وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــية العلـــوم
قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/……/2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Les équations différentielles non linéaires et la théorie de la stabilité de Lyapunov

Option : Commande optimale et système dynamique

Par :

Zaouali Rahma

Encadré par : *Bendib El Ouahma* MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : *Ghennam Karima* MCB U. SKIKDA
Examinateur : *Selmani Wissame* MCB U. SKIKDA

Année : 2022/2023

بسم الله الرحمان الرحيم

Remerciements

*Mes remerciements vont en premier lieu à « **Allah** » le tout puissant qui m'a donné la force et la patience de poursuivre mes études et d'atteindre ce stade et de terminer cet humble travail.*

*Merci et mille merci à mon encadreur **Mme Bendib El Ouahma** pour sa confiance et sa patience, et pour son soutien et ses conseils constants, sans elle je n'aurais pas pu réussir dans ce travail, je lui adresse toutes mes salutations et ma reconnaissance.*

*Je tiens également à remercier **Mme Ghennam Karima, M.C.B** à l'université de skikda qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.*

*Je remercie aussi **Mme Selmani Wissame, M.C.B** à l'université de skikda qui a accepté d'examiner ce mémoire.*

Merci à tous les collègues et docteurs du département de mathématiques de l'université de 20 Aout 1955 de skikda.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans ce travail.

ZAOUALI RAHMA

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail

*A l’homme de ma vie, source de ma joie et de mon bonheur à celui qui s’est toujours sacrifié pour me voir réussir à mon cher père **Abd Elhafid** ta présence à mes côtés est toujours la source de ma force.*

*A celui qui m’a mis sur le chemin de la vie à celui dont la supplication ne m’a pas quitté à chaque pas à ma chère mère **Nassira** source d’amour et de tendresse et mon modèle dans cette vie.*

*A mon grand-père **Ammar.***

*A mes chères soeurs **Mariem, Khouloud, Sabrina, Aya** et mon frère **Amine**.*

*A mes amis surtout **Afaf** et **mouchira.***

A tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.

Merci à tous.

ZAOUALI RAHMA

Résumé

Ce mémoire est basé sur un problème principal qui est l'étude de la stabilité des systèmes différentiels non linéaires. La stabilité est l'un des problèmes les plus difficiles dans l'étude des systèmes dynamiques. A cet effet, Lyapunov introduisait une fonction appelée fonction de Lyapunov dans le but d'analyser la stabilité des systèmes différentiels non linéaires. Cette méthode est limitée parce qu'elle est liée à la difficulté de trouver une fonction de Lyapunov. Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de la stabilité des systèmes différentiels non linéaires. Plus précisément, nous discutons l'utilisation de la théorie de la stabilité de Lyapunov pour étudier la stabilité des systèmes différentiels non linéaires et aussi la construction de la fonction de Lyapunov pour ce type de systèmes. De plus, nous allons illustrer ces études par des applications.

Mots clés : Système différentiel non linéaire, stabilité, fonction de Lyapunov.

Abstract

This thesis is based on a main problem, witch is the study of the stability of nonlinear differential systems. Stability is one of the most difficult problems in the analysis of dynamical systems. Therefore, Lyapunov introduced a function called Lyapunov's function in order to study the behavior of some nonlinear differential systems. This method can often have a big scientific problem because there is no general technique for constructing Lyapunov functions. In this thesis, we are interested in determining the stability of nonlinear differential systems. More precisely, we discuss how we use Lyapunov stability theory to determine the stability of many nonlinear differential systems and the construction of Lyapunov functions. In addition, we will illustrate these studies with applications.

Key words : Nonlinear differential system, stability, Lyapunov function.

ملخص

تعتمد هذه الأطروحة على مشكلة رئيسية وهي دراسة إستقرار الأنظمة التفاضلية غير الخطية. يعتبر الإستقرار من أصعب المشاكل في دراسة الأنظمة الديناميكية. لهذا الغرض قدم ليابونوف وظيفة تسمى وظيفة ليابونوف لتحليل إستقرار الأنظمة التفاضلية غير الخطية. هذه الطريقة محدودة لأنها مرتبطة بصعوبة العثور على دالة ليابونوف. في هذه الأطروحة نهتم بدراسة إستقرار الأنظمة التفاضلية غير الخطية. بتعبير أدق نناقش إستخدام نظرية إستقرار ليابونوف لدراسة إستقرار الأنظمة التفاضلية غير الخطية وأيضا بناء وظيفة ليابونوف لهذا النوع من الأنظمة. بالإضافة إلى ذلك سوف نوضح هذه الدراسات مع التطبيقات.

الكلمات المفتاحية: النظام التفاضلي غير الخطي، الإستقرار، وظيفة ليابونوف.

Table des matières

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est le domaine le plus actif en mathématiques. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il décrit des phénomènes évolue au cours du temps, cette évolution est décrite par des équations différentielles ou des applications. L'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes physiques, économiques et chimiques sans pour autant faire référence à la théorie sous jacente qui détermine leurs équations d'évolution.
Le terme ‶Système dynamique″ est apparu au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle entre la publication du traité fondateur de **Henri Poincaré** [15] ‶Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste″ en 1892 et la monographie de **George David Birkhoff** [2] intitulée ‶Dynamical systems″ en 1927. Le premier objectif des chercheurs est l'étude des systèmes dynamiques, c'ést à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens **Isaac Newton**, **Leibniz** et **Bernoulli** à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle. A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématiques par les problèmes d'origine mécanique par exemple mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement, suivant la loi de la gravitation newtonnienne, problème de l'étude de mouvement de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes), problème de l'équation de la courbe décrivant la forme pris par une corde suspendue aux deux extrénités et soumise à son propre poids.
Le terme ‶équation différentielle″est dû à **Leibniz** $(1646 - 1716)$ en 1676. Cette notion fait tout d'abord l'objet d'études en vue d'une résolution algébrique pendant les deux premiers siècles de son apparition. L'une des premières tentatives remonte à **Newton** $(1642 - 1727)$ qui proposa une résolution par des séries infinies et prétendit que cette méthode permettait

de résoudre toute équation différentielle. Puis, **Bernoulli** $(1667-1748)$ découvrit la méthode qui fut développée et généralisée par la suite par **Leibniz**.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques afin de développer des méthodes d'étude des propriétés de leurs solutions. Grace à son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle publié en 1886, **Henri Poincaré** a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier de leurs propriétés, **Poincaré** s'est intéressé aux points d'équilibres, cycles limites et leur stabilité.

