

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية

العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2022/2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Dynamique complexe et phénomènes de fractalisations

Option : Commande optimale et système dynamique

Par :

Rahmouni Imene

Encadré par : Selmani Wissame

M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : Lallouche Abdellah

M.C.B U. SKIKDA

Examineur: Bendib El Ouahma

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2022/2023

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'aide et me donne la santé, la patience et le courage durant ces longues années d'étude et la force pour finir ce travail .

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr.Selmani Wissame**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet. Mon sincère remerciement aux membres de jury **Dr.Lallouche Abdallah** et **Dr.Bendib El Ouahma** qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-mêmes afin de nous assurer une formation de qualité.

Enfin, je remercie tout ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

DÉDICACE

Avant tous propos, je tiens à rendre grâce à "**Allah**" qui m'a guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents ma mère **Leulmi Atika** et mon père **Hocine** qui m'ont bien élevés, aidés soutenus et encouragés durant toutes ces années d'étude, qu'Allah les protège.

Mes frères : **Sadek** , **Lamine** , **Tarek**.

Toute mes amies

A tous les enseignants du département de Mathématiques.

Tous mes collègues de ma promotion de Master 2 Mathématiques "Commande optimal et système dynamique".



Abstract

This essay's main goals are to introduce some fundamental ideas about discrete dynamical systems, identify chaos, and specify the different kinds of attractor that can occur in a dynamic system.

The concept of autosimilarity will be discussed, and a digital study of a non-linear model will be presented.

The work's figures were produced using the Maple and Dynamics software.

Key words : Attractor, fracture, and Lyapunov exposer.

Résumé

Ce mémoire a pour l'objectif de présenter quelques notions de base sur les systèmes dynamiques discrets, détecter le chaos , définir les types des attracteurs qui existent dans un système dynamique.

Un phénomène d'autosimilarité sera exposé et une étude numérique d'un model non-linéaire sera présentée.

Les figures réalisées dans ce travail sont à l'aide de logiciel Maple et Dynamics.

Mots clés : Attracteur, fractale, exposant de Lyapunov.

ملخص

تهدف هذه الأطروحة إلى تقديم بعض المفاهيم الأساسية حول الأنظمة الديناميكية المنفصلة ، واكتشاف الفوضى ، وتحديد أنواع الجاذبات الموجودة في النظام الديناميكي. سيتم الكشف عن ظاهرة التشابه الذاتي وسيتم تقديم دراسة عددية لنموذج غير خطي. الأرقام التي تم إجراؤها في هذا العمل تستخدم برنامج مابل وديناميك.

كلمات مفتاحية: جاذب ، كسورية ، أس لياپونوف .



TABLE DES MATIÈRES

Principales notations utilisées	1
Liste des figures	1
Introduction générale	1
1 Préliminaires de système dynamique	3
1.1 Rappels de quelques définitions élémentaires	4
1.2 Singularités et stabilité	5
1.2.1 Singularités	5
1.2.2 Stabilité des singularités	6
1.3 Ensembles stables et instables	7
1.4 Plan paramétrique Bifurcation	9
1.4.1 La bifurcation fold (Noeud - Col)	9
1.4.2 Cas particuliers de la bifurcation fold	10
1.4.2.1 Bifurcation transcritique ou échange de stabilité	10
1.4.2.2 La bifurcation flip (doublement de période).	12
1.4.2.3 La bifurcation de Neïmark-Hopf	12
1.5 Bifurcation concernant les bassins d'attractions	13
1.5.1 La bifurcation de contact de type 1	13
1.5.2 La bifurcation de contact de type 2	14
1.6 Structure de bifurcation Boites-emboîtées	14
1.7 Structure feuilletée d'un plan paramétrique	15
1.7.0.1 Zone de communication entre feuillets	15

1.7.0.2	Zone échangeur	15
1.7.0.3	Zone col	16
1.7.0.4	Zone source	16
1.8	Plan de phase d'une transformation non inversible	18
1.8.1	Formulation mathématique des lignes critiques	19
1.9	Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins	20
2	Chaos, Attracteur étrange et les fractales	23
2.1	Le chaos	23
2.1.1	Quelques définitions du chaos	24
2.2	Système dynamique chaotique	24
2.2.1	Caractéristiques du chaos	24
2.2.2	Détection du chaos	25
2.3	L'attracteur	26
2.3.1	Les différents type d'attracteur d'un système dynamique	26
2.3.2	L'attracteur étrange	27
2.3.3	Attracteur chaotique	27
2.3.4	Bassin d'attraction	28
2.3.5	Exposant de Lyapunov	28
2.4	Les fractales	29
2.4.1	Propriétés d'une structure fractale	30
2.4.2	Figures mathématiques fractales	30
2.4.3	Dimension fractale	31
2.4.4	Quelques exemples de courbes fractales	32
2.4.4.1	Courbe de Von Koch	32
2.4.4.2	Le triangle de Sierpinski	34
2.4.4.3	L'ensemble de Mandelbrot	35
2.4.4.4	Un ensemble de Julia	37
3	Modèle de Lorenz	39
3.1	Application de Lorenz	39
3.2	Points fixes	40
3.3	Stabilité des points fixes	41
3.3.1	Calcul des exposants de Lyapunov du model de lorenz	47

TABLE DES MATIÈRES

3.4	Application numérique	50
3.4.1	Étudions le modèle de Lorenz pour $0 < r < 1$	50
3.4.2	Étudions le modèle de Lorenz pour $1 < r < 24$	50
3.4.3	Étudions le modèle de Lorenz pour $r \geq 24$	51
3.5	Le type de chaos dans le système Lorenz	53
Conclusion		55
Bibliographique		56
Annexe-MAPLE		60
Annexe-Dynamics		63

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

- $B(x, r, p, q)$: la fonction de Blumberg en dimension un dépend des trois paramètres réels r, p, q . I : matrice identité.
- $\det J$: déterminant de la matrice jacobienne.
- $tr J$: trace de la matrice jacobienne.
- $S_i (i = 1, 2)$: valeurs propres ou multiplicateurs.
- (k, j) : cycle d'ordre k , j caractérise l'ordre d'échange des k points du cycle.
- $\Lambda^J_{(k)_0}$: une courbe de bifurcation "noeud-col" ou "fold" ou "pli".
- Λ^j_k : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".
- $N_i (i > 0)$: points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).
- p_{BB} : point de la bifurcation big bang.
- O : est l'origine ou le point fixe $(0, 0)$.
- N^k_s : cycle d'ordre $k (k \geq 1)$ de type nœud stable.
- N^k_I : cycle d'ordre $k (k \geq 1)$ de type nœud instable.
- C^k : cycle d'ordre $k (k \geq 1)$ de type col.
- C^j_k : point cuspidal.
- C^k_{ij} : les points du cycles d'ordre k , $(i, j$ deux entiers naturels).
- TNI : transformations non inversibles.
- LC_{-1} : le lieu des points pour lequel le $\det J$ de T s'annule.
- $LC = LC_0$: lignes critiques de rang 1 des courbes LC_{-1} .
- $LC_i (i = 1, \dots, n)$: itérations, les images des courbes LC_{-1} .
- $E_i (i \geq 0)$: les ensembles de commutations.
- $S_i (i \geq 0)$: les points d'intersections des E_i et E_{i+1} .
- $P_i (i \geq 0)$: les points de pllyage.

Z_i : zones, (i entier naturel).

$B(A) (D)$: bassin (domaine) d'attraction de l'attracteur A .

Δ_c : la diagonale ou l'asymptote pour $c = 1$.

ω : la droite décrivant la stabilité du point fixe $(0, 0)$.

S : le plan de caractérisation de la stabilité du point fixe $x = 0$.

CI : courbe invariante.

Figures-Chapitre 1 :

Figures 1.1 : Section de Poincaré.

Figures 1.2 : Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

Figures 1.3 : Courbe invariante d'un point fixe col.

Figures 1.4 : Bifurcation flod ou noeud-col(pli).

Figures 1.5 : Bifurcation transcritique des points fixes (à gauche), et sa dégénérescence après perturbation du système(à droite), () :stable, (..) :instable.

Figures 1.6 : Bifurcation fourche supercritique(à gauche), sous-critique(à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (..) : instab.

Figures 1.7 : Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).

Figures 1.8 : Structure de bifurcation boites emboîtées.

Figures 1.9 : Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique (1,2).

Figures 1.10 : Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (1,2).

Figures 1.11 : Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (1,2).

Figures 1.12 : Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.

Figures 1.13 : Bifurcation d'un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe.

Figures 1.14 : Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

Figures-Chapitre 2 :

Figures 2.1 : La sensibilité aux conditions initiales.

Figures 2.2 : L'attracteur fixe obtenu par modélisation d'un pendule simple suspendu à une ficelle et avec les forces de frottements (a). L'attracteur circulaire qui peut être obtenu par le lancer d'une balle attachée à un socle sans forces de frottements (dans le vide) (b)[1].

Figures 2.3 : Attracteur étranges.

Figures 2.4 : L'attracteur du système de Lorenz appelé aussi le papillon de Lorenz. C'est le plus connu et le premier des attracteurs étudiés, il en existe beaucoup d'autre aux formes très étranges.

Figures 2.6 : Les formes fractales dans la nature.

Figures 2.7 : Exemple de la dimension fractale.

Figures 2.8 : les étapes de construction de la courbe de Von Koch.

Figures 2.9 : Courbe de Von Koch.

Figures 2.10 : Courbe de Von Koch.

Figures 2.11 : Les étapes de construction de le triangle de Sierpinski.

Figures 2.12 : Le triangle de Sierpinski.

Figures 2.13 : Ensemble de Mandelbrot pour $m = 15$

Figures 2.14 : L'ensemble de Mandelbrot.

Figures 2.15 : Ensemble de Julia avec $c = -1$.

Figures 2.16 : Ensemble de Julia pour $c = -0,5 + 0,5I$.

Figures-Chapitre 3 :

Figures 3.1 : Type d'attracteurs d'après l'exposant de Lyapunov.

Figures 3.2 : Trajectoire pour $r = 0.5$.

Figures 3.3 : Trajectoire pour $r = 0.9$.

Figures 3.4 : Trajectoire pour $r = 11$.

Figures 3.5 : Trajectoire pour $r = 15$.

Figures 3.6 : Tracé la projection des trajectoires pour $r=11$.

Figures 3.7 : Trajectoire pour $r = 24$.

Figures 3.8 : Trajectoire pour $r = 24.5$.

Figures 3.9 : Trajectoire pour $r = 28$.

Figures 3.10 : Trajectoire pour $r = 30$.

Figures 3.11 : Tracé la projection des trajectoires pour $r=28$.

Figures 3.12 : Attracteur noeud papillon de Lorenz.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus ou flots car les points du système évoluent en "flottant" sur des courbes continues. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer dans certains systèmes dynamiques ces flots par des systèmes dynamiques discrets c'est-à-dire des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures des séquences régulières.

Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les continus et les discrets. Les systèmes dynamiques discrets ou cascades sont généralement définis sous forme d'itérations d'une application d'un espace métrique dans lui-même.

Dans ce mémoire, nous allons étudier un modèle des systèmes dynamiques discrets et nous avons divisé le mémoire en trois chapitres.

Chapitre1 : consiste à présenter quelques notions de base concernant les singularités des transformations ponctuelle de dimension un et deux et leur propriétés qui jouent un rôle important dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires et quelques types de bifurcation en dimension un. Nous étudions la notion de bifurcation de singularités et de bassins d'attraction.

Chapitre2 : retrace un bref historique de la théorie du chaos déterministe. Dans ce chapitre nous balayerons les différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement Chaotique, tels que les attracteurs étranges, les exposants de Lyapounov et la dimension fractale et le phénomène de fractalisation .

Chapitre3 : Dans ce chapitre nous avons étudié un modèle fameux dans les systèmes dynamiques; le modèle de Lorenz, nous avons calculé les singularités, et les propriétés de cet

attracteur étrange puis nous avons tracer ce model pour différentes valeurs des paramètres dans le plan de phase et le plan paramétrique, pour réaliser cette partie numérique nous avons utilisé le logiciel DYNAMICS et MAPLE, des programmes illustrés dans l'annexe. .

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES DE SYSTÈME DYNAMIQUE

La modélisation de nombreux systèmes dynamiques conduit à une formulation par les équations différentielles non linéaires et non autonomes. Dans le cas de la dimension deux, la forme explicite suivante :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, \lambda, t) \\ y' = f_2(x, y, \lambda, t) \end{cases} \quad (1.1)$$

est la plus courante où f_1 et f_2 sont deux fonctions de classe C^r ($r \geq 0$) par rapport aux variables réelles x et y du paramètre λ de \mathbb{R}' , périodiques du période Γ par rapport à t . par la méthode de surface de section de Poincaré, on peut associer au système différentiel (1.1) localement une récurrence autonome T de type difféomorphisme.

L'avantage de cette méthode est de diminuer de l'ordre effectif par l'élimination de la dépendance explicite de temps. Ainsi une transformation ponctuelle constitue l'outil essentiel d'étude des équations différentielles.

L'idée de base de cette méthode est d'associer à un point $M_n(X_n)$ situé à l'intersection de la surface de section et d'une trajectoire de phase donnée, son conséquent $M_{n+1}(X_{n+1})$ point d'intersection de la surface de section et de la trajectoire considérée, situé après M_n dans le sens du temps croissant. Les points M_n et M_{n+1} sont alors liés par une transformation bidimensionnelle autonome T :

$$M_{n+1} = TM_n, n = 1, 2, \dots \text{ (voir figure (1.1))}$$

Le but de ce chapitre est de rappeler les définitions principales et présenter les résultats généraux spécifiques aux systèmes dynamiques discrets.

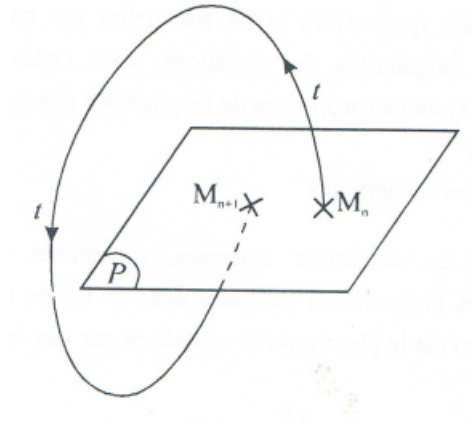


FIGURE 1.1 – Section de Poincaré.

1.1 Rappels de quelques définitions élémentaires

Dans ce paragraphe, nous considérons les transformations ponctuelles (ou récurrences) autonomes sous la forme explicite donnée par :

$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n = G(X_n, \lambda) \\ X_n \in \mathbb{R}^p (p = 2), \lambda \in \mathbb{R}^q (q \geq 1) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où F est au moins de classe C^k , $k \geq 1$ par rapport à la variable X et au paramètre λ .

\mathbb{R}^p s'appelle l'espace d'état (de phase) et p la dimension de la transformation (1.2), \mathbb{R}^q s'appelle l'espace des paramètres.

Définition 1.1 : Une solution de (1.2) est formée par une suite de points $X_n, n = 0, 1, \dots$ où X_0 est appelé condition initiale ; les points $X_n, n = 0, 1, \dots$ forment une trajectoire discrète de phase ou suite itérée ou orbite.

Définition 1.2 : La transformation T est un difféomorphisme si G dans (1.2) est continuellement différentiable et d'inverse unique sur son domaine de définition. Si F est discontinue ou non différentiable et à inverse unique, alors T est simplement dit inversible. Enfin, si F ne possède pas d'inverse unique, T est appelé un endomorphisme.

Définition 1.3 : L'itéré X_{n+r} , avec $r \geq 1$, est appelé conséquent de rang r de X_n , c'est à dire :

$$X_{n+r} = T^r(X_n), X_n \text{ est un antécédent de rang } r \text{ de } X_{n+r} \text{ noté : } X_n = T^{-r}(X_{n+r}) .$$

Lorsque T est un endomorphisme, un même point peut avoir plusieurs antécédents de rang 1 ou aucun.

1.2 Singularités et stabilité

1.2.1 Singularités

On distingue deux types de singularités de dimension zéro pour la transformation T : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

1. Un point fixe X^* est un point du plan des phases vérifiant :

$$X^* = T(X^*) \quad (1.3)$$

2. Un cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (X_1^*, \dots, X_k^*) du plan des phases, vérifiant :

$$\begin{cases} X_{i+1}^* = T(X_i^*) , i = 1, \dots, k-1 \\ X_i^* = T(X_k^*) \\ X_i^* = T^k(X_i^*) , i = 1, \dots, k \\ X_i^* = T^h(X_i^*) , i = 1, \dots, k \text{ et } 1 \leq h < k. \end{cases} \quad (1.4)$$

Chaque point X_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de T^k . Un cycle est caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points X_i^* par applications successives de T , un tel cycle sera désigné par le système (k, j) (k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de T).

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation T ou T^k .

Courbes invariantes

Dans le plan de phases \mathbb{R}^2 , une courbe définie par l'équation $Q(X) = C$, C une constante, est invariante par la transformation T ou T^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$Q(T(X)) = Q(X) \text{ ou } Q(T^k(X)) = Q(X) \quad (1.5)$$

Plus généralement, un ensemble A de \mathbb{R}^p est invariant par T ssi $T(A) = A$.

1.2.2 Stabilité des singularités

Pour caractériser la nature des singularités de dimension zéro, on introduit la notion de multiplicateurs (ou valeurs propres) définie lorsque G est différentiable au point considéré.

(1) Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe X^* est S :

$G'(X^*)$ où $G' = \frac{dG}{dX}$ et celui d'un cycle d'ordre $k, (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ est $S = \prod_{i=1}^k G'(X_i^*)$. Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif (asymptotiquement stable)

si $|S| < 1$ et répulsif (instable) si $|S| > 1$.

(2) Si la dimension de la récurrence $p = 2$, un point fixe X^* ou un cycle d'ordre $k, (X_1^*, X_2^*, \dots, X_k^*)$ possède deux multiplicateurs S_1 et S_2 qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de G (pour un point fixe) ou G^k (pour un cycle d'ordre k) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ de plus, si ce point est répulsif si $|S_1| > 1$ ou $|S_2| > 1$.

Selon les valeurs prises par S_1 ou S_2 avec $|S_i| \neq 1, i = 1, 2$, on définit différentes sortes de points fixes ou cycles :

(1) Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| > 1$ et $|S_2| < 1$. Un col est toujours instable.

(2) noeud : S_1 et S_2 sont réels.

- Attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$.

- Répulsif si $|S_i| > 1, i = 1, 2$.

(3) Foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, $S_1 = \rho - i\theta, S_2 = \rho + i\theta$

- Attractif si $\rho < 1$.

- Répulsif si $\rho > 1$.

La figure (1.2) représente les trajectoires au voisinage d'un point fixe.

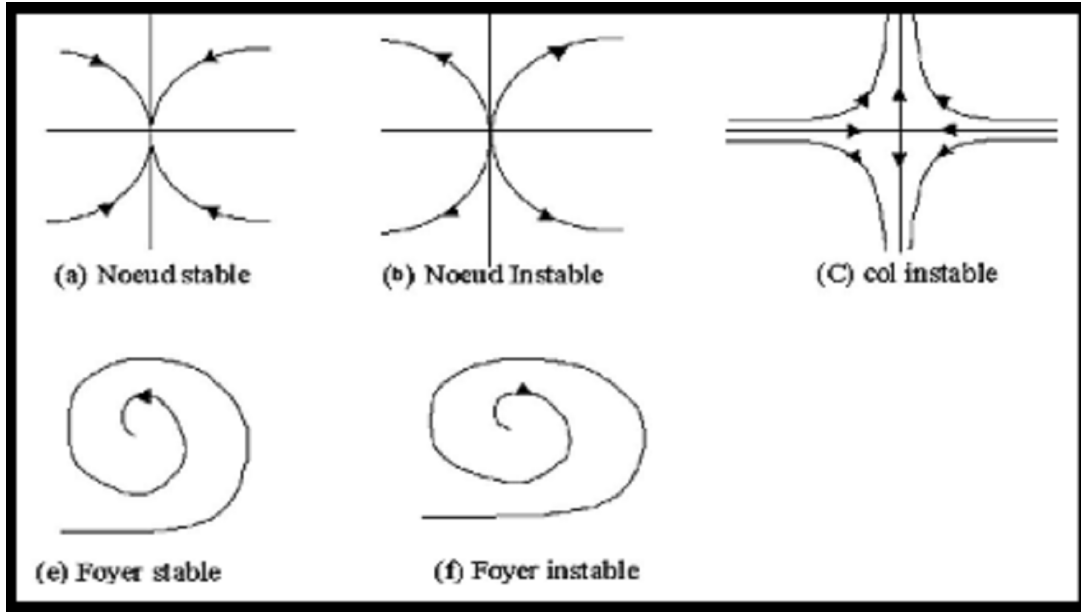


FIGURE 1.2 – Trajectoires au voisinage d'un point fixe.

1.3 Ensembles stables et instables

Pour une transformation ponctuelle T définie par (1.2), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

Définition 1.4 : Soit X^* un point fixe répulsif et U un voisinage de X^* .

- On appelle $W_{loc}^i(X^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U qui converge vers X^* .
- On appelle $W^i(X^*)$ ensemble instable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers X^* .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(X^*) = \{X \in U : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{-n} \in U\} \quad (1.6)$$

$$W^i(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_{-n} \in T^{-n}(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup T^n(W_{loc}^i(X^*)) \quad (1.7)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P1- $W^i(X^*)$ est invariante par rapport à T c'est à dire : $T[W^i(X^*)] = W^i(X^*)$.

P2- Si T est un endomorphisme, en général $W^i(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T^{-1} et on a : $W^i(X^*) \subseteq T^{-1}[W^i(X^*)]$. L'invariance de $W^i(X^*)$ par rapport à T^{-1} a lieu lorsque T est inversible.

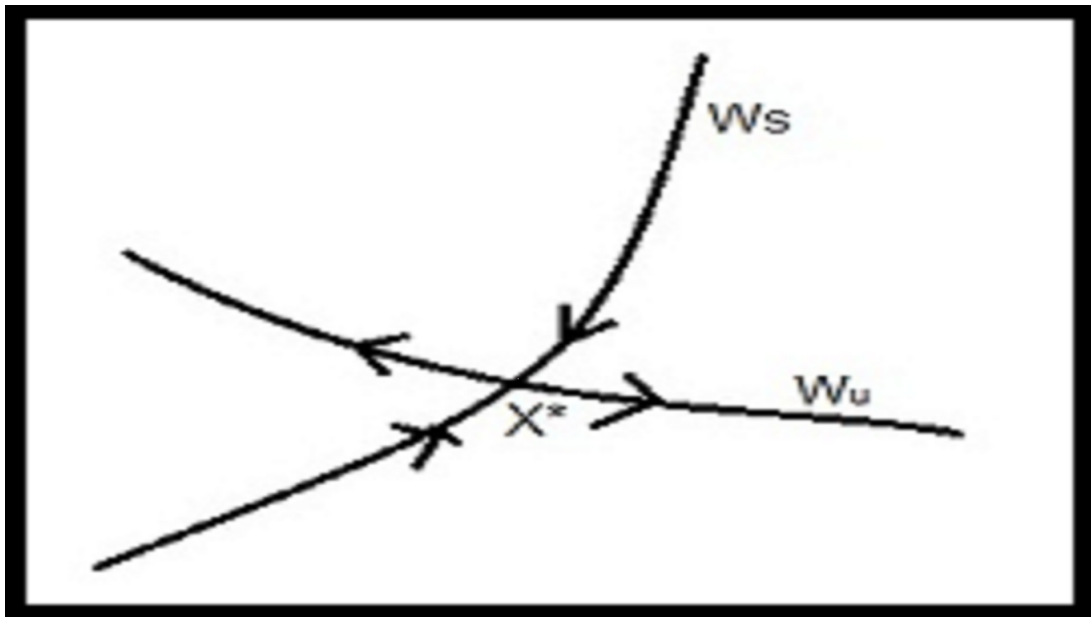


FIGURE 1.3 – Courbe invariante d'un point fixe col.

Définition 1.5 : Soit X^* un point fixe T répulsif ou attractif.

- On appelle $W_{loc}^i(X^*)$ ensemble stable local ou variété stable locale (c'est à dire dans U) de X^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives appartient à U et converge vers X^* .
- On appelle $W_{loc}^s(X^*)$ ensemble stable global de X^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers X^* .

Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(X^*) = \{X \in U : X_n \in T^n(X) \rightarrow X^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_n \in U\} \quad (1.8)$$

$$W^s(X^*) = \{X \in \mathbb{R}^p : X_n \in T^n(X) \rightarrow X^*\} = \bigcup T^{-n}(W_{loc}^s(X^*)) \quad (1.9)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P3- $W^s(X^*)$ est invariante par rapport à $T^{-1}[W^s(X^*)] = W^s(X^*)$.

P4- Si T est un endomorphisme, en général $W^s(X^*)$ n'est pas invariant par rapport à T et on

1.4 Plan paramétrique Bifurcation

$a : T[W^s(X^*)] \subseteq W^s(X^*)$. L'invariance de $W^s(X^*)$ par rapport à T a lieu lorsque T est inversible.

Remarque 1.1 :

- (1) Si X^* est un point fixe attractif l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.
- (2) Si T est un difféomorphisme les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.
- (3) Dans le cas d'un point fixe X^* de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de X^* se réduit à X^* lui même lorsque T est inversible. Lorsque T est non inversible l'ensemble stable local de X^* se réduit à X^* lui même et l'ensemble stable global de X^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de X^* . Ceci s'écrit :

$$W^s(X^*) = \bigcup T^{-n}(X^*) \text{ et } \forall X \in W^s(X^*) : \exists m \in \mathbb{N} / T^m(X) = X^* \quad (1.10)$$

- (4) Les définitions des ensembles stables et instables d'un cycle d'ordre k se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de T^k

1.4 Plan paramétrique Bifurcation

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre λ traverse une valeur critique λ_0 . En particulier les valeurs de λ correspondent à un cas critique de Lyapounov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour λ_0 , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Pour les transformations décrites par (1.2) plusieurs sortes de bifurcations se produisent.

1.4.1 La bifurcation fold (Noeud - Col)

Naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 ou S_2 est égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xrightarrow{S=+1} N_s^k \text{ (resp. } N_i^k \text{)} + C^k. \quad (1.11)$$

\emptyset signifie absence de cycle, N_s^k cycle nœud d'ordre k stable, N_i^k cycle nœud d'ordre k instable, C^k cycle col d'ordre k . Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\lambda_{(k)0}^j$ k correspond à l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T .

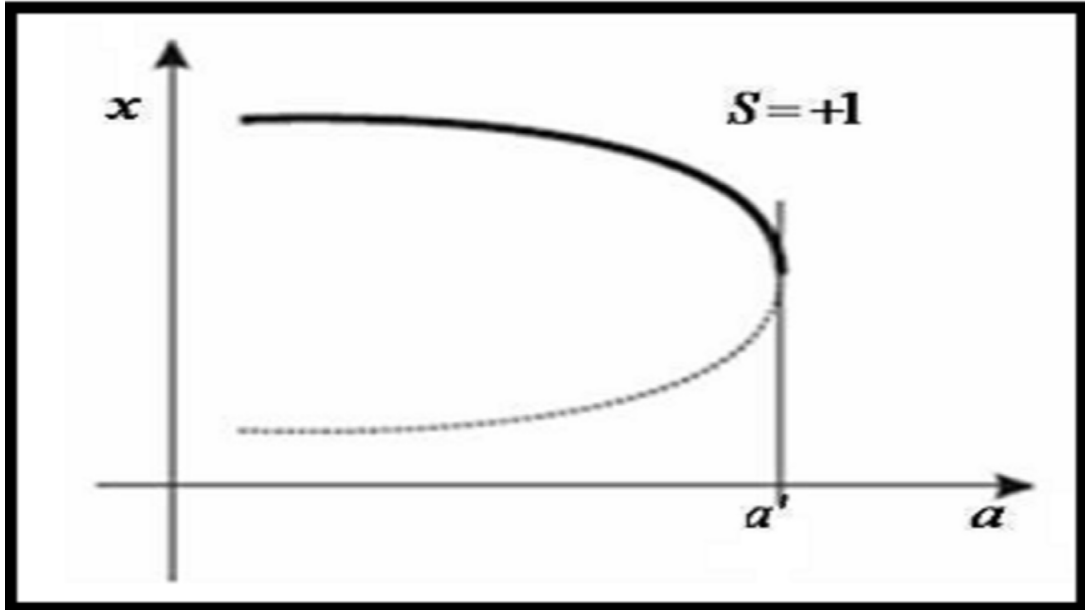


FIGURE 1.4 – Bifurcation flod ou noeud-col(pli)

1.4.2 Cas particuliers de la bifurcation fold

1.4.2.1 Bifurcation transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux collecteurs différents points fixes se croisent. Au point de passage de l'échange des points fixes il y a la propriété de stabilité. Le point fixe instable devient stable et vice versa. Notez qu'au-de là du point de bifurcation, le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation nœud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation nœud-col, sa représentation dans les Figures (1.5) et (1.6).

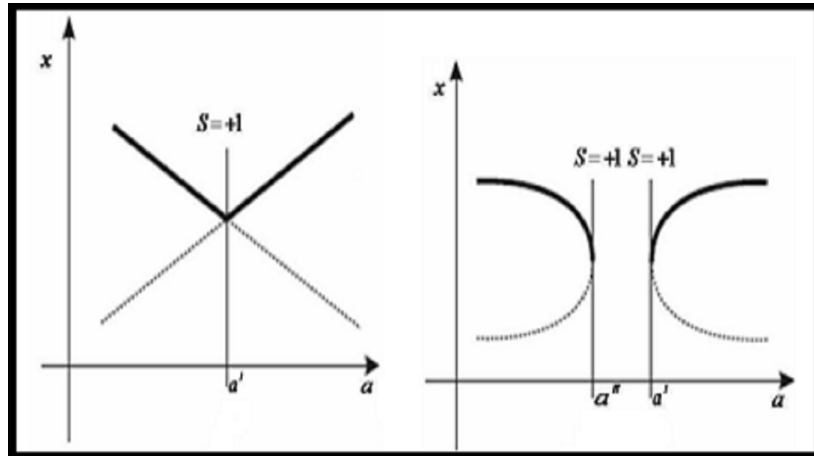


FIGURE 1.5 – Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche, et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) : stable, (...) : instable.

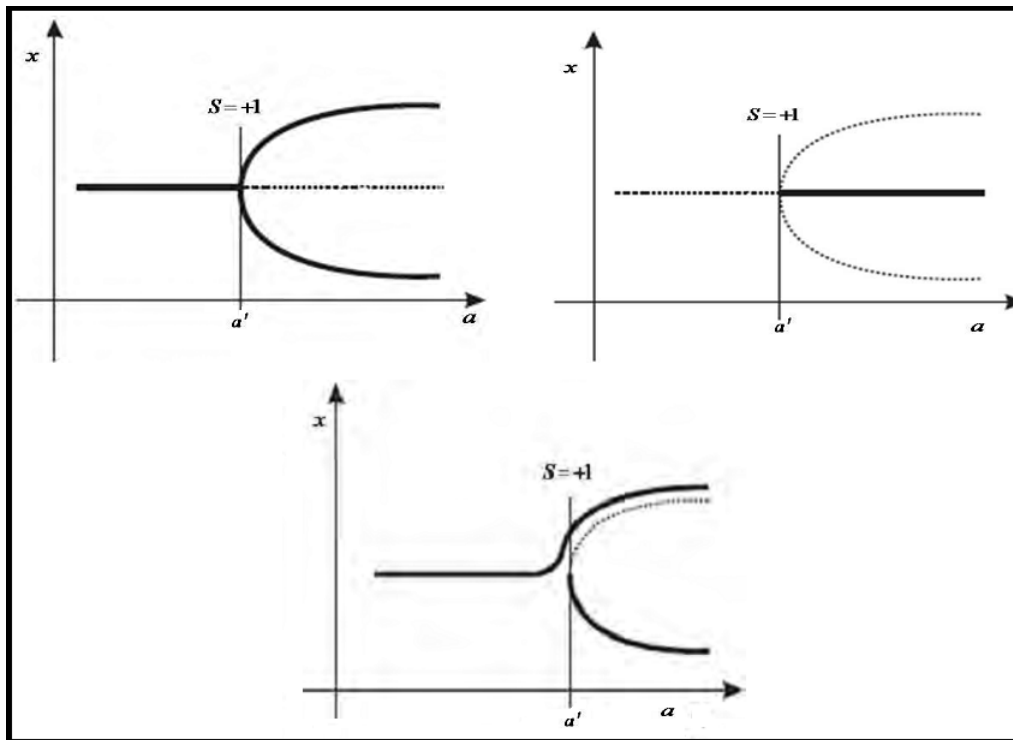


FIGURE 1.6 – Bifurcation fourche supercritique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la supercritique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (...) : instable.

1.4.2.2 La bifurcation flip (doublement de période).

Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type nœud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à (-1) , et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp cycle d'ordre k) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{cases} N_s^k(\text{resp. } N_i^k) \xleftrightarrow{S=-1} N_i^k(\text{resp. } N_s^k) + N_s^{2k}(\text{resp. } N_i^{2k}) \\ C^k \xleftrightarrow{S=-1} N_s^k(\text{resp. } N_s^k) + C^{2k} \end{cases} \quad (1.12)$$

N_s^{2k} signifie cycle nœud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} cycle nœud d'ordre $2k$ instable, C^{2k} cycle col d'ordre $2k$. Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées λ_k^j .

1.4.2.3 La bifurcation de Neïmark-Hopf

Un point fixe (resp cycles d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_{1,2} = \rho e^{\pm i\varphi}$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma :

$$F_s^k(\text{resp. } F_i^k) \xleftrightarrow{\rho=1} F_i^k(\text{resp. } F_s^k) + C.F.I_s^k(\text{resp. } C.F.I_i^k) \quad (1.13)$$

où F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycles foyer d'ordre k instable, C.F.Is correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k stables (attractives), C.F.Ii correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k instables (répulsives). Ces courbes fermées invariantes s'échangent cycliquement par k applications successives de T . Les valeurs du paramètre λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées Γ_k^j .

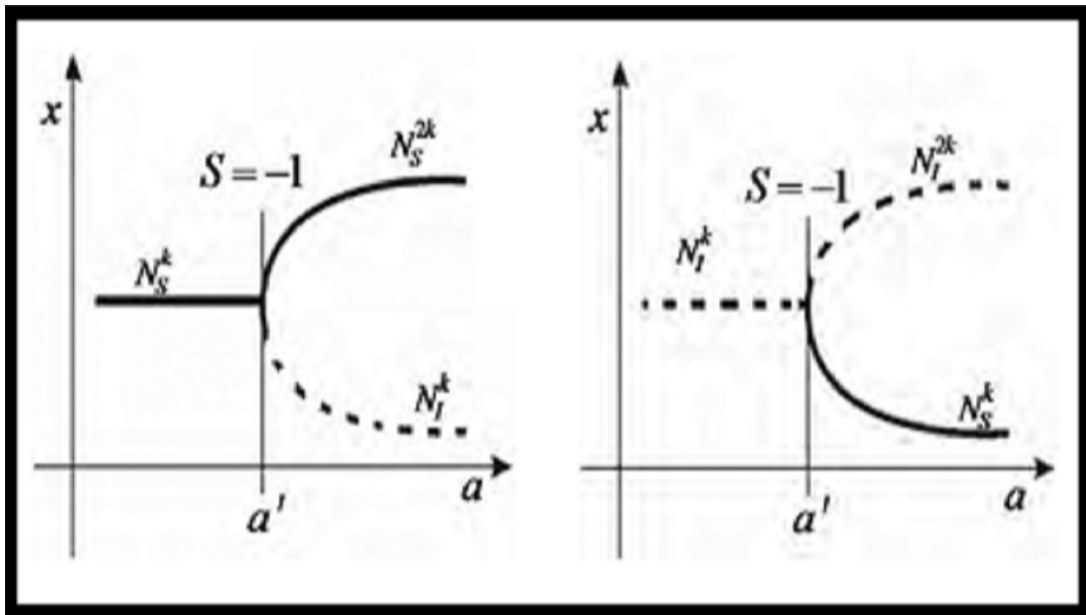


FIGURE 1.7 – Bifurcation flip ou doublement de période supercritique (à gauche), sous critique (à droite).

1.5 Bifurcation concernant les bassins d'attractions

Dans ce paragraphe voir ([2], [4]) on décrit.

les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

1.5.1 La bifurcation de contact de type 1

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin \mathcal{F} entre en contact avec LC a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de l'intersection entre le bassin d'attraction \mathcal{D} et LC est formée de segments non connexe :

- bassin connexe \rightarrow bassin non connexe
- bassin non connexe \rightarrow bassin connexe
- bassin simplement connexe \rightarrow bassin multiple-ment connexe

1.5.2 La bifurcation de contact de type 2

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière d'un aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat après la bifurcation l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leur point limite et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation.

Ces points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

1.6 Structure de bifurcation Boîtes-emboîtées

La structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" a été mise en évidence en 1975, cette structure est un autre type d'organisation fractal pour l'ensemble de bifurcation dans le plan paramétrique d'un système dynamique donné. Rappelons que le terme bifurcation désigne des changements qualitatifs du système sous l'effet des variations des paramètres. Ici le terme fractal indique que les boîtes sont autosimilaires c'est à dire que l'ensemble est semblable aux parties (boîtes) et ceci reste vrai même quand ces parties sont infinitésimales. Cette structure fractale donne une route vers le chaos pour un grand nombre de systèmes dynamiques.

La cascade de Merberg ou cascade de doublement de période constitue une partie de la structure de bifurcation "boîtes-emboîtée" les détails concernant cette structure peuvent être trouvés dans Mira et Gumowski [8,9].

Appelons W l'intervalle $[\lambda_{(1)0}, \lambda_1^*]$ l'axe paramétrique contenant tous les structures de bifurcation "boîtes-emboîtées". A l'intérieur de cette boîte Ω_1 on distingue deux sous intervalles (boîtes) sur l'axe paramétrique notés ω_1 et Δ_1 . En général, l'indice k utilisé désigne les boîtes ω_k et Δ_k qui forment la boîte ω_k , cette dernière traduit la même organisation des bifurcations que la boîte Ω_1 mais par rapporta la transformations T^k . La Figure(8) donne une représentation de la disposition de ces boîtes. Dans [9] une structure de bifurcation "boîtes-emboîtées" de type cubique a été décrite pour la transformation définie par :

$$X_{n+1} = -X_n^3 + \mu X^2 + \lambda X^n \tag{1.14}$$

Ce type de structure constitue une propriété caractéristique des endomorphismes à une dimension défini par une fonction à deux extrema, vérifiant des conditions de régularités suffisantes pour assurer l'existence d'un attracteur au voisinage de chaque extremum.

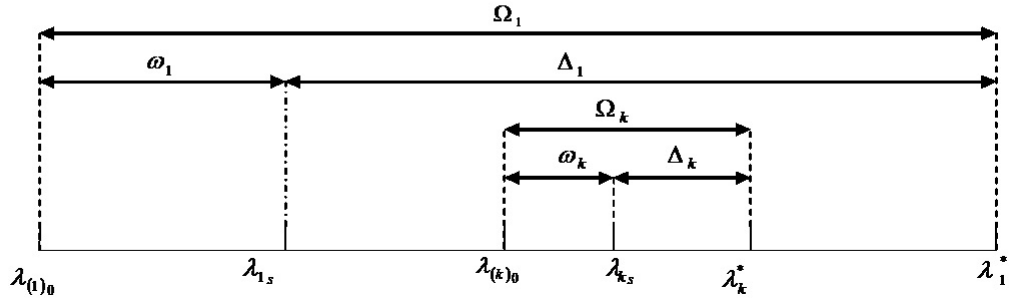


FIGURE 1.8 – Structure de bifurcation boites emboîtées.

1.7 Structure feuilletée d'un plan paramétrique

L'étude de la structure de bifurcation de (1.3) dans le plan de paramètres $\gamma^* = (\lambda_1, \lambda_2)$ montre que pour un point de ce plan, il peut exister plusieurs cycles d'ordre et de stabilité différents. Cette remarque induit le caractère feuilleté du plan des paramètres. Chaque feuillet est alors associé à un cycle bien défini par son ordre k , l'ordre d'échange de ses points j , et les valeurs propres de la transformation linéaire associée S_1 et S_2 , les feuillets pouvant se joindre en des points ou courbes particuliers. Soit $|z|$ une norme qualitative associée à un cycle, l'espace $(|z|, \lambda_1, \lambda_2)$ donne une représentation tridimensionnelle qualitative de la structure de ces feuillets. Les courbes $\gamma_{(k)0}^j$ désignent les courbes correspondant à une bifurcation fold. Elles sont la jonction de deux feuillets, l'un lié au cycle né stable, l'autre lié au cycle né instable.

Des communications plus complexes entre feuillets peuvent apparaître par des singularités de codimension deux comme les points cuspidaux.

1.7.0.1 Zone de communication entre feuillets

Des zones de communication entre feuillets du plan des paramètres peuvent apparaître [3, 10]. Ces zones sont caractérisées par l'existence d'un point cuspidal C_k^j sur une courbe de bifurcation de type fold associée à des courbes de bifurcation de type flip. Il existe trois schémas distincts d'association de la courbe fold avec courbes flip qui correspondent à trois zones de communication.

1.7.0.2 Zone échangeur

Dans le plan de paramètres (λ_1, λ_2) , une zone échangeur met en jeu une courbe de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ formant un point cuspidal C_k^j , des courbes de types flip $\gamma_{(k)}^j, \gamma_{(k)}^{j'}, \gamma_{(k)}^I$ et soit une courbe

de bifurcation fold $\gamma_{(k)0}^I$, soit une courbe de bifurcation flip $\gamma_{k/2}^I$, donnant naissance à un cycle d'ordre double (k, l) à partir d'un cycle $(k/2, l)$ Figures (9) (a)(b). Ces zones échangeurs sont respectivement désignées par $ZEK[l_0, j]$, $ZEK[l, j]$.

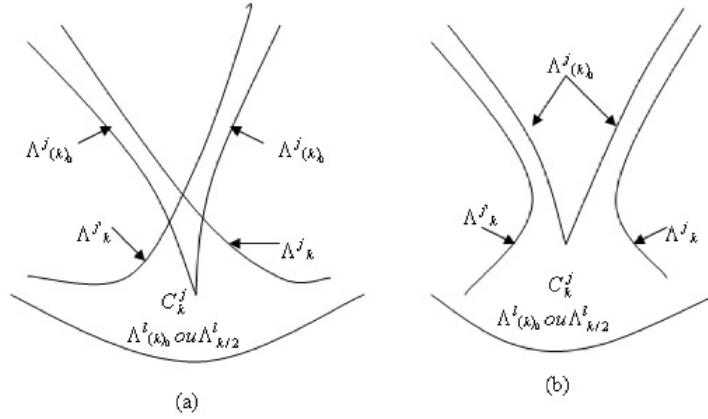


FIGURE 1.9 – Représentation d'une zone échangeur dans le plan paramétrique.

$$(\lambda_1, \lambda_2)$$

1.7.0.3 Zone col

Cette zone met en jeu deux courbes de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ et $\gamma_{(k)0}^{j'}$ et deux courbes flip γ_k^j et $\gamma_k^{j'}$ voir Figure 10.

Le principe de cette communication est que le cycle col (k, j) , $(S > 1)$ qui naît au cours de la bifurcation $\gamma_{(k)0}^{j'}$, $(S = +1)$ est le cycle de base qui définit aussi la courbe de bifurcation $\gamma_{(k)0}^j$ présentant un point cuspidal $C_k^{j'}$ dans le plan des paramètres. La zone col est désignée par le formalisme $ZCK[j, j']$.

1.7.0.4 Zone source

Cette zone met en jeu sept courbes de bifurcation :

- la courbe de type fold $\gamma_{(k)0}^j$ présentant un point cuspidal C_k^j ,
- la courbe de type flip γ_k^j formant une boucle qui entoure le point cuspidal,

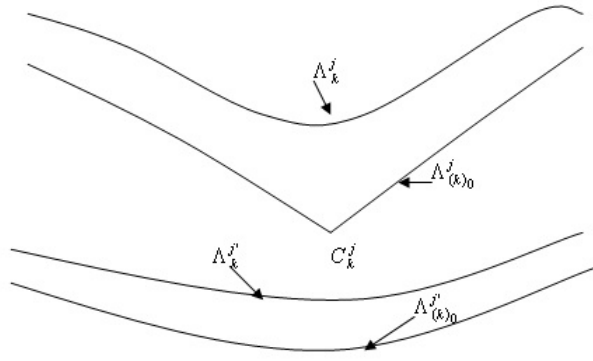


FIGURE 1.10 – Représentation d'une zone col dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2) .

- la courbe de type flip γ_k^I située sur le même feuillet que γ_k^j ,
- les deux courbes de type fold $\gamma_{(2k)0}^m$ et $\gamma_{(2k')0}^{m'}$ se terminant sur γ_k^j par les deux points C_{2k} et $C_{2k'}$,
- les deux courbes de type flip γ_{2k}^m et $\gamma_{2k'}^{m'}$, chacune d'elles résultant d'un doublement d'ordre d'une branche de γ_k^j et venant aussi des cycles $(2k, m)$ et $(2k, m')$ générés par les deux courbes fold précédentes. Cette zone est désignée par le formalisme $ZSK[l, j, (m, m')]$.

Ces différentes zones de communications correspondent, lorsqu'elles sont associées à des cycles stables, à des zones de multistabilité dans l'espace des paramètres. Plusieurs études ont mis en évidence plusieurs scénarios concernant les transitions d'une zone source ou d'une zone col avec une zone échangeur lors de la variation d'un troisième paramètre.

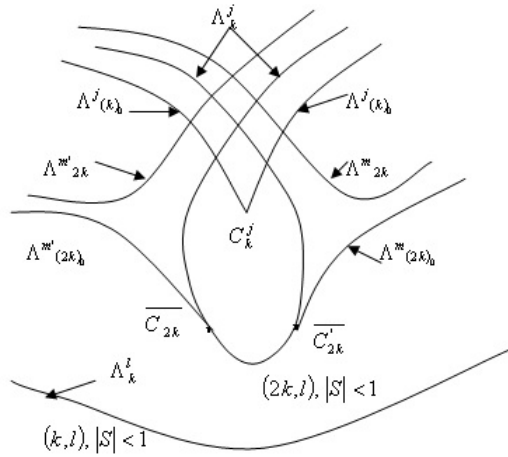


FIGURE 1.11 – Représentation d'une zone source dans le plan paramétrique (λ_1, λ_2)

1.8 Plan de phase d'une transformation non inversible

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d'une transformation ponctuelle non inversible de type (3.2) pour des valeurs de paramètres fixés.

les varétés critiques

Dans le plan de phase, la non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence des singularités appelées lignes critiques (LC_k). Ce type de singularité, introduit pour la première fois par Mira en 1964. Les lignes critiques interviennent dans la détermination d'aire absorbante et d'aire chaotique, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

Définition 1.6 : En dimension un, un point critique de rang $k + 1$ est le conséquent de rang k d'un extremum de la courbe $Y = h_k(X)$ où h_k est la fonction définissant T^k , il est noté C_k .

Définition 1.7 : En dimension deux une ligne critique notée LC ou LC_0 est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang 1 confondus. C'est la généralisation à la dimension deux de la notion de point critique défini en dimension un.

Une ligne critique LC_k de rang $k + 1$, est la ligne consécente de rang k de LC_0 , $k = 1, 2, ..$ La ligne critique LC_1 est l'antécédent de rang un de LC_0 , avec pour définition :

$$T(LC_{-1}) = LC \text{ et } LC_{-1} \subset T^{-1}(LC)$$

L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :

- a) Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.
- b) Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations.

Les lignes critiques partagent le plan de phase en zones Z_i ; chaque zone Z_i possède i antécédents de rang un.

1.8.1 Formulation mathématique des lignes critiques

Cas différentiable. Dans le cas où T est différentiable, une courbe LC_1 est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de T s'annule.

$$LC_1 = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\} \tag{1.15}$$

Cas non différentiable. Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_1 est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque T est continûment différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc :

$$LC_1 = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\}$$

1.9 Rôle des lignes critiques dans les bifurcations fondamentales des bassins

Dans ce paragraphe, nous allons décrire les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure d'un domaine D , située dans le plan de phase qu'on appellera bassin d'un attracteur A . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection de D avec une ligne critique LC d'une transformation non inversible.

On notera ∂D la frontière de D , D_0 le bassin immédiat de l'attracteur A et ∂D_0 sa frontière.

La proposition suivante est un rappel de certaines bifurcations de bassins d'attraction, dans le cas des applications du type (Z_0, Z_2) .

Proposition :

Soit T un endomorphisme de type (Z_0, Z_2) dépendant d'un paramètre λ . Si le nombre de composantes connexes de $D \cap LC$ change quand λ traverse une valeur de bifurcation λ_b , alors le bassin d'attraction D peut subir une bifurcation de bassins. Parmi les types de ces bifurcations suivantes :

- (a) bassin connexe \leftrightarrow bassin non connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)
- (b) bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiplement connexe (quand le nombre de composantes connexes de $D_0 \cap LC$ change)
- (c) augmentation ou diminution du nombre d'îlots de D , ou nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.
- (d) augmentation ou diminution du nombre de lacs dans D , ou nouvelle séquence arborescente de lacs.
- (e) transition lacs \leftrightarrow baie.
- (f) transition frontière externe faiblement fractale \leftrightarrow frontière externe fortement fractale.

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différente, la frontière du bassin d'attraction ∂D et la ligne critique LC .

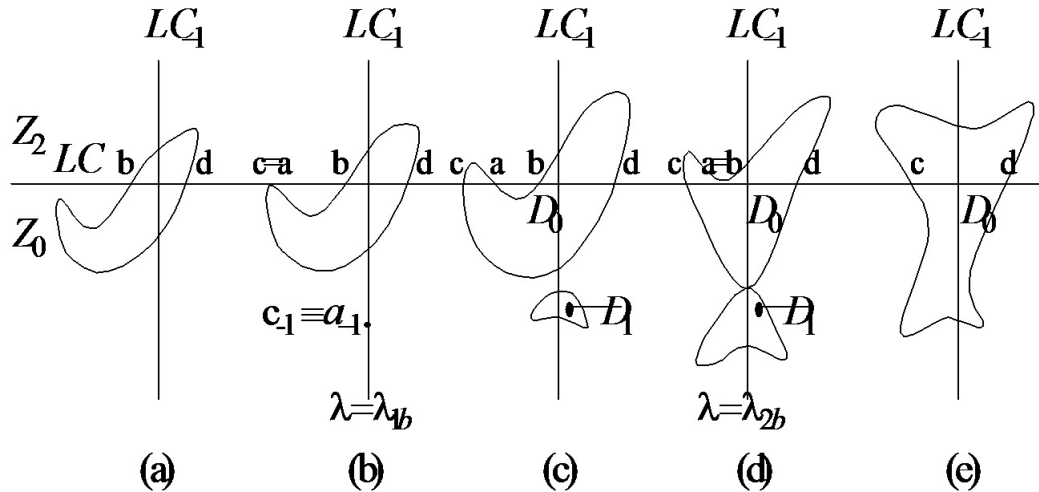


FIGURE 1.12 – Bifurcation d'un domaine D_0 connexe \leftrightarrow non connexe.

La partie (a) de cette proposition est illustrée par la Figure (1.12), sur laquelle on voit deux bifurcations possibles. La première bifurcation $\lambda = \lambda_{1b}$, correspond à un contact entre

∂D_0 et LC au point $a \equiv c.\{T^{-1}(a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, est une séquence arborescente de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N îlots. Autrement dit, le bassin étant connexe pour $\lambda < \lambda_{1b}$, devient non connexe pour $\lambda > \lambda_{1b}$. La seconde bifurcation $\lambda = \lambda_{2b}$, correspond à un contact tangentiel entre D_0 et LC au point $a \equiv b$, donnant lieu à un contact non transverse, mais aussi non tangentiel entre ∂D_0 et la frontière ∂D_1 de l'îlot D_1 . Après cette dernière bifurcation D redevient connexe.

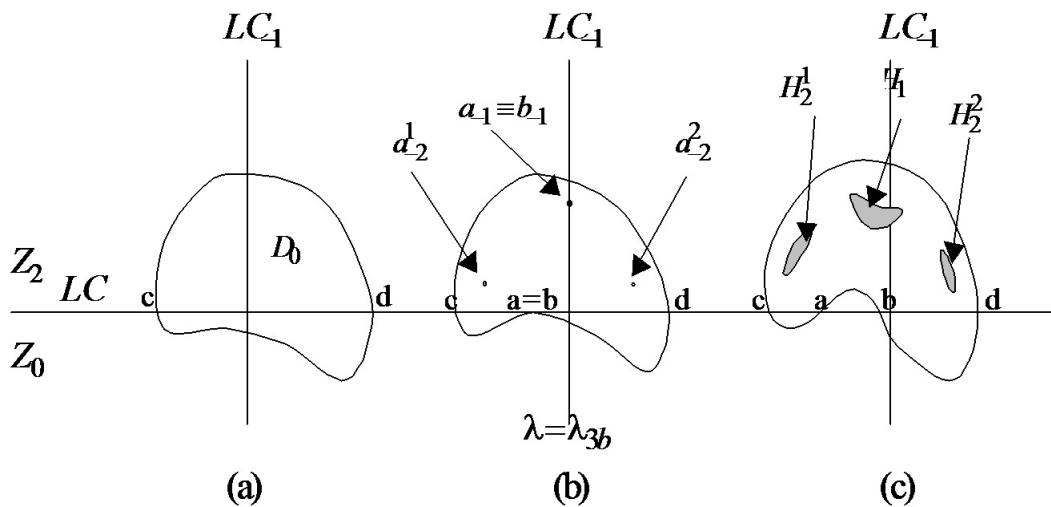


FIGURE 1.13 – Bifurcation d'un bassin simplement connexe \leftrightarrow bassin multiples connexe.

La partie (b) de cette proposition, est illustrée par la Figure (1.13), sur laquelle on voit une bifurcation qui transforme un bassin simplement connexe en un bassin multiplement connexe. En effet, à la valeur $\lambda = \lambda_{3b}$ a lieu un contact entre ∂D_0 et LC au point $a \equiv b$. Les antécédents de tout rang $T^{-n}(a)$ du point a , forment une séquence arborescent de N points, qui sont les germes d'une séquence arborescente de N lacs.

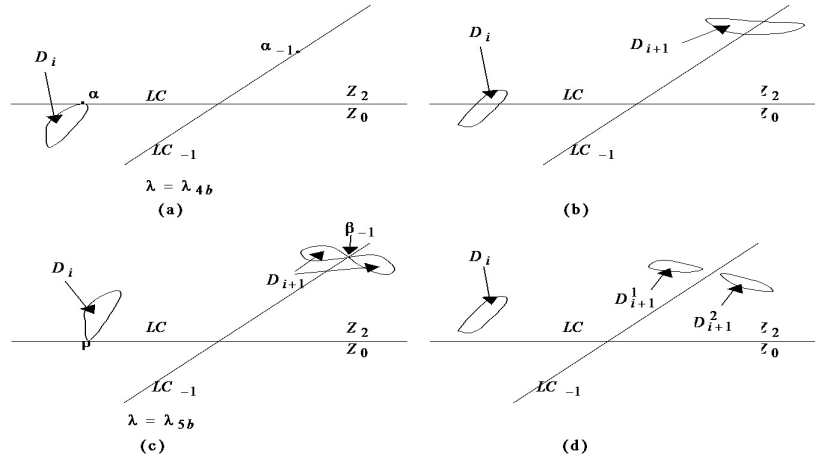


FIGURE 1.14 – Bifurcations d'un changement du nombre d'îlots.

La partie (c) est illustrée par la Figure (1.14), sur laquelle on peut voir deux bifurcations possibles, qui entraînent un changement du nombre d'îlots. La première bifurcation a lieu à la valeur $\lambda = \lambda_{4b}$ (Fig 1.14a) et qui correspond à un contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\alpha = D_i \cap LC$. Avant la bifurcation, $\lambda < \lambda_{4b}$, l'îlot D_i était à l'intérieur de la région $Z_0(D_i \cap \bar{Z}_2 = 0)$. A la bifurcation, les antécédents de tout rang $T_{-n}(\alpha)$ de $\alpha(T_{-n}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1})$ constituent une séquence arborescente de points, qui génèrent après la bifurcation une séquence arborescente d'îlots $D_{i+n}, D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq 0$. En continuant à faire varier le paramètre λ de manière continue, l'îlot D_i progresse dans la région Z_2 (Fig 1.14b). La seconde valeur de bifurcation $\lambda = \lambda_{5b}$ (Fig 1.14c), correspond à un nouveau contact tangentiel entre LC et l'îlot D_i au point $\beta = D_i \cap LC(D_i \subset \bar{Z}_2)$.

Ceci implique que le point $\beta_{-1} = T^{-1}(\beta) = D_{i+1} \cap LC_{-1}$ est un point d'intersection limite entre LC_{-1} et D_{i+1} , avant que ce dernier se divise en deux îlots $D_{i+1}^1 \subset R_1$ et $D_{i+1}^2 \subset R_2$, lorsque la valeur de λ dépasse la seconde valeur de bifurcation (Fig 1.14d). La partie (d) est analogue à la partie (c), en substituant dans le raisonnement de la partie (c) les îlots par des lacs d'un bassin multiplement connexe.

CHAPITRE 2

CHAOS, ATTRACTEUR ÉTRANGE ET LES FRACTALES

Depuis 1975 , les comportements complexes des systèmes dynamiques, connus sous le nom de "Chaos", "attracteurs chaotiques, sont l'objet d'un nombre croissant d'études. Le fait qu'on les rencontre dans nombre de processus des Sciences de la vie, de la cinétique chimique, de la physique .Il n'existe pas de définition précise du chaos. Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles limites, ce sont les attracteurs. Plusieurs définitions ont été proposées pour ce type de singularités [26],[22] par Milnor [21] et celle donnée dans la référence [20].

2.1 Le chaos

Le chaos est un phénomène typique des systèmes dynamiques non-linéaires, ce phénomène est très irrégulier sur une période ou dont la période est trop grande . Pour être mise en évidence le chaos en globe divers comportements non périodiques. Un tel comportement est caractérisé par :

- Existence des cycles attractifs d'ordre infini.
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini.

Les mouvements chaotiques sont généralement associés à l'existence d'une infinité de cycles instables, qui inâuencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

2.1.1 Quelques définitions du chaos

Chaos au sens de Li-Yorke :

Une application continue $f : I \rightarrow I$ où I est l'intervalle unitaire ($I = [0, 1]$), est chaotique au sens de Li-York s'il y a un ensemble indénombrable S tel que les trajectoire de deux points distincts x, y dans S sont proximaux et non asymptotique, ie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup d(f^n(x), f^n(y)) > 0$.

Chaos au sens de Devaney :

Soit V un ensemble. Une application continue $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si :

- f est topologiquement transitif : pour toute paire d'ensembles ouverts non vides U, W il existe un $K > 0$ tel que $f^K(U) \cap W \neq \emptyset$.
- Les points périodiques de f sont denses dans V .
- f possède une dépendance sensible aux conditions initiales : il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in V$ et tout voisinage $v(x)$, ils existent un $y \in v(x)$ et un $n \geq 0$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

2.2 Système dynamique chaotique

Un système dynamique chaotique est un système dynamique non linéaire déterministe dissipatif, sensible aux conditions initiales et admet un attracteur étrange, ce dernier est de volume nul et de dimension fractale. Un système dissipatif est caractérisé par une contraction continue en temps du volume de l'espace des phases. Le mouvement est généralement régi par un système d'équation différentielles ordinaires :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu)$$

Dans un système dynamique chaotique il y'a des outils :

- (i) Qualitatifs : le section de pointcarré, le calcul de la divergence, le portrait de phase .
- (ii) Quantitatifs : la dimension fractale, l'exposant de Lyapunov .

2.2.1 Caractéristiques du chaos

Cependant, le chaos est défini [11] généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

2.2 Système dynamique chaotique

- Non-linéarité : l'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.

- Le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

- La sensibilité : la sensibilité aux conditions initiales est un phénomène mathématique. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

- L'imprévisibilité : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

- L'irrégularité : l'ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables. Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques, le comportement chaotique peut être observé dans de nombreux systèmes naturels, comme les conditions météorologiques et le climat. Ce comportement peut être étudié par l'analyse d'un modèle mathématique chaotique, ou par des techniques d'analyse telles que des parcelles de récurrence et de section de Poincaré.

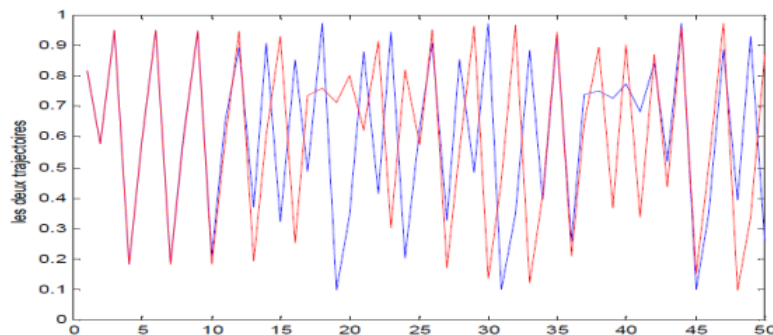


FIGURE 2.1 – La sensibilité aux conditions initiales.

2.2.2 Détection du chaos

Pour savoir c'est un système non linéaire est ou non chaotique, il existe plusieurs méthodes. Elles ne sont pas généralement très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On a choisi de mettre en oeuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui, d'ailleurs sont complémentaires : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov [1].

2.3 L'attracteur

Un attracteur est la limite asymptotique des solutions partant de toute condition initiale située dans un bassin d'attraction qui est un domaine de volume non nul.

Lorsque les coordonnées, dans l'espace des phases, d'un système dynamique sont comprises au cours du temps dans un domaine restreint de l'espace entier (i.e. aucune coordonnée ne diverge)[1].

2.3.1 Les différents type d'attracteur d'un système dynamique

Le point fixe :

Il caractérise simplement un système atteignant un état stationnaire (par exemple : on laisse balancer un pendule au bout d'une ficelle).

Le cycle limite :

Il caractérise un système atteignant un état répétitif. Plus explicitement, prenons un cerceau qu'un enfant ferait tourner infiniment autour de sa taille, lorsqu'il le lance le cerceau a une trajectoire imparfaite, mais il prend de la vitesse et au bout d'un moment, sa trajectoire va se stabiliser et former des cercles parfaits, il aura atteint son état répétitif.

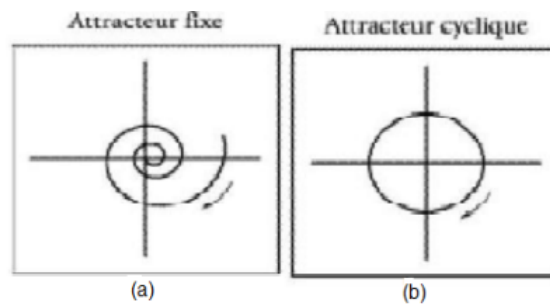


FIGURE 2.2 – L'attracteur fixe obtenu par modélisation d'un pendule simple suspendu à une ficelle et avec les forces de frottements (a). L'attracteur circulaire qui peut être obtenu par le lancer d'une balle attachée à un socle sans forces de frottements (dans le vide) (b)[1]

Le tore :

Est un attracteur représentant le mouvement résultant de deux ou plusieurs scillations indépendantes que l'on appelle parfois mouvement quasi périodique.

2.3.2 L'attracteur étrange

La notion d'attracteur étrange signifie que la nature produit des horloges qui ne sont pas périodiques. Loin de l'équilibre, les systèmes dynamiques dissipatifs sont capables de produire des horloges, c'est-à-dire des rythmes, qui ne sont pas strictement périodiques.

L'attracteur étrange signifie que le retour ne provient pas d'un passage à l'équilibre .

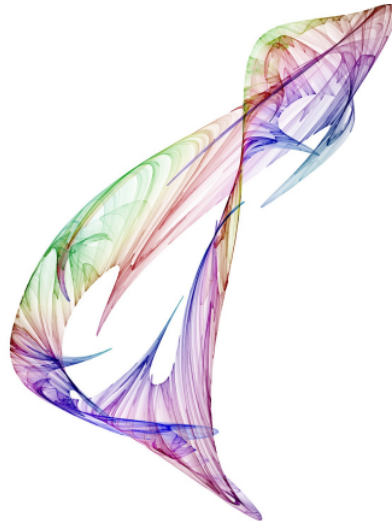


FIGURE 2.3 – Attracteur étranges.

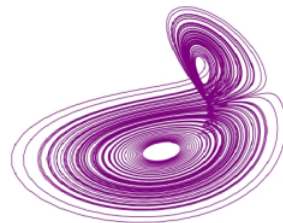


FIGURE 2.4 – L'attracteur du système de Lorenz appelé aussi le papillon de Lorenz. C'est le plus connu et le premier des attracteurs étudiés, il en existe beaucoup d'autre aux formes très étranges.

2.3.3 Attracteur chaotique

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de points de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène "sensibilité aux conditions initiales". Généralement, un attracteur chaotique est un fractal. Sa dimension est fractale, est alors non entière.

2.3.4 Bassin d'attraction

Définition 2.1 :

Le bassin d'attraction D d'un attracteur A (point fixe, cycle d'ordre k ou attracteur chaotique) est l'ensemble ouvert des conditions initiales x_0 dont les itérés successifs vont converger vers un attracteur $T^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$.

Propriété 2.1 :

Le bassin d'attraction D est invariant par l'itération inverse T^{-1} , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(D) = D, T(D) \subseteq D.$$

Lorsque la transformation T est inversible on a $T(D) = D$.

Définition 2.2 :

La frontière de D est notée F (ou δD). Elle est définie par :

$$F = \overline{D} \cap \overline{C(D)} \setminus D \subset C(D);$$

Où $C(D)$ représente l'ensemble complémentaire de D et \overline{D} (resp. $\overline{C(D)}$) représente l'adhérence de D (resp. $C(D)$).

Propriété 2.2 :

La relation $T^{-1}(F) = F$ implique que F doit contenir l'ensemble des antécédents de chacun de ces cycles, c'est à dire que F doit contenir l'ensemble stable W^s de tout cycle de T appartenant à F .

La relation $T(F) \subseteq F$ signifie que le trajectoire image de chaque point de F appartient à F .

2.3.5 Exposant de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, parce que la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide, c'est pourquoi on essaye d'estimer ou même de mesurer la vitesse de divergence ou convergence, Cette vitesse s'appelle l'exposant Lyapunov.

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et de permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions :

- Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- La somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

La valeur du plus grand exposant de Lyapunov quantifie le degré de chaos du système, mais le fait que les trois conditions énoncées ci dessus soient réunies ne suffit pas à conclure qu'un système est chaotique. Il demeure indispensable de confronter les résultats du calcul des exposants de Lyapunov avec ceux fournis par d'autres outils d'analyse nonlinéaire.

[27] On considère le système dynamique suivant :

$$x' = f(x)$$

où x est un vecteur de dimension n , et f une fonction vectorielle de dimension n continue et dérivable.

On appelle exposant de Lyapunov en x_0 suivant le vecteur w_0 la quantité :

$$\chi(x_0, w_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|w(t)\|$$

où $w(t)$ est solution de l'équation différentielle : $w' = J.w$
avec $J = \frac{\delta f}{\delta x}$ est le Jacobien de \mathbf{f} .

Cette équation, appelée équation variationnelle, est associée à l'équation différentielle décrivant l'évolution de x . Les vecteurs x_0 et w_0 sont les conditions initiales de ces équations différentielles.

On appelle généralement le vecteur w le vecteur tangent à la trajectoire. Il évolue dans un espace appelé espace tangent qui peut être identifié à \mathcal{R}^n .

Les exposants de Lyapunov permettent de savoir si la trajectoire passant par x_0 est chaotique ou pas. Par exemple sur la figure ci-dessous on peut voir qu'un dérivé des exposants de Lyapunov (Exposant de Lyapunov Rapide) se comporte de manière différente pour une trajectoire régulière (accroissement linéaire) et pour une trajectoire chaotique (accroissement exponentiel).

2.4 Les fractales

L'histoire des fractales ainsi que le nom fractale commence en 1975 avec Benoît Mandelbrot à partir de son essai Les Objets Fractals : forme, hasard et dimension , les premières figures fractales connues datent de la fin du XIX^{me} siècle. La première est dû à Karl Weierstrass qui l'inventa en 1872 pour montrer, par une construction explicite, qu'une fonction continue n'a

pas nécessairement de dérivée. Fractale est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les présente , c'est un objet géométrique "infiniment morcelé" dont des détails sont observables à une échelle arbitraire choisie.

Les figures fractales ont des dimensions fractionnaires.

Cette géométrie prendra de plus en plus d'importance en mathématiques au fur et à mesure que la nature exhibera ses structures fractales.

2.4.1 Propriétés d'une structure fractale

Une fractale idéale est un objet géométrique autosimilaire dont les principales propriétés sont données et justifiées par :

1. Auto-similarité : les structures fractales sont construites par une itération leur donnant la propriété d'auto-similitude, c'est-à-dire qu'une portion de la structure est à une homothétie près morphologiquement identique à l'ensemble. En d'autres termes, un zoom sur un détail de la structure donne l'apparence de l'ensemble de la structure.

2. Émergence de structures : des structures fines et détaillées apparaissent à toute l'échelle aussi petite soit elle .

3. Topologie fractale : les structures fractales sont localement et globalement irrégulières de sorte que la géométrie usuelle est inefficace pour les décrire.

2.4.2 Figures mathématiques fractales

Les courbes fractales sont les fractales les plus simples à représenter. Elles sont obtenues grâce à une construction géométrique. Ici encore, il en existe plusieurs sorte : celles obtenues grâce à un initiateur et à un générateur.

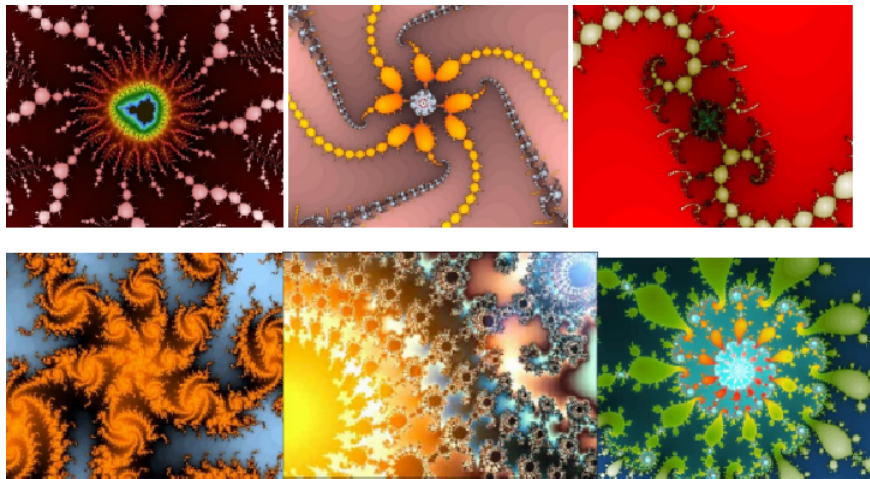


FIGURE 2.5 – Les formes fractales dans la nature.

2.4.3 Dimension fractale

En géométrie euclidienne, les figures ont une dimension entière : 0 pour un point, 1 pour une courbe, 2 pour une surface et 3 pour un volume. En revanche, la dimension pour une fractale peut prendre des valeurs qui ne sont pas des nombres entiers. Il est impossible de désigner un point pour une fractale puisqu'on ne peut pas mesurer la longueur d'une fractale. Les fractales ont une dimension qui leur est propre, appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch appelé communément dimension fractale.

Il est facile de calculer la mesure d'un objet auquel on a fait subir une contraction (ou une dilatation) de rapport k lorsque l'on travaille en dimension 1, 2 ou 3 la mesure initiale est respectivement multipliée par k , k^2 ou k^3 [12]. De même pour les fractales, la mesure initiale est multipliée par $n = k^d$ où d est la dimension fractale. Cette dernière diffère d'une dimension ordinaire : elle est un nombre réel quelconque. Une autre méthode pour déterminer la dimension fractale d'un objet est de compter le nombre moyen de motifs répétés contenus dans une sphère de rayon k centrée en un point donné de l'objet. Ce nombre de motifs est donné par $n = k^d$ et la dimension fractale est ainsi égale à :

$$d = \frac{\log(n)}{\log(k)}$$

Dans le cas de l'exemple le plus simple de structure fractale, la poussière de Cantor, lorsque l'on triple le rayon de la sphère, on double le nombre de morceaux obtenus. Ou encore, lorsqu'on lui fait subir une homothétie de rapport 3, sa mesure est multipliée par 2 et $d = \frac{\log(2)}{\log(3)} \simeq 0.63$, est une courbe fractale dont il est donné les premières étapes de sa construction par la figure suivante :



FIGURE 2.6 – Exemple de la dimension fractale.

2.4.4 Quelques exemples de courbes fractales

2.4.4.1 Courbe de Von Koch

C'est à cette courbe que correspondent les figures ci dessus. Pour construire cette courbe, on débute avec un initiateur puis on remplace chaque segment de la figure par le générateur. Une étape de la construction va être appelée "itération", puisqu'on répète la même opération un certain nombre de fois .

Cette courbe peut être dessinée en réalisant l'algorithme suivant :

Étape 1 : tracer un segment de longueur .

Étape 2 : au tiers milieu sur ce segment, construire vers l'extérieur, le triangle équilatéral de côté et supprimer la base de ce triangle.

Étape $k, k = 3, 4, \dots$: répéter indéfiniment cette construction sur chaque segment ainsi formés.

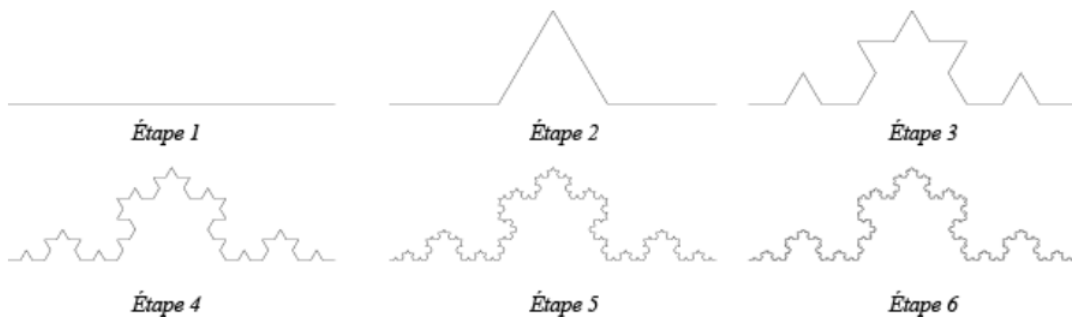


FIGURE 2.7 – Courbe de Von Koch.

Alors on a la dimension $d = \frac{\log(4)}{\log(3)} \simeq 1.26 > 1$.






	Une ligne droite.	
	Cette figure contient 4 fois la ligne droite précédente réduite d'un facteur 3.	$\begin{cases} n = 4 \\ k = 3 \end{cases}$
	Cette figure contient 4 fois la figure précédente réduite d'un facteur 3, ou bien, 16 fois la ligne droite de départ réduite d'un facteur 9.	$\begin{cases} n = 4 \\ k = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 16 \\ k = 9 \end{cases}$
	Ainsi de suite...	$\begin{cases} n = 64 \\ k = 27 \end{cases}$
	La longueur diverge vers l'infini... ...dans un espace fini !	

FIGURE 2.8 – les étapes de construction de la courbe de Von Koch [17].

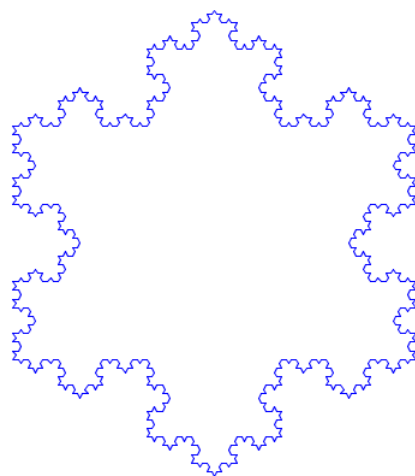


FIGURE 2.9 – Courbe de Von Koch.

2.4.4.2 Le triangle de Sierpinski

Cet ensemble fractal utilise comme figure de départ un triangle équilatéral. En utilisant les milieux de ses côtés, on définit ainsi un nouveau triangle central que l'on enlève au triangle initial permettant d'obtenir la figure après la première étape. Il suffit d'appliquer ce procédé aux trois triangles restants pour obtenir la figure suivante. En itérant ce procédé une infinité de fois, on obtient ainsi le triangle (ou fanion) de Sierpinski que l'on retrouve dans la manipulation «Coloriages fractals» de l'exposition qui utilise des propriétés du triangle de Pascal.

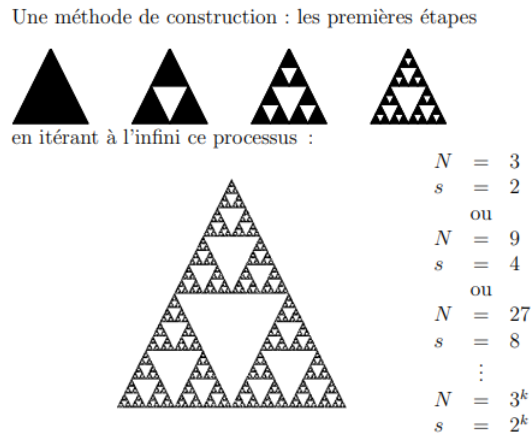


FIGURE 2.10 – les étapes de construction de le triangle de Sierpinski.

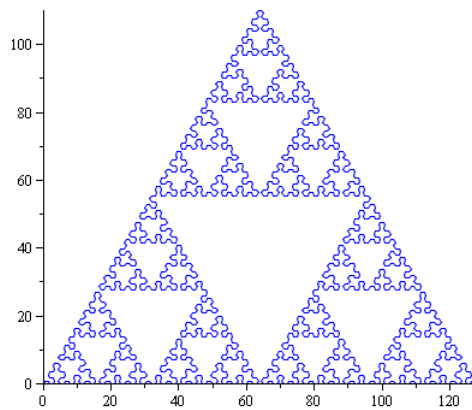


FIGURE 2.11 – Le triangle de Sierpinski.

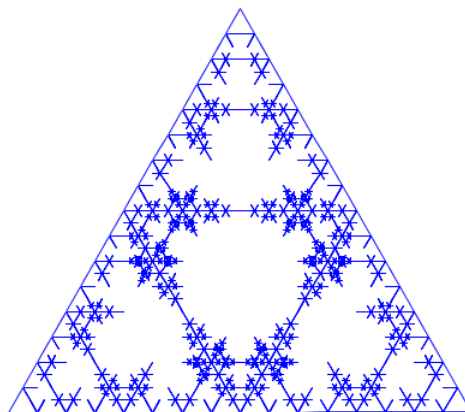


FIGURE 2.12 – Le triangle de Sierpinski.

2.4.4.3 L'ensemble de Mandelbrot

Il a été dessiné à l'ordinateur en 1979 par Benoit Mandelbrot, le père des fractales.

Cet ensemble, noté M , est l'ensemble des nombres complexes tels que les ensembles de Julia associés à ces nombres sont connectés (au sens mathématique du terme).

Une autre définition équivalente et plus facile à mettre en oeuvre est que M est l'ensemble des complexes tels que l'itération :

$$0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

reste bornée, c'est-à-dire que 0 est dans l'ensemble de Julia rempli correspondant à la valeur c .

On écrit une procédure, Mandelbrot qui, partant d'une valeur de c , l'itère tant que son module ne dépasse pas 2 (car alors on est sûr que le point va à l'infini) et donne le nombre d'itérations correspondant. Si le point n'est pas sorti avant la 15^{ème} itération, on admet qu'il fait partie de l'ensemble de Mandelbrot, et l'on trace l'ensemble des points pour lesquels $m = 15$:

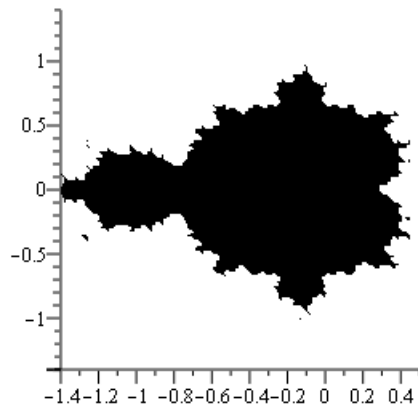


FIGURE 2.13 – Ensemble de Mendelbrot pour $m = 15$.

Ensemble de Mendelbrot est d'une incroyable complexité. Sa frontière présente des motifs tous différents correspondant aux ensembles de Julia dont il constitue en quelque sorte le catalogue. Sa description occupe des livres entiers.

D'autres figures sont illustrés en bas :

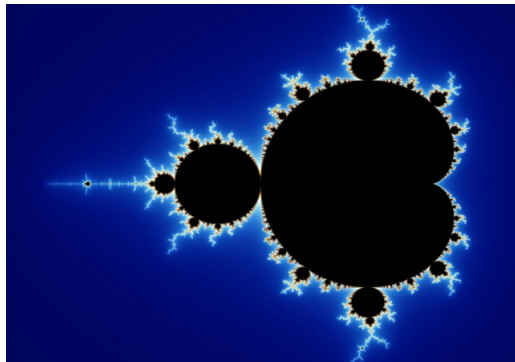


FIGURE 2.14 – L'ensemble de Mandelbrot.

2.4.4.4 Un ensemble de Julia

Les ensembles de Julia $J(f)$, décrits par Gaston Julia, sont des fractales, sous-ensembles du plan complexe associés au comportement dynamique d'une fonction holomorphe f [28].

Définition : On considère l'itération qui, au nombre complexe z , associe $z \rightarrow z^2 + c$ et c étant un complexe.

Si $c = 0$, $z \rightarrow z^2$, on a tous les nombres complexes situés à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 vont converger vers l'origine puisque $|z^2| = |z|^2 < |z|$ si celui-ci est < 1 , et tous les nombres complexes à l'extérieur vont tendre vers l'infini puisque le module de l'itéré augmente à chaque itération. L'ensemble des points à l'intérieur du cercle s'appelle l'ensemble de Julia rempli ou ensemble des prisonniers. Le cercle de rayon 1 forme frontière entre l'ensemble de Julia rempli et l'ensemble des points qui partent à l'infini. Cette frontière est l'ensemble de Julia. L'itéré d'un point du cercle se trouve sur le cercle puisque son module reste égal à 1. L'ensemble de Julia est invariant par l'itération.

Lorsque $c \neq 0$, on aura de même un domaine où les itérés partent à l'infini, et un domaine où les itérés restent bornés (ensemble de Julia rempli). La frontière entre les domaines constitue l'ensemble de Julia de l'itération et c'est presque toujours une fractale (généralisée).

L'itération repousse les points à proximité de la frontière, qui vont à l'infini ou se dirigent vers un attracteur. L'itération inverse va au contraire les attirer et l'ensemble de Julia sera l'attracteur de l'itération inverse.

Un nombre complexe w étant donné, les nombres complexes z vérifiant $w = z^2 + c$ sont donnés par

$$z = +\sqrt{w - c} \text{ et } z = -\sqrt{w - c}$$

On a donc deux antécédents et 2 itérations inverses

$$w \rightarrow +\sqrt{w - c} \text{ et } w \rightarrow -\sqrt{w - c}$$

qui ne sont pas linéaires, donc mènent à une fractale généralisée.

Partons d'un cercle, sur lequel on prend 720 points. On fait une procédure, qui prend un des deux antécédents au hasard. On applique la procédure aux points du cercle, 2, 4 et 10 fois. On voit apparaître l'ensemble de Julia, avec $c = -1$:

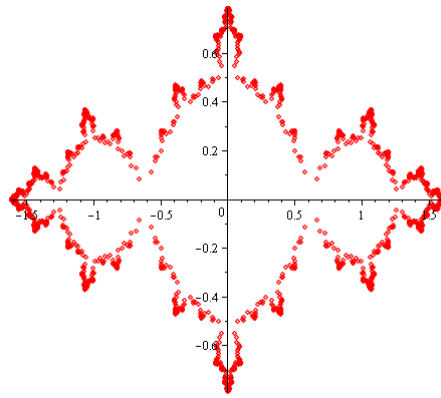


FIGURE 2.15 – Ensemble de Julia avec $c = -1$.

Ensemble de Julia pour $c = -0,5 + 0,5I$:

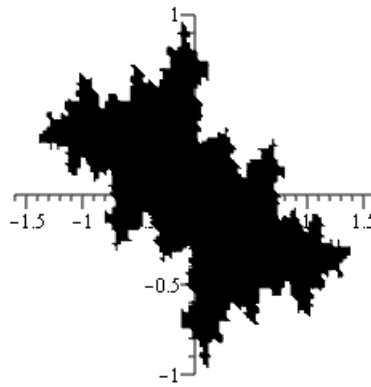


FIGURE 2.16 – Ensemble de Julia pour $c = -0,5 + 0,5I$.

En 1963, Lorenz a établi un modèle atmosphérique très simplifié qui possède "une forte sensibilité aux conditions initiales". Cette propriété explique le comportement "chaotique" des solutions du modèle. Les équations de Lorenz sont très simples en apparence, c'est un champ de vecteur dans \mathbb{R}^3 .

Numériquement on observe que les trajectoires sont attirées vers un ensemble fractal et une fois proche de cet ensemble, elles ont un comportement chaotique. Cet attracteur s'appelle "l'attracteur étrange de Lorenz". On étudie la dynamique dans ce chapitre.

3.1 Application de Lorenz

L'équation de Lorenz est une équation différentielle simple à trois dimensions, dont les variables sont :

- x : caractérise l'intensité du mouvement de convection
- y : caractérise le gradient horizontal de température
- z : caractérise le gradient vertical de température

Ainsi chaque point (x, y, z) de l'espace décrit les conditions dans lesquelles se situe une atmosphère donnée.

Elle fait intervenir trois paramètres :

— σ : nombre de Prandtl (qui vaut le rapport entre la quantité de mouvement et la quantité de chaleur).

— r : rapport entre le nombre de Rayleigh (qui caractérise le transfert de chaleur au sein d'un fluide) et le nombre de Rayleigh critique.

— b : taille typique du système.

On suppose que $\sigma > 0$, $r > 0$, $b > 0$ et $\sigma > b + 1$.

L'équation de Lorenz est alors donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = rx - y - xz \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2 Points fixes

Cherchons les points fixes de ce système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (r - 1 - z).x = 0 \\ x^2 = bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} y = x \\ r - 1 = z \\ x^2 = bz \end{cases}$$

Le deuxième point fixe obéit à :

$$\begin{cases} x^2 = b(r - 1) \\ y = x \\ z = r - 1 \end{cases}$$

Premier cas :

$r < 1$ Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Deuxième cas :

$r > 1$ il y a trois points d'équilibre :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix};$$

3.3 Stabilité des points fixes

On linéarise le système. On obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_x \\ \dot{\xi}_y \\ \dot{\xi}_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix}$$

Avec

$$A \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right] \text{ et } A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres sont données par l'équation caractéristique, qui est :

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \text{tr}(A) \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}(\text{tr}(A^2) - \text{tr}^2(A)) \cdot \lambda + \det(A).$$

Les composants nécessaires sont calculés pour être :

$$\det(A) = \sigma b(r - z - 1) - \sigma x(x + y),$$

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b),$$

$$\text{tr}(A^2) = 2\sigma(r - z) - 2x^2 + b^2 + 1 + \sigma^2.$$

La stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de A qui sont les solutions de l'équation :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Stabilité du point fixe P_0

Dans ce cas, la matrice A s'exprime :

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent on a :

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b) \text{ et } \det(A) = \sigma b(r - 1)$$

et

$$\text{tr}(A^2) = 2\sigma r + b^2 + 1 + \sigma^2.$$

d'où

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + \sigma(1 - r)\lambda + b(1 + \sigma) - \sigma b(r - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + b = 0 \text{ et } \lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r) = 0.$$

Le terme de droite est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = (1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r).$$

La nature des solutions du polynôme caractéristique dépend du signe de Δ :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 + \sigma)^2 > 4\sigma(1 - r),$$

$$\Leftrightarrow 1 - r < \frac{(1 + \sigma)^2}{4\sigma},$$

Ici, $\sigma = 10$ Par conséquent, le discriminant sera positif si et seulement si $r > -\frac{81}{40}$. C'est toujours le cas car $r > 0$. Nous avons donc les 3 racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b < 0 \\ \lambda_2 = \frac{-(1 + \sigma) + \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2} \\ \lambda_3 = \frac{-(1 + \sigma) - \sqrt{(1 + \sigma)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2} < 0 \end{cases}$$

On voit que λ_2 est négatif pour $0 < r < 1$ et positif pour $r > 1$. Par conséquent, le point fixe P_0 est stable pour $0 < r < 1$ et instable pour $r > 1$.

Stabilité du point fixe P_1 et P_2

La matrice jacobienne correspond a ces points s'écrit comme suit :

— Pour A_1 :

$$A_{(P_1)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

— Pour A_2 :

$$A_{(P_2)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a :

$$tr(A_1) = tr(A_2) = -(\sigma + 1 + b) \text{ et } \det(A_1) = \det(A_2) = -2\sigma b(r-1)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$\det(J - \lambda I) = P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1)$$

Le polynôme est d'ordre trois ,on peut le résoudre par les formules de Cardan.

Et selon les valeurs du paramètre r, ce polynôme peut avoir trois racines réelles négatives ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées .

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1 = 0$ si $r = 1$ donc on peut supposer que $|\lambda_1| \ll 1$ si $|r-1| \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_2^3 de l'équations.

$$\lambda_1 = -\frac{2b\sigma(r-1)}{b(\sigma+r)} < 0 \text{ pour } r > 1. \quad (3.2)$$

Les deux autres valeurs propres ne dépendent pas de r signifie que

$$\lambda_{2,3}(r) \approx \lambda_{2,3}(1) + \sigma(r-1).$$

Il suffit de déterminer leur valeur à $r = 1$

$$\lambda^2 - \lambda(\sigma + b + 1) - (\sigma b + b) = 0.$$

Alors

$$\Delta = (\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1).$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_2 = -\frac{(\sigma + b + 1) + \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0, \quad (3.3)$$

$$\lambda_3 = -\frac{(\sigma + b + 1) - \sqrt{(\sigma + b + 1)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0. \quad (3.4)$$

On fait de même avec A_2 et on trouve le même résultat (noeud stable) .

Donc les points A_1 et A_2 sont stables pour $|r - 1| \ll 1$.

A $r = 1$ on a donc une bifurcation de fourche super-critique.

On va maintenant montrer que les points fixes issus de la première bifurcation se déstabilisent à leur tour pour une valeur r_c par une bifurcation de Hopf.

Cette deuxième bifurcation est caractérisée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées pour les quelles la partie réelle change de signe à la bifurcation. On sait donc qu'il existe des solutions purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm iw$ quand r assume sa valeur critique r_c .

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation caractéristique (avec $\lambda = iw$ et $w \in \mathbb{R}$) on trouvera deux équations indépendantes permettant de déterminer w et la valeur de r_c .

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(\sigma + \lambda)((1 + \lambda)(b + \lambda) + b(r - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sigma + \lambda)(br + \lambda + \lambda b + \lambda^2) - \sigma(br - 2b - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sigma br - \sigma\lambda - \sigma\lambda b - \sigma\lambda^2 - \lambda br - \lambda^2 - \lambda^2 b - \lambda^3 - \sigma br + 2\sigma b + \sigma\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2(\sigma + 1 + b) - \lambda(\sigma b + br_c) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(iw)^3 - (iw)^2(\sigma + 1 + b) - iw(\sigma b + br_c) + 2\sigma b(1 - r_c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2(\sigma + 1 + b) - 2\sigma b(1 + r_c) = 0 \\ w^3 - w(\sigma b + br_c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w^2 = \frac{2\sigma b(r_c - 1)}{\sigma + 1 + b} \\ w^2 = \sigma b + br_c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_c = \frac{\sigma(\sigma + 3 + b)}{\sigma - b - 1} \\ w = \pm \sqrt{((\sigma b + b)r_c)} \end{cases}$$

Application numérique : $r_c = 24.74$ et $w = \pm 92.64$.

Il a une bifurcation de Hopf à $r_c = 24.74$, où les points fixes A_1 et A_2 qui étaient des foyers stables pour $r < r_c$ deviennent des foyers instables pour $r > r_c$ (et ils sont des centres pour $r = r_c$).

3.3.1 Calcul des exposants de Lyapunov du model de lorenz

soit le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z) = 10(y - x) \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = 28x - y - xz \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = xy - \frac{8}{3}z \end{cases} \quad (3.5)$$

Les exposants de Lyapunov pour une condition initiale x_0 choisie sont :

$$\lambda_1 \simeq 2.16, \lambda_2 \simeq 0.00, \lambda_3 \simeq 32.40$$

Les exposants de Lyapunov [11] permettent donc de quantifier la sensibilité aux conditions initiales **SCI** mais aussi de séparer les comportements instables ou chaotiques des comportements stables et prévisibles.

Type d'attracteurs	Exposant de Lyapunov
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \dots \geq \lambda_n$
K-Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_k = 0, 0 > \lambda_{k+1} \geq \lambda_{k+2} \geq \dots \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 > 0, \sum \lambda_i < 0$

FIGURE 3.1 – Type d'attracteurs d'après l'exposant de Lyapunov.

Si un exposant de Lyapunov est strictement positif, alors la **SCI** est très grande et le système peut être considéré comme chaotique. Par contre, s'ils sont tous négatifs ou égaux à zéro, on est en présence d'un phénomène stable ou périodique. Pour une application multidimensionnelle on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov dans le tableau ci dessus .

3.4 Application numérique

La méthode d'étude courante de ce système est de fixer les valeurs de b et de σ , respectivement à $\frac{8}{3}$ et 10, et de faire varier r .

3.4.1 Étudions le modèle de Lorenz pour $0 < r < 1$

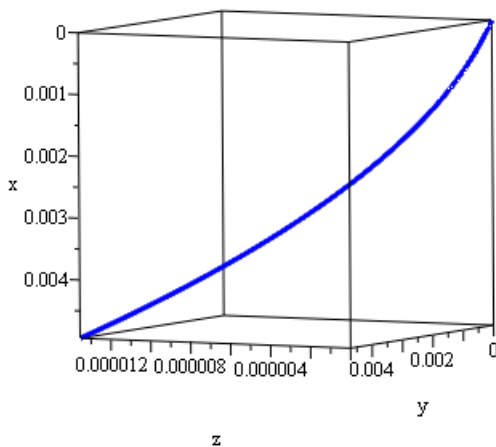


FIGURE 3.2 – Trajectoire pour $r = 0.5$

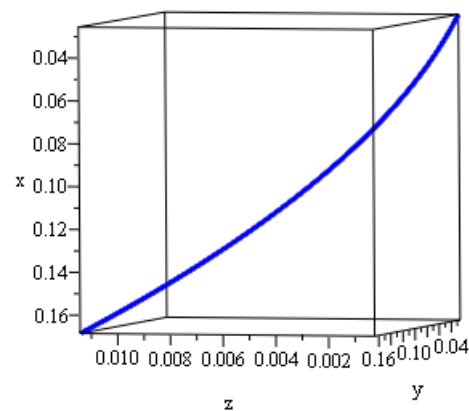


FIGURE 3.3 – Trajectoire pour $r = 0.9$

Pour $r = 0.5$ le système converge vers l'origine qui est un point fixe.

Nous commençons avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$:

Avec ces conditions initiales, les trois variables convergent vers le $(0, 0, 0)$. Pour cette valeur de r .

Avant de changer les conditions initiales, nous allons changer la valeur de r tout en restant dans le cas $0 < r < 1$ et voir ce qui se passe.

Le point $P_0 = (0, 0, 0)$ est un point fixe, il est invariant dans le temps. De plus, quelque soient leurs conditions initiales, les points convergent vers ce point fixe. C'est donc un point fixe stable et il est unique. De plus, les trajectoires font penser à un noeud. On aussi peut visualiser les trajectoires en trois dimensions obtenues avec des conditions initiales différentes.

3.4.2 Étudions le modèle de Lorenz pour $1 < r < 24$

Pour $r = 15$ deux nouveaux points fixes apparaissent formant deux bassins d'attraction.

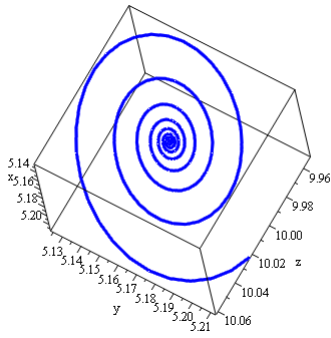


FIGURE 3.4 – Trajectoire pour $r=11$

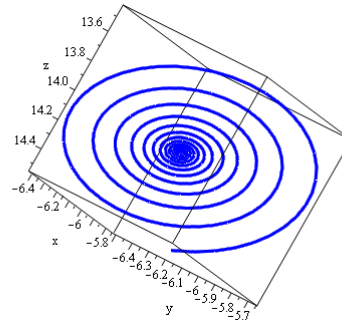


FIGURE 3.5 – Trajectoire pour $r=15$

Pour différentes conditions initiales, les trajectoires convergent vers deux valeurs de x différentes .

Il est important de remarquer que les trajectoires convergent vers les points fixes P_1 et P_2 en oscillant. Ceci est dû au fait que pour $r = 15$ les points fixes P_1 et P_2 sont des foyers stables. On le voit très bien en regardant les trajectoires en trois dimensions sur le deuxième graphe de la page suivante où les trajectoires (orbitent) autour des points fixes et s'en approchant.

Notons aussi que le système est déjà chaotique, il est très sensible aux conditions initiales, pour des conditions initiales très peu différentes, les trajectoires peuvent converger vers l'un et l'autre des point fixes .

Ci-dessus, nous avons tracé la projection des trajectoires sur le plan (x, y) Les deux foyers stables sont bien visibles. Nous verrons dans la partie analytique que pour des valeurs de r légèrement supérieures à 1 les points P_1 et P_2 sont des noeuds stables et qu'ils deviennent des foyers stables lorsque r augmente.

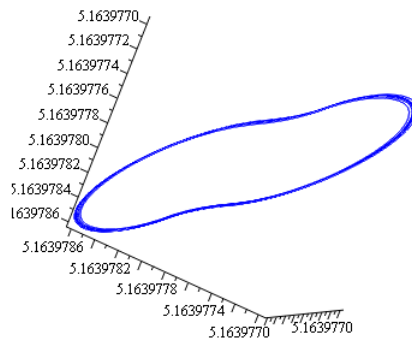


FIGURE 3.6 – Tracé la projection des trajectoires pour $r=11$.

3.4.3 Étudions le modèle de Lorenz pour $r \geq 24$

3.4 Application numérique

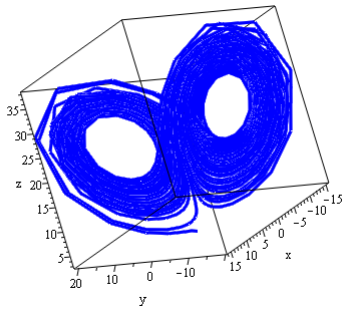


FIGURE 3.7 – Trajectoire pour $r=24$

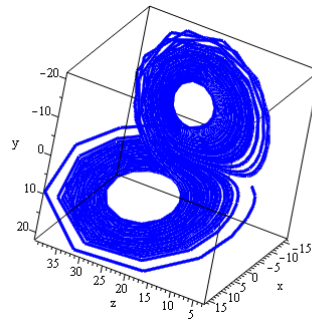


FIGURE 3.8 – Trajectoire pour $r=24.5$

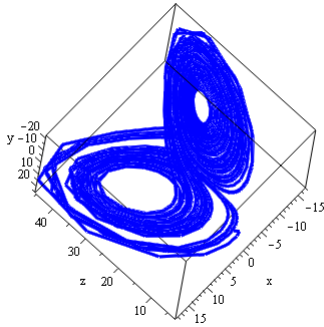


FIGURE 3.9 – Trajectoire pour $r=28$

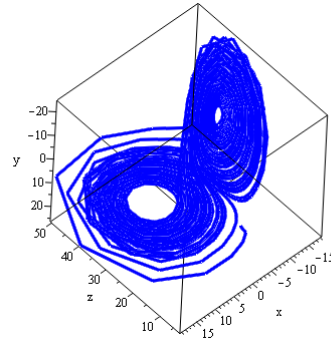


FIGURE 3.10 – Trajectoire pour $r=30$

Les points fixes P_1 et P_2 sont devenus des foyers instables. La trajectoire "saute" de l'orbite du point P_1 à celle du point P_2 aléatoirement. La sensibilité est telle qu'une variation infime de la trajectoire ferait "sauter" celle-ci sur l'autre point fixe alors que, si elle n'était pas modifiée elle continuerait à effectuer quelques orbites autour du même point fixe. Il n'est donc plus du tout possible de prévoir la trajectoire physiquement (dans la réalité), car comme dans le cas $1 < r < 24$ la trajectoire est très sensible aux conditions initiales. Dans le cas $1 < r < 24$ où nous ne pouvons pas prédire physiquement sur quel point fixe un point (dont nous connaissons les conditions initiales) allait converger. Par contre, si la trajectoire commençait à orbiter autour d'un point fixe nous savions qu'elle allait converger dessus. Ici ce n'est plus possible. Le système est complètement chaotique. Pour deux positions très proches.

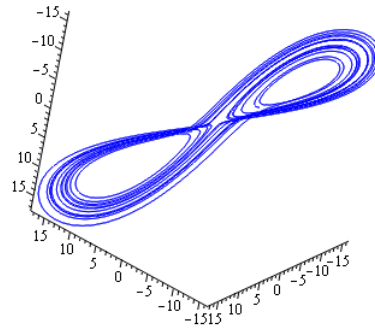


FIGURE 3.11 – Tracé la projection des trajectoires pour $r=28$.

Résumons quelques-unes de ces propriétés :

- $r \in [0, 1] \Rightarrow (0, 0, 0)$ point fixe attracteur.
- $r \in [1, 15] \Rightarrow 2$ point fixes attracteurs C^+ et C^- et l'origine est instable.
- $r \in [15, 24] \Rightarrow$ Chaos transitoire orbites chaotiques mais pas d'attracteur chaotique ; C^+ et C^- stable .
- $r \in [24, 24.5] \Rightarrow$ l'attracteur chaotique coexiste avec les 2 point fixes attracteurs .
- $r \in [24.5, +\infty] \Rightarrow$ Attracteur chaotique , les 2 point fixes sont instable .

3.5 Le type de chaos dans le système Lorenz

Une trajectoire chaotique ne passe pas, mathématiquement, deux fois par le même point car en ce cas, ce point rigoureusement commun aux deux trajectoires pourrait leur servir de condition initiale commune, et elles coïncideraient alors de $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$ elle ne montre non plus aucun des comportements cohérents que nous avons reliés plus haut à des attracteurs ponctuels ou cycliques. Dans le système de Lorenz, les trajectoires décrivent des spires situées dans deux plans et tournant autour de deux régions moyennes, sans jamais revenir sur elles-mêmes. les deux plans représentent deux types de situations atmosphériques, et la trajectoire saute sporadiquement de l'une à l'autre sans que l'on puisse prévoir le moment d'un saut. Si l'on part de deux situations initiales différentes mais proches, le comportement sera du même type, mais les sauts d'un plan à un autre se produiront à des moments différents. toute prédiction précise est donc exclue, on ne prévoit que un comportement statistique (pouvant être de deux natures : les deux lobes) et l'existence de basculements catastrophiques à des instants imprévisibles.

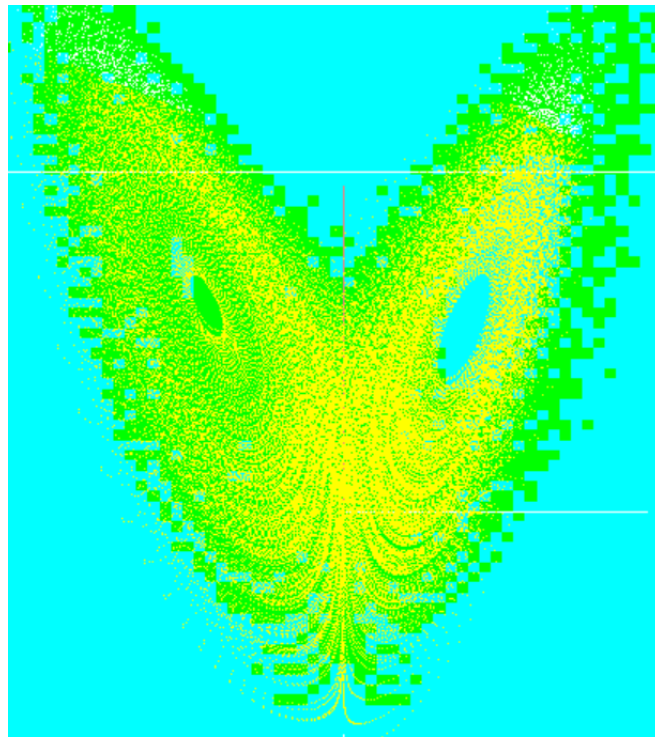


FIGURE 3.12 – Attracteur noeud papillon de Lorenz.

A la fin nous avons pu de trouver l'existence d'un attrateur étrange "l'attracteur de Lorenz" ou nommé aussi "attracteur noeud papillon", tracé numériquement pour $R < 24$ et son évolution pour d'autres valeurs.

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la théorie de chaos , cette dernière est actuellement en pleine expansion, constitue un domaine de recherches très prometteur. En effet, elle permet d'expliquer un grand nombre de notions qui semblaient auparavant trop complexes, comme les fractales, ou des phénomènes obscurs tels les attracteurs étranges.

De plus l'étude que nous avons présenté dans ce mémoire, concerne l'étude numérique d'une transformation de dimension trois de Lorenz, les équations du système sont données en fonction des paramètres de contrôle, des courbes et des plans de phases qui ont été tracé ont pour prouver l'existence de singularités donné analytiquement, une discussion exposé à propos l'existence des points d'équilibres points fixes, attracteur chaotique et chaos selon la variation du paramètre r . Parmi nos réalisations aussi, nous avons pu de tracer des courbes fractales et tracer l'attracteur étrange de Lorenz ou nommé aussi "attracteur noeud papillon", pour des valeurs du paramètres $r < 24$ et son évolution pour d'autres valeurs.

- [1] Abdellah, M. Chaos et Bifurcations dans les systèmes dynamiques en dimensions n ($n > 1$). Université Larbi Ben M'hidi Oum el-Bouaghi. Doctorat en Mathématiques. (2016/2017)
- [2] Arrowsmith D.K. "The Bogdanov Map : Bifurcation, mode Locking, and Chaos in Dissipative System", International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 3, , p. 803-842. (1993).
- [3] Ashwin P., Breakspear M., Anisotropic properties of riddled basins, Physica. Lett. A 280 ,139145.(2001).
- [4] Aziz-Alaoui H. "Bifurcation non classiques d'une classe de R^2 endomorphisme", thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.(1984).
- [5] Barugola A, Cathala J.C. et Mira C. "Annular Chaotic Areas" Nonlinear Analysis TM A. 10(11),1223 1236. (1986)
- [6] Belkhiri, S. Etude des exemples des systèmes dynamiques chaotique de dimension deux. universite larbi ben m'hidi-oum el bouaghi 2016 .
- [7] Bouchenine, H. Guermache, O. Etude de la dynamique et chaotique du système de Lorenz. Univer Abd Elhafid Boussouf -Mila. Master en mathématiques (2020/2021).
- [8] Carcasses, J P ." A new kind of parametric singularities and their use for the study of the bifurcation structure of an n-dimentional map" Nonlinear Analysis TM A, vol28, No5, p917 946.(1997).
- [9] Carcasses J. P, Taha A.K. ."Study of a two-dimensional endomorphism by use of the parametric singularities". International journal .(2000)
- [10] Cigala A.R. "Sopra un criterio di instabilita", Annali di Mathemetica, Ser. 3 , t 11 . (1905)

-
- [11] Filali I, H. Chouchane K. Sur un algorithme pour le calcul des exposants de Lyapunov d'un système dynamique. Centre universitaire Abd Elhafid Boussouf - Mila. (2019/2020).
- [12] Frédéric, VN. Les Fractals. Lycée Pierre Corneille .
- [13] Guckenheimer J. and Holmes P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", Springer, New York (1983).
- [14] Guilhèm, A. Blaizot, L. Geert-Jan, H. La théorie du chaos. Lycée du Sacré-Coeur et lycée Saint-Eloi . Année scolaire (2013 - 2014).
- [15] Jean-Jacques, G. Introduction aux fractals et aux systèmes dynamiques. MAT-2430. (2009) .
- [16] Julie, M. Le système de Lorenz. Cycle Pluridisciplinaire d'Études Supérieures - Université PSL. Année (2019-2020).
- [17] Khial, H. Lammari, L. Analyse fractale de texture. Université MOULOUD MAMMARI de Tizi-Ouzou. Mémoire de fin d'études (2010/2011).
- [18] Laadjal, B. Etude des difféomorphismes quartiques dans le plan. Université Mohamed Khider, Biskra. Docteur en sciences.
- [19] Mandelbrot . " Les Objets fractals ". Flammarion, 1975, 1984, 1989, 1995 " Universalités et fractales ", Sapoval, Flammarion, (1997).
- [20] Mira, C. Gardini, L. Barugola, A. et Catala J.C., "Chaotic Dynamics in Two Dimensional Noninvertible Maps", World Scientific Publishing, Singapore, series A, vol. 4, (1996).
- [21] Milnor, J. "On the concept of attractor", Comm. Math. Phys. 99 p. 177 - 195, (1985).
- [22] Ruelle, D. "Small Random Perturbations of Dynamical Systems and the Definitions of attractors", Comm. Math. Phys. 82, 137 - 151, (1981).
- [23] Selmani, W. Etude du comportement de la dynamique de la récurrence de Myrberg généralisée. Thèse de doctorat Selmani, W. U. Annaba (2017).
- [24] T. Amado. Modélisation d'un système dynamique à jeu du groupe motopropulse. Thèse de Doctorat Ecole centrale de Lyon, (2006).
- [25] Vincent, G-P. ensembles de mandelbrot et de julia remplis classiques, généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de fatou-julia généralisé. mémoire présenté à l'université du québec à trois-rivières . (Mars 2011).
- [26] Williams, R.F. "The Zeta Function of an Attractor" Conference on the Topology of Manifolds, ed. J.G. Hocking, Prindle Weber Schmidt, Boston (1968).

BIBLIOGRAPHIE

- [27] <https://media4.obspm.fr/public/AAM/pages-syst-lin/expo-lyap.html>
- [28] <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Ensemble-de-Julia.html>
- [29] <http://perso.wanadoo.fr/pascale.et.vincent.bourges/chaos/>.

Annexes

Tracer la courbe de Von koch :

```

> restart :with(plots) :with(plottools) :
> segment :=proc(a) local k : global courbe :
> k :=nops([courbe]) :courbe :=courbe,courbe[k-1]+cos(a),courbe[k]+sin(a) end :
> a :=0 :Koch :=proc(n) global a : if n=0 then segment(a) else
> Koch(n-1) :a :=a+Pi/3 : Koch(n-1) :a :=a-2*Pi/3 : Koch(n-1) :
> a :=a+Pi/3 : Koch(n-1) : fi end :
> courbe :=0,0 :Koch(4) :
> p := pointplot([courbe],scaling=constrained,style=line,
> color=blue,axes=none) :
> p1 :=reflect(p,[[0,0],[1,0]]) :p2 :=rotate(p,Pi/3) :
> p3 :=rotate(p,-Pi/3,[3^4, 0]) :
> display(p1,p2,p3);

```

Tracer la courbe de Triangle de Sierpinski :

```

> segment :=proc(a) global courbe :local k : k :=nops([courbe]) :
> courbe :=courbe,courbe[k-1]+cos(a),courbe[k]+sin(a) end :
> a :=0 :Sier :=proc(n,p) global a : if n=0 then segment(a)
> else a :=a+p*Pi/3 :Sier(n-1,-p) : a :=a-p*Pi/3 :Sier(n-1,p) :
> a :=a-p*Pi/3 :Sier(n-1,-p) :a :=a+p*Pi/3 fi end :
> courbe :=0,0 :Sier(7,1) :
> pointplot([courbe],style=line,scaling=constrained,color=blue);

```

Et on a aussi :

```

> restart :with(plots) :with(plottools) :

```

```

> segment :=proc(l,a) local k : global courbe :
> k :=nops([courbe]) : courbe :=courbe,courbe[k-1]+l*cos(a),courbe[k]+l*sin(a) end :
> l :=1 : a :=0 :cris :=proc(n,l) global a :if n=0 then segment(l,a) else cris(n-1,l) :a :=a+evalf(2*Pi/3) :
cris(n-1,l/2) :a :=a+evalf(Pi) :cris(n-1,l/2) :a :=a+evalf(2*Pi/3) : cris(n-1,l/2) :a :=a+evalf(Pi) :cris(n-
1,l/2) : a :=a+evalf(2*Pi/3) :cris(n-1,l) fi end :

```

```

> courbe :=0,0 :n :=4 :cris(n,1) :

```

```

> p := pointplot([courbe],scaling=constrained,style=line,color=blue,axes=none) :

```

```

> p1 :=reflect(p,[0,0],[1,0]) :p2 :=rotate(p1,Pi/3) :p3 :=translate(rotate(p1,-Pi/3),2(n-1),
(2n) * sin(Pi/3)) :

```

```

> display(p,p2,p3) ;

```

Tracer la courbe de Mandelbrot :

```

> restart :with(plots) :

```

```

> mandelbrot :=proc(x,y) local m, c :

```

```

> c :=x+I*y :m :=0 :

```

```

to 15 while abs(c)2 < 4doc := c2 + x + I * y : m := m + 1od : end :

```

```

> plot3d(mandelbrot,-1.4..0.5,-1.4..1.4,grid=[100,100],

```

```

view=14.5..15.5,orientation=[-90,0],

```

```

style=patchnogrid,color=red) ;

```

Tracer la courbe de Julia :

```

> restart :with(plots) :

```

```

> c :=-1 :

```

```

> f :=proc(z) global c :local a :a :=rand(0..1) :

```

```

if a()=0 then evalc( sqrt(z-c)) else-evalc(sqrt(z-c)) fi end :

```

```

> liste :=seq(evalc(polar(2,i*evalf(Pi)/360)),i=1..720) :

```

```

for i to 2 do liste :=seq(f(liste[i]),i=1..nops([liste])) od :

```

```

> p1 :=complexplot([liste],style=point,axes=none) :(liste initiale)

```

```

> p2 :=complexplot([liste],style=point,axes=none) :(for i to 2)

```

```

> p3 :=complexplot([liste],style=point,axes=none) :(for i to 4)

```

```

> p4 :=complexplot([liste],style=point,axes=none) :(for i to 10)

```

```

> A :=array(1..2,1..2) :

```

```

> A[1,1] :=p1 :A[1,2] :=p2 :A[2,1] :=p3 :A[2,2] :=p4 :

```

```

> display(A) ;

```

Tracer l'attracteur de Lorenz pour $r = 5, 11, \dots, 28$ et $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$

```

> restart :with(plots) :with(plottools) :with(DEtools) :

```

```

> DEplot3d([D(x)(t)=10*(y-x),D(y)(t)=28*x-y-x*z,D(z)(t)=x*y-8/3*z],[x,y,z],t=10..30,
> [[x(0)=0.1,y(0)=0,z(0)=0.1]],stepsize=0.02,scene=[x,y,z],linecolor=blue);

```

Tracer de x en fonction de t pour $r = 15, 28, 30$

```

> p := phaseportrait([D(x)(t)=10*(y-x),D(y)(t)=30*x-y-x*z,D(z)(t)=x*y-8/3*z],[x,y,z],t=40..60,
> [[x(0)=0.1,y(0)=0,z(0)=0.1]],stepsize=0.01,scene=[t,x]) : a := op(1,op(1,p)) :
> pointplot3d([seq([op(2,op(i,a)),op(2,op(i+4,a))
,op(2,op(i+8,a))],i=1..nops(a)-8)],
color=blue,axes=framed,style=line);

```

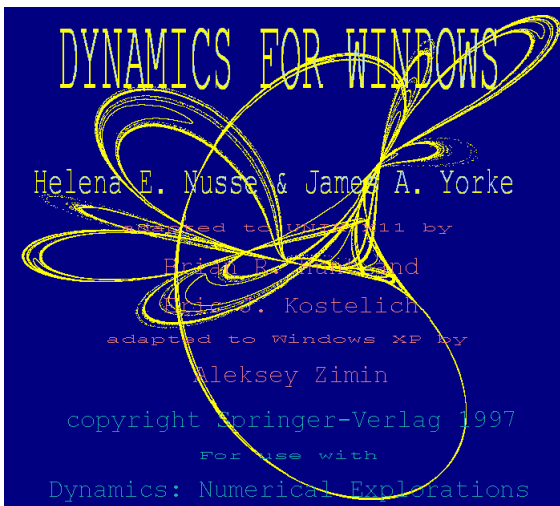


FIGURE 13 – Dynamics.

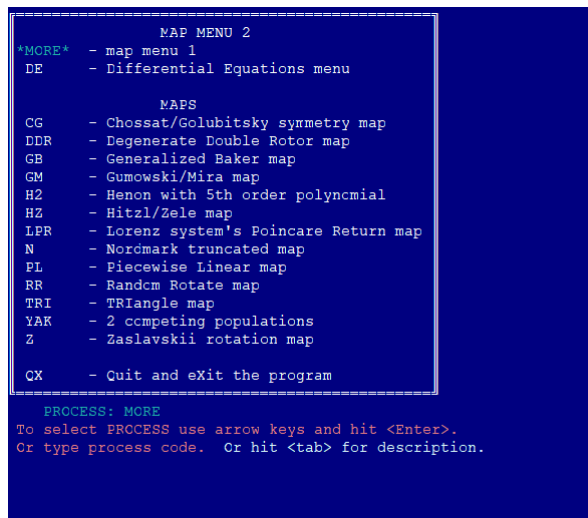


FIGURE 14 – Map Menu 2.

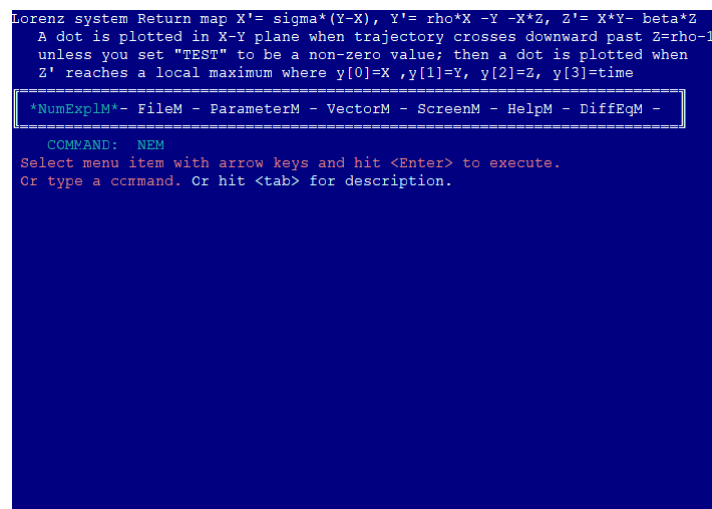


FIGURE 15 – Lorenz system.

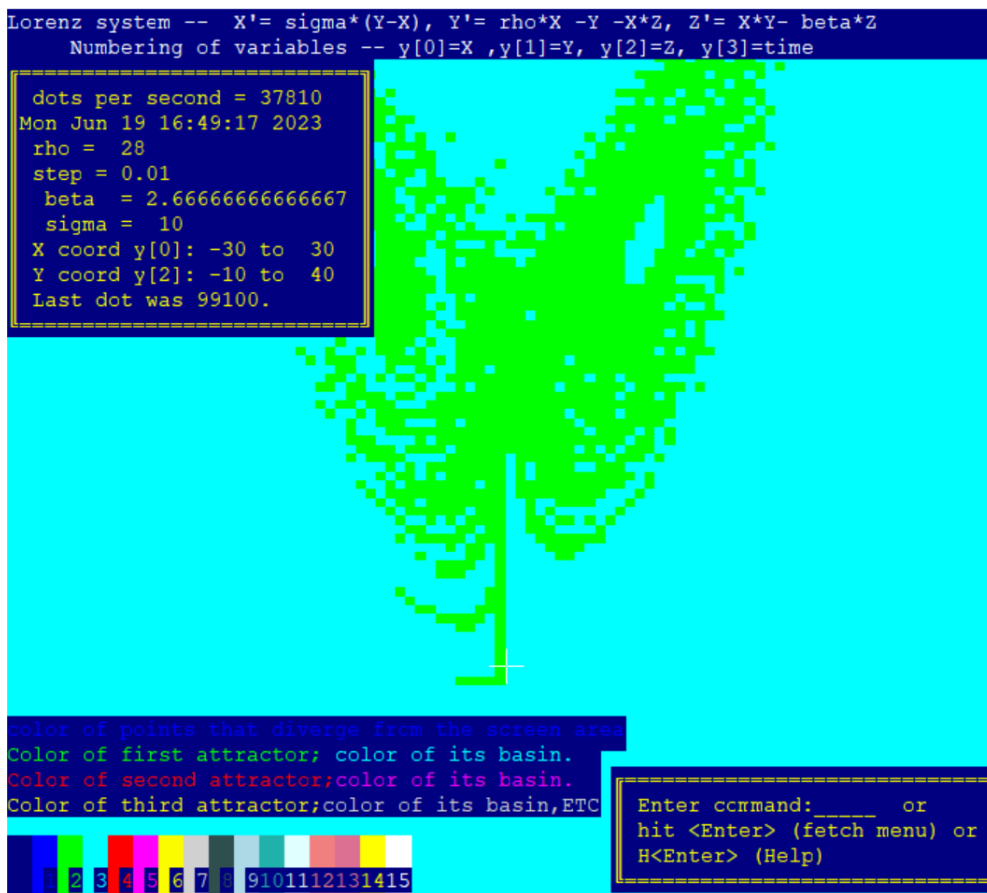


FIGURE 16 – Lorenz-parametres.