وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة ٢٠ أوت ١٩٥٥ ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M /……/2023.

Faculté des Sciences

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Problème de Contrôle Optimal de L'obstacle d'une Inéquation Variationnelle Elliptique

Option : Commande Optimale et Systèmes Dynamiques.

Par :

HACHMI Sara

Encadré par : NOURI IBTISSAM MCB U.SKIKDA

Devant le jury :

Président: YOUSFI Abla MCB U. SKIKDA

Examinateur: BENDIB El Ouahma MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

REMERCIEMENT

Tout d'abord nous tenons à remercies « DIEU » de nous avoir donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce travail

La première personne que nous tenons à remercier est mon encadreur Dr « Nouri Ibtissam», pour l'orientation, la confiance, la patience qui a constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être même au bon port.

On remercie les membres du jury pour avoir accepté examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématiques qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité.

DEDICACE

Avec tout respect et amour je dédie ce travail :
A mon cher père « **Said** *» : c'est le premier et le dernier homme de ma vie, qui a toujours été mon soutien et sans qui je n'aurais pas atteint ce que je suis aujourd'hui.*
A ma chère mère « **Dawya** *» : Tu es la lumière de ma vie, la flamme de mon cœur, je t'adore maman.*
Je demande à dieu de les protéger pour moi.
A toute ma famille et mes amies.
Je vous dis merci beaucoup, je vous souhaite la santé, le bonheur et surtout la réussite, je vous aime.

ملخص

في هذا العمل، نعتبر مشكلة التحكم الأمثل في عقبة متراجحة التغاير، حيث وظيفة التحكم هي العقبة، سنقوم باستخدام طريقة التقريب لجعل مشكلة التحكم الأمثل للمتراجحة تقترب من مشكلة التحكم لمجموعة معادلات، علينا ان نثبث وجود التحكم الأمثل و نعطي منظومة الظروف اللازمة المثالية بالتقريب.

كلمات البحث: متراجحة التغاير ، التحكم الأمثل، مشكلة العقبات الإهليجية.

RÉSUMÉ

On s'interesse dans ce memoire à l'étude d'un problème de contrôle optimal de l'obstacle d'une inéquation variationnelle unilatéral, oú la fonction contrôle est l'obstacle. On utilise une méthode d'approximation afin de ramener l'inéquation variationnelle á une famille de problèmes approchés gouvernés par une équation semi-linéaire, on démontre l'existence de contrôle optimal et on donne un système des conditions nécessaires d'optimalités .

Mots clés : Inéquation variationnelle , contrôle optimal, problème de l'obstacle elliptique.

ABSTRACT

In writing this memoir, we are interested in the study of an optimal control problem for a unilateral obstacle inequality where the obstacle function is assumed to be the control, we use an approximation methode to introduce a family of approximate problems gouverned by a semilineaire equation, we prove optimal solutions existence and give the optimality conditions.

Keywords : variational inequality, Optimal control, elliptic obstacle problem.

Index des Notations

On donne ci-dessus l'ensemble des diverses Notations employés tout au long de ce mémoire .

Les notation les plus spécifique sont rappelées là ou elles apparaissent.

$\mathbf{R}^n \quad = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times ... \times \mathbf{R}\ n\ fois$

$\mathbf{U}_{ad}$ l'ensemble des controles admissibles

$\mathbf{\Omega}$ un ouvert de $\mathbf{R}^n$

$\bar{\mathbf{\Omega}}$ est la fermeture de $\mathbf{\Omega}$

$\partial\mathbf{\Omega}$ Frontière de $\mathbf{\Omega}$

$\|v\|$ la norme d'un vecteur v.

∇f est le gradient de fonction

$p.p$ c'est la notation qui veut dire presque partout

$\lim inf$ la limite inférieur

$\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{\Omega})$ est l'espace des fonctions $\mathbf{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbf{\Omega}$

$\mathbf{L}^\infty(\mathbf{\Omega})$ l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbf{\Omega}$ telles que $\exists c > 0; |u(x)| \leq c, p.p \ \ sur \ \ \mathbf{\Omega}$

$\mathbf{L}^2(\mathbf{\Omega})$ l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de **Lebesgue** dx

$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{\Omega})$ l'adhérence de $\mathbf{D}(\mathbf{\Omega})$ dans $\mathbf{H}^1(\mathbf{\Omega})$

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1 Introduction

Le contrôle optimal des inéquations variationnelles est un domaine important du mathématiques appliquées qui ont des applications différentes dans des domaines différents.

Ces problèmes ont été largement étudies durant les derniers années par de nombreux auteurs [1] ,[4],[7].

Dans notre travail, On considère un problème de contrôle optimal tel que la fonction état vérifie une inéquation variationnelle de type obstacle ou la fonction de contrôle est l'obstacle. Ces problèmes sont intéressants, les résultats d'existence et d'unicité sont nombreux . En ce qui concerne les conditions d'optimalité, plusieurs difficultés se présentent, la difficulté principale qu'il est impossible d'assurer une quelconque propriétés de differentiabilité même au sens faible de l'application $\boldsymbol{\tau}$: contrôle $\longrightarrow$ état, on peut alors adopter plusieurs points de vue. L'idée étant toujours de se ramener à un problème gouverné par une équation variationnelle. Alors, on utilise une méthode d'approximation de l'opérateur $\boldsymbol{\tau}$ afin de ramener l'inéquation variationnelle a une famille des problèmes approchés gouvernés par une équation semi-linéaire.

Aprés formulation précise du problème, On donne un système des conditions nécessaires d'optimalité approchées.

Notre mémoire est organisé de la manière suivante :

le premier chapitre est une introduction générale au contrôle optimal dont on va donner quelques notations et notions utilisés dans l'étude de ce genre de problème .

Dans le deuxième chapitre, On va montrer un théorème d'existence de contrôle optimal .

Dans le troisième chapitre, On s'intéressera a l'étude du problème approché .

Le chapitre quatre sera consacré aux conditions nécessaires d'optimalité du problème approché, puis on va passer à la limite quand $\boldsymbol{\delta}$ tend vers 0, et on va donner un système d'optimalité de notre problème initial.

1.2 Problème de contrôle optimal

1.2.1 Formulation générale

Soit le problème générique suivant posé sous la forme

$$\boldsymbol{min\,\{J(y,u), A(y,u) = 0, u \ \in \ U_{ad} \ \subset \ U, y \ \in \ K \ \subset \ Y\}}$$

où $\boldsymbol{U}$ est un espace de **Hilbert**, $\boldsymbol{Y}$ un espace de Banach, $\boldsymbol{U_{ad}}$ et $\boldsymbol{K}$ sont des ensembles convexes fermés non vides de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{Y}$ respectivement, $\boldsymbol{J}$ est une fonction coût de $\boldsymbol{Y \times U}$ dans $\mathbb{R} \cup \infty$ semi-continue inférieurement et convexe (en général). $\boldsymbol{A}$ est un opérateur différentiel elliptique ou parabolique, linéaire ou non (par exemple $\boldsymbol{A(y,u) := -\Delta y - u}$, qui est une équation en fonction de l'état et le contrôle), Où la fonction $\boldsymbol{y}$ est la fonction d'état et $\boldsymbol{u}$ la fonction de contrôle. Ce problème peut être aussi vu comme un problème de programmation mathématique (c'est-à-dire un problème d'optimisation sous contraintes) dans des espaces. Souvent, d'aprés certaines hypothèses d'existence et d'unicité de la solution, l'équation d'état $\boldsymbol{A(y,u) = 0}$ admet une solution unique. On peut alors définir un opérateur $\boldsymbol{\tau}$ de $\boldsymbol{U}$ dans $\boldsymbol{Y}$ qui à $\boldsymbol{u}$ associe $\boldsymbol{y = \tau(u)}$. Le problème de contrôle optimal s'écrit alors comme fonction de la seule variable $\boldsymbol{u}$ sous la forme

$$\boldsymbol{min\{J(\tau(u), u), u \ \in \ U_{ad}, \tau(u) \ \in \ K\}}$$

D'aprés la littérature mathématique, la démarche classique pour résoudre ce genre de problème est en général la suivante

1 . Établir l'existence et si possible, l'unicité de la solution de ce problème en faisant appel à des techniques d'estimation á priori et de compacité. Il faut, bien sûr, pour cela avoir une régularité minimale de l'opèrateur $\boldsymbol{\tau}$ (par exemple, la continuité faible).

2 . On essaie ensuite de caractériser la ou les solutions, afin de trouver des conditions nécessaires d'optimalité. Souvent, ces conditions sont des conditions différentielles du premier ordre, ceci impose donc des propriétés de différentiabilité de $\boldsymbol{J}$ et de $\boldsymbol{\tau}$ (si la régularité le permet, on peut aussi établir des conditions suffisantes du second ordre).

3 . Enfin, on utilise les conditions précédentes pour établir des algorithmes permettant de calculer numériquement la ou les solutions.

1.3 Notions préliminaires

Nous présentons pour le moment les notations utilisées dans ce travail. On rappelle ici les espaces dans lesquels les solutions vont être cherchées, plus généralement tous les espaces utilisés pour l'étude mathématique du problème (propriétés de régularité, approximation, ...). Les notations utilisées pour les espaces de Sobolev sont classiques ainsi que les démonstrations peuvent être trouvées. Dans ce qui suit, nous désignons par $\boldsymbol{x}$ le point générique de $\boldsymbol{\Omega}$ qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$, à frontière $\boldsymbol{\partial\Omega}$ Lipschitzienne où $\boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{3}$. On rappelle que le dual $\boldsymbol{D'(\Omega)}$ de $\boldsymbol{D(\Omega)}$ est l'espace des distributions sur $\boldsymbol{\Omega}$. On introduit également l'espace $\boldsymbol{C^0(\Omega)}$ des fonctions continues sur $\boldsymbol{\Omega}$.

Les espaces $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$:

Définition 1.3.1 *Soit $\boldsymbol{p}$ un nombre réel tel que $\boldsymbol{1 \leq p < +\infty}$. On note par $\boldsymbol{L^p(\Omega)}$ l'espace des fonctions $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables tel que*

$$\boldsymbol{L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \ \ mesurable \ \ et \ \ \int_{\Omega} \mid v(x) \mid^2 dx \ < \ \ +\infty \right\}}$$

où $\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L^P(\Omega)}}$ désigne la norme

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{L^P(\Omega)}} = \boldsymbol{\left(\int_{\Omega} \ \mid \ v(x) \ \ \mid^p \ \ dx \ \right)^{1/p} si \ \ p < +\infty}$$

Définition 1.3.2 *On définit l'espace $\boldsymbol{L^\infty(\Omega)}$ comme suit :*

$$\boldsymbol{L^\infty(\Omega) = \{f \to \mathbb{R}; f} \ \ \textit{mesurable et} \ \exists \ \textit{une constante} \ \boldsymbol{C} \ \textit{telle que} \ \boldsymbol{|f(x)| \leq C} \quad \textit{p.p.} \quad \textit{sur} \ \boldsymbol{\Omega\}}$$

L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ *est muni de la norme :*

$$\| \ f \ \|_{L^{\infty}(\Omega)} = ess \ \sup_{x\in\Omega} \ | \ f(x) \ |$$

$$= \inf \ \{ \ C; \ | \ f(x) \ | \ \leq \ C \ p.p. \ sur \ \Omega \ \}$$

Remarque 1.3.1 *Pour* $p = 2$*, on définit l'espace* $L^2(\Omega)$ *comme suit*

$$L^2(\Omega) = \left\{ \ v \ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \ f \ mesurable \ et \ \int_{\Omega} \ | \ v(x) \ |^2 \ dx \ < \ \infty \ \right\}$$

L'espace $L^2(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} | \ v(x) \ |^2 \ dx \ \right)^{1/2}$$

et de produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v(x) \ w(x) \ dx$$

pour v *et* w *dans* $L^2(\Omega)$

donc

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

et $L^2(\Omega)$ *est un espace de* **Hilbert**.

Notation : Pour $1 \leq p \leq \infty$; on note p' **l'exposant conjugué** de p, pour p dans $[1, \infty[$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, où encore $p' = \frac{p}{p-1}$, et évidement $1' = \infty$ et $\infty' = 1$.

Inclusion des espaces $L^P(\Omega)$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont décroissants, tel que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

De plus, il existe C tel que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}$; pour tout f dans $L^q(\Omega)$

Théorème 1.3.1 ***(Inégalité de Yong)*** *Soient* $a, b \geq 0$, *et* $1 \leq p, p' \leq \infty$ *deux exposants conjugués, alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

Preuve. Voir [5].

Théorème 1.3.2 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit* f *dans* $L^p(\Omega)$ *et* g *dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $f.g$ *dans* $L^1(\Omega)$ *et*

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

.

Preuve. Voir [5].

Théorème 1.3.3 ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soit* $1 \leq p < \infty$, *et* f, g *dans* $L^p(\Omega)$, *alors* $f + g$ *dans* $L^p(\Omega)$ *et*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

.

Preuve. Voir [5].

Rappel sur les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

La théorie des distributions permet de définir, pour les espaces de $L^p(\Omega)$ des dérivées d'ordre quelconque à valeur dans $D'(\Omega)$: pour tout d, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$ représente la longueur $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la j-éme variable, $1 \leq j \leq n$.

Définition 1.3.3 *Soit m un entier positif, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \right\}$$

On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $D(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, on le munit de la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} | \quad \partial^\alpha v(x) \quad |^p \quad dx \right)^{1/p} si \quad p \quad < +\infty \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de **Banach** *, réflexif lorsque $1 \leq p \leq +\infty$.*

Corollaire 1.3.1 *Pour tout nombre réel p, tel que $1 \leq p \leq +\infty$, et tout entier positif m, la semi-norme*

$$|v|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \quad v(x) \quad |^p \quad dx \right)^{1/p}$$

est une norme sur l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, équivalente à la norme $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Remarque 1.3.2 *Dans le cas particulier $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est équivalant à l'espace $H^m(\Omega)$ tel que $H^m(\Omega)$ est un espace de* **Hilbert** *pour le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle \longrightarrow \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \quad (\partial^\alpha u) \quad (x) \quad (\partial^\alpha v) \quad (x) dx$$

.

Définition 1.3.4 *On définit l'espace de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ par*

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^\alpha \quad |\alpha| \leq m \quad \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \right\}$$

.

Définition 1.3.5 *On définit le nombre réel* p' *tel que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. *On note par* $W^{-m,p'}(\Omega)$ *le dual de l'espace* $W_0^{m,p}(\Omega)$, *et on le munit de la norme duale*

$$\|f\|_W^{-m,p'}(\Omega) := \sup_{v\in W_0^{m,p}(\Omega), v\neq 0} \frac{\langle f,v\rangle}{|v|_{W^{m,p}(\Omega)}}$$

où $\langle .,.\rangle$ *désigne le produit de dualité entre* $W^{-m,p'}(\Omega)$ *et* $W_0^{m,p}(\Omega)$. *Dans le cas particulier* $p=2$, *on voit que* $p'=2$. *On note respectivement* $H_0^m(\Omega)$ *et* $H^{-m}(\Omega)$ *les espaces* $W_0^{m,2}(\Omega)$ *et* $W^{-m,2}(\Omega)$, *et on utilise la même notation pour les normes associées ; on pose*

$$H^{-m}(\Omega) := (H_0^m(\Omega))'$$

Alors

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega)$$

où les inclusions précédentes sont considérées algébriquement et topologiquement.

l'espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.3.6 *l'espace de Sobolev* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\; \textit{telleque} \;\; \forall i \in \{1,\ldots,n\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

ou $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *est la dérivée partielle faible de* u.

- ***L'espace*** $\boldsymbol{H^1(\Omega)}$ *est muni du produit scalaire*

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{H1(\Omega)} &= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx \\ &= \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))dx\end{aligned}.$$

Et de norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$

$$\|u(x)\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

- **L'espace** $\mathbf{H^1(\Omega)}$ *est un espace de* **Hilbert** *tel que*

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

l'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3.7 *On définit* $H_0^1(\Omega)$ *comme la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$*(pour la norme* $H^1(\Omega)$ *). Autrement dit :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in\ H^1(\Omega), \exists v_n \in\ \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } v_n \to u \text{ dans } H^1(\Omega)\right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \tag{1.2}$$

- ***l'espace*** $H_0^1(\Omega)$ *est muni de la norme :*

$$\|u(x)\|_{H_0^1(\Omega)} \backsimeq \|\nabla u(x)\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.3}$$

Définition 1.3.8 *(**Inégalité de Poincaré**) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*, il existe une* *constant* $C > 0$ *telle que ,pour toute fonction* $u \in H_0^1(\Omega)$ *:*

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$$

Définition 1.3.9 *Soit* Y *un espace normé. Une fonction* $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *est semi continue inférieurement (noté s.c.i) si pour tout* x, x_n *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x, alors \lim_{n\to+\infty} \inf f(x_n) \geq f(x)$$

Définition 1.3.10 *On appelle suite minimisante de* J *dans* Y *une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Y *tel que : - La notion de dérivée faible est une extension de la notion de dérivée usuelle pour des fonctions qui ne sont pas forcément dérivable , mais pour les quelles on peut tout de même réaliser une sorte d'intégration par partie, c'est un concept très utile dans la résolution des équations aux dérivées partielles.*

Définition 1.3.11 *(Converge faible et faible *) Soit* $\mathbf{Y}$ *un espace de* **Banach**

- **Converge faible** *: Soient* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset Y$ *et* $x \in Y$*. On dit que la suite* $x_n \to x$ *converge faiblement dans* Y *dans si pour* n *tend vers* ∞

$$\mathrm{T}(x_n) \to \mathrm{T}(x), \quad \textit{pour tout} \quad \mathrm{T} \in Y'$$

. - **Converge faible*** *: Soient* $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset Y'$ *et* $x \in Y'$ *. On dit que* $\mathrm{T_n} \to \mathrm{T}(x)$ *dans* Y' *converge faiblement * si*

$$\mathrm{T}_n(x) \to \mathrm{T}(x) \quad , \textit{pour tout } x \in Y$$

Définition 1.3.12 *Soient* Y *un espace de* **Hilbert** *et* A *dans* $L(Y)$ *ensemble des applica-*

tions linéaires continues de $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{Y}$. Il existe un unique opérateur continu de $\boldsymbol{Y}$ dans $\boldsymbol{Y}$, noté $\boldsymbol{A}^*$ et appelé l'adjoint de $\boldsymbol{A}$, tel que :

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^* \boldsymbol{y} \rangle \quad \textit{pour tout (x,y) dans E}$$

.

Théorème 1.3.4 ***(Théorème des accroissements finis sur** $\mathbb{R}$**)***
Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur un intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$. Alors, il existe $\mathbf{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que

$$\boldsymbol{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Avec $\boldsymbol{\theta} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ on a :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{f(b) - f(a) d\theta} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{f'[\theta b + (1 - \theta) a] d\theta [b - a]}$$

Preuve. Voir [4]

Théorème 1.3.5 ***(Lions Stampachia)*** *Soit le problème*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \boldsymbol{u} \textit{ dans } \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{a(u, v - u) \geqslant (f, v - u)} \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{v \in K} \end{cases}$$

Le problème admet une unique solution, ssi $\boldsymbol{K}$ est convexe, la forme bilinéaire $\boldsymbol{a(.,.)}$ est coercive, continue et la forme linéaire $\boldsymbol{f}$ continue.

Preuve. Voir [5]

1.4 Présentation du problème

On considère un problème de contrôle optimal où la fonction état vérifie une inéquation variationnelle unilatérale , et la fonction contrôle est l'obstacle.

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$ de frontière régulière $\boldsymbol{\partial\Omega}$ et $\boldsymbol{z}$ dans $\boldsymbol{L^2(\Omega)}$ l'état désiré, pour $\boldsymbol{\psi}$ dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ nous définissons

$$\boldsymbol{K(\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) \quad , v \geq \psi} \quad \text{presque partout pour } \boldsymbol{x} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega\}}$$

$\boldsymbol{K(\psi)}$ est un ensemble convexe et fermé non vide. Nous considérons le problème de l'obstacle suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; \boldsymbol{u} \; \text{ dans } \; \boldsymbol{K(\psi)} \; \text{ tel que} \\ \\ \boldsymbol{a(u, v-u) \geq 0} \; \text{ pour tout } \; \boldsymbol{v} \; \text{ dans } \; \boldsymbol{K(\psi)} \end{cases} \tag{1.4}$$

$\boldsymbol{a(.,.)}$ c'est la forme bilinéaire définie dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ par

$$\boldsymbol{a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x^i} v dx + \int_{\Omega} cuvdx}$$

avec $\boldsymbol{a_{i,j}, b_i, c}$ dans $\boldsymbol{L^\infty(\Omega)}$

la forme bilinéaire $\boldsymbol{a(u,v)}$ est continue dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$

$$\boldsymbol{\exists M > 0, \forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega); \;\; a(u,v) \leq M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

et coercive

$$\boldsymbol{\exists \alpha > 0 \; \forall u \in H_0^1(\Omega); a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}}$$

Soit $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{H_0^1}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{H^{-1}}(\boldsymbol{\Omega}))$ l'opérateur linéaire associe avec $\boldsymbol{a}$ tel que

$$\langle \boldsymbol{Au}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Il est bien connu que l'inéquation variationnelle (1.4) admet une solution unique $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\psi})$ qui appartient à $\boldsymbol{H_0^1}(\boldsymbol{\Omega})$. Tel que $\boldsymbol{\tau}$ c'est opérateur continue défini de $\boldsymbol{H_0^1}(\boldsymbol{\Omega})$, nous introduisons la fonctionnelle objective sous la forme :

$$\boldsymbol{J}(\psi) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int_\Omega (\boldsymbol{\tau}(\psi) - \boldsymbol{z})^{\mathbf{2}} \boldsymbol{dx} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\psi)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{dx}, \quad \psi \in \boldsymbol{U_{ad}}$$

Tel que : $\boldsymbol{U_{ad}}$ l'ensemble des contrôles admissibles défini par :

$$\boldsymbol{U_{ad}} = \{\psi \in (\boldsymbol{H_0^1}(\Omega)), \quad \|\psi\|_{\boldsymbol{H_0^1}(\Omega)} \leq \boldsymbol{r}\}$$

$\boldsymbol{r}$ est un nombre réel positif. Par suite, on définit le problème de contrôle optimal sous la forme :

$$\textbf{Problème } (\boldsymbol{P}) \begin{cases} \text{Trouver } \ \bar{\boldsymbol{\psi}} \ \text{ dans } \ \boldsymbol{U_{ad}} \ \text{ tel que} \\ \\ \boldsymbol{J}(\bar{\psi}) = \inf\limits_{\psi \in \boldsymbol{U_{ad}}} \boldsymbol{J}(\psi) \end{cases} .$$

en d'autres termes, pour l'état désiré $\boldsymbol{z}$ dans $\boldsymbol{L^2}(\boldsymbol{\Omega})$, nous voulons trouver $(\bar{\boldsymbol{\psi}})$ dans $\boldsymbol{U_{ad}}$ tel que l'état correspondant $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\tau}(\bar{\boldsymbol{\psi}})$ soit proche de l'état désiré $\boldsymbol{z}$.

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE CONTRÔLE OPTIMAL

Le but de cette section est d'établir l'existence d'un contrôle optimal.

Théorème 2.0.1 *Il existe une solution du* ***Problème*** $(\boldsymbol{P})$

Preuve. Soit $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dans U_{ad} une suite minimisante de $J(\psi)$, tel que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} J(\psi_k) = \inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi)$$

Soit $u_k = \tau(\psi_k)$ la solution correspondante du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ u_k \ \text{ dans } \ K(\psi_k) \ \text{ tel que} \\ \\ a(u_k, v - u_k) \geq 0, \ \text{ pour tout } \ v \ \text{ dans } \ K(\psi_k) \end{cases} .$$

Si on pose $v = \psi_k$, on obtient

$$a(u_k, \psi_k - u_k) \geq 0$$

De plus

$$a(u_k, \psi_k) - a(u_k, u_k) \geq 0$$

ainsi , il vient

$$a(u_k, \psi_k) \geq a(u_k, u_k)$$

D'après la continuité et la coercivité de $a(.,.)$, on a

$$M\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}\|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \geq a(u_k, \psi_k) \geq a(u_k, u_k) \geq \alpha\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

alors, il vient

$$\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}\|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.1}$$

ainsi

$$\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

oú

$$c = \frac{M}{\alpha}$$

D'autre part on a

$$\lim_{k\to\infty} J(\psi_k) = \inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi)$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\psi_k) - z)^2 + (\nabla\psi_k)^2\}dx = \inf_{\psi\in U_{ad}} \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\psi) - z)^2 + (\nabla\psi)^2\}dx = d$$

ainsi, on obtient

$$\|\nabla\psi_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq d$$

En utilisant l'inégalité de Point carré , on trouve

$$\|\nabla\psi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq d$$

On déduit que ψ_k est borné dans $H_0^1(\Omega)$

Et d'après (2.2), on résulte que u_k est borné dans $H_0^1(\Omega)$, alors

Il existe $(\bar{\psi}, \bar{u}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, tel que :

$$\psi_k \text{ converge faiblement vers } \bar{\psi} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

et

$$u_k \text{ converge faiblement vers } \bar{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

Dans la suite, on veut montrer que $\bar{\psi}$ une solution du **Problème** (P), on sait que ψ_k converge faiblement vers $\bar{\psi}$ dans $H_0^1(\Omega)$, et d'après la semi continuité des normes, on a

$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega (\nabla\psi_k)^2 dx \geq \int_\Omega (\nabla\bar{\psi})^2 dx$$

Ainsi

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) = \lim_{k\to\infty} J(\psi_k)$$

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\psi_k) - z)^2 + (\nabla\psi_k)^2\}\, dx$$

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\psi_k) - z)^2\} dx + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi_k)^2 dx$$

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\psi_k) - z)^2\} dx + \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi_k)^2\, dx$$

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega \{(\tau(\bar{\psi}) - z)^2\} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\bar{\psi})^2\, dx$$

$$\inf_{\psi\in U_{ad}} J(\psi) \geq J(\bar{\psi})$$

Donc $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ est une solution du **Problème ($\boldsymbol{P}$)**.

CHAPITRE 3

PROBLÈME APPROCHÉ

Pour trouver les conditions nécessaires d'optimalité, il est connu qu'on doit dériver la fonction objectif $\boldsymbol{J(\psi)}$ qui dépend de $\boldsymbol{\tau(\psi)}$, mais l'application $\boldsymbol{(\psi) \longrightarrow u = \tau(\psi)}$ n'est pas différentiable, alors et pour surmonter cette difficulté, nous pouvons introduire une famille du problème approché tel que $\boldsymbol{\psi \longrightarrow \tau_\delta(\psi)}$ admet une différentielle au sens faible.

Soit

$$\beta(\mathrm{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{r \geq 0} \\ \boldsymbol{-r^2} & \text{si } \boldsymbol{r \in [-\frac{1}{2}, 0]} \\ \boldsymbol{r + \frac{1}{4}} & \text{si } \boldsymbol{r < -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

où pour tout $\boldsymbol{r}$ dans $\mathbb{R}$; on a

$$\boldsymbol{r \wedge 0 = \min\{r; 0\} \leq \beta(r) \leq 0}$$

et $\boldsymbol{\beta}$ est dans $\boldsymbol{C^1}(\mathbb{R})$ par morceaux, on défini également $\boldsymbol{\beta'(\mathrm{r})}$ par

$$\beta'(\mathrm{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{r \geq 0} \\ \boldsymbol{-2r} & \text{si } \boldsymbol{r \in [-\frac{1}{2}, 0]} \\ \mathbf{1} & \text{si } \boldsymbol{r < -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Ainsi, on introduit l'équation elliptique semi-linéaire suivante, qui est l'approximation du problème (1.4)

$$\begin{cases} Au^\delta + \frac{1}{\delta}\beta(u^\delta - \psi) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \\ \\ u^\delta = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

avec δ supérieur à 0 et tends vers 0.

Il est connu que l'équation précédente admet une unique solution

$$u^\delta \in H_0^1(\Omega), \quad \text{tel que} \quad u^\delta = \tau_\delta(\psi)$$

Ainsi, notre problème de contrôle optimal approché s'écrit sous la forme

$$\textbf{Problème}(P^\delta) \begin{cases} \text{Trouver} \quad \psi^\delta \quad \text{dans} \quad U_{ad} \ \text{ tel que} \\ \\ J_\delta(\psi^\delta) = \inf\limits_{\psi \in U_{ad}} J_\delta(\psi) \end{cases} .$$

avec

$$J_\delta(\psi) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tau_\delta(\psi) - z)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi)^2) dx \tag{3.2}$$

Théorème 3.0.1 *Soit $\psi \in U_{ad}$, si $u^\delta = \tau_\delta(\psi)$ est solution du problème (3.1) alors, il existe u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\tau_\delta(\psi) \textit{ converge faiblement vers } u \textit{ dans } H_0^1(\Omega) \textit{ dés que, } \delta \textit{ tend vers } 0^+ \ .$$

oú $u = \tau(\psi)$, alors on a

$$\| u^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \| \psi^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.3}$$

Preuve. On commence par démontrer l'inégalité (3.3) . Pour tout ψ dans U_{ad} , il existe

$\boldsymbol{\tau_\delta(\psi) = u^\delta}$ solution du problème (3.1) , en multipliant l'équation (3.1) par $\boldsymbol{(v - u^\delta)}$ et en considérant la formulation faible de l'équation (3.1), on trouve que

$$\int_\Omega Au^\delta(v-u^\delta)dx + \frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta(u^\delta-\psi)(v-u^\delta)dx = 0$$

où encore

$$\int_\Omega Au^\delta(v-u^\delta)dx = -\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta(u^\delta-\psi)(v-u^\delta)dx = 0 \tag{3.4}$$

ou' bien

$$a(u^\delta, v-u^\delta) = -\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta(u^\delta-\psi)(v-u^\delta)dx \tag{3.5}$$

Concernant l'égalité $\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta(u^\delta-\psi)(v-u^\delta)dx$ deux cas se présentent

Cas 01 : Si on pose $u^\delta \geq \psi$ alors , $u^\delta - \psi \geq 0$ d'après la définition de $\beta(.)$, on a :

$$\beta(u^\delta-\psi) = 0$$

ainsi, on déduit que :

$$\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta(u^\delta-\psi)(v-u^\delta)dx = 0 \quad \text{pour tout } v \text{ dans } K(\psi) \tag{3.6}$$

Cas 02 : Si on pose $u^\delta \leq \psi$ alors $u^\delta - \psi \leq 0$ donc d'après la définition de $\beta(.)$, on a

$$\beta(u^\delta-\psi) \leq 0$$

Par suite, concernant $v - u^\delta$, on a $u^\delta \leq \psi$, alors $-u^\delta \geq -\psi$,

donc

$$v - u^\delta \geq v - \psi$$

Comme $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{K(\psi)}$, alors $\boldsymbol{v \geq \psi}$ presque par tout dans $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{v - \psi \geq 0}$

donc

$$\boldsymbol{v - u^{\delta} \geq v - \psi \geq 0}$$

Ainsi, on déduit que :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\beta(u^{\delta} - \psi)(v - u^{\delta})dx \leq 0}$$

Par suite, d'après le **Cas 2**, en peut avoir que

$$\boldsymbol{-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(u^{\delta} - \psi)(v - \psi)dx \geq 0} \tag{3.7}$$

Donc d'après l'inégalités (3.6) et (3.7) on conclure que

$$\boldsymbol{-\frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \beta(u^{\delta} - \psi)(v - \psi)dx \geq 0} \text{ pour tout } \quad \boldsymbol{v} \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{K(\psi).} \tag{3.8}$$

Par suite, en utilisant (3.6) et (3.7) , l'équation (3.5) devient :

$$\boldsymbol{a(u^{\delta}, v - u^{\delta}) \geq 0} \text{ pour tout } \boldsymbol{v} \text{ dans } \boldsymbol{K(\psi)}$$

Maintenant, si on prend $\boldsymbol{v = \psi}$ on obtient

$$\boldsymbol{a(u^{\delta}, \psi - u^{\delta}) \geq 0}$$

donc

$$\boldsymbol{a(u^{\delta}, \psi) - a(u^{\delta}, u^{\delta}) \geq 0}$$

alors

$$\boldsymbol{a(u^{\delta}, \psi) \geq a(u^{\delta}, u^{\delta})}$$

d'après la continuité et la coercitive de $a(.,.)$, on trouve

$$M\|u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)}\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \geq a(u^\delta,\psi) \geq a(u^\delta,u^\delta) \geq \alpha\|u^\delta\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\alpha\| \ u^\delta \ \|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq M\| \ u^\delta \ \|_{H_0^1(\Omega)}\| \ \psi \ \|_{H_0^1(\Omega)} \\
\alpha\| \ u^\delta \ \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq M\| \ \psi \ \|_{H_0^1(\Omega)} \\
\| \ u^\delta \ \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{M}{\alpha}\| \ \psi \ \|_{H_0^1(\Omega)} \\
\| \ u^\delta \ \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C\| \ \psi \ \|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Donc u^δ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\bar{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$u^\delta \text{ converge faiblement vers } \bar{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

Théorème 3.0.2 *Le problème* (p^δ) *admet une solution optimale* (u^δ,ψ^δ) *ou* $u^\delta = T_\delta(\psi^\delta)$

Alors

$$\|\nabla u^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_\Omega(|\nabla\psi^\delta|^2)dx \leq C\|z\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Preuve. Soit $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset H_0^1(\Omega)$ une suite minimisant de j_δ alors

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} j_\delta(\psi_k) = \inf_{\psi\in H_0^1(\Omega)} j_\delta(\psi)$$

Ou

ψ_k est borné dans $H_0^1(\Omega)$ alors, $\|\psi_k\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$, donc il existe $\psi^\delta \in H_0^1(\Omega)$ tel que la sous suite :

$$\psi_k \text{converge faiblement vers } \psi^\delta \text{dans } H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$

soit $\boldsymbol{u_k^\delta} = \boldsymbol{T_\delta(\psi_k)}$ la solution correspondant du **problème** (3.1) avec : $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi_k}$, alors d'après :

$$\|\boldsymbol{\nabla T_\delta(\psi_k)}\|_{\boldsymbol{L^2(\Omega)}} \leq \|\boldsymbol{\nabla(\psi_k)}\|_{\boldsymbol{L^2(\Omega)}} \leq \|\boldsymbol{\psi_k}\| \leq \boldsymbol{C}$$

alors, il existe $\boldsymbol{u^\delta} \in \boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ tel que

$$\boldsymbol{u_k^\delta} \text{ converge faiblement vers } \boldsymbol{u^\delta} \text{ dans } \boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$$

En multipliant l'équation (3.1) par une fonction test $\boldsymbol{v}$ dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$, On remplace $\boldsymbol{u^\delta}$ par $\boldsymbol{u_k^\delta}$ et $\boldsymbol{\psi}$ par $\boldsymbol{\psi_k}$, intégrant sur $\boldsymbol{\Omega}$, on trouve

$$\int_\Omega \boldsymbol{Au_k^\delta v dx} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\delta}} \int_\Omega \boldsymbol{\beta(u_k^\delta - \psi_k) v dx} \tag{3.10}$$

d'après (3.9) et comme $\mathbf{B(.)}$ est continuer , en passant à la limite quand $\boldsymbol{k}$ tend vers $\boldsymbol{\infty}$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\beta(u^\delta - \psi_k) v dx} \to \int_\Omega \boldsymbol{\beta(u^\delta - \psi) v dx}$$

donc léquation (3.10), devient

$$\int_\Omega \boldsymbol{Au^\delta v dx} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\delta}} \int_\Omega \boldsymbol{\beta(u^\delta - \psi) v dx}$$

Implique que $\boldsymbol{u^\delta}$ est une solution associée avec $\boldsymbol{\psi^\delta}$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{u^\delta} = \boldsymbol{T_\delta(\psi^\delta)}$.

Maintenant , On va monter que $\boldsymbol{\psi^\delta}$ est un solution optimale de $\boldsymbol{j_\delta}$

$$\inf_{\psi \in U_{ad}} \boldsymbol{J_\delta(\psi)} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{J_\delta(\psi_k)}$$

$$\inf_{\psi \in U_{ad}} \boldsymbol{J_\delta(\psi)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \int_\Omega \boldsymbol{(\tau_\delta(\psi_k) - z)^2 dx} + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{(\nabla \psi_k)^2 dx}$$

$$\inf_{\psi \in U_{ad}} \boldsymbol{J_\delta(\psi)} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \int_\Omega \boldsymbol{(\tau_\delta(\psi_k) - z)^2 dx} + \lim_{k\to\infty} \inf \int_\Omega \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{(\nabla \psi_k)^2 dx}$$

$$\inf_{\psi \in U_{ad}} J_\delta(\psi) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (\tau_\delta(\psi^\delta) - z)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla \psi^\delta)^2 dx$$

$$\inf_{\psi \in U_{ad}} J_\delta(\psi) \geq J_\delta(\psi^\delta)$$

Alons ψ^δ est une solution optimale de j_δ .

D'autre part, on a

$$\|\nabla u^\delta\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_\Omega |\nabla \psi^\delta|^2 dx \leq j_\delta(\psi^\delta) \leq C j_\delta(0) \leq C\|z\|^2_{L^2(\Omega)}$$

donc

ψ^δ est borné dans $L^2(\Omega)$, d'après l'injection de Sobolev on déduit que

ψ^δ converge faiblement vers $\bar{\psi}$ dans $H^1_0(\Omega)$

CHAPITRE 4

CONDITIONS D'OPTIMALITÉ

Dans ce chapitre ; on va étudier le système d'optimalité de notre problème, en commençant par définir les conditions d'optimalité approchées. En suite, en passant à la limite avec δ tend vers 0 et on donne le système d'optimalité du probléme initiale .

4.1 Système d'optimalité du problème approché

Théorème 4.1.1 *L'application $\psi \longrightarrow u^\delta = u^\delta(\psi)$ est différentiable dans le sens suivant Soit ψ dans $H_0^1(\Omega)$, $\forall l$ dans $H_0^1(\Omega)$, il existe un ξ^δ dans $H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\frac{u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)}{\varepsilon} \text{ converge faiblement vers } \xi^\delta \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ dés que } \varepsilon \text{ tends vers } 0.$$

Alors , ξ^δ est la solution de l'équation :

$$\begin{cases} A\xi^\delta + \frac{1}{\delta}(\beta'(u^\delta - \psi))(\xi^\delta - l) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \xi^\delta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

Preuve. Soit l'équation donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{Au^\delta(\psi) = -\frac{1}{\delta}(\beta(u^\delta(\psi) - \psi)} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \\ \boldsymbol{u^\delta(\psi) = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.2}$$

et

$$\begin{cases} \boldsymbol{Au^\delta(\psi + \varepsilon l) = -\frac{1}{\delta}\beta(u^\delta(\psi + \varepsilon l) - \psi - \varepsilon l) = 0} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \\ \boldsymbol{u^\delta(\psi + \varepsilon l) = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \\ \\ \end{cases} \tag{4.3}$$

Par suit, d'après les deux égalités (4.2) et (4.3), on obtient

$$\begin{cases} \boldsymbol{A[u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)] = -\frac{1}{\delta}[(\beta(u^\delta + \varepsilon l) - \psi - \varepsilon l) - (\beta(u^\delta(\psi) - \psi)]} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \\ \boldsymbol{u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi) = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.4}$$

en multipliant (4.4) par $\boldsymbol{u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)}$, et en intégrant par partie sur $\boldsymbol{\Omega}$, on trouve

$$\begin{cases} \boldsymbol{\int_\Omega A[u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)][u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)]dx =} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{\delta}\int_\Omega [(\beta(u^\delta(\psi + \varepsilon l) - \psi - \varepsilon l) - (\beta(u^\delta(\psi) - \psi)][u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi)]dx} \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{u^\delta(\psi + \varepsilon l) - u^\delta(\psi) = 0} \quad \text{sur} \quad \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.5}$$

par suit , on a

$$\boldsymbol{\int_\Omega A[u^\delta(\psi+\varepsilon l) - u^\delta(\psi)][u^\delta(\psi+\varepsilon l) - u^\delta(\psi)]dx = a(u^\delta(\psi+\varepsilon l) - u^\delta(\psi), u^\delta(\psi+\varepsilon l) - u^\delta(\psi)).}$$

D'après la coercitive de $a(.,.)$ on a

$$a(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi),u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi))\geq\alpha\|u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

D'autre part, pour

$\int_\Omega[(\beta(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-\psi-\varepsilon l)-(\beta(u^\delta(\psi)-\psi)]\ dx$, On utilisant le théorème des accroissements finis, on trouve

$$\int_\Omega[(\beta(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-\psi-\varepsilon l)-(\beta(u^\delta(\psi)-\psi)]dx=\int_\Omega\int_0^1\beta'[\theta(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-\psi-\varepsilon l)$$
$$+(1-\theta)(u^\delta(\psi)-\psi)]d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)-\varepsilon l)]dx \tag{4.6}$$

donc, on remplace (4.6) dans (4.5), on trouve que

$a(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi),u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi))=-\frac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'[\theta(u^\delta(\psi+\varepsilon l)-\psi-\varepsilon l)+$
$(1-\theta)(u^\delta(\psi)-\psi)]d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)-\varepsilon l][u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]dx.$
$=-\frac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta\left\{[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)][u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]-\varepsilon l[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]\right\}dx$
$=-\dfrac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta\left\{[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]^2-\varepsilon l[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]\right\}dx$
$=\leq-\dfrac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]^2dx+\dfrac{\varepsilon}{\delta}\int_\Omega l\int_0^1\beta'(.)d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]dx$

alors

$$\begin{aligned}\|u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)\|^2_{H^1_0(\Omega)}&\leq-\frac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]^2dx\\&+\frac{\varepsilon}{\delta}\int_\Omega l\int_0^1\beta'(.)d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]dx\end{aligned}\tag{4.7}$$

on a

$\beta'(\mathrm{r})\geq 0$, pour tout r dans $\mathbb{R}$ et, $[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]^2\geq 0$,

alors

$$\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta[u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)]^2dx\geq 0.$$

et

$$-\frac{1}{\delta}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\beta'(.)d\theta[u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)]^{2}dx\leq 0 \tag{4.8}$$

donc l'inégalité (4.7) peut s'écrire sous la forme

$$\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|^{2}_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\int_{\Omega}l\int_{0}^{1}\beta'(.)d\theta[u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)]dx$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient

$$\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|^{2}_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\Big[\int_{\Omega}(l)^{2}dx\Big]^{\frac{1}{2}}\Big[\int_{\Omega}(u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi))^{2}dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|^{2}_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\|l\|_{L^{2}(\Omega)}\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|_{L^{2}(\Omega)}$$

ainsi, on a

$$\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|^{2}_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\|l\|_{L^{2}(\Omega)}\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|_{H^{1}_{0}(\Omega)}$$

alors

$$\|u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)\|_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\|l\|_{L^{2}(\Omega)}$$

et

$$\|\frac{u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)}{\varepsilon}\|_{H^{1}_{0}(\Omega)}\leq\frac{1}{\delta}\|l\|_{L^{2}(\Omega)} \tag{4.9}$$

donc

$\|\frac{u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)}{\varepsilon}\|_{H^{1}_{0}(\Omega)}$ est borné dan $H^{1}_{0}(\Omega)$, alors il existe ξ^{δ} dans le cas ε tend vers 0 .

$\frac{u^{\delta}(\psi+\varepsilon l)-u^{\delta}(\psi)}{\varepsilon}$ converge faiblement vers ξ^{δ} dans $H^{1}_{0}(\Omega)$, quand ε tend vers $0.$

D'autre part, d'après (4.4) pour $\boldsymbol{\psi}$ dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$, et pour tout $\boldsymbol{w}$ dans$\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ on a

$$\int_\Omega A\Big[\frac{u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)}{\varepsilon}\Big]wdx=-\frac{1}{\delta}\int_\Omega\int_0^1\beta'(.)d\theta\Big[\frac{u^\delta(\psi+\varepsilon l)-u^\delta(\psi)}{\varepsilon}-l\Big]wdx$$

alors si $\boldsymbol{\varepsilon}$ tend vers $\mathbf{0}$, on a

$$\int_\Omega A\xi^\delta wdx=-\frac{1}{\delta}\int_\Omega\beta'(u^\delta(\psi)-\psi)(\xi^\delta-l)wdx$$

donc $\displaystyle\int_\Omega A\xi^\delta wdx+\frac{1}{\delta}\int_\Omega\beta'(u^\delta(\psi)-\psi)(\xi^\delta-l)wdx=0$ En résulte que

$$\begin{cases}A\xi^\delta+\frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta-\psi)(\xi^\delta-l)=0 \text{ dans } \Omega\\[2ex] \xi^\delta=0 \text{ sur } \partial\Omega\end{cases}\tag{4.10}$$

Théorème 4.1.2 *Soit* $(\boldsymbol{u^\delta}, \boldsymbol{\psi^\delta})$ *solution optimale du* ***Problème*** $(\boldsymbol{P^\delta})$ *alors, il existe un état adjoint* $\boldsymbol{p^\delta}$ *tel que* $(\boldsymbol{u^\delta}, \boldsymbol{\psi^\delta}, \boldsymbol{p^\delta})$ *satisfait le système d'équation suivant :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{Au^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta) = 0} \quad \textit{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{A^*p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta = u^\delta - z} \quad \textit{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\int_\Omega \left\{ \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)lp^\delta + \nabla\psi^\delta\nabla l \right\} dx \geq 0} \quad \textit{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{u^\delta = 0} \quad \textit{sur} \quad \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \boldsymbol{\psi^\delta = 0} \quad \textit{sur} \quad \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \boldsymbol{p^\delta = 0} \quad \textit{sur} \quad \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.11}$$

Preuve. Soit $(\boldsymbol{u^\delta}, \boldsymbol{\psi^\delta})$ solution optimale du **Problème** $(\boldsymbol{P^\delta})$, soit $\boldsymbol{l}$ dans $\boldsymbol{H_0^1(\Omega)}$ arbitraire, 0n remplace $\boldsymbol{\psi}$ par $\boldsymbol{\psi^\delta}$ dans (4.1), on trouve

$$\begin{cases} \boldsymbol{A\xi^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)\xi^\delta = \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)l} \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\xi^\delta = 0} \quad \text{sur} \quad \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.12}$$

Pour simplifier la rédaction, on pose

$$\boldsymbol{A\xi^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)\xi^\delta = L\xi^\delta}$$

Par suit, l'inégalité (4.12) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \boldsymbol{L\xi^\delta = \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)l} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\xi^\delta = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.13}$$

dans la suite, on va déterminer l'adjoint de l'opérateur **L**, on a

$$\boldsymbol{L^*\xi^\delta = A^*\xi^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)}$$

alors, on trouve que

$$\begin{cases} \boldsymbol{A^*p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta = u^\delta - z} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{p^\delta = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.14}$$

avec $\boldsymbol{A^*}$ est l'adjoint de l'opérateur $\boldsymbol{A}$.

D'autre part, si $\boldsymbol{(u^\delta, \psi^\delta)}$ solution optimale du **problème**$\boldsymbol{(p^\delta)}$, alors d'après la condition nécessaire d'optimalité on a

$$\boldsymbol{\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \inf \frac{J_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} \geq 0} \tag{4.15}$$

tel que

$$\boldsymbol{J_\delta(\psi) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tau_\delta(\psi) - z)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi)^2 dx}$$

et

$$J_\delta(\psi^\delta) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tau_\delta(\psi^\delta) - z)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi^\delta)^2 dx$$

oú

$$J_\delta(\psi^\delta) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u^\delta(\psi^\delta) - z)^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi^\delta)^2 dx$$

$$J_\delta(\psi^\delta) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big((u^\delta(\psi^\delta))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\psi^\delta)\Big)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\psi^\delta)^2)\ dx \tag{4.16}$$

et

$$j_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - z)^2\ dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(\psi^\delta + \varepsilon l)\ dx$$

$$\begin{aligned} J_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[(u^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l)\ \Big]dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[(\nabla\psi^\delta)^2 + \varepsilon^2(\nabla l)^2 + \\ & 2\varepsilon\nabla\psi^\delta\nabla l\Big]\ dx \end{aligned} \tag{4.17}$$

Par soustraction des deux égalité (4.16) et (4.17) on obtient

$$\begin{aligned} J_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - J_\delta(\psi^\delta) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[(u^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l))^2 + z^2 - 2zu^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) + (\nabla\psi^\delta)^2 + \varepsilon^2(\nabla l)^2 + \\ & 2\varepsilon\nabla\psi^\delta\nabla l - (u^\delta(\psi^\delta))^2 - z^2 + 2zu^\delta(\psi) - (\nabla\psi^\delta)^2\Big]\ dx \end{aligned} \tag{4.18}$$

et

$$\begin{aligned} J_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - J_\delta(\psi^\delta) =& \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[(u^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l))^2 - (u^\delta(\psi^\delta))^2 - 2z[u^\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - u^\delta(\psi^\delta)] \\ & + \varepsilon^2(\nabla l)^2 + 2\varepsilon\nabla\psi^\delta\nabla l\Big]\ dx \end{aligned} \tag{4.19}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{J_\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} =& \frac{1}{2}\int_\Omega \Bigg[\Big[\frac{u^\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-u^\delta\psi^\delta}{\varepsilon}\Big]\Big(u^\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)+u^\delta(\psi^\delta)\Big)\\ &-2z\Big[\frac{u^\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-u^\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon}\Big]+\frac{\varepsilon^2(\nabla l)^2}{\varepsilon}+\frac{2\varepsilon\nabla\psi^\delta\nabla l}{\varepsilon}\Bigg]\,dx\end{aligned} \tag{4.20}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\inf\frac{J_\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{2\xi^\delta u^\delta(\psi^\delta)-2z\xi^\delta+2\nabla\psi^\delta\nabla l\right\}\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\inf\frac{J_\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\int_\Omega 2\left\{\xi^\delta(u^\delta(\psi)-z)+\nabla\psi^\delta\nabla l\right\}\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\inf\frac{J_\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left\{\xi^\delta(u^\delta-z)+\nabla\psi^\delta\nabla l\right\}\,dx \tag{4.21}$$

Alors, d'après l'inégalité (4.15) on a

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\inf\frac{J_\delta(\psi^\delta+\varepsilon l)-J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left\{\xi^\delta(u^\delta-z)+\nabla\psi^\delta\nabla l\right\}dx \geq 0 \tag{4.22}$$

En multipliant l'équation (4.14) par ξ^δ, on trouve

$$(u^\delta-z)\xi^\delta = (A^*p^\delta+\frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta-\psi^\delta)p^\delta)\xi^\delta \tag{4.23}$$

On remplace (4.23) dans (4.22) on trouve

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0+} \inf \frac{J_\delta(\psi^\delta + \varepsilon l) - J_\delta(\psi^\delta)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left\{ (A^* p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta)\xi^\delta + \nabla\psi^\delta \nabla l \right\} dx \geq 0 \tag{4.24}$$

Ensuite, on multipliant (4.12) par p^δ et en intégrant sur Ω, on trouve

$$\int_\Omega \left\{ A\xi^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)\xi^\delta \right\} p^\delta dx = \int_\Omega \frac{1}{\delta} \left\{ \beta'(u^\delta - \psi^\delta) l \right\} p^\delta dx \tag{4.25}$$

et comme

$$\left\langle A^* p^\delta . \xi^\delta \right\rangle = \left\langle p^\delta . A\xi^\delta \right\rangle$$

alors, on peut écrire (4.22) sous la forme

$$\int_\Omega \left\{ A^* p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta \right\} \xi^\delta dx = \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta) l p^\delta dx \geq 0 \tag{4.26}$$

donc , l'inégalité (4.21) devient

$$\int_\Omega \left\{ \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta) l p^\delta + \nabla\psi^\delta \nabla l \right\} dx \geq 0 \tag{4.27}$$

D'après (4.1), (4.14), (4.24) le système du **problème (p^δ)** est le suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Au^{\delta} + \frac{1}{\delta}\beta'(u^{\delta} - \psi^{\delta}) = 0} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{A^{*}p^{\delta} + \frac{1}{\delta}\beta'(u^{\delta} - \psi^{\delta})p^{\delta} = u^{\delta} - z} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{\Omega}} \left\{ \boldsymbol{\frac{1}{\delta}\beta'(u^{\delta} - \psi^{\delta})lp^{\delta} + \nabla\psi^{\delta}\nabla l} \right\} \boldsymbol{dx \geq 0} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{u^{\delta} = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \boldsymbol{\psi^{\delta} = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \boldsymbol{p^{\delta} = 0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.28}$$

4.2 Système d'optimalité du problème initial

Théorème 4.2.1 *Soit* $(\bar{\psi}, \bar{u})$ *dans* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ *une paire optimale du* ***Problème*** (P), *alors il existe* $\bar{p}$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *et* $\bar{q}$ *dans* $H^{-1}(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{cases} \bar{u} = \tau(\bar{\psi}) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ A^*\bar{p} + \bar{q} = \bar{u} - z \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \int_\Omega \left\{ \bar{q}l + \nabla\bar{\psi}\nabla l \right\} dx \geq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \bar{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \bar{p} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \\ \bar{\psi} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.29}$$

Preuve. Pour passer à la limite dans le problème (4.11) , il faut montrer les estimations à priories pour p^δ , en multipliant l'équation suivante :

$$A^* p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta = u^\delta - z$$

par une fonction test $v = p^\delta$, et en intégrant sur Ω, en trouvant

$$\int_\Omega [A^* p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta] p^\delta dx = \int_\Omega (u^\delta - z) p^\delta dx$$

Donc

$$\int_\Omega A^* p^\delta p^\delta dx + \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx = \int_\Omega (u^\delta - z) p^\delta dx$$

et

$$\langle Ap^\delta, p^\delta \rangle + \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx = \int_\Omega (u^\delta - z)p^\delta dx$$

D'après la coercitive de $a(.,.)$ on a :

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx \leq \int_\Omega (u^\delta - z)p^\delta dx$$

Ainsi :

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq -\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx + \int_\Omega (u^\delta - z)p^\delta dx$$

Comme $(p^\delta)^2 \geq 0$ et $\beta'(r) \geq 0$, pour tout r dans $\mathbb{R}$ alors

$$\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx \geq 0$$

Donc

$$-\frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta'(u^\delta - \psi^\delta)(p^\delta)^2 dx \leq 0$$

ainsi

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega (u^\delta - z)p^\delta dx$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, on trouve

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega (u^\delta - z)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (p^\delta)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \| p^\delta \|_{L_2(\Omega)}$$

De plus

$$\| p^\delta \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \| p^\delta \|_{H_0^1(\Omega)}$$

Alors

$$\| p^\delta \|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \| u^\delta - z \|_{L_2(\Omega)} \tag{4.30}$$

donc p^δ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe $\bar{p}$ dans $H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$p^\delta \text{converge faiblement vers } \bar{p} \text{ dans } H_0^1(\Omega) \tag{4.31}$$

Soit

$$q^\delta = \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta$$

Soit ϕ dans $H_0^1(\Omega)$ arbitraire , d'après l'égalité :

$$A^* p^\delta + \frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta = u^\delta - z$$

Nous obtenons :

$$\frac{1}{\delta}\beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta = u^\delta - z - A^* p^\delta$$

On a

$$\langle q^\delta, \phi \rangle = q^\delta(\phi) = \frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta \phi \, dx$$

alors

$$\left| q^\delta(\phi) \right| = \left| \frac{1}{\delta}\int_\Omega \beta'(u^\delta - \psi^\delta)p^\delta \phi dx \right|$$

et

$$\left|q^\delta(\phi)\right| = \left|\int_\Omega (u^\delta - z - A^* p^\delta)\phi dx\right|$$

$$\left|q^\delta(\phi)\right| = \left|\int_\Omega (u^\delta - z)\phi dx - \int_\Omega A^* p^\delta \phi dx\right|$$

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq \left|\int_\Omega (u^\delta - z)\phi dx\right| + \left|\int_\Omega A^* p^\delta \phi \, dx\right|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz , et la continuité de $a(.,.)$ on trouve :

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq \left|\left(\int_\Omega (u^\delta - z)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (\phi)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right| + \|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Ainsi

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{4.32}$$

On a ϕ dans $H_0^1(\Omega)$ alors d'aprés les injections de Sobolev, on trouve que :

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

on remplace dans (4.32), on trouve

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|p^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

En utilisant l'inégalité (4.30), on trouve

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq \|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)} + c\|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)} \|\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

alors

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq (1+c)\|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc

$$\left|q^\delta(\phi)\right| \leq c^*\|u^\delta - z\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

avec

$$c^* = 1 + c$$

On a

$$\|q^\delta\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi\in H_0^1(\Omega),\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} \frac{\langle q^\delta, \phi\rangle}{\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}} = \sup_{\phi\in H_0^1(\Omega),\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |q^\delta(\phi)|$$

donc

$$\|q^\delta\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\phi\in H_0^1(\Omega),\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |q^\delta(\phi)| \leq c^*\|u^\delta - z\|_{H_0^1(\Omega)}$$

ainsi, q^δ est borné dans $H^{-1}(\Omega)$, alors il existe $\bar{q}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ tel que :

$$q^\delta \text{ converge faiblement étoile vers } \bar{q} \text{ dans } H^{-1}(\Omega)$$

et on a précédemment

$$u^\delta \text{ converge faiblement vers } \bar{u} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

$$\psi^\delta \text{ converge faiblement vers } \bar{\psi} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

$$p^\delta \text{ converge faiblement vers } \bar{p} \text{ dans } H_0^1(\Omega)$$

Finalement ; et par passage à la limite dans , on trouve

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\tau}(\bar{\boldsymbol{\psi}}) \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{A}^* \bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{q}} = \bar{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{z} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{\Omega}} \left\{ \bar{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\nabla} \bar{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{l} \right\} \boldsymbol{dx} \geq \boldsymbol{0} \text{ dans } \boldsymbol{\Omega} \\ \bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \\ \bar{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \boldsymbol{\partial\Omega} \end{cases} \tag{4.33}$$

CONCLUSION

A fin de clôturer ce travail , nous rappelons brièvement les principaux idées obtenues tout en mettant .

La problématique traité dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre du contrôle optimal des inéquations variationnelles elliptiques, en premier lieu, on à démontrer un théorème d'existence de la solution optimale de notre problème, en suite, nous nous sommes intéressés à la caractérisation des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, où il faut dériver la fonction objectif $\boldsymbol{J(\psi)}$ qui dépend de $\boldsymbol{\tau(\psi)}$, mais l'application $\boldsymbol{(\psi) \to u = \tau(\psi)}$ n'est pas différentiable même au sens faible, alors, on à introduit une famille de problèmes approches, où il s'agit d'introduire un paramètre d'approximation $\boldsymbol{\delta}$ qui est censé tendre vers $\mathbf{0}$, tel que l'application $\boldsymbol{(\psi) \to \tau^{\delta}(\psi)}$ admet une différentielle au sens faible, par suite, on a obtenu un système d'optimalité approché (qui dépend du paramètre $\boldsymbol{\delta}$), en faisant tendre $\boldsymbol{\delta}$ vers $\mathbf{0}$, on a obtenu le système d'optimalité de notre problème.

En perspective , plusieurs questions restent ouvertes et méritent d'être traitées , par exemple :

-La résolution numérique du problème .

- L'étude des inéquations variationnelle hyperboliques ou bien paraboliques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adams D. R. HRynkiv V, and, S. Lenhart. *Optimal control of a biharmonique obstacle problem, Around the research of vladinir Maz'y II : 1-24, Int.Math.Ser.(N.Y), (13) springer, New York, (2010).*

[2] Adams D.R, Lenhart S, and J. Yong. *optimal control of the obstacle for an elliptic variational inequality, Applied Mathematics and optimization (38) 121-140, (1998).*

[3] Adams D.R, Lenhart S. *An obstacle control problem with a source term. Applied mathematics and optimization journal 47.79-95(2003).*

[4] Bergounioux, M.and Lenhart, S. *Optimal control of bilateral obstacle problems, SIAMJ. On control 43(2004), 240-255.*

[5] H. Brizis et Stampachia. *sur la régularité de la solution d'inéquation elliptique. Bulletin de société mathématique de France, (96) : 153-180, (1968).*

[6] Lenhart Suzanne. *Optimal control of partail diferential equations and variational inequalities(may 2006)*

[7] R. Chanem. *Controle optimal de l'obstacle, 978-3-8381-7304-7. (2012), Presses Académiques Francophones*

[8] Radouen Ghanem, Ibtissam Nouri. *Applied Mathematics and Optimization 76 (3), 465-500,2017*

[9] Yuquan ye and Q chen. *Optimal control of the obstacle in a quasilinear elliptic variational inequality, J. Math, Anal, Appl, 294(2004)258-272.*