Le problème de la stabilité consiste à étudier le comportement d'un système donné après qu'il a subi une perturbation venant l'écarter de sa position d'équilibre. Le concept de stabilité pour les systèmes non linéaires en général est un concept complexe. Il peut être présenté de la façon suivante : si un système en état d'équilibre est légèrement perturbé, alors toutes les trajectoires restent dans le voisinage de l'état d'équilibre. L'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires par l'utilisation de cette définition uniquement est impossible car cette définition exige la connaissance de la solution d'équation différentielle non linéaire. L'approche la plus générale et la plus utilisée pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires est la théorie de Lyapunov sans avoir recours à la résolution de l'équation différentielle.

Dans ce mémoire, on étudie la stabilité des systèmes différentiels non linéaires à l'aide de la fonction de Lyapunov. On s'intéresse à l'existence de la fonction de Lyapunov qui est sous forme quadratique et définie positive et l'utilisation de cette fonction dans l'étude de la stabilité des systèmes différentiels non linéaires. On note que dans nos calculs tout au long de notre étude nous avons utilisé le logiciel mathématique ‶**Maple**″, il nous a permis de trouver facilement les racines des équations, ainsi que le traçage des figures.

Ce mémoire est scindé en trois chapitres :

Chapitre 01 est consacré à quelques notions de base sur les systèmes différentiels. On introduit des rappels concernant l'équation différentielle, la stabilité de la solution, le système dynamique, flot d'un système différentiel, le point d'équilibre, la linéarisation et la nature des points d'équilibre. Nous illustrons ces notions par des exemples.

Chapitre 02 est basé sur l'outil principal utilisé dans ce mémoire, qui est la théorie de la stabilité de Lyapunov. On définira la fonction de Lyapunov. On discutera l'utilisation de la théorie de la stabilité de Lyapunov dans l'étude de la stabilité des systèmes différentiels non linéaires, la difficulté de la recherche de la fonction de Lyapunov et la construction de cette dernière. On introduira aussi une généralisation sur l'approche de Crasovskii pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires invariants dans le temps. On donne des applications pour que cette théorie soit explicite.

Chapitre 03 s'intéresse à l'étude de la stabilité des systèmes différentiels non linéaires, en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov. Plus précisément, on va présenter un résultat concernant la stabilité d'une classe généralisée des systèmes de Liénard basé sur la possibilité d'existence des fonctions de Lyapunov sous forme des expressions quadratiques. On va aussi accompagner cette étude par des applications pour lesquelles ce résultat soit confirmé.

1
Notions générales sur les systèmes différentiels

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.1 Equations différentielles

1.1.1 Equation différentielle ordinaire

Définition 1.1. *Une équation différentielle ordinaire* (EDO) *est une relation entre la variable indépendante* t*, la fonction inconnue* $y = f(t)$ *et ses dérivées* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ *au point* t *définie comme suit :*

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Exemple 1.1. *L'équation* $y'(t) + 2y(t) = e^t$ *est une équation différentielle ordinaire d'inconnue* y.

1.1.2 Equation différentielle linéaire et non linéaire

Définition 1.2. *(Equation différentielle linéaire). Une équation différentielle ordinaire d'ordre* n *est dite linéaire si elle est de la forme suivante*

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t).$$

Exemple 1.2. *L'équation*

$$x^2y''(t) - 4xy'(t) + y(t) = sint,$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Définition 1.3. *(Equation différentielle non linéaire). Une équation différentielle ordinaire est dite non linéaire d'ordre 1 si elle est de la forme suivante*

$$y' = f(y).$$

Exemple 1.3. *L'équation*

$$y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0,$$

est une équation différentielle non linéaire d'ordre 1.

1.1.3 Equation différentielle autonome et non autonome

Définition 1.4. *(Equation différentielle autonome). Une équation différentielle est dite autonome si f ne dépend pas de t*

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Exemple 1.4. *Equation différentielle du premier ordre autonome*

$$y' = f(y).$$

Définition 1.5. *(Equation différentielle non autonome). Une équation différentielle est dite non autonome si f dépend de t*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Exemple 1.5. *Equation différentielle du premier ordre non autonome*

$$y' = f(t, y).$$

1.1.4 Existence et unicité de la solution

Théorème 1.1. (*Existence*). *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $f(t,x):\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue, alors pour tout (t_0,x_0) le problème*

$$\dot{x}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0, \tag{1.1}$$

admet au moins une solution.

Définition 1.6. *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f(t,x):\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x si pour tout fermé et borné (compact) K dans D, il existe une constante $L>0$ telle que :*

$$\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leq L\|x_1-x_2\|,$$

pour tout (t,x_1) et (t,x_2) dans K.

Théorème 1.2. (*Unicité*). *Supposons que f est une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à x. Alors pour tout (t_0,x_0) le problème (1.1) admet une solution unique.*

1.2 Stabilité de la solution

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}^+,\\ x(t_0)=x_0.\end{cases} \tag{1.2}$$

On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Définition 1.7. *(Stabilité au sens de Lyapunov). Une solution $\Phi(t)$ du système (1.2) telle que $\Phi(t_0)=\Phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si : $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ telle que toute solution $x(t)$ de (1.2) dont la valeur initiale $x(t_0)$ vérifier :*

$$\|x(t_0)-\Phi_0\|<\delta\Rightarrow\|x(t)-\Phi(t)\|<\varepsilon,\quad\forall t\geq t_0.$$

Si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0. \tag{1.3}$$

Alors la solution $\Phi(t)$ *est dite asymptotiquement stable.*

Quand $\Phi_t = 0$ *la définition devient :* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ *telle que la solution* $x(t)$ *de* (1.2) *dont la valeur initiale* $x(t_0)$ *vérifie :*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si en plus :

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

Alors $\Phi(t) = 0$ *est asymptotiquement stable.*

L'étude de la stabilité de la solution Φ_t *peut être ramenée a celle de la solution nulle* $y = 0$ *d'un système (analogue) au système* (1.2).

En effet, posons $y(t) = x(t) - \Phi(t)$ *où* $y(t)$ *est la nouvelle fonction inconnue.*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{d\Phi(t)}{dt} &= f(t, y + \Phi), \\
\frac{dy}{dt} &= f(t, y + \Phi) - f(t, \Phi), \\
\frac{dy}{dt} &= g(t, y).
\end{aligned}$$

On voit bien que $y \equiv 0$ *est une solution de ce système.*

Définition 1.8. *Un point d'équilibre* x_0 *du système* (1.2) *est dit stable si lorsque le point initial* $x(t_0)$ *est suffisamment proche de* x_0*, alors la trajectoire reste près de* x_0 *pour tout* $t > t_0$*. Plus précisément, étant donné* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ *tel que*

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \varepsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Si le point d'équilibre n'est pas stable, il est dit instable.

Le point d'équilibre x_0 *du système* (1.2) *est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si en plus toute trajectoire qui commence suffisamment proche de* x_0 *tend vers* x_0 *lorsque* $t \to \infty$.

Donc, cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0.$$

Exemple 1.6. $(n = 2)$ *Soit le système :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

La solution qui vérifie $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(x_0\cos(t) - y_0\sin(t)) \\ e^{-2t}(x_0\sin(t) + y_0\cos(t)) \end{pmatrix},$$

et

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| < \delta \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Il suffit de prendre $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, alors $\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable au sens de Lyapunov.

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

Donc, la solution est asymptotiquement stable.

Exemple 1.7. *Utilisons la méthode de Lyapunov pour étudier la stabilité du point d'équilibre du système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x^3, \\ \dot{y} = -x^2 - y^5. \end{cases}$$

L'origine $(0,0)$ est le seul point d'équilibre pour ce système. Considérons la fonction de

Lyapunov définie positive suivante

$$V(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

On a $V(0,0) = 0^2 + 2(0)^2 = 0$ *et* $V(x,y) = x^2 + 2y^2 > 0$ *pour toute* $(x,y) \neq (0,0)$.
Pour toute solution $(x,y) \neq (0,0)$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= \frac{d}{dt}(V(x,y)) = \frac{d}{dt}(x^2 + 2y^2) \\
&= 2x(2xy - x^3) + 4y(-x^2 - y^5) \\
&= 4x^2y - 2x^4 - 4x^2y - 4y^6 \\
&= -2x^4 - 4y^6 < 0.
\end{aligned}$$

Alors, l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

1.3 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un système décrit des phénomènes évoluent au cours du temps, cette évolution est décrite par des équations différentielles ou des applications. Mathématiquement, on définit un système dynamique par

Définition 1.9. *Un système dynamique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application :*

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

telle que

1. $\phi(.,x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
2. $\phi(t,.) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est continue.*
3. $\phi(0,x) = x$.
4. $\phi(t+s,x) = \phi(t,\phi(s,x))$ *pour* $t,s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.10. *Un système dynamique* ϕ *sur* $\mathbb{R}^n$ *est linéaire si :*

$$\phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha\phi(t,x) + \beta\phi(t,y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.11. *(Système dynamique continu). Un système dynamique continu dans lequel les variables dynamiques sont continues est représenté par un système d'équations différentielles :*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad x \in U,$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.8. *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.4}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la solution de (1.4) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

le système (1.4) engendre un système dynamique

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \phi(t, x) &= e^{At}x_0. \end{aligned}$$

1.4 Flot d'un système différentiel

Définition 1.12. *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.5}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n), f = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.5). L'ensemble des applications Φ_t définie par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot de système non linéaire (1.5).

Remarque 1.1. *Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps, si non il est dit non autonome.*

1.5 Points d'équilibre et linéarisation

1.5.1 Points d'équilibre

Définition 1.13. *Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point critique ou point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

si il vérifie $f(x_0) = 0$.

Définition 1.14. *Le point d'équilibre x_0 de (1.6) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.*

Exemple 1.9. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0, \end{cases}$$

alors, ce système possède les deux points d'équilibre suivants : $(1, 0), (-1, 0)$.

1.5.2 Linéarisation

Définition 1.15. *Le système*

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est appelé le système linéarisé du système (1.6) en x_0.

Remarque 1.2. *On utilise la linéarisation pour étudier la nature des points d'équilibre.*

Exemple 1.10. *Soit le système non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2, \\ \dot{y} = y - x^2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Il est clair que l'origine est le seul point d'équilibre. En faisant la linéarisation du système (1.7) *en* $(0,0)$*, on obtient*

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -1-y^2 & -2xy \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

*D'o*ù

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, le système linéarisé du système (1.7) *est*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

1.6 Classification des points d'équilibre

Définition 1.16. *On considère le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit x_0 *son point critique.*

1. *Le point critique* x_0 *est appelé selle s'il est hyperbolique et si* $A = Df(x_0)$ *a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.*
2. *Le point critique* x_0 *est appelé puits si toutes les parties réelles négatives.*
3. *Le point critique* x_0 *est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice* $A = Df(x_0)$ *ont des parties réelles positives.*

Exemple 1.11. *Soit le système non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = y + x^2 y. \end{cases} \tag{1.8}$$

L'origine $(0,0)$ *est le seul point d'équilibre du système* (1.8), $\lambda_1 = 4$ *et* $\lambda_2 = 1$ *deux valeurs propres réelles positives . Alors le point critique* $(0,0)$ *est une source.*

1.7 Nature des points d'équilibre

On considère le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où A une matrice constante, $(0,0)$ est le seul point d'équilibre, soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A. On distingue les différents cas suivants :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent alors le point critique $(0,0)$ est appelé un selle, il est toujours instable.

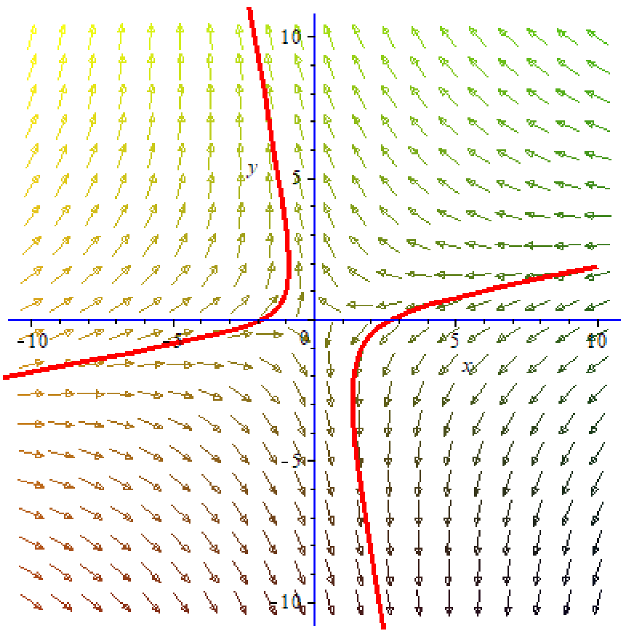

FIGURE 1.1 – L'origine (0,0) est une selle instable

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe on a trois cas :

   (a) Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, le point critique $(0,0)$ est appelé un nœud stable.

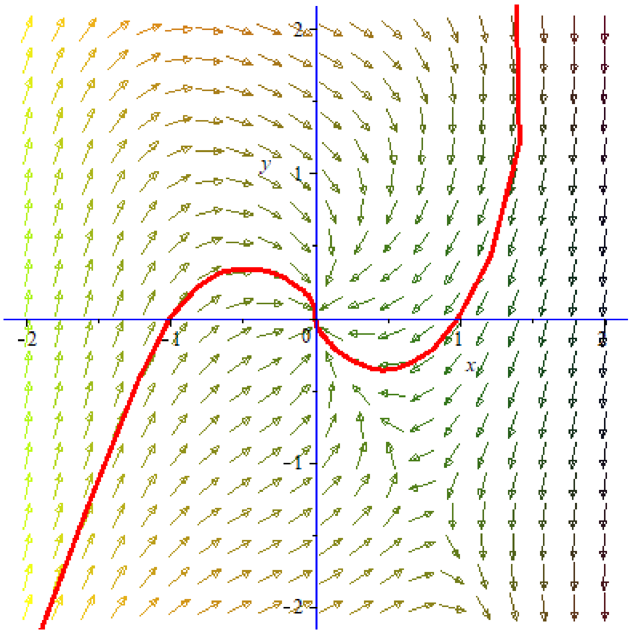

FIGURE 1.2 – L'origine (0,0) est un noeud stable

(b) Si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$, le point critique $(0,0)$ est appelé un nœud instable.

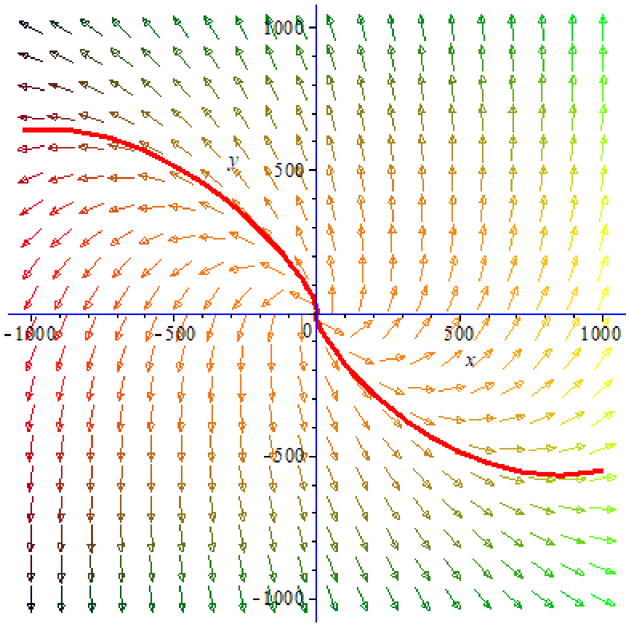

FIGURE 1.3 – L'origine (0,0) est un noeud instable

(c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $(0,0)$ est appelé nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

3. Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées alors le point critique $(0,0)$ est appelé un foyer, il est stable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.

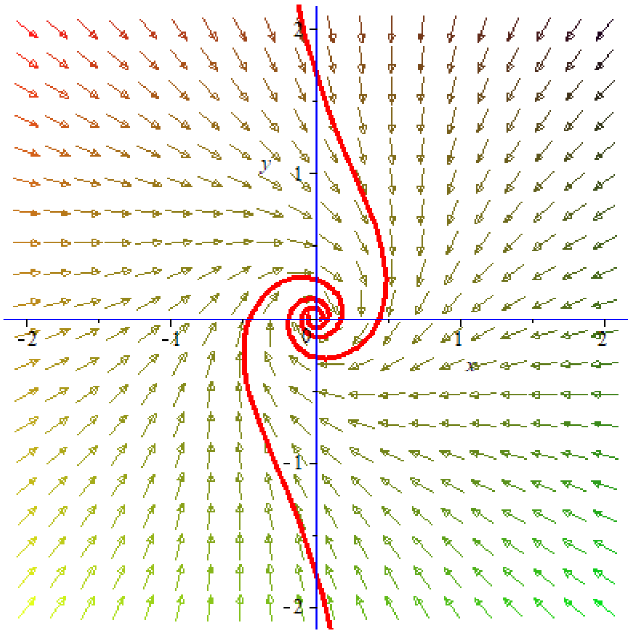

FIGURE 1.4 – L'origine (0,0) est un foyer stable

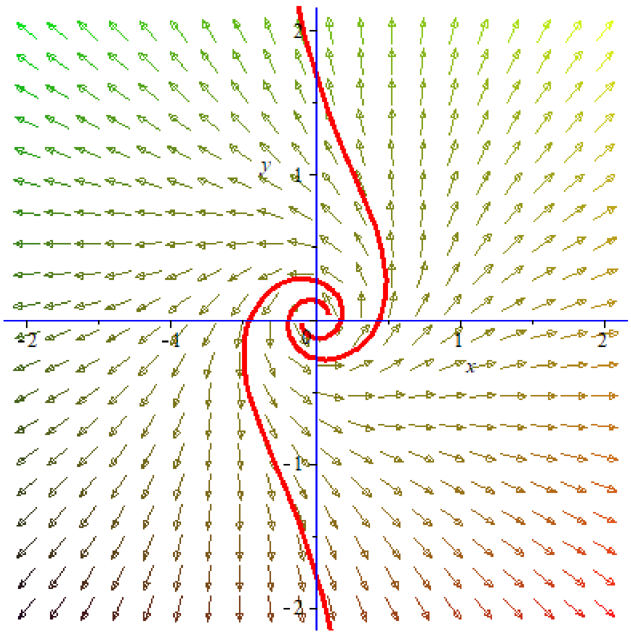

FIGURE 1.5 – L'origine (0,0) est un foyer instable

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $(0,0)$ est appelé un centre, il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

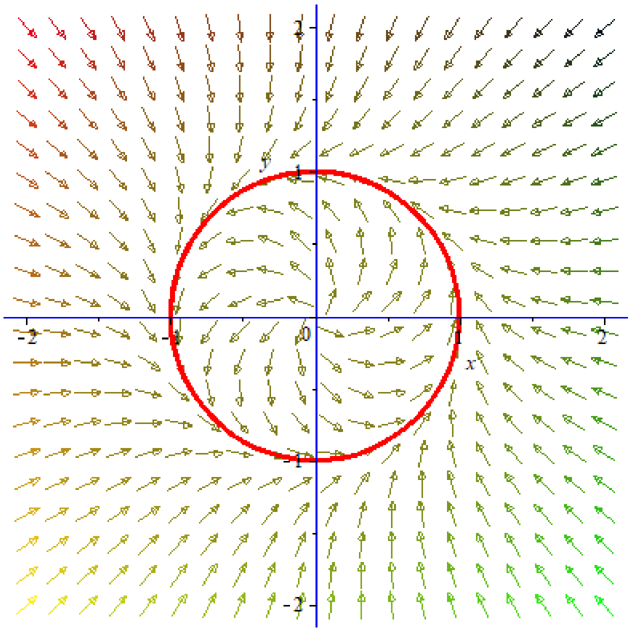

FIGURE 1.6 – L'origine (0,0) est un centre

Exemple 1.12. *On va étudier la nature du point critique* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$$

Écrivons l'équation caractéristique de la matrice associée à ce système on a

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$ *sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique* $(0,0)$ *est une selle instable. (Voir la figure(1.7)).*

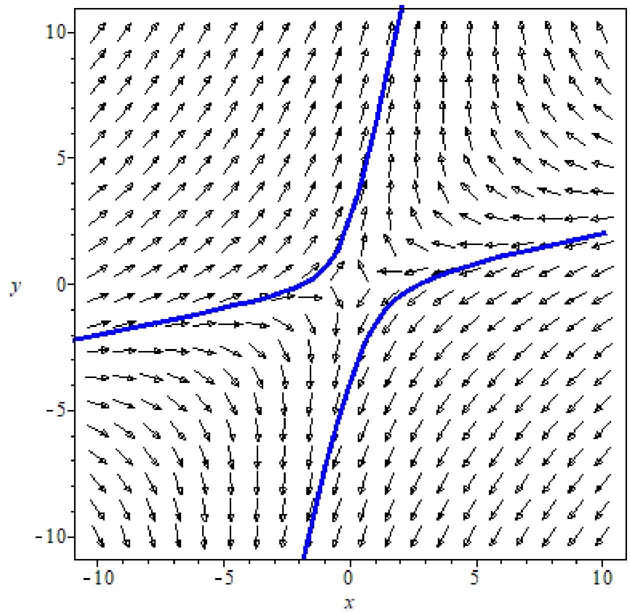

FIGURE 1.7 – L'origine (0,0) est une selle instable

Exemple 1.13. *On va étudier la nature du point critique* $(0,0)$ *du système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$$

Écrivons l'équation caractéristique de la matrice associée à ce système on a

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = -2 + i, \quad \lambda_2 = -2 - i$ *sont complexes conjuguées et* $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$*, alors le point critique* $(0,0)$ *est un foyer stable. (Voir la figure(1.8)).*

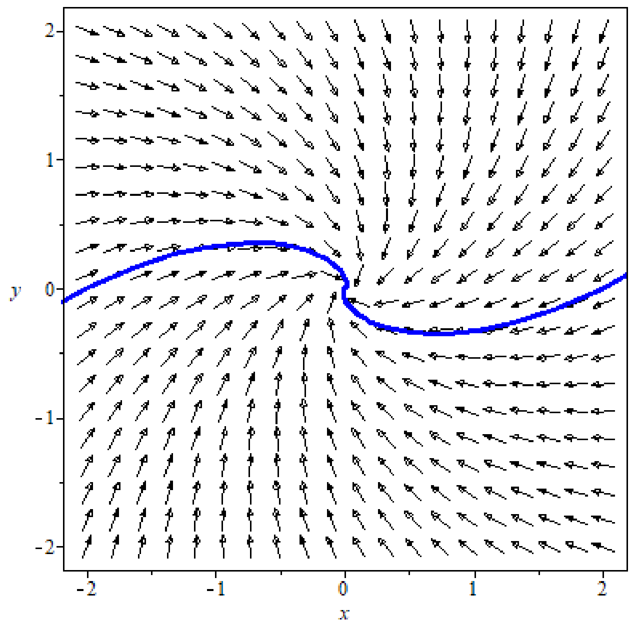

FIGURE 1.8 – L'origine (0,0) est un foyer stable

1.8 Plan et portrait de phase

Définition 1.17. *Soit le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.9}$$

où P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d.
Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. Les solution $(x(t), y(t))$ du système (1.9) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.
Les points critique de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

2 La théorie de la stabilité de Lyapunov

Dans ce chapitre, on va présenter l'outil principal qui nous avons utilisé tout au long de ce travail pour étudier la stabilité des systèmes différentiels qui est ‟la théorie de la stabilité de Lyapunov ″. L'idée de cette théorie a été dévloppée par **Aleksandr Mikhailovitch Lyapunov** [13] mathématicien russe à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle, spécialiste en stabilité des systèmes et particulièrement de ceux issus de la mécanique des fluides, son travail est basé sur le problème général de la stabilité du mouvement.
La méthode de la fonction de Lyapunov est définie comme une méthode générale qui permet d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires.

2.1 Fonction de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov sont des outils globaux d'étude des systèmes dynamiques. Elles permettent dans le cas où le théorème de la linéarisation ne s'applique pas, de montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable et d'avoir une bonne estimation de son bassin d'attraction, c'est-à-dire dans l'ensemble de tous les points du plan à partir desquels la trajectoire tend vers ce point d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.
On considère le système

$$\dot{x} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Définition 2.1. *Soit U un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine. Une fonction V à valeur réelle de classe C^1 telle que*

$$\begin{cases} V : U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow V(x, y) \end{cases}$$

est dite définie positive sur U si :

1. $V(0,0) = 0$.
2. $V(x,y) > 0$ *pour tout* $(x,y) \in U$ *avec* $(x,y) \neq (0,0)$.

– V *est définie négative si* $(-V)$ *est définie positive.*

– V *est semi définie positive si* $V(x,y) \geq 0$ *pour tout* $(x,y) \in U$ *avec* $(x,y) \neq (0,0)$.

Exemple 2.1. 1. $V(x,y) = x^2 + 2y^2$

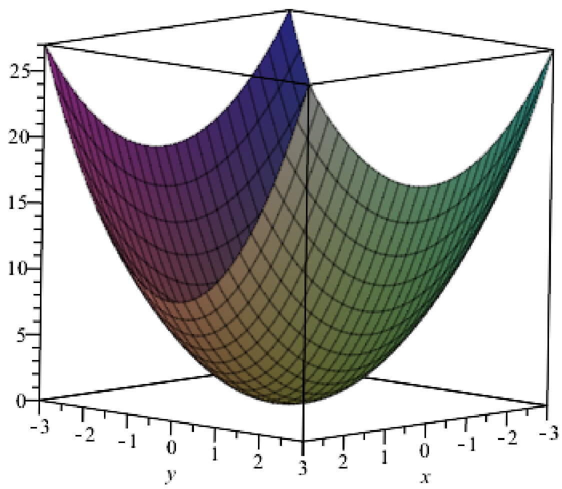

FIGURE 2.1 – Portrait de phase de la fonction V

2. $V(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2 + x^2 + y^2}$

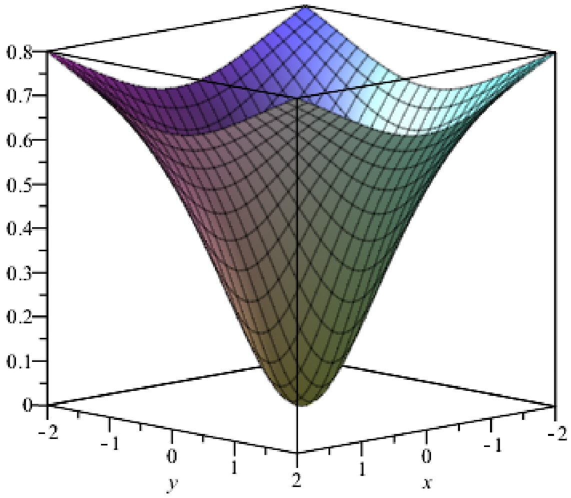

FIGURE 2.2 – Portrait de phase de la fonction V

Définition 2.2. *(Fonction de Lyapunov faible). Une fonction $V(x,y)$ définie positive sur un voisinage U de l'origine est dite fonction de Lyapunov faible pour le système* (2.1) *si*

$$\dot{V}(x,y) \leq 0, \quad \forall (x,y) \in U - \{(0,0)\}.$$

Définition 2.3. *(Fonction de Lyapunov forte). Une fonction $V(x,y)$ définie positive sur un voisinage U de l'origine est dite fonction de Lyapunov forte pour le système* (2.1) *si*

$$\dot{V}(x,y) < 0, \quad \forall (x,y) \in U - \{(0,0)\}.$$

Définition 2.4. *On appelle courbes de niveaux associées à une fonction définie positive $V(x,y)$, les lieux des points du plan qui vérifiant l'équation $V(x,y) = k$, avec $k > 0$ et k petit. Ainsi, pour une fonction définie positive, les courbes de niveaux dans le plan (x,y) sont des courbes concentriques autour de l'origine.*

Remarque 2.1. *D'une manière générale, on choisira de préférence, comme fonction définie positive une fonction polynomiale, i.e. une fonction quadratique homogène.*

Lemme 2.1. *Une fonction quadratique homogène $V(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, avec a, b et c des nombres réels, est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.*

Preuve.

On suppose que V est définie positive et on montre que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
Comme $V(x, 0) = ax^2 > 0$, si $x \neq 0$ et a doit être positive.
Si $y \neq 0$ est fixé , $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ trinôme par rapport à x
$\Delta = 4b^2y^2 - 4acy^2 = 4y^2(b^2 - ac)$, comme $y \neq 0$ et $V(x, y) > 0$ alors le déterminant $\Delta = 4(b^2 - ac)$ doit être négative.
De même, si on fixe $x \neq 0$, $V(x, y) = cy^2 + 2bxy + ax^2 = 0$ trinôme par rapport à y
$\Delta = 4b^2x^2 - 4cax^2 = 4x^2(b^2 - ac) < 0$, comme $\Delta < 0$ et $a > 0$ alors $V(x, y) > 0$ donc V est définie positive. ∎

Maintenant, on veut savoir comment la solution de $\dot{x} = f(x)$ traverser les ensembles d'une fonction définie positive V.
Si $x(t)$ une solution du système $\dot{x} = f(x)$ et $V(x, y)$ une fonction définie positive. Alors

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t))\dot{y}(t)$$

$$\dot{V}(x(t)) = f(x).\nabla V(x, y)$$

- Si $\dot{V}(x, y) > 0$, alors les trajectoires traversent les courbes de niveaux de l'intérieur vers l'extérieur.
- Si $\dot{V}(x, y) < 0$, alors les trajectoires traversent les courbes de niveaux de l'extérieur vers l'intérieur.
- Si $\dot{V}(x, y) = 0$, alors les trajectoires sont tangentes à la courbe de niveaux.

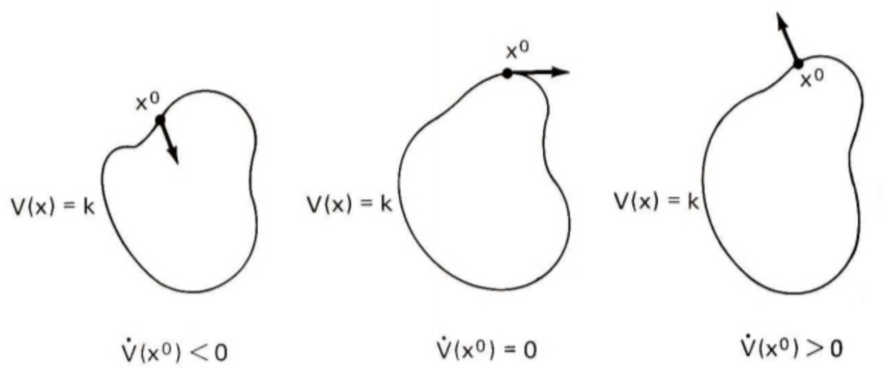

FIGURE 2.3 – Couper les courbes de niveau

2.2 Stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre x_0 hyperbolique il ya deux cas

1. Le point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable si $Df(x_0)$ a des valeurs propres ont des parties réelles négatives (puits).
2. Le point d'équilibre x_0 est instable si $Df(x_0)$ a au moins une valeur propre a une partie réelle positive (selle ou source).

Et pour étudier la stabilité des points d'équilibre x_0 non hyperboliques il ya autres méthodes parmi eux la méthode de Lyapunov qui est une méthode très importante pour l'étude de la stabilité de ce type de points d'équilibre.

2.2.1 Stabilité par la fonction de Lyapunov

Théorème 2.1. *Soit* $(0,0)$ *est un point d'équilibre du système* (2.1) *et* V *est une fonction définie positive de classe* C^1 *sur un voisinage* U *de l'origine. On distingue les différents cas selon* $\dot{V}$ *:*

1. *Si* $\dot{V}(x,y) \leq 0$ *pour* $(x,y) \in U - \{(0,0)\}$, *alors l'origine est stable.*
2. *Si* $\dot{V}(x,y) < 0$ *pour* $(x,y) \in U - \{(0,0)\}$, *alors l'origine est asymptotiquement stable.*
3. *Si* $\dot{V}(x,y) > 0$ *pour* $(x,y) \in U - \{(0,0)\}$, *alors l'origine est instable.*

Remarque 2.2. *Si le point d'équilibre* x_0 *n'est pas l'origine, on utilise un changement de variable du type* $x'(t) = x(t) - x_0$ *pour étudier la stabilité de point d'équilibre non hyperbolique.*

Exemple 2.2. *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + 4y^2, \\ \dot{y} = -4xy. \end{cases} \tag{2.2}$$

L'origine $(0,0)$ *est le seul point d'équilibre du système* (2.2).

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = 0$, *est une valeur propre double. Nous étudions la stabilité du point d'équilibre* $(0,0)$ *avec une fonction de Lyapunov.*

Soit $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ *est une fonction de Lyapunov de classe* C^1 *et définie positive.*

On a

$V(0,0) = \frac{1}{2}(0^2+0^2) = 0$ *et* $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) > 0$ *pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$.

Donc

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{d}{dt}(V(x,y)) \\ &= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= x(-x^3+4y^2) + y(-4xy) \\ &= -x^4 + 4xy^2 - 4xy^2 \\ &= -x^4 \leq 0.\end{aligned}$$

Alors, l'origine $(0,0)$ *est un point d'équilibre stable. (Voir la figure(2.4)).*

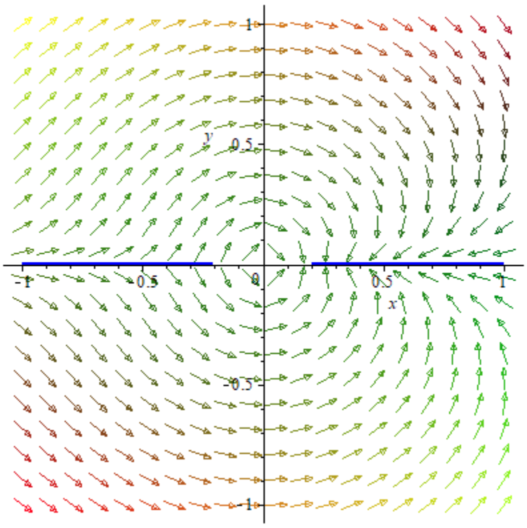

FIGURE 2.4 – Portrait de phase de l'origine du système (2.2)

Exemple 2.3. *Soit le système suivant*

$$\begin{cases}\dot{x} = -x^3 - y^2, \\ \dot{y} = xy - y^3.\end{cases} \tag{2.3}$$

L'origine $(0,0)$ *est le seul point d'équilibre du système* (2.3).

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_{1,2} = 0$, *est une valeur propre double.*

Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de Lyapunov de classe* C^1 *et définie positive.*

On a

$V(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$ *et* $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ *pour tout* $(x, y) \neq (0, 0)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, y) &= \frac{d}{dt}(V(x, y)) \\
&= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\
&= 2x(-x^3 - y^2) + 2y(xy - y^3) \\
&= -2x^4 - 2xy^2 + 2xy^2 - 2y^4 \\
&= -2(x^4 + y^4) < 0.
\end{aligned}$$

Alors, le point d'équilibre $(0, 0)$ *est asymptotiquement stable. (Voir la figure(2.5)).*

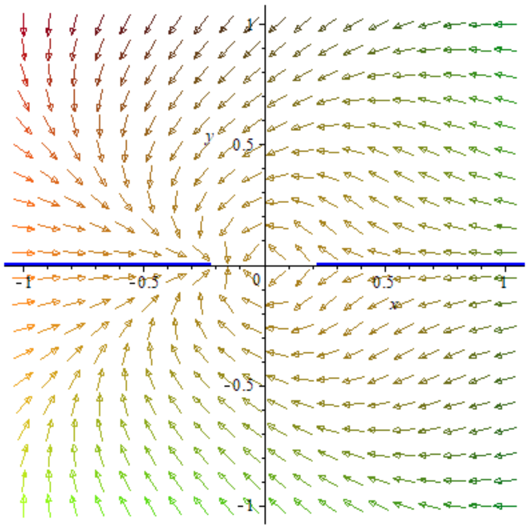

FIGURE 2.5 – Portrait de phase de l'origine du système (2.3)

Exemple 2.4. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2). \end{cases} \tag{2.4}$$

L'origine $(0, 0)$ *est le seul point d'équilibre du système* (2.4).

$\lambda_{1,2} = \pm i$, *deux valeurs propres imaginaires pures (la partie réelle est nulle).*

Soit $V(x, y) = x^2 + y^2$ *est une fonction de Lyapunov de classe* C^1 *et définie positive.*

On a

$V(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ *et* $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ *pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= \frac{d}{dt}(V(x,y)) \\
&= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\
&= 2x(y + x(x^2+y^2)) + 2y(-x + y(x^2+y^2)) \\
&= 2xy + 2x^2(x^2+y^2) - 2xy + 2y^2(x^2+y^2) \\
&= 2(x^2+y^2)^2 > 0.
\end{aligned}$$

Alors, le point d'équilibre $(0,0)$ *est instable. (Voir la figure(2.6)).*

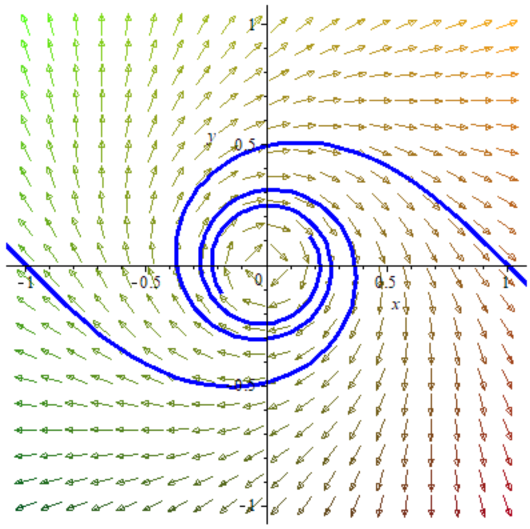

FIGURE 2.6 – Portrait de phase de l'origine du système (2.4)

2.2.2 Instabilité de Četaev

Théorème 2.2. *Supposons que le système dynamique* $\dot{x} = f(x)$ *admet l'origine comme point fixe. Si une fonction* $V(x,y)$ *à valeurs réelles et de classe* C^1*, existe telle que*

1. *Le domaine de définition de* $V(x,y)$ *contient* $D = \{x / \|x\| \leq r\}$ *où* r *est une constante réelle strictement positive.*

2. *Il existe des points aussi près que l'on veut de l'origine pour lesquels* $V(x,y)$ *est strictement positive.*

3. $\dot{V}(x,y) > 0$ *sur* $D - \{(0,0)\}$.

4. $V(0,0) = 0.$

Alors l'origine est un point d'équilibre instