وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude d'un problème de contact thermo-viscoélastique en piézoélectricité.

Option: A.N.E.D.P

Par:

1. **Grimed Maroua**
2. **Keddache Hala**

Encadré par : Kasri Abderrezak **MCA** U. SKIKDA

Devant le jury:

Président : khemis rabah MCA U. SKIKDA

Examinateur: Ghennam Karima. MCB U. SKIKDA

Année: 2021/2022

Résumé

Le but de ce travail est d’étudier un problème de contact avec frottement pour un corps thermo-électro-viscoélastique. Dans un premier temps, nous démontrons l’existence et l’unicité de la solution faible et nous étudions également la dépendance de la solution sur les données. Nous introduisons ensuite un schéma entièrement discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d’erreur.

Mots clés: Matériau thermo-électro-viscoélastique, processus quasistatique, loi de frottement Tresca, contact bilatéral, un schéma entièrement discret, estimations d’erreur.

Abstract

The aim of this work is to study a problem of contact with friction for a thermo-electro-viscoelastic body. First, we demonstrate the existence and uniqueness of the weak solution and we also study the dependence of the solution on the data. We then introduce a fully discrete scheme for the model and under appropriate smoothness assumptions derive error estimates.

Keywords: Thermo-electro-viscoelastic material, quasistatic process, Tresca friction law, bilateral contact, a fully discrete scheme, error estimates.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة مشكلة التلامس مع الاحتكاك لجسم حراري كهربائي مرن. أولاً ، نظهر وجود الحل الضعيف وتفرده ونقوم أيضًا بدراسة اعتماد الحل على البيانات. نقدم بعد ذلك مخططًا منفصلاً تمامًا للنموذج وتحت افتراضات السلاسة المناسبة ، نشتق تقديرات الخطأ..

الكلمات المفتاحية: مادة لزجة حرارية كهربائية ، عملية شبه ساكنة ، قانون احتكاك تريسكا، اتصال ثنائي ، مخطط منفصل بالكامل ، تقديرات خطأ.

Remerciements

Nous tenons à remercier **ALLAH** le tout puissant d'avoir nous donner la volonté et la patience de mener à bien ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr** : **Kasri Abderrezak** pour nous avoir un sujet de mémoire Master aussi intéressant et pour son soutien durant l'élaboration de notre travail.

Nos remerciements vont également aux

• Président de jury : Khemis Rabah M.C.A U. SKIKDA

• Examinateur : Ghennam Karima M.C.B U. SKIKDA

d'avoir accepté d'évaluer et d'examiner ce travail.

Enfin, nous tenons à remercier nos famille, nos collègues, nos enseignants et tous qui ont contribué à nos parcours académiques.

Dédicace

Nous dédions *ce travail :*

A nos chèrs parents, de leurs sacrifices et leurs encouragements.

A nos chèrs frères et nos chères soeurs sources de joie et de bonheur.

A nos famille, sources d'espoir et de motivation pour leur soutien au long de nos parcours universitaires.

TABLE DES MATIÈRES

1 Modélisation **1**

1.1 Équations constitutives 1

1.1.1 Loi de comportement élastique 2

1.1.2 Loi de comportement piézoélectrique 2

1.1.3 Loi de comportement viscoélastique 3

1.2 Effets thermiques 4

1.2.1 Loi thermoviscoélastique 4

1.2.2 L'équation de l'énergie 4

1.3 Equations de mouvement et d'équilibre 5

1.4 Conditions aux limites 5

1.4.1 Les conditions aux limites des déplacements et des tractions 6

1.4.2 Condition de contact bilatéral 6

1.4.3 Condition de contact avec la loi de frottement de Tresca 7

1.4.4 Conditions aux limites électriques 7

1.4.5 Conditions aux limites thermiques 8

2 Rappels et préliminaires **9**

2.1 Quelques resultats dans les espaces de Banach 9

2.2 Quelques resultats dans les espaces de Hilbert 10
2.3 Espaces de fonctions vectorielles 12
2.4 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact 16
2.5 Approximation par éléments finis 17

3 Problème thermo-électro-viscoélastique avec frottement 22
3.1 Hypothèses et formulation variationnelle 24
3.2 Existence et unicité d'une solution faible 31
3.3 Approximation Numérique 38

Introduction

La mécanique des contacts fait partie du génie mécanique qui concentre son objectif sur l'étude de la déformation de solides qui se touchent en un ou plusieurs points. La première contribution reconnue sur le contact entre solides déformables est celle de Hertz qui se limitait aux surfaces sans frottement et aux corps parfaitement élastiques. Cependant, les développements dans la théorie de la mécanique des contacts n'apparaissent qu'au début du 20 ème siècle où le problème de Signorini est posé dans [18] et résolu par Fichera [8] qui utilise le terme d'inéquation variationnelle.

Dans ce mémoire, nous considérons un problème de contact quasistatique qui décrit le contact avec frottement entre un corps piézoélectrique et une fondation. L'effet piézoélectrique résulte du couplage entre les propriétés électriques et mécaniques dans lesquelles le corps a la capacité de produire un champ électrique lorsqu'une contrainte mécanique est présente et, à l'inverse, sous l'action d'un champ électrique le corps subit une stresse. Pour cette raison, les matériaux piézoélectriques sont utilisés de manière intensive dans diverses applications.

En particulier, ils sont utilisés comme capteurs et actionneurs dans divers équipements de mesure. Modélisation et analyse récentes des problèmes de contact prenant en compte compte de l'interaction entre les champs électriques et mécaniques peut être trouvé dans [1, 2, 11, 17, 21].

Le plan de ce travail, composé de trois chapitres, est le suivant. Le Chapitre 1 comprend la description classique des équations, des relations constitutives des matériaux électro-viscoélastiques et des conditions aux limites. Dans le Chapitre 2, on rappelle des notations mathématiques nécessaires à la compréhension de ce travail. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude d'un problème de contact bilatéral avec une loi de frottement de Tresca pour un matériau thermo-électro-viscoélastique avec memoire longue. Sous des hypothèses suffisantes, nous fournissons une formulation faible du problème mécanique et établissons l'existence et l'unicité d'une solution faible. Nous introduisons ensuite un schéma entièrement discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous dérivons des estimations d'erreur.

Notations

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;

$\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ;

$\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres non négatifs ;

$\mathbb{R}^{+,*}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs ;

$\emptyset$ l'ensemble vide ;

$[0, T]$ représente l'intervalle de temps, où $T > 0$;

$\mathbb{R}^d$ l'espace euclidien $d-$dimensionnel, $(d{=}2, 3)$;

$\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$, $(d{=}2, 3)$;

I représente l'application d'identité ;

I_d représente l'application d'identité dans $\mathbb{S}^d$;

c représente une constante positive générique dont la valeur changer au cours de ce mémoire ;

p.p. signifie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue ;

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ représentent les dérivées par rapport au temps ;

$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ représente la dérivée partielle de la fonction u_i par rapport à la composante x_j ;

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$ $(d{=}2, 3)$ à frontière Lipschitzienne Γ ;

$\overline{\Omega}$ est la fermeture (adhérence) de Ω ;

$C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre m sont continus jusqu'à la frontière Γ ;

$L^p(\Omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions $p-$intégrables sur Ω, avec la modification usielle si $p = \infty$;

CHAPITRE 1

Modélisation

Dans ce Chapitre, nous présentons une description générale de la modélisation de contact pour des corps déformables, pour plus des détails voir [1, 2, 9, 19, 20]. Soit $[0,T]$ un intervalle de temps, soit $t \in [0,T]$ la variable du temps. Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$ (d=2, 3) représentant la configuration de référence d'un corps déformable pouvant entrer en contact avec un obstacle. Soit $x \in \bar{\Omega}$ la variable spatiale. On note $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur $\mathbb{R}^d$. On définit les produits scalairs et les normes correspondantes sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i, \ \ |u| = \sqrt[2]{u \cdot u}, \forall u, \ v \ \in \mathbb{R}^d \, ;$$

$$\sigma \cdot \xi = \sum_{1 \leq i,j \leq d} \sigma_{ij} \xi_{ij}, \ |\sigma| = \sqrt[2]{\sigma \cdot \sigma}, \forall \sigma, \ \xi \in \mathbb{S}^d.$$

1.1 Équations constitutives

La loi de comportement caractérise le comportement du corps, elle est donnée par une relation entre le tenseur des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ et le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$, où $u = (u_i)$ est le champ des déplacements. Les composantes du tenseur de déformation, dans le cadre de petites déformations, sont données par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), 1 \leq i, j \leq d. \tag{1.1}$$

1.1.1 Loi de comportement élastique

L'élasticité est la capacité d'un corps à résister à la force de déformation et à retrouver sa taille et sa forme d'origine lorsque cette force est supprimée. Une loi de comportement élastique linéaire est donnée par

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(u),$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$, $1 \leq i, j, k, l \leq d$, est un tenseur d'élasticité du quatrième ordre. Sous la forme de composantes, cette équation constitutive est donnée par

$$\sigma_{ij} = \sum_{1 \leq k,l \leq d} \mathcal{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

où $\mathcal{E}_{ijkl}$ sont les coefficients d'élasticité.

1.1.2 Loi de comportement piézoélectrique

L'effet piézoélectrique résulte du couplage entre les propriétés électriques et mécaniques dans lesquelles le corps a le capacité à produire un champ électrique lorsqu'une contrainte mécanique est présente et, à l'inverse, sous l'action d'un champ électrique le corps subit une contrainte mécanique. La loi de comportement serait utilisée est de la forme

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{E}^*\nabla(\varphi) \ dans\ \Omega, \\ D &= \mathcal{C}E(\varphi) + \mathcal{E}\varepsilon(u) \ \ dans\ \Omega, \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont des fonctions constitutives. $\mathcal{A}$ représente l'opérateur d'élasticité. D est le champ des déplacements électriques, $\mathcal{E}$ est le tenseur piézoeléctrique, $\mathcal{E}^*$ est sa transposée, $\mathcal{C}$ dénote le champ de la permittivité électrique, $E = -\nabla\varphi$ est le champ électrique, φ est le champ de potentiel électrique.

1.1.3 Loi de comportement viscoélastique

La viscoélasticité est la propriété des matériaux qui présentent à la fois des caractéristiques visqueuses et élastiques lorsqu'ils subissent une déformation. Une loi de comportement viscoélastique générale est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u), \ in\ \Omega \times [0, T].$$

Où $\mathcal{B}$ est un opérateur d'élasticité non linéaire et $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité. Ici et ci-dessous, un point au dessus d'une variable dénote la dérivée par rapport au temps, donc $\dot{u} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et and $\ddot{u} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. En viscoélasticité linéarisée, l'équation ci-dessus est donnée par la relation de type Kelvin-Voigt

$$\sigma_{ij} = \sum_{1 \le k,l \le d} \left(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) \right), \ 1 \le i, j \le d.$$

Où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est l'opérateur de viscosité et $\mathcal{B} = (g_{ijkl})$ est l'opérateur d'élasticité.

Les termes de viscosité dans les équations ci-dessus dépendent de la vitesse et représentent la mémoire à court terme.

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) + \int_0^t \mathcal{G}\,(t - s)\,\varepsilon(u\,(s))ds, \ in\ \Omega \times [0, T].$$

La mémoire non locale ou à long terme a la forme

$$\int_0^t \mathcal{G}\,(t-s)\,\varepsilon(u\,(s))ds,\ \ in\ \Omega\times[0,T]\,,$$

où $\mathcal{G}=(g_{ijkl})$ est un tenseur du quatrième ordre.

1.2 Effets thermiques

Pour prendre en compte les effets thermiques, nous avons besoin de quelques éléments : frottement condition de génération de chaleur, condition décrivant l'échange de chaleur entre corps et la fondation, une relation constitutive et l'équation énergétique.

1.2.1 Loi thermoviscoélastique

Une relation thermoviscoélastique, prenant compte tenu de la dilatation thermique du matériau est donnée par

$$\sigma=\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u})+\mathcal{B}\varepsilon(u)-\mathcal{M}\theta,\ \ in\ \Omega\times[0,T]\,.$$

Où $\mathcal{B}$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $\mathcal{M}$ est le tenseur de dilatation thermique et $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité.

1.2.2 L'équation de l'énergie

Une équation qui prend en compte la génération de chaleur visqueuse est donnée par

$$\dot{\theta}-\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta)=\xi-\mathcal{M}\cdot\varepsilon(\dot{u}),\ \ dans\ \Omega\times(0,T),$$

où θ est la température, $\mathcal{K}=(k_{ij})$ est le tenseur de conductivité thermique, le terme ξ représente une source de chaleur volumique.

1.3 Equations de mouvement et d'équilibre

Les équations dynamiques de mouvement, représentant la conservation de la quantité de mouvement et qui régissent l'évolution de l'état du corps sont

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Div\sigma + f_0 \text{ dans } \Omega \times [0, T],$$

où ρ est la densité du matériau et f_0 est la densité des forces appliquées. Dans des situations, lorsque la configuration du système et les forces et tractions externes varient lentement dans le temps, de sorte que les termes inertiels $\rho\ddot{u}$ peuvent être négligés, nous obtenons les équations d'équilibre

$$Div\sigma + f_0 = 0 \; dans \; \Omega \times [0, T],$$

qui représentent l'approximation quasistatique des équations de mouvement, où 'Div' est l'opérateur de divergence, c'est-à-dire

$$Div\sigma = ((Div\sigma)_i)_{1\leq i\leq d}, \;\; (Div\sigma)_i = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}, \;\; 1 \leq i \leq d.$$

1.4 Conditions aux limites

Passons maintenant aux conditions aux limites. À cette fin, nous supposons que Ω est un domaine, borné dans $\mathbb{R}^d$ (d=2, 3), à frontière Lipschitzienne Γ. Ainsi, le vecteur normal d'unité extérieure $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d)$ est défini presque par tous sur Γ. Pour plus de détails sur la régularité de la frontière, voir par exemple [1]. Si v est un champ vectoriel défini sur Γ, alors nous notons v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielles de v sur la frontière Γ

$$v_\nu = v \cdot \nu, \;\; v_\tau = v - v_\nu\nu \; sur \; \Gamma.$$

De même, la composante normale σ_ν et la composante tangentielle σ_τ d'un tenseur σ sont données par

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu,\ \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu\ sur\ \Gamma.$$

Tout au long de ce mémoire, nous supposons que la surface Γ est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telle que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$.

1.4.1 Les conditions aux limites des déplacements et des tractions

Le corps est supposé fixé sur la partie Γ_1 et donc nous utilisons la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

tandis que des tractions surfaciques de densité f_2 agissent sur Γ_2. Alors, le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait

$$\sigma\nu = f_2\ sur\ \Gamma_2.$$

Nous passons maintenant à la description des conditions aux limites sur Γ_3, que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.4.2 Condition de contact bilatéral

Cela signifie que le contact entre le corps et la fondation est maintenu à tout moment et il est modélisé par l'équation

$$u_\nu = 0,\ \text{on } \Gamma_3.$$

Cette condition peut être trouvée dans de nombreuses machines et dans les pièces mobiles et les composants des équipements mécaniques.

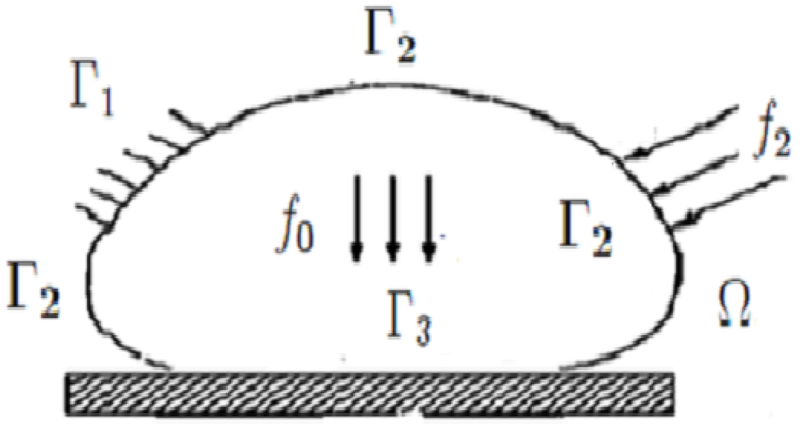

Fig 1: un corps déformable en contact avec une fondation

1.4.3 Condition de contact avec la loi de frottement de Tresca

La loi de frottement de Tresca se lit comme suit

$$\begin{cases} |\sigma_\tau| \leq g_b, \\ \\ \sigma_\tau = -g_b \dfrac{\dot{u}_\tau}{|\dot{u}_\tau|} \; si \; \dot{u}_\tau \neq 0 \end{cases} \quad on \; \Gamma_3,$$

ce qui stipule que, s'il y a de contact, la traction tangentielle σ_τ est bornée par la borne de frottement g_b. Si l'inégalité stricte est satisfaite, le glissement ne se produit pas, et lorsque l'égalité est satisfaite, la contrainte de frottement est opposée au taux de glissement.

1.4.4 Conditions aux limites électriques

Pour un corps piézoélectrique, d'autre part, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est divisée en deux parties disjointes et mesurables Γ_a et Γ_b telles que $mes\,(\Gamma_a) > 0$. Nous supposons qu'une charge électrique de surface de densité q_2 est prescrite sur Γ_b

telle que

$$D \cdot v = q_2 \ sur \ \Gamma_b.$$

En outre, nous supposons que le champ potentiel électrique satisfait à :

$$\varphi = 0 \ sur \ \Gamma_a.$$

1.4.5 Conditions aux limites thermiques

La condition d'échange de chaleur ponctuelle sur la surface de contact est habituellement donnée par

$$-\left(\mathcal{K}\nabla\theta\right)\cdot\nu = k_{th}\left(\theta - \theta_f\right), \ sur \ \Gamma_3 \times (0, T).$$

$\mathcal{K} = (k_{ij})$ est le tenseur de conductivité thermique, θ est la température de surface ponctuelle, k_{th} est le coefficient d'échange thermique et θ_f est la température connue de la fondation.

Par souci de simplicité, nous supposons que la température totale de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est maintenue constante, à la température ambiante qui est mise à l'échelle pour être nulle

$$\theta = 0, \ sur \ (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T),$$

CHAPITRE 2

Rappels et préliminaires

Dans ce Chapitre on va présenter quelques rappels d'analyse fonctionnelle ét donner des notations principales seront utilisées dans ce mémoire, pour plus des détails voir [3, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 19, 20].

2.1 Quelques resultats dans les espaces de Banach

Pour chaque espace de Banach réel X, on note par X^*, $\|.\|_X$, $\langle , \rangle_{X^* \times X}$ et $\mathcal{L}(X, X^*)$ le dual topologique de X, la norme sur X, le produit de dualité entre X et X^*, l'espace vectoriel des toutes les applications linéaires continues entre X et X^*, respectivement. Dans cette Section, X est un espace de Banach réel.

Définition 2.1 *Soit $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$, une fonction, le domaine effectif de Φ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur ∞,*

$$D(\Phi) = \{u \in X : \Phi(u) < \infty \},$$

et on dit que Φ est propre si $D(\Phi) \neq \emptyset$. Le sous-différentiel de Φ en $u \in X$

est l'ensemble

$$\partial\Phi\left(u\right)=\left\{l\in X:\langle l,v-u\rangle_{X}<\Phi\left(v\right)-\Phi\left(u\right)\ \ ,\forall v\in X\right\}.$$

Définition 2.2 *Une fonction $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe ssi*

$$\Phi\left(\left(1-\alpha\right)u+\alpha v\right)\leq\left(1-\alpha\right)\Phi\left(u\right)+\alpha\Phi\left(v\right),\ \forall u,v\in X,\ \forall\alpha\in\left(0,1\right).$$

φ est strictement convexe si,

$$\Phi\left(\left(1-\alpha\right)u+\alpha v\right)<\left(1-\alpha\right)\Phi\left(u\right)+\alpha\Phi\left(v\right),\ \forall u,v\in X,\ \forall\alpha\in\left(0,1\right).$$

On dit que Φ est semi-continu inférieurement en $u \in X$ si, pour chaque suite$\{u_n\} \subset X$, telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|u_n-u\right\|_X=0,$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty}\inf\Phi\left(u_n\right)\geq\varphi\left(u\right).$$

Définition 2.3 *Soit $F : X \to X$ une application. On dit que F admet un point fixe ssi $\exists\ u \in X$, tel que $F(u) = u$ et on dit que F est contractante ssi il existe une constante $L_F \in [0, 1)$, telle que*

$$\left\|F(u)-F(v)\right\|_X\leq L_F\left\|u-v\right\|_X,\ \forall u,v\in X.$$

Proposition 2.1 *Soit X un espace de Banach et soit $F : X \to X$ une application contractante, Alors, F admet un unique point fixe .*

2.2 Quelques resultats dans les espaces de Hilbert

Pour tout espace de Hilbert réel X, nous notons par $\langle .,.\rangle_X$ et $\|.\|_X$ le produit scalaire et la norme associée sur X, respectivement. Dans cette section, X est un espace de Hilbert.

Proposition 2.2 *(Théorème de représentation de Riesz). Pour tout* $\eta \in X^*$, *il existe un unique élement* $f \in X$ *tel que*

$$(\eta, v)_{X^* \times X} = (f, v)_X \, , \, \forall v \in X.$$

De plus, on a

$$\|\eta\|_{X^*} = \|f\|_X \, .$$

Alors, on peut identifier l'espace de Hilbert X *avec son dual* X^* *et on désigne encore par* f *l'élement de* X *qui représente uniquement la forme linéaire et continue* η.

Définition 2.4 *Soit* $a : X \times X \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire. 1) a est continue sur* X *s'il existe une constante réelle* $L_a > 0$, *telle que*

$$|a(w_1, w_2)| \leqslant L_a \|w_1\|_X \|w_2\|_X \, , \, \forall w_1, w_2 \in X. \tag{2.1}$$

2) a est coercive (X*-elliptique) s'il existe une constante réelle* $m_a > 0$, *telle que*

$$m_a \|w\|_X^2 \leqslant a(w, w) \, , \, \forall w \in X. \tag{2.2}$$

3) a est positive si

$$0 \leqslant a(w, w) \, , \, \forall w \in X.$$

4) a est symétrique si

$$a(w_1, w_2) = a(w_2, w_1) \, , \, \forall w_1, w_2 \in X.$$

Proposition 2.3 *(Théorème de Lax-Milgram). Soit* $a : X \times X \to \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire, coercive et continue. Alors, pour tout* $f \in X$, *le problème suivant : Trouver un élement* $u \in X$, *tel que*

$$a(u, v) = (f, v)_X \, , \, \forall v \in X,$$

admet une unique solution.

Définition 2.5 *Un opérateur $A : X \to X$ est*

1) fortement monotone sur X, s'il y a une constante $m_A > 0$ telle que

$$m_A \|w_1 - w_2\|_X^2 \leqslant (Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2)_X \, , \; \forall w_1, w_2 \in X.$$

2) continu de Lipschitz sur X, s'il y a une constante $L_A > 0$ telle que

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_X \leqslant L_A \|w_1 - w_2\|_X \, , \; \forall w_1, w_2 \in X.$$

Proposition 2.4 *Soit $A : X \to X$ un opérateur fortement monotone et continu de Lipschitz et soit $\Phi : X \to (-\infty, \infty]$ une fonction propre, convexe et semi-continu inférieurement sur X. Alors, pour tout $\eta \in X^*$, le problème suivant : Trouver un élement $u \in X$, tel que*

$$(Au, w - u)_V + \Phi(w) - \Phi(u) \geq \langle \eta, w - u \rangle_{X^* \times X} \, , \; \forall \; w \in X. \tag{2.3}$$

admet une unique solution.

2.3 Espaces de fonctions vectorielles

Définition 2.6 *Soit $(E, \sum, \mu)$ un espace de mesure et $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach. Soit $f : E \to X$ une fonction mesurable, f est intégrable au sens de Bocherner s'il existe une suite de fonctions simples intégrables $\{f_n\}$ telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E \|f - f_n\|_X \, d\mu = 0.$$

Maintenant, soit X un espace de Banach, soit $p \in [1, \infty]$ on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $t \mapsto u(t)$ de $]0, T[\to X$ qui sont mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|u(s)\|_X^p \, ds)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pour $p = \infty$

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u(t)\|_X = \inf \ \{ \ M \ \mid \ \|u(t)\|_X \leq M \ \ p.p \} \, .$$

Ainsi normé l'espace $L^p(0, T; X)$ est complet.

On désigne par $\mathcal{D}^{'}(0, T; X)$ l'espace des distributions sur $]0, T\ [$à valeurs dans X défini par

$$\mathcal{D}^{'}(0, X; T) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\,(]0, T[)\,; X).$$

Si $u \in \mathcal{D}^{'}(0, T; X)$, sa dérivée, au sens de distribution, est définie par

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{d\varphi}{dt}\right), \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(]0, T[)\,.$$

Si $u \in L^p(0, T; X)$, il lui correspond une distribution encore noté u sur $]0, T[$ à valeurs dans X, définie par

$$u(\varphi) = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(]0, T[)\,,$$

intégrale à valeurs dans X. On peut encore définir $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ comme élément de $\mathcal{D}^{'}(0, T; X)$.

On note par $W^{1,p}(0; T; X)$ l'espace des distributions vectorielles $u \in L^p(0, T; X)$ telles que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p\,(0, T; X)$. Si $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{1,p}(0, T; X)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En notant par $C([0, T]\,; X)$ l'espace des fonctions continues définie sur $]0, T[$ à valeurs dans X c'est a dire :

$$C\ \ ([0, T]\,; X) = \{\ u : [0, T] \to X \ \mid \ u \ est \ continue\}\,.$$

$C([0, T]\,; X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| .$$

On note également par $C^1([0,T]\,;X)$ l'espace des fonctions dérivables sur $[0,T]$ à valeurs dans X dont la dérivée est continue c'est à dire :

$$C^1([0,T]\,;X) = \{\ u : [0,T] \to X \text{ telle que } u \text{ dérivable}, \dot{u} \in C\,([0,T]\,;X)\ \}.$$

$C^1([0,T]\,;X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^1([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\| + \max_{t\in[0,T]} \|\dot{u}(t)\| .$$

Maintenant, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.5 *Soit $p \in [1,\infty]$, alors on a*

$$W^{1,p}(0,T,X) \subset C\ \ ([0,T]\,;X)\,. \tag{2.4}$$

Proposition 2.6 *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach. Une fonction mesurable $f : [0,T] \to X$ est intégrable au sens de Bocherner, ssi*

$$\int_0^T \|f(t)\|_X\, dt < +\infty.$$

De plus, on a

$$\left\| \int_0^T f(t)dt \right\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X\, dt.$$

Soit X et Y deux espaces de Hilbert réels tels que X est dense dans Y avec injection continue ; l'espace Y est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual X^* de X, alors on peut écrire le triplet de Gelfand

$$X \subset Y \subset X^*.$$

Proposition 2.7 *Soit $X \subset Y \subset X^*$ un triplet de Gelfand. Supposons que $A : X \to X^*$ est un*

opérateur linéaire continu et qui satisfait

$$\langle Av, v \rangle_{X^*,X} \geqslant c_1 \|v\|_X^2 , \ \forall v \in X,$$

pour $c_1 > 0$. Alors, pour chaque $w_0 \in Y$ et chaque $f \in L^2(0, T; X^*)$, il existe une unique fonction w qui vérifie :

$$w \in L^2(0, T; X) \cap C([0, T]; Y), \ \dot{w} \in L^2(0, T; X^*)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) + Aw(t) &= f(t), \text{ dans } X^*, \text{ p.p } t \in (0, T), \\ w(0) &= w_0. \end{aligned}$$

Nous utiliserons l'inégalité de type Gronwall suivante.

Proposition 2.8 *Soit X et Y deux espaces de Hilbert réels séparables tels que X est dense dans Y avec injection continue, alors on a*

$$\left\{ u \in L^p(0, T; X) \textit{ telles que } \frac{du}{dt} \in L^p(0, T; X^*) \right\} \subset C \ ([0, T]; Y).$$

De plus on a

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_Y = \left\langle \frac{du}{dt}(t), v \right\rangle_{X^* \times X}.$$

Proposition 2.9 *Supposons que f et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues qui vérifient*

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^t f(s)\, ds, \ \forall \ t \in [a, b],$$

où $c > 0$ est une constante. Alors,

$$f(t) \leq g(t) + c\int_a^t g(s)\exp(c(t-s))\,ds,\ \forall\ t \in [a,b].$$

2.4 Espaces fonctionnels pour la mécanique de contact

Soit Ω un domaine borné dans l'espace numérique $\mathbb{R}^d$, (d=2, 3), de variable $x = (x_1, ..., x_d)$, avec une frontiére de Lipschitz Γ. Nous introduisons les espaces

$$H = L^2(\Omega;\mathbb{R}^d),\ \mathcal{Q} = L^2(\Omega;\mathbb{S}^d),$$

$$H_1 = \{u \in H;\ \varepsilon(u) \in \mathcal{Q}\},\ \mathcal{Q}_1 = \{\sigma \in \mathcal{Q};\ Div\sigma \in H\},$$

$$\mathcal{Z} = \{D \in H; DivD \in L^2(\Omega)\}.$$

H, $\mathcal{Q}$, H_1, $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Z}$sont des espaces de Hilbert munis respectivement par des produits scalairs canoniques

$$(u,v)_H = \int_\Omega u \cdot v dx,\ \forall u,v \in H,\ (\sigma,\tau)_{\mathcal{Q}} = \int_\Omega \sigma \cdot \tau dx,\ \forall u,v \in \mathcal{Q},$$

$$(u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (\varepsilon(u),\varepsilon(v))_{\mathcal{Q}},\ \forall u,v \in H_1,$$

$$(\sigma,\tau)_{\mathcal{Q}_1} = (Div\sigma, Div\tau)_H + (\sigma,\tau)_{\mathcal{Q}},\ \forall \sigma,\tau \in \mathcal{Q}_1,$$

$$(D,B)_{\mathcal{Z}} = (\operatorname{div} D, \operatorname{div} B)_{L^2(\Omega)} + (D,B)_H,$$

où les nomes associées sont notées respectivement par $\|.\|_H$, $\|.\|_{\mathcal{Q}}$, $\|.\|_{H_1}$, $\|.\|_{\mathcal{Q}_1}$ et $\|.\|_{\mathcal{Z}}$.

Nous pouvons définir l'application de la trace $\tilde{\gamma} : H_1 \to L^2(\Gamma;\mathbb{R}^d)$ qui est un opérateur linéaire continu tel que $\tilde{\gamma}(v) = v_{|\Gamma}$ si $v \in H_1 \cap \left[C\left(\bar{\Omega}\right)\right]^d$. Soit $H_\Gamma = H^{1/2}(\Gamma; \mathbb{R}^d)$, alors $\tilde{\gamma} : H_1 \to H_\Gamma$ est linéaire, continu et sujectif. On rappelle que $\tilde{\gamma}$ est un opérateur compact, c'est-à-dire que pour toute suite bornée $\{v_n\}$ dans H_1, il existe une sous-suite de $\{v_n\}$ qui est convergente dans $L^2(\Gamma)^d$.

Pour chaque élément $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour notée la trace $\tilde{\gamma}(v)$ de v sur Γ. De plus, si $\sigma \in \mathcal{Q}_1$ est régulière, alors on a la formule de Green suivante

$$(Div\sigma, v)_H + (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v ds, \ \forall\ v \in H_1, \tag{2.5}$$

où ds est l'élément de mesure de la surface.

Aussi, on note φ la trace d'un élément $\varphi \in H^1(\Omega)$ sur Γ et on rappelle que lorsque $D \in \mathcal{Z}$ est une fonction régulière, la formule de Green suivante est vraie :

$$(\operatorname{div} D, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (D, \nabla\varphi)_H = \int_\Gamma D \cdot \nu\varphi da, \ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega), \tag{2.6}$$

où $\nabla : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est l'opérateur gradient défini par

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_{1 \le i \le d}, \ \forall\ \varphi \in H^1(\Omega).$$

2.5 Approximation par éléments finis

Notons que l'on peut étendre cette discussion à des domaines de dimensions autres que deux et par souci de simplicité, on suppose que $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ est polygonal et partitionné en un nombre fini de triangles $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h} \mathcal{T}$ et pour $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2 \in \mathcal{T}^h$, alors $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ soit vide, soit un sommet commun, soit un côté commun. Pour un élément quelconque $\mathcal{T} \in \mathcal{T}^h$, on note

$$h_{\mathcal{T}} = \max\left\{\|x - y\|\,;\ x, y \in \mathcal{T}\right\},$$

alors le paramètre de discrétisation est défini comme $h = \max\left\{h_{\mathcal{T}},\, \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h\right\}$. Soit $\rho_{\mathcal{T}}$ le diamètre de la plus grande sphère inscrite dans $\mathcal{T}$.

Définition 2.7 *Une famille de triangulation* $\left\{\mathcal{T}^h\right\}_h$ *de* $\overline{\Omega}$ *est dite régulière ssi* h *tend vers zéro et qu'il existe une constante* $\rho^* \geq 1$ *telle que*

$$\frac{h_{\mathcal{T}}}{\rho_{\mathcal{T}}} \leq \rho^*,\ \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h,\ \forall h.$$

Ici, $x_{1\mathcal{T}},\ x_{2\mathcal{T}},\ x_{3\mathcal{T}}$ sont les sommets et $b_{\mathcal{T}}$ est le barycentre de $\mathcal{T}$ voir Figure 2.

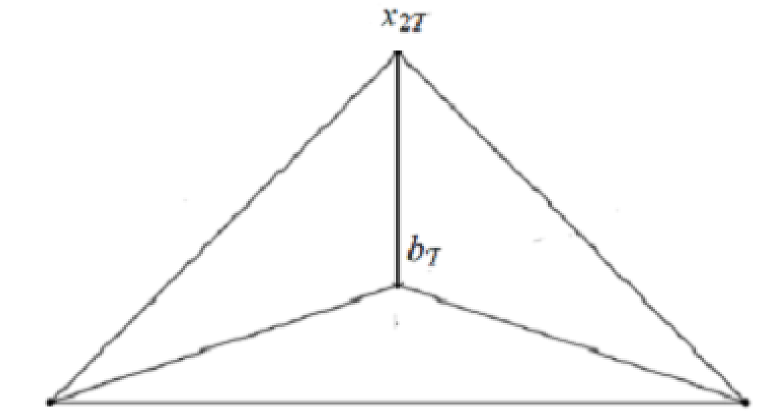

Fig 2 : un élément $\mathcal{T}$

Maintenant, si l'espace $X = H^1(\Omega)$ est à approximer, notons $\{x_i\}_{i=1}^{N_h} \subset \bar{\Omega}$ l'ensemble des sommets des éléments et soit $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ les fonctions de base d'éléments finis correspondantes qui sont linéaires sur chaque élément $\mathcal{T}$ et satisfont

$$\varphi_i\left(x_j\right) = \left\{\begin{array}{l} 1,\, i = j \\ 0,\, i \neq j \end{array}\right.,\ 1 \leq i, j \leq N_h. \tag{2.7}$$

Alors l'espace de fonction linéaire par morceaux correspondant est

$$X^h = span\left\{\varphi_i,\, 1 \leq i \leq N_h\right\}.$$

L'interpolation par éléments finis d'une fonction continue $v \in C\left(\bar{\Omega}\right)$ est donnée par

$$\Pi^h\left(v\right) = \sum_{i=1}^{N_h} v\left(x_i\right)\varphi_i.$$

Dans les approximations numériques, nous supposerons que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d{=}2,3)$, est un domaine polygonal/polyédrique et sa frontière Γ est divisée en trois sous-ensembles relativement fermés Γ_1, Γ_2 et Γ_3, avec mutuellement intérieurs disjoints. Pour $1 \leq j \leq 3$, on écrit $\Gamma_j = \bigcup_{i=1}^{i_j} \Gamma_j^i$ tel que sur chaque Γ_j^i, le vecteur normal extérieur unitaire soit constant. Soit $\mathcal{T}^h$ une famille régulière de partitions éléments finis de $\bar{\Omega}$ supposée compatible avec la décomposition de Γ, c'est-à-dire si S est un côté tel que pour certains j et i, $S \cap \Gamma_j^i$ contient un point intérieur de S, alors $S \subset \Gamma_j^i$. Notons $\mathcal{T}_{\Gamma_3}^h$ la partition de Γ_3 induite par la triangulation $\mathcal{T}^h$.

Soit E l'espace défini par

$$E = \{\theta \in H^1\left(\Omega\right),\ \theta{=}\ 0\ sur\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}.$$

Alors l'espace des éléments finis à utiliser est

$$E^h = \left\{\beta^h \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ \beta^h\,|_{\mathcal{T}} \in P_1\ \left(\mathcal{T}\right), \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h,\ \beta^h = 0\ sur\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2\right\}, \quad (2.8)$$

où $P_1\ (\mathcal{T})$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré global inférieur ou égal à 1 dans $\mathcal{T}$.Considérons l'espace

$$V{=}\{u \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d),\ u{=}\ 0\ on\ \Gamma_1,\ u_\nu{=}\ 0\ on\ \Gamma_3\ \}.$$

Alors l'espace des éléments finis à utiliser est

$$V^h = \left\{\begin{array}{c} w^h \in \left[C\left(\overline{\Omega}\right)\right]^d, w^h\,|_{\mathcal{T}} \in [P_1\ (K)]^d, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h,\ w^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ w_\nu^h\,|_\Sigma = 0,\ \forall \Sigma \in \mathcal{T}_{\Gamma_3}^h \end{array}\right\}, \quad (2.9)$$

Considérons l'espace

$$W=\{\psi \in H^1(\Omega),\ \psi=0 \ \text{ sur } \Gamma_a\}.$$

Alors l'espace des éléments finis à utiliser est

$$W^h = \left\{\psi^h \in C\left(\overline{\Omega}\right),\ \psi^h\,|_{\mathcal{T}} \in P_1\ \left(\mathcal{T}\right),\ \forall \mathcal{T} \in \mathcal{T}^h,\ \psi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_a\right\}. \tag{2.10}$$

Nous avons les estimations d'erreur suivantes

$$\left\|v - \Pi^h\left(v\right)\right\|_{L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \leq ch^2 \left\|v\right\|_{H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)},\ \forall v \in H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right), \tag{2.11}$$

$$\left\|v - \Pi^h\left(v\right)\right\|_{H^1\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)} \leq ch \left\|v\right\|_{H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right)},\ \forall v \in H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^d\right), \tag{2.12}$$

$$\left\|v - \Pi^h\left(\varphi\right)\right\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \left\|\varphi\right\|_{H^2(\Omega)},\ \forall \varphi \in H^2\left(\Omega\right), \tag{2.13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|v - \Pi^h\left(v\right)\ \right\|_{L^2\left(\Gamma_3;\mathbb{R}^d\right)} \leq ch^2 \sum\limits_{i=1}^{i_0} \left\|v\right\|_{H^2\left(\Gamma_i\ ;\mathbb{R}^d\right)}\ , \\ \\ \forall v \in L^2\left(\Gamma\right),\ v_{|\ \Gamma_i} \in H^2(\Gamma_i;\mathbb{R}^d), 1 \leq i \leq i_0. \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Nous terminons ce Chapitre par l'inégalité de type Gronwall suivante.

Proposition 2.10 *Soit $r \in \mathbb{R}^{+,*}$ et soit $l \in \mathbb{N}$. Supposons que $\{g_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ soient deux séquences satisfaisant*

$$g_n \geq 0,\ \alpha_n \geq 0, 1 \leq n \leq l,$$

avec

$$\alpha_n \leq c_1 g_n + c_1 \sum_{j=1}^{n-1} r\alpha_j, 1 \leq n \leq l,$$

pour $c_1 > 0$, indépendant de r ou l. Alors il existe $c > 0$, indépendant de r ou l, tel que

$$\alpha_n \leq c\left(g_n + \sum_{j=1}^{n-1} r g_j\right), 1 \leq n \leq l \ et \ \underset{1\leq n\leq l}{max}\ \alpha_n \leq c \underset{1\leq n\leq l}{max}\, g_n.$$

CHAPITRE 3

Problème thermo-électro-viscoélastique avec frottement

On considère un corps déformable qui occupe la configuration de référence $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(d{=}2,3)$, qui est un domaine borné à bord continu-Lipschitzien Γ. Le corps est supposé avoir une loi thermo-électro-viscoélastique avec memoire longue et le processus est quasistatique dans l'intervalle de temps $[0,T]$. On suppose une partition de Γ en trois parties ouvertes disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3, d'une part, et une partition de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en deux parties ouvertes disjointes Γ_a et Γ_b d'autre part, telles que $\mathrm{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $\mathrm{mes}(\Gamma_a) > 0$. Le corps est fixé sur Γ_1 et donc le champ des déplacements s'y annule. Nous supposons que des forces volumiques de densité f_0 et des charges électriques volumiques de densité q_0 agissent dans Ω et des tractions de surface de densité f_2 agissent sur Γ_2. Nous supposons également que le champ du potentiel électrique s'annule sur Γ_a et qu'une charge électrique de surface de densité q_2 est prescrite sur Γ_b. Le corps est en contact sur Γ_3 avec une fondation. Le contact est supposé bilatéral et régi par une loi de frottement de Tresca, où des effets thermiques peuvent se produire sur la surface de contact potentielle. Pour simplifier la notation, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions sur la variable spatiale $x \in \Omega \cup \Gamma$. Sous les hypothèses ci-dessus, la formulation classique de notre problème est la suivante.

Problème 3.1 *Trouver un champ des déplacements* $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$*, un champ des contraintes* $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$*, un champ de potentiel électrique* $\varphi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$*, un champ des déplacements électriques* $D : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *et un champ de température* $\theta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *tels que*

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \mathcal{E}^*(\nabla\varphi(t)) \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{G}(t-s)\,\varepsilon(u(s))\,ds - \theta(t)\,\mathcal{M},\ \textit{dans}\ \Omega \times (0,T), \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \mathcal{E}(\varepsilon(u)) - \mathcal{C}\nabla\varphi,\ \textit{dans}\ \Omega \times (0,T), && (3.2)\\
Div\sigma + f_0 &= 0,\ \textit{dans}\ \Omega \times (0,T), && (3.3)\\
\operatorname{div} D - q_0 &= 0,\ \textit{dans}\ \Omega \times (0,T), && (3.4)\\
\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) &= \xi - \mathcal{M}\cdot\varepsilon(\dot{u}),\ \textit{dans}\ \Omega \times (0,T), && (3.5)\\
u &= 0,\ \textit{sur}\ \Gamma_1 \times (0,T), && (3.6)\\
\sigma\nu &= f_2,\ \textit{sur}\ \Gamma_2 \times (0,T), && (3.7)\\
\varphi &= 0,\ \textit{sur}\ \Gamma_a \times (0,T), && (3.8)\\
D\cdot\nu &= q_2,\ \textit{sur}\ \Gamma_b \times (0,T), && (3.9)\\
\theta &= 0,\ \textit{sur}\ (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0,T), && (3.10)\\
u_\nu &= 0,\ \textit{sur}\ \Gamma_3 \times (0,T), && (3.11)\\
D\cdot\nu &= 0,\ \textit{sur}\ \Gamma_3 \times (0,T), && (3.12)\\
-(\mathcal{K}\nabla\theta)\cdot\nu &= k_{th}(\theta - \theta_f),\ \textit{sur}\ \Gamma_3 \times (0,T), && (3.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
|\sigma_\tau| \leqslant g_b, \\
|\sigma_\tau| < g_b \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\
|\sigma_\tau| = g_b \Rightarrow -\lambda\sigma_\tau = \dot{u}_\tau, \\
\textit{pour certains}\ \lambda \geq 0,
\end{cases} \quad \textit{sur}\ \Gamma_3 \times (0,T), \qquad (3.14)$$

$$(i)\ \ u(0) = u_0,\ \ (ii)\ \ \theta(0) = \theta_0\ in\ \Omega. \tag{3.15}$$

Les équations (3.1)-(3.2) représentent la loi thermo-électro-viscoélastique avec memoire longue. Cette loi est considérée comme une extension de la loi électro-élastique et thermo-visco-élastique voir [2, 4]. Ici $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, $\mathcal{B}$ est l'opérateur d'élasticité, $\mathcal{G}$ désigne le tenseur de relaxation, $\mathcal{M}$ représente le tenseur de dilatation thermique, $\mathcal{E}$ désigne l'opérateur piézoélectrique, $\mathcal{E}^*$ est la transposée de $\mathcal{E}$, $-\nabla\varphi$ est le champ électrique, $\mathcal{C}$ représente l'opérateur de permittivité électrique. Ici et ci-dessous, les points au-dessus d'une quantité représentent les dérivées de la quantité par rapport à la variable de temps. Les équations (3.3)-(3.4) représentent les équations d'équilibre pour les champs des contraintes et des déplacements électriques, respectivement. L'équation différentielle (3.5) décrit l'évolution du champ de température, où $\mathcal{K}$ représente le tenseur de conductivité thermique et ξ est la densité des sources de chaleur volumiques. Les équations (3.6)-(3.7) sont les conditions aux limites déplacement-traction, tandis que (3.8)-(3.9) représentent les conditions aux limites électriques sur $\Gamma_a \cup \Gamma_b$. (3.10) est la condition thermique sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. L'équation (3.11) représente la condition bilatérale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte de contact pendant le processus. La condition (3.12) signifie que la fondation est supposée isolée. La condition aux limites de température associée sur Γ_3 est donnée par (3.13), où θ_f est la température de la fondation, k_{th} est le coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle. Les conditions (3.14) représentent la loi de frottement de Tresca, où g_b est la borne de frottement. Enfin, (3.15) sont les conditions initiales.

3.1 Hypothèses et formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème mécanique (3.1)-(3.15), nous avons besoin des notations supplémentaires. On considère l'espace des champs de tenseurs du quatrième ordre

$$\mathbf{Q}_\infty = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) \mid \ \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^\infty(\Omega), \ \forall i,j,k,l \in \{1,...,d\}\},$$

qui est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathbf{Q}_\infty} = \max_{1\leq i,j,k,l\leq d} \|\mathcal{E}_{jikl}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{w \in H_1; \ w{=}\ 0 \text{ sur } \Gamma_1 \,; \, w_\nu{=}\ 0 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Puisque $mes\,(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn est vraie

$$C_K \|v\|_{H_1} \leq \|\varepsilon\,(v)\,\|_{\mathcal{Q}}, \ \forall v \in V, \tag{3.17}$$

où $C_K > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_1. Une preuve de l'inégalité de Korn peut être trouvée, par exemple, dans [16, page 79]. Sur l'espace V, on considère le produit scalaire donné par

$$(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{Q}}, \ \forall u,v \in V,$$

et soit $\|.\|_V$ la norme associée. Il découle de l'inégalité de Korn (3.17) que $\|.\|_{H_1}$ et $\|.\|_V$ sont des normes équivalentes sur V. Donc $(V,\ (.,.)_V\ )$ est un espace de Hilbert. De plus, nous introduisons l'espace fonctionnel

$$W = \{\varphi \in H^1(\Omega); \ \varphi = 0 \ sur \ \Gamma_a\},$$

qui est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Puisque $meas(\Gamma_a) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré suivante est vraie :

$$C_F \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla\varphi\|_H\,, \ \forall \varphi \in W, \tag{3.18}$$

où $C_F > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de Ω et Γ_a. Sur l'espace W, on considère le produit scalaire donné par

$$(\varphi, \psi)_W = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_H \, , \ \forall\varphi, \psi \in W,$$

où la norme associée est notée $\|.\|_W$. Il découle de (3.18) que $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|.\|_W$ sont des normes équivalentes sur W. Donc $(W, (.,.)_W\ )$ est un espace de Hilbert réel. De plus, d'après le théorème de la trace de Sobolev, il existe deux constantes positives $c_0 > 0$ et $\tilde{c}_0 > 0$ dépendant uniquement du domaine Ω, Γ_1 et Γ_3 telles que

$$(i)\ \ \|v\|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d)} \ \leq\ c_0\|v\|_V, \forall v \in V\,; \tag{3.19}$$

$$(ii)\ \ \|\psi\|_{L^2(\Gamma_3)} \ \leq\ \tilde{c}_0\|\psi\|_W, \forall\psi \in W. \tag{3.20}$$

Soient E et Y les espace définis par

$$E = \{\theta \in H^1(\Omega)\, ,\ \theta = 0\ sur\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2\},$$

$$Y = L^2(\Omega)\, .$$

Sur l'espace E, on considère le produit scalaire donné par

$$(\theta, \beta)_E = (\nabla\theta, \nabla\beta)_Y \, , \ \forall\theta, \beta \in E.$$

Dans l'étude du problème mécanique (3.1)-(3.15), nous considérons les hypothèses suivantes.

On suppose que l'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(i) il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \left(\mathcal{A}\left(x, \varepsilon_1\right) - \mathcal{A}\left(x, \varepsilon_2\right)\right) \cdot \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \geqslant m_{\mathcal{A}} \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|^2, \\ \ \forall \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d,\ p.p.\ x \in \Omega; \\ \\ \text{(ii) il existe } L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \left|\mathcal{A}\left(x, \varepsilon_1\right) - \mathcal{A}\left(x, \varepsilon_2\right)\right| \leqslant L_{\mathcal{A}} \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|, \\ \ \forall\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d,\ p.p.\ x \in \Omega; \\ \\ \text{(iii) l'application } x \mapsto \mathcal{A}\left(x, \varepsilon\right) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \\ \text{(iv) l'application } x \mapsto \mathcal{A}\left(x, 0_{\mathbb{S}^d}\right) \in \mathcal{Q}. \end{cases} \tag{3.21}$$

On suppose que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(i) il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \left|\mathcal{B}\left(x, \varepsilon_1\right) - \mathcal{B}\left(x, \varepsilon_2\right)\right| \leqslant L_{\mathcal{B}} \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right|, \\ \ \forall \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d,\ p.p.\ x \in \Omega; \\ \\ \text{(ii) l'application } x \mapsto \mathcal{B}\left(x, \varepsilon\right) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \forall\ \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \\ \text{(iii) l'application } x \mapsto \mathcal{B}\left(x, 0_{\mathbb{S}^d}\right) \in \mathcal{Q}. \end{cases} \tag{3.22}$$

On suppose que

$$\mathcal{G} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{Q}_\infty). \tag{3.23}$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{C}$ =($\mathcal{C}_{ij}$) : $\Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(i) } \mathcal{C}(x,w)_i = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant d} \mathcal{C}_{ij}(x)\, w_j, \\ \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ p.p. x \in \Omega,\ \forall w = (w_j)_{1\leqslant j\leqslant d} \in \mathbb{R}^d; \\ \\ \text{(ii) } \mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ji}\ \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leqslant i,j \leqslant d; \\ \\ \text{(iii) il existe } m_{\mathcal{C}} > 0 \text{ tel que} \\ \\ \mathcal{C}(x,w)\cdot w \geqslant m_{\mathcal{C}} |w|^2,\ p.p.\ x \in \Omega,\ \forall w \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.24}$$

On suppose que la fonction $\mathcal{E}$ =(e_{ijk}) : $\Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(i) } \mathcal{E}(x,\varepsilon)_i = \sum\limits_{1\leqslant j,k\leqslant d} e_{ijk}(x)\, \varepsilon_{jk}, \\ \quad 1 \leqslant i \leqslant d,\ p.p.\ x \in \Omega,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d; \\ \\ \text{(ii) } e_{ijk} = e_{ikj}\ \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leqslant i,j,k \leqslant d. \end{cases} \tag{3.25}$$

L'opérateur $\mathcal{E}^*$: $\Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{S}^d$ est défini par

$$\varepsilon \cdot \mathcal{E}^*(x,w) = \mathcal{E}(x,\varepsilon)\cdot w,\ \forall w \in \mathbb{R}^d,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d,\ p.p.\ x \in \Omega. \tag{3.26}$$

Les tenseurs thermiques $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})$: $\Omega \to \mathbb{S}^d$ vérifie

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ji}\ \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leqslant i,j \leqslant d. \tag{3.27}$$

Le tenseur de conductivité thermique $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{ij})$: $\Omega \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} \text{(i) } \mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}_{ji}\ \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leqslant i,j \leqslant d; \\ \\ \text{(ii) il existe } m_{\mathcal{K}} > 0 \text{ such that} \\ \\ \mathcal{K}w \cdot w \geq m_{\mathcal{K}} |w|^2,\ p.p.\ x \in \Omega,\ \forall w \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.28}$$

On suppose que la borne de frottement $g_b : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ satisfait

$$g_b \in L^\infty(\Gamma_3),\ g_b \geqslant 0\ p.p \text{ sur } \Gamma_3. \tag{3.29}$$

Les densités de forces satisfont

$$(i)\ \ f_0\ \in C([0,T]\,;H),\ \ (ii)\ \ f_2 \in C([0,T]\,;L^2(\Gamma_2;\mathbb{R}^d)). \tag{3.30}$$

De plus, nous supposons que les densités de charges électriques satisfont

$$(i)\ \ q_0\ \in C([0,T]\,;L^2\,(\Omega)),\ \ (ii)\ \ q_2 \in C([0,T]\,;L^2(\Gamma_b)). \tag{3.31}$$

Pour la densité des sources de chaleur, nous supposons que

$$\xi_3\ \in C([0,T]\,;L^2(\Omega)) \tag{3.32}$$

Les données thermiques aux limites satisfont

$$(i)\ \ k_{th}\ \in L^\infty\left(\Gamma_3;\mathbb{R}^+\right),\ \ (ii)\ \ \theta_f \in C([0,T]\,;L^2(\Gamma_3)). \tag{3.33}$$

Enfin, nous supposons que les données initiales satisfont

$$u_0 \in V,\ \theta_0 \in L^2\,(\Omega)\,. \tag{3.34}$$

Maintenant, en utilisant (3.30), on trouve que la fonction $f\,:\,[0,T] \to V$ définie par

$$(f(t),w)_V = \int_\Omega f_0(t)\cdot w dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t)\cdot w da,\ \forall w \in V,\, \forall t \in [0,T]\,, \tag{3.35}$$

a la régularité

$$f \in C([0,T]\,;V). \tag{3.36}$$

De (3.31) il existe une fonction $q : [0,T] \to W$ telle que

$$(q(t), \varphi)_W = \int\limits_{\Omega} q_0(t)\varphi dx - \int\limits_{\Gamma_b} q_2(t)\varphi da,\ \forall \varphi \in W,\ \ \forall t \in [0,T], \tag{3.37}$$

qui satisfait

$$q \ \in C([0,T]\,; W). \tag{3.38}$$

De (3.32)-(3.33), il existe une fonction $\widetilde{\xi} : [0,T] \to E^*$ telle que

$$\left\langle \widetilde{\xi}(t), \beta \right\rangle_{E^*,E} = \int\limits_{\Omega} \xi(t)\beta dx + \int\limits_{\Gamma} k_{th}\theta_f(t)\beta da,\ \forall \beta \in E,\ \ \forall t \in [0,T], \tag{3.39}$$

qui satisfait

$$\widetilde{\xi} \ \in C([0,T]\,; E^*). \tag{3.40}$$

Aussi, de (3.25)-(3.26), on déduit qu'il existe $L_{\mathcal{E}} > 0$ tel que

$$\|\mathcal{E}\varepsilon\|_H \ \leqslant \ L_{\mathcal{E}} \|\varepsilon\|_{\mathcal{Q}}, \forall \varepsilon \in \mathcal{Q}. \tag{3.41}$$

$$\|\mathcal{E}^* w\|_{\mathcal{Q}} \ \leqslant \ L_{\mathcal{E}} \|w\|_H, \forall w \in H. \tag{3.42}$$

Dans la suite, nous utilisons les fonctions $j_\tau : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{K}}$: $E \longrightarrow E^*$, $\widetilde{\mathcal{M}} : V \longrightarrow E^*$, telles que

$$j_\tau(w) = \int\limits_{\Gamma_3} g\,|w_\tau|\, da,\ \forall w \in V, \tag{3.43}$$

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{K}}\theta, \beta \right\rangle_{E^*,E} = \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}\nabla\theta\nabla\beta dx,\ \forall \theta, \beta \in E, \tag{3.44}$$

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{M}}w, \beta \right\rangle_{E^*,E} = \int\limits_{\Omega} \mathcal{M} \cdot \varepsilon(w)\beta dx,\ \forall w \in V, \forall \beta \in E. \tag{3.45}$$

Maintenant, supposons que u, σ, θ, φ et D sont des fonctions régulières satisfaisant (3.1)-(3.15. On utilise l'intégration par parties pour obtenir la formulation variationnelle suivante du problème (3.1)-(3.15).

Problème 3.2 *Trouver un champ de déplacement* $u : [0,T] \to V$*, un champ de potentiel électrique* $\varphi : [0,T] \to W$ *et un champ de température* $\theta : [0,T] \to E$ *tels que*

$$\begin{cases} (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} + \\ + \left(\int_0^t \mathcal{G}(t-s)\,\varepsilon(u(s))\,ds, \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \right)_{\mathcal{Q}} \\ + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi(t) - \theta\mathcal{M}, \varepsilon(w) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_{\mathcal{Q}} \\ j_\tau(w) - j_\tau(\dot{u}(t)) \geq (f(t), w - \dot{u}(t))_V, \\ \forall w \in V, \text{ p.p. } t \in (0,T), \end{cases} \tag{3.46}$$

$$\dot{\theta}(t) + \widetilde{\mathcal{K}}\theta(t) = \widetilde{\xi}(t) - \widetilde{\mathcal{M}}\dot{u}(t), \text{ dans } E^*, \text{ p.p. } t \in (0,T), \tag{3.47}$$

$$(\mathcal{C}\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H = (\mathcal{E}\varepsilon(u(t)), \nabla\psi)_H + (q(t), \psi)_W \quad \forall\psi \in W,\ \forall t \in [0,T], \tag{3.48}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.49}$$

$$\theta(0) = \theta_0. \tag{3.50}$$

3.2 Existence et unicité d'une solution faible

Notre principal résultat d'existence et d'unicité dans ce Chapitre est le suivant.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.21)-(3.34), le problème (3.46)-(3.50)* *admet une unique solution* $\{u,\ \varphi,\ \theta\}$*. De plus, la solution satisfait*

$$u \in C^1([0,T];V), \tag{3.51}$$

$$\varphi \in C([0,T];W). \tag{3.52}$$

$$\theta \in L^2(0,T;E) \cap C([0,T];Y),\ \dot{\theta} \in L^2(0,T;E^*). \tag{3.53}$$

La preuve du **Théorème 3.1** sera effectuée en plusieurs étapes.

Étape 1. On considère le problème suivant.

Problème 3.3 *Soit* $\eta \in C([0,T];V)$*, trouver une fonction* $\theta_\eta : [0,T] \to H^1(\Omega)$*, telle que*

$$\dot{\theta}_\eta(t) + \widetilde{\mathcal{K}}\theta_\eta(t) = \widetilde{\xi}(t) - \widetilde{\mathcal{M}}\eta(t),\ \text{dans } E^*,\ \text{p.p. } t \in (0,T), \tag{3.54}$$

$$\theta(0) = \theta_0. \tag{3.55}$$

Lemme 3.1 *Il existe une solution unique pour le problème (3.54)-(3.55) telle que*

$$\theta_\eta \in L^2(0,T;E) \cap C([0,T];Y),\ \dot{\theta}_\eta \in L^2(0,T;E^*). \tag{3.56}$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ *telle que pour tout* $\eta_1,\ \eta_2 \in C([0,T];V)$*,*

$$\|\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|^2_V ds,\ \forall\ t \in [0,T], \tag{3.57}$$

où θ_{η_k} est une solution correspondante à η_k, $k = 1,\ 2$.

Ici et dans le reste de ce Chapitre, la même lettre c sera utilisée pour désigner différentes constantes positives indépendantes de $t \in (0,T)$, et dont les valeurs peuvent changer d'un endroit à l'autre.

Preuve. On a $E \subset Y \subset E^*$ un triplet de Gelfand. De plus $\widetilde{\mathcal{K}}$: $E \longrightarrow E^*$ est un opérateur linéaire continu et qui satisfait

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{K}}\beta, \beta \right\rangle_{X^*,X} \geqslant m_{\mathcal{K}} \|\beta\|^2_E,\ \forall \beta \in E.$$

Soit la fonction $\zeta \in C([0,T]\,;E^{*})$ telle que

$$\zeta\,(t) = \widetilde{\xi}\,(t) - \widetilde{\mathcal{M}}\eta\,(t)\,,\ \forall\ t \in [0,T]\,.$$

Alors,d'après la **Proposition 2.7,** il existe une unique fonction θ_η qui satisfait (3.54)-(3.56).

D'autre part, soient $\eta_1,\ \eta_2 \in C\left([0,T]\,;V\right)$, soit $t \in [0,T]$, soit $s \in (0,t)$. De (3.54)-(3.56) on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\dot{\theta}_{\eta_1}(s) - \dot{\theta}_{\eta_2}(s)\right), \left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)\right\rangle_{E^*,E} \\
&+ \int\limits_{\Omega} \mathcal{K}\nabla\left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)\nabla\left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)dx \\
&+ \int\limits_{\Gamma} k_{th}\left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)\left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)da \\
= \ & -\int\limits_{\Omega}\left(\left(\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right)\mathcal{M}\right)\cdot\varepsilon(\eta_1\,(s) - \eta_2\,(s))dx
\end{aligned}$$

en intégrant les deux côtés de l'équation précédente sur $(0,t)$, on obtient

$$\left\|\left(\theta_{\eta_1}(t) - \theta_{\eta_2}(t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c\int\limits_0^t \left\|\theta_{\eta_1}(s) - \theta_{\eta_2}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds + c\int\limits_0^t \left\|\eta_1\,(s) - \eta_2\,(s)\right\|^2_V ds.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, **Proposition 2.9**, dans la dernière inégalité, on obtient (3.57). ■

Considérons maintenant le problème suivant.

Problème 3.4 *Soit $\eta \in C([0,T]\,;V)$, trouver une fonction $\varphi_\eta : [0,T] \to W$, telle que*

$$\begin{cases} \left(\mathcal{C}\nabla\varphi_\eta(t), \nabla\psi\right)_H = \left(\mathcal{E}\varepsilon(z_\eta\,(t)), \nabla\psi\right)_H + \left(q\,(t)\,,\psi\right)_W\,, \\ \qquad\qquad \forall\ \psi \in W,\ \forall\ t \in [0,T]\,. \end{cases} \tag{3.58}$$

où

$$z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s)\, ds + u_0, \ \forall\ t \in [0, T] \tag{3.59}$$

Lemme 3.2 *Le problème (3.58) a une solution unique qui satisfait*

$$\varphi_\eta \in C([0, T]; W). \tag{3.60}$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout η_1, $\eta_2 \in C([0, T]; V)$

$$\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\|_W^2 \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 ds, \ \forall\ t \in [0, T]\,. \tag{3.61}$$

où φ_{η_k} est une solution correspondant à η_k, $k = 1,\ 2$.

Preuve. Soit $\eta \in C([0, T]; V)$ et soit la fonction $l \in C([0, T]; W)$ telle que

$$(l(t), \psi)_W = (\mathcal{E}\varepsilon(z_\eta(t)), \nabla\psi)_H + (q(t), \psi)_W\,, \ \forall\psi \in W, \ \forall\ t \in [0, T]\,. \tag{3.62}$$

Soit $b : W \times W \to \mathbb{R}$, l'opérateur défini par

$$b(\varphi, \psi) = (\mathcal{C}\nabla\varphi, \nabla\psi)_H\,, \ \forall\varphi, \psi \in W. \tag{3.63}$$

En utilisant (3.24) et (3.63), on trouve

$$m_{\mathcal{C}}\, \|\varphi\|_W^2 \leqslant b(\varphi, \varphi)\,, \ \forall\varphi \in W, \tag{3.64}$$

$$|b(\varphi, \psi)| \leq L_{\mathcal{C}}\, \|\varphi\|_W\, \|\psi\|_W\,, \ \forall\varphi, \psi \in W, \tag{3.65}$$

avec $L_{\mathcal{C}} > 0$. Il découle de (3.24) et (3.63)-(3.65) que b est une forme bilinéaire, coercive et continue. Ainsi, par **Proposition 2.3**, il existe une fonction unique

$\varphi_\eta : [0,T] \to W$ telle que

$$b\left(\varphi_\eta(t), \psi\right)_W = (l(t), \psi)_W, \; \forall \psi \in W, \; \forall\, t \in [0,T], \tag{3.66}$$

En en déduit que le problème (3.58) a une solution unique.

Soient t_1, $t_2 \in [0,T]$, il résulte de (3.58) et (3.63) que

$$\begin{aligned} b\left(\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2), \psi\right)_W &= \left(\mathcal{E}\varepsilon(z_\eta(t_1) - z_\eta(t_2)), \nabla\psi\right)_H \\ + (q(t_1) - q(t_2), \psi)_W, \forall \psi &\in W, \end{aligned}$$

ce qui, avec (3.41) et (3.64), donne

$$m_{\mathcal{C}} \left\|\varphi_\eta(t_1) - \varphi_\eta(t_2)\right\|_W \leqslant L_{\mathcal{E}} \|z_\eta(t_1) - z_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W .$$

Cette inégalité combinée à (3.38) et (3.59) montre que (3.60) est vraie. D'autre part, soit φ_{η_k} les deux solutions correspondant à $\eta_k \in C([0,T]\,; V)$, $k = 1, 2$. Il découle de (3.41), (3.58), (3.63) et (3.64) que

$$\left\|\varphi_{\eta_1}(t) - \varphi_{\eta_2}(t)\right\|_W^2 \leqslant c\|z_{\eta_1}(t) - z_{\eta_2}(t)\|_V^2, \, \forall t \in [0,T]$$

ce qui avec (3.59), nous donne (3.61). ■

Problème 3.5 *Soit $\eta \in C(0,T;V)$. Trouver une fonction $v_\eta \in C([0,T]\,;V)$, telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}\varepsilon(v_\eta(t)), \varepsilon(w) - \varepsilon(v_\eta(t)))_{\mathcal{Q}} + j_\tau(w) - j_\tau(v_\eta(t)) \\ \\ \geq (f_\eta(t), w - v_\eta(t))_V, \; \forall w \in V, \; \forall t \in [0,T]. \end{array} \right. \tag{3.67}$$

où la fonction $f_\eta : [0,T] \to V$ *est définie par*

$$\begin{cases} (f_\eta(t), w)_V = (f(t), w)_V - \left(\mathcal{B}\varepsilon(z_\eta(t)) + \int\limits_0^t \mathcal{G}(t-s)\,\varepsilon(z(s))\,ds, \varepsilon(w) \right)_{\mathcal{Q}} \\ \qquad + (\theta_\eta(t)\mathcal{M}, \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}} - \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_\eta(t), \varepsilon(w)\right)_{\mathcal{Q}}, \, \forall w \in V, \, \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.68}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3 *Le problème (3.67) a une solution unique* v_η*, qui satisfait*

$$v_\eta \in C(0,T;V) \tag{3.69}$$

Preuve. Soit $A : V \to V$ l'opérateur défini par

$$(Av, w)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(v), \varepsilon(w))_{\mathcal{Q}}, \; \forall \; w, \, v \in V. \tag{3.70}$$

Il résulte de (3.21) et (3.70) que A est un opérateur fortement monotone et continu de Lipschitz. D'autre part la fonctionnelle $j_\tau : V \to \mathbb{R}$ est une fonction propre convexe et continue sur V. Ainsi, à partir du résultat standard sur l'inégalité variationnelle elliptique de seconde espèce, voir **Proposition 2.4**, il existe une fonction unique $v_\eta : [0,T] \to V$, qui satisfait (3.67). De plus, soient t_1, $t_2 \in [0,T]$, il résulte de (3.21), (3.43) et (3.67) que

$$\|v_\eta(t_1) - v_\eta(t_2)\|_V \leqslant c\,\|f_\eta(t_1) - f_\eta(t_2)\|_V,$$

et en gardant à l'esprit le fait que $f_\eta \in C([0,T];V)$, on en déduit que v_η satisfait (3.69). ■

Etape 2. Pour continuer, considérons le problème suivant.

Soit $\eta \in C([0,T];V)$ et soit v_η la solution unique du Problem (3.67). Soit $\Lambda : C([0,T];V) \to C([0,T];V)$, l'opérateur défini par

$$\Lambda\eta(t) = v_\eta(t), \; \forall \; \eta \in C([0,T];V), \; \forall \; t \in [0,T]. \tag{3.71}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.4 *L'opérateur Λ a un unique point fixe $\eta^* \in C([0,T];V)$.*

Preuve. Soient $\eta_1,\ \eta_2 \in C([0,T];V)$, soit $t \in [0,T]$ et soit $s \in (0,t)$, on note par $v_i = v_{\eta_i}$, $\theta_i = \theta_{\eta_i}$, $\varphi_i = \varphi_{\eta_i}$, pour $i = 1,2$. En utilisant (3.67)-(3.68), on trouve

$$\begin{cases} \left(\mathcal{A}\varepsilon(v_1(s)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(s)), \varepsilon(v_1(s)) - \varepsilon(v_2(s))\right)_{\mathcal{Q}} \\ \leqslant \left(\mathcal{B}\varepsilon(z_2(s)) - \mathcal{B}\varepsilon(z_1(s)), \varepsilon(v_1(s)) - \varepsilon(v_2(s))\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\int\limits_0^s \mathcal{G}(s-r)\,\varepsilon(z_2(r) - z_1(r))dr, \varepsilon(v_1(s) - v_2(s))\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left((\theta_1(s) - \theta_2(s))\,\mathcal{M}, \varepsilon(v_1(s)) - \varepsilon(v_2(s))\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_2(s) - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_1(s), \varepsilon(v_1(s)) - \varepsilon(v_2(s))\right)_{\mathcal{Q}}, \end{cases}$$

ce qui avec (3.21)-(3.22), (3.27) et (3.42), donne

$$\begin{cases} m_{\mathcal{A}} \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 \leqslant c\,\|z_1(s) - z_2(s)\|_V \|v_1(s) - v_2(s)\|_V \\ +c\int\limits_0^s \|z_1(r) - z_2(r)\|_V\, dr \times \|v_1(s) - v_2(s)\|_V \\ +c\,\|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)} \|v_1(s) - v_2(s)\|_V + c\,\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_W \|v_1(s) - v_2(s)\|_V, \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 \quad &\leqslant \quad c\,\|z_1(s) - z_2(s)\|_V^2 + c\int\limits_0^s \|z_1(r) - z_2(r)\|_V\, dr \\ &\quad +c\,\|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\|_W^2 + c\,\|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui, avec (3.57), (3.59), (3.61) et (3.71), montre que

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_V^2 \leqslant c\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2\, ds.$$

En réitérant la dernière inégalité n fois, on en déduit que

$$\|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2\|_{C([0,T];V)}^2 \leqslant \frac{(cT)^n}{n!}\,\|\eta_1 - \eta_2\|_{C([0,T];V)}^2\,,$$

ce qui implique que, pour n suffisamment grand, une puissance Λ^n de Λ est une contraction dans l'espace de Banach $C\left([0,T]\,;V\right)$. On en déduit donc que l'opérateur Λ a un unique point fixe $\eta^* \in C\left([0,T]\,;V\right)$. ■

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1. Soit $\eta^* \in C\left([0,T]\,;V\right)$ l'unique point fixe Λ défini par (3.71), soient θ et φ les solutions du Problème (3.54)-(3.55) et du Problem (3.58), respectivement, pour $\eta = \eta^*$. Soit $u : [0,T] \to V$ la fonction definie par

$$u\left(t\right) = \int_0^t v_{\eta^*}\left(s\right) ds + u_0,\ \forall\ t \in \left[0,T\right],$$

où $v_{\eta^*} = \eta^*$ est l'unique solution du Problème (3.67) pour $\eta = \eta^*$. Par conséquent, nous concluons que $\{u, \varphi, \theta\}$ est une solution du Problème (3.46)-(3.50) et qui satisfait (3.51)-(3.53).

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité de la solution du Problème (3.54)-(3.55), Problème (3.58) et Problème (3.67). ■

3.3 Approximation Numérique

Nous allons donner une estimation de l'erreur pour le problème (**??**)-(3.41) dans le cadre des éléments finis. Nous supposons que $\left\{\mathcal{T}^h\right\}_h$ est une famille de triangulation régulière de $\overline{\Omega}$ voir Section 2.4. Nous allons approcher l'espace E par la famille $\left\{E^h\right\}$ des sous-espaces de E donnés par (2.9), l'espace W

par la famille $\left\{W^h\right\}$ des sous-espaces de W donnés par (2.10) et l'espace V par la famille $\left\{V^h\right\}$ des sous-espaces de V donnés par (2.10). Ici $h > 0$ est un paramètre de discrétisation. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit $k = \dfrac{T}{N}$ le pas d'une partition uniforme de l'intervalle de temps $[0, T]$: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, $t_n = nk$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Pour une fonction continue $w \in C([0, T]; X)$ avec des valeurs dans un espace normé X, nous utilisons la notation $w_n = w(t_n)$, et pour une suite $\{w_n\}_{n=0}^N$, nous utilisons la notation $\delta w_n = \dfrac{w_n - w_{n-1}}{k}$, $1 \leqslant n \leqslant N$. Dans le reste de ce Chapitre, nous formulons les hypothèses supplémentaires suivantes sur les données et la solution :

$$\text{(i)}\ \ u \in W^{2,1}(0, T; V),\ \ (ii)\ \ \varphi \in W^{1,\infty}(0, T; W), \tag{3.72}$$

$$\text{(i)}\ \ \theta \in W^{2,1}\left(0, T; E\right) \cap W^{2,\infty}\left(0, T; Y\right), \tag{3.73}$$

$$u_0 \in H^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right),\ \dot{u} \in C([0, T]; H^2\left(\Omega\right), \mathbb{R}^d) \tag{3.74}$$

$$\varphi \in C([0, T]; H^2\left(\Omega\right)) \tag{3.75}$$

On pose

$$v = \dot{u},$$

alors, on trouve

$$u\left(t\right) = \int_0^t v\left(s\right) ds + u_0,\ \ \forall t \in [0, T].$$

Maintenant, un schéma entièrement discret pour le problème (3.46)-(3.50) est le suivant.

Problème 3.6 **(P_V^{hk})** *Trouver* $u^{hk} = \left\{u_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset V^h$, $v^{hk} = \left\{v_n^{hk}\right\}_{n=1}^N \subset V^h$, $\theta^{hk} = \left\{\theta_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset E^h$ *et* $\varphi^{hk} = \left\{\varphi_n^{hk}\right\}_{n=0}^N \subset W^h$

telles que such that for all $n = 1, 2, ..., N$,

$$\begin{cases} \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(v_n^{hk})\right), \varepsilon\left(w^h - v_n^{hk}\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon(w^h - v_n^{hk})\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(w^h - v_n^{hk})\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(w^h - v_n^{hk}\right)\right)_{\mathcal{Q}} + j_{\mathcal{T}}(w^h) - j_{\mathcal{T}}\left(v_n^{hk}\right) \\ \\ \geq \left(f_n, w^h - v_n^{hk}\right)_V, \text{ for all } w^h \in V^h, \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\left(\frac{\theta_n^{hk} - \theta_{n-1}^{hk}}{k}, \eta^h\right)_Y + \langle \mathcal{K}\theta_n^{hk}, \eta^h\rangle_{E\prime\times E} = \langle \widetilde{\xi}_n, \eta^h\rangle_{E\prime\times E} - \langle \widetilde{\mathcal{M}} v_n^{hk}, \eta^h\rangle_{E\prime\times E} \tag{3.77}$$

$$\left(\mathcal{C}\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla\psi^h\right)_H = \left(\mathcal{E}\varepsilon(u_n^{hk}), \nabla\psi^h\right)_H + \left(q_n, \psi^h\right)_W, \ \forall\ \psi_h \in W^h. \tag{3.78}$$

$$u_n^{hk} = u_0^h + k\sum_{j=1}^{n} v_j^{hk}. \tag{3.79}$$

$$(i)\ \ u_0^{hk} = u_0^h,\ (ii)\ \ \theta_0^{hk} = \theta_0^h. \tag{3.80}$$

Ici

$$(i)\,\Pi^h\ u_0 = u_0^h,\ \ (ii)\,\Pi^h\ \theta_0 = \theta_0^h.$$

En utilisant des résultats classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques et les équations variationnelles elliptiques, il est facile de vérifier que le problème P_V^{hk} a une solution unique.

Partout dans la suite c désignera une constante générique strictement positive dont la valeur peut varier d'un endroit à l'autre et qui ne dépend pas de h et k. On note par

$$e_n = v_n - v_n^{hk},\ \varepsilon_n = \theta_n - \theta_n^{hk},\ 0 \leq n \leq N,$$

les erreurs de solution numérique.

Théorème 3.2 *On conserve les hypothèses du théorème 1. Sous les hypothèses supplémentaires (3.20), on obtient l'estimation d'erreur suivante*

$$\max_{0\leq n\leq N}||e_n||_V+\max_{0\leq n\leq N}||\alpha_n||_E+\left(k\sum_{n=0}^{N}||\theta_n-\theta_n^{hk}||_E^{\,2}\right)^{1/2}\leq c\,(h+k)\quad(3.81)$$

Preuve. On a

$$\left(\mathcal{C}\nabla\left(\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right),\nabla\psi^h\right)_H=\left(\mathcal{E}\varepsilon(u_n-u_n^{hk}),\nabla\psi^h\right)_H,\ \forall\ \psi^h\in W^h,$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\mathcal{C}\nabla\left(\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right),\nabla\left(\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right)\right)_H-\left(\mathcal{C}\nabla\left(\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right),\nabla\left(\varphi_n-\ \psi^h\right)\right)_H\\=\\\left(\mathcal{E}\varepsilon(u_n-u_n^{hk}),\nabla\left(\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right)\right)_H-\left(\mathcal{E}\varepsilon(u_n-u_n^{hk}),\nabla\left(\varphi_n-\psi^h\right)\right)_H,\ \forall\ \ \psi^h\in W^h,\end{array}\right.$$

et en appliquant l'inégalité élémentaire

$$\lambda_1\lambda_2\leq\lambda_3\lambda_1^2+\frac{1}{4\lambda_3}\lambda_2^2\ ,\ \forall\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3>0,$$

on trouve

$$\left\|\varphi_n-\varphi_n^{hk}\right\|_W^2\leq c\left(\left\|u_n-u_n^{hk}\right\|_V^2+\left\|\varphi_n-\psi^h\right\|_W^2\right),\ \forall\ \psi^h\in W^h\qquad(3.82)$$

On commence par l'estimation de (ε_n) . On obtient pour une constante $c>0$ et pour $n=1,\cdots,N$

$$\begin{aligned}||\alpha_n||_Y^2+k\sum_{j=1}^{n}||\alpha_j||_E^2\ &\leq\ c||\alpha_0||_Y^2+cA_0^2+ck(A_1+A_2)\\&\qquad+cA_3^2+ck\sum_{j=1}^{n}||e_j||_V^2,\end{aligned}$$

où pour arbitraire $\eta_j^h \in E^h, j = 1,\cdots, N$

$$\begin{aligned} A_0 &: = \max_{1\le n\le N} ||\theta_n - \eta_n^h||_Y \\ A_1 &: = \sum_{j=1}^{N} ||\dot{\theta}_j - \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{k}||_{Y'}^2 \\ A_2 &: = \sum_{j=1}^{N} ||\theta_j - \eta_j^h||_E^2 \\ A_3 &: = \sum_{j=1}^{N} ||\theta_j - \eta_j^h - \left(\theta_{j+1} - \eta_{j+1}^h\right)||_Y \end{aligned}$$

En prenant

$$\eta_j^h = \Pi_E^h \theta_j$$

pour $j = 1,\cdots, N$, alors à partir des hypothèses (3.20), on a

$$A_0 \le ch, \quad ||\alpha_0||_Y \le ch$$

$$A_1 \le ck, \quad kA_2 \le ch^2, \quad A_3 \le ch$$

On en déduit alors pour $n = 1,\cdots, N$

$$||\alpha_n||_Y^2 + k\sum_{j=1}^{n} ||\alpha_j||_E^2 \le ch^2 + ck^2 + ck\sum_{j=1}^{n} ||e_j||_V^2 \tag{3.83}$$

Passons maintenant à l'estimation de (e_n). Passons maintenant à l'estimation de (e_n). Fixons $n = 1,\cdots, N$. En utilisant (3.46) où l'on pose $t = t_n$ et $w = \upsilon_n^{hk}$, et en ajoutant à (3.76) où $w^h = w_n^h \in V^h$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n)\right), \varepsilon\left(\upsilon_n^{hk} - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right), \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n^{hk}\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_n^{hk})\right), \varepsilon(\upsilon_n^{hk} - \upsilon_n)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon(w_n^h - \upsilon_n^{hk})\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk}, \varepsilon(\upsilon_n^{hk} - \upsilon_n)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(w_n^h - \upsilon_n^{hk})\right)_{\mathcal{Q}} \\ \left(\theta_n\mathcal{M}, \varepsilon\left(\upsilon_n^{hk} - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n^{hk}\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ +R_n^{hk} + j_\tau(w_n^h) - j_\tau(\upsilon_n) \ge \left(f_n, w_n^h - \upsilon_n\right)_V \ , \forall w_n^h \in V^h \end{array} \right.$$

où pour $n = 1, \cdots, N$

$$R_n^{hk} \ : \ = \left(\int_0^{t_n} G(t_n - s)\varepsilon(u(s))ds - k \sum_{m=0}^{n-1} G(t_n - t_m)\varepsilon(u_m^{hk}), -\varepsilon\left(e_n\right) \right)_{\mathcal{Q}}$$
$$+ \left(k \sum_{m=0}^{n-1} G(t_n - t_m)\varepsilon(u_m^{hk}), \varepsilon\left(w_n^h\right) - \varepsilon\left(\upsilon_n\right) \right)_{\mathcal{Q}}$$

écrivant alors

$$\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n)\right) = \mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n)\right) - \mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right) + \mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right)$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{c} m_A||e_n||_V^2 \leq \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n)\right) - \mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right), \varepsilon\left(e_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ \leq \left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right), \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_n)\right) - \mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon(-e_n)\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(-e_n)\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(w_n^h - \upsilon_n)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\theta_n\mathcal{M} - \theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(-e_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ + \left(\theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M} - \theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + R_n^{hk} + j_\tau(w_n^h) - j_\tau(\upsilon_n) - \left(f_n, w_n^h - \upsilon_n\right)_V \end{array} \right. .$$

On a pour une constante $c > 0$, pour $n = 1, \cdots, N$,

$$\left(\mathcal{A}\left(\varepsilon(\upsilon_n^{hk})\right), \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} \leq c||e_n||_V||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V \quad (3.84)$$

et l'écriture

$$\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right) = \mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right) - \mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1})\right) + \mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1})\right)$$

on a

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_n)\right) - \mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon(-e_n)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{B}\left(\varepsilon(u_{n-1}^{hk})\right), \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ \leq c||u_n - u_{n-1}^{hk}||_V||e_n||_V \\ \\ +c||u_{n-1} - u_{n-1}^{hk}||_V||\omega_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V \end{array} \right. \quad (3.85)$$

on a aussi

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n - \mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(-e_n)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\mathcal{E}^*\nabla\varphi_{n-1}^{hk}, \varepsilon(w_n^h - \upsilon_n)\right)_{\mathcal{Q}} \\ \leq c||\varphi_n - \varphi_{n-1}^{hk}||_V||e_n||_V + \\ c||\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^{hk}||_V||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V \end{array}\right. \tag{3.86}$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\theta_n\mathcal{M} - \theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(-e_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} + \left(\theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M} - \theta_{n-1}^{hk}\mathcal{M}, \varepsilon\left(w_n^h - \upsilon_n\right)\right)_{\mathcal{Q}} \\ \leq c||\theta_n - \theta_{n-1}^{hk}||_V||e_n||_V + \\ c||\theta_{n-1} - \theta_{n-1}^{hk}||_V||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V \end{array}\right. \tag{3.87}$$

En utilisant (3.82) et (3.84)-(3.87) on déduit que pour $n = 1, ..., N$:

$$\left\{\begin{array}{c} ||e_n||_V^2 \leq c||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V^2 \\ \\ +c||u_n - u_{n-1}^{hk}||_V^2 + c||u_{n-1} - u_{n-1}^{hk}||_V^2 \\ \\ +c||\varphi_n - \varphi_{n-1}^{hk}||_W^2 + c||u_{n-1} - u_{n-1}^{hk}||_V^2 \\ \\ +c||\theta_n - \theta_{n-1}^{hk}||_Y^2 + c||\theta_{n-1} - \theta_{n-1}^{hk}||_Y^2 + R_n^{hk} \end{array}\right.$$

Il reste maintenant à borner les termes comme $||u_n - u_n^{hk}||_V^2$ et R_n^{hk}. En utilisant (3.24), on a pour $n = 1,\cdots, N$:

$$u_n^{hk} = u_0^h + k\sum_{j=1}^{n} \upsilon_j^{hk}, \quad u_n = u_0 + \int_0^{t_n} \upsilon\left(s\right)ds$$

Le fait que $\upsilon \in W^{1,2}(0, T; V)$ implique pour $n = 1,\cdots, N$:

$$||\int_0^{t_n} \upsilon\left(s\right)ds - k\sum_{j=1}^{n} \upsilon_j||_V \leq ck,$$

on deduit que pour$n = 1, \cdots, N$:

$$||u_n - u_n^{hk}||_V^2 \leq ||u_0 - u_0^h||_V^2 + k \sum_{j=1}^{n} ||e_j||_V^2 + ck^2.$$

D'autre part, après quelques calculs [5] voir , on obtient pour $n = 1, \cdots, N$:

$$\begin{aligned} R_n^{hk} &\leq \frac{1}{2}||e_n||_V^2 + ck^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} ||u_n^{hk} - u_j||_V^2 \\ &+c||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V^2. \end{aligned}$$

on deduit que pour$n = 1, \cdots, N$:

$$\begin{aligned} ||e_n||_V^2 &\leq c||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V^2 + ck^2 + c||u_{n-1} - u_n^{hk}||_V^2 \\ &+c|\alpha_{n-1}||_Y^2 + ck \sum_{j=0}^{n-1} ||u_n^{hk} - u_j||_V^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ||e_n||_V^2 &\leq c||w_n^h - \upsilon_n||_V + c||w_n^h - \upsilon_n||_V^2 \\ &+||u_0 - u_0^h||_V^2 + k \sum_{j=1}^{n-1} ||e_j||_V^2 + ck^2 + c||\alpha_{n-1}||_Y^2, \end{aligned}$$

où par convention

$$\sum_{j=1}^{0} = 0.$$

Choisir alors

$$w_j^h = \Pi_V^h \upsilon_j, \qquad j = 1, \cdots, N,$$

et en utilisant (3.83), on en déduit que pour $n = 1,\cdots, N$,

$$||e_n||_V^2 \leq ch^2 + ck^2 + c\sum_{j=1}^{n-1} ||e_j||_V^2.$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Gronwall Proposition 2.10, nous concluons que pour une constante $c > 0$, et pour $n = 1,\cdots, N$,

$$||e_n||_V^2 \leq ch^2 + ck^2.$$

et

$$||\alpha_n||_Y^2 + k\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||_F^2 \leq ch^2 + ck^2.$$

Cela donne l'estimation (3.81). ■

Conclusion et Perspectives

Conclusion : Dans ce mémoire nous avons étudié un problème de contact bilatéral avec une loi de frottement de Tresca pour un matériau thermo-électro-viscoélastique avec memoire longue. Sous des hypothèses suffisantes, nous avons fourni une formulation faible du problème mécanique et établi l'existence et l'unicité d'une solution faible. Nous introduit ensuite un schéma entièrement discret pour le modèle et sous des hypothèses de régularité appropriées, nous avons dérivé des estimations d'erreur.

Perspectives :

1. On pourait considérer la loi de comportement électro-thermoélastiqueavec endommagement ou avec adhésion dans les travaux future, ce qui réprésente une continuité naturelle de ce mémoire.
2. On pourait aussi considérer le cas dynamique ou le cas quasistatique avec d'autre lois de contact.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Barboteu, M. Sofonea, Analysis and numerical approach of a piezoelectric contact problem, Ann. AOSR, Ser. Math. Appl. 1 (2009) 7–30.

[2] R.C. Batra and J.S. Yang, Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity, Journal of Elasticity, 38, (1995) 209-218.

[3] K. Atkinson, endall, W. Han, Theoretical Numerical Analysis, DOI : 10.1007/978-1-4419-0458-4.

[4] Chau O , On some sub-differential contact problems in quasistatic thermo-visco-elasticity, Int. J. of Appl. Math. and Mech. 5(4) : 86-108, 2009.

[5] Chau O (2008). On a class of second order evolution inequality and application. Int. J. of Appl. Math. and Mech. 4(1), pp. 24–48.

[6] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam, 1978.

[7] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[8] Fichera G (1964), Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, mem. Accas. Naz. Lincei, S. N VIII, Vol. VII, Sez. I, 5, 91–140.

[9] W. Han and M. Sofonea, Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity (American Mathematical Society–International Press 2002).

[10] W. Han and M. Sofonea, Analysis and numerical approximation of an elastic frictional contact problem with normal compliance, Applicationes Muthematicae 26, 415-435, (1999).

[11] M. Kabbadj and El H. Essoufi. Frictional contact problem in dynamic electroelasticity. Glasnik Matemati2c7cki, 43(63) :137–158, 2008.

[12] A. Kasri, Etude de quelques problèmes aux limites en mécanique du contact, (Thèse de Doctorart) USTHB (2018).

[13] A. Kasri, Inéquations Variationnelles Elliptiques et Applications, Polycopié de Cours Master2, Université de Skikda (2020).

[14] J. L. Lions (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod et Gauthier-Villars.

[15] J. Nečas, Les Méthodes Directes en Theorie des Equations Elliptiques, Masson, Paris, (1967).

[16] J. Nečas and I. Hlavaček, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction, Elsevier, Amsterdam, (1981).

[17] Youssef Ouafik, Contribution à l'étude mathématique et numérique des structures piézoélectriques en contact. Modélisation et simulation, (Thèse de Doctorart) Université de Perpignan, 2007.

[18] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti della Societ'a Italiana per il Progresso delle Scienze (1933).

[19] M. Shillor, M. Sofonea, and J.J. Telega, Models and Analysis of Quasistatic Contact, Springer, Berlin, 2004.

[20] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage, Pure Appl. Math., vol. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

[21] M. Sofonea, K. Kazmi, M. Barboteu, W. Han, Analysis and numerical solution of a piezoelectric frictional contact problem, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 4483–4501.