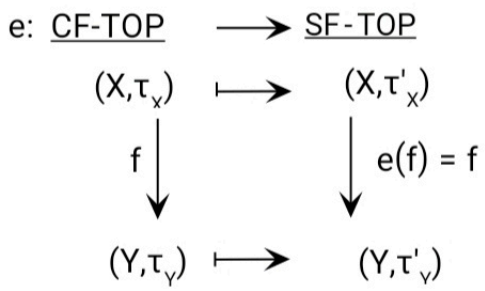
. إذا كانت $i \in \Delta$ ، إذا كان كل $A_i \in \tau_\alpha$ ، و بما أن : $\tau(A_i) \geq \alpha$,$\forall i$.
فإن :

$$\tau(\bigvee_i A_i) \geq \bigwedge_i \tau(A_i) \geq \bigwedge_i \alpha = \alpha$$

إذن $\bigvee A_i \in \tau_\alpha$
و بالتالي يكون (X,τ_α) فضاء طبولوجي ضبابي CF-TOP .

6.4 العلاقة بين CF-TOP و SF-TOP

يمكن بناء تشاكل فئوي بين CF-TOP و SF-TOP كالتالي :



برهان :

1. إن كل فضاء طبولوجي (CF-TOP) هو فضاء طبولوجي(SF-TOP) :
من أجل كل $v \in I^X$ لدينا :

$$\begin{array}{rcl} \tau'_X : I^X & \longrightarrow & \{0,1\} \\ v & \longmapsto & \tau'_X(v) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } v \in \tau_X. \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \end{array}$$

ونضع من أجل (Y, τ_Y) فضاء طبولوجي (CF-TOP)

$$\begin{array}{rcl} \tau'_y : I^Y & \longrightarrow & \{0,1\} \\ v' & \longrightarrow & \tau'_Y(v') = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } v' \in \tau_Y. \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases} \end{array}$$

من الواضح أن كل من τ'_X و τ'_Y هو فضاءين طبولوجيين ضبابيين بمفهوم Shostak .

2. كل تطبيق $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ مستمر ضبابيا (CF-continuous) هو مستمر ضبابيا (SF-continuous) .

$$\forall v' \in \tau_Y \longrightarrow f^{-1}(v') \in \tau_X$$

$$\forall v' \in I^Y, \tau'_X(f^{-1}(v')) \geq \tau'_Y(v')$$

ليكن $v' \in I^Y$ يوجد حالتين :

حالة 1 : $v' \in \tau_Y$ فإن $f^{-1}(v') \in \tau_X$ ومنه :
$\tau'_X(f^{-1}(v')) = 1$ وكذلك : $\tau'_Y(v') = 1$
إذن :

$$\tau'_X(f^{-1}(v')) \geq \tau'_Y(v')$$

حالة 2 : $v' \notin \tau_Y$ لدينا : $\tau'_Y(v') = 0$

$$f^{-1}(v') \in I^X \longrightarrow f^{-1}(v') \notin \tau_X$$

ومنه : $\tau'_X(f^{-1}(v')) = 0$
إذن :

$$\tau'_X(f^{-1}(v')) \geq \tau'_Y(v')$$

7.4 حوصلة

من خلال العمل المنجز نستخلص النتائج التالية :

1. كل فضاء طبولوجي ضبابي SF-TOP هو فضاء طبولوجي ضبابي CF-TOP .

2. كل فضاء طبولوجي ضبابي SF-TOP هو فضاء طبولوجي ضبابي LF-TOP . (انظر الجزء [3.4]) .

3. من كل فضاء طبولوجي كلاسيكي يمكن البناء فضاء طبولوجي ضبابي (SF-TOP) . [نظرية 5]

4. كل فئة CF-TOP يمكن استخراج فئة من SF-TOP . (الجزء 6.4)

5. العمل الذي قام به Shostak من تعريف الفضاء الطبولوجي الضبابي وتطبيق المستمر ضبابيا أبرز جليا درجة انفتاح المجموعات الضبابية وهذا ما يظهر قوة لمسه لفكرة المنطق الضبابي .

المصادر

[1] **م. حازي** ، "الوجيزة الوافية في دروس الطبولوجيا"، جامعة التكوين المتواصل، 2006.

[2] **غ. حسين موسى،** "مقدمة في التبولوجيا"، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، 2008.

[3] **ع. قوبا** ، " الجبر الجزء الأوّل، مبادئ الجبر المجرد "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية،الإصدار الأُول،الطبعة الثانية، 2017.

[4] **ع. قوبا** ، " الجبر الجزء الثاني، الجبر الخطي "، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،الجمهورية العربية السورية، 2017.

[5] **أ. نوار،** "مدخل إلى الفضاءات الطبولوجية"، ديوان المطبوعات الجامعية المطبعة الجهوية بقسنطينة، 2007.

[6] **S. AWODEY** , *" Category Theory"* , Second Edition, Carnegie Mellon University, 2010.

[7] **H. Brezis,***Analyse Fonctionnlle Théorie et Application,*Mosson, Paris,1983.

[8] **B. Le Stum**, *"Le langage des catégories"*, Université de Rennes 1, Version du 3 septembre 2004.

[9] **F. Ronga** , *" Topologie et géométrie "*, Genève, MMVI ap.J.-C, 2006.

[10] **P. Saunders Mac Lane**, *"Categories for the Working Mathematician "*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg SPIN , 1066-1688 , 1969-1970.

[11] **S. Carlson,** *"Fuzzy Topological Spaces"*, Part II (May 17).

[12] **C. Chang,** *" Fuzzy topological spaces"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Anal. Appl. **24** , 182-190, (1968).

[13] **S. Demiralp, E. Guner,** *"Normality and Its Variants on Fuzzy Isotone Spaces"*, **6**, 111-121, (2014).

[14] **S. N. El-Diafy,** *"Comparative Study of Fuzzy Topology"*, a thesis submitted in partial fulfilment of the requirement for degree of master of mathematics, the islamic university of Gaza, (2014).

[15] **F. Ismail, R. Uzbashy,** *"Fuzzy sets category and applications of its universal arrows"*, J. Math. **29**, 349-372, (2013).

[16] **R. Lowen,** *"Fuzzy Topological Spaces et Fuzzy Compactness "*, J. Func. Anal 621-633, (1976).

[17] **F. Ronga,** *"Topologie et géométrie"*, Genève, MMVI ap. J. C. Décembre (2006).

[18] **A. P. Shostak,** *"Two Decades of Fuzzy Topology : Basic ideas, Notions, et Results"*, Russian Math., **44:6**, 125-186, (1989).

[19] **K. K. Azad,** *" Fuzzy Hausdorff spaces and fuzzy perfect mappings"* , J. Math. **82**, 297-305, (1981).

[20] **S. Ambapour,** *"Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo"*, DT 16/(2009).

[21] **C. Chang,** *" Fuzzy topological spaces"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Anal. Appl. **24** , 182-190, (1968).

[22] **A. P. Shostak,** *"On a fuzzy topological structure"* , J Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser II, **11**, 89-103, (1985).

[23] **L. A. Zadeh,** *"Fuzzy sets"*, Information And Control, **8**, 338-353, (1965).

[24] **R. Srivastava, S. N. Lal, A. K. Srivastava,** *"Fuzzy Topological T_1 Spaces"*, Journal of mathematical analysis et applications, **102**, 442-448, (1984).

[25] **S. Mac Lane,** *" Categories for the working mathematicaian"*, Springer, (1997).

[26] **A. A. Ramadan,** *"Smooth Topological Spaces"*, Fuzzy sets and Systems, **48**, 371-375, (1992).

[27] **A. P. Shostak,** *"On a fuzzy topological structure"* , J Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo Ser II, **11**, 89-103, (1985).

[28] **S. N. El-Diafy,** *"Comparative Study of Fuzzy Topology"*, a thesis submitted in partial fulfilment of the requirement for degree of master of mathematics, the islamic university of Gaza, (2014).

[29] **A. P. Shostak,** *"Two Decades of Fuzzy Topology : Basic ideas, Notions, et Results"*, Russian Math., **44:6**, 125-186, (1989).

[30] **R. Lowen,** *"Fuzzy Topological Spaces et Fuzzy Compactness "*, J. Func. Anal 621-633, (1976).

[31] **P. Eklund, M. A. Galan,** *"Set Fkmctors, L-Fuzzy Set Categories, et Generalized Terms"* , J. Computers et Mathematics with Applications. **43**, 693-705, (2002).

[32] **S. Eilenberg , S. Maclane**. *"General Theory of Natural Equivalences "*, Transactions of the american Mathematical Society, 1945.

[33] **A. Grothendieck**, *"Categories fibrees et descente. Revetements etales et group fondamental"* , In Seminaire de Gemetrie Algebrique du Bois-Marie (SGA 1), 1960-1961.

[34] **M. Stephen, N. Moses, A. Paul, S. Hezron Were,** *"Normality and Its Variants on Fuzzy Isotone Spaces"*, J. Math. **3**, 639-642, (2013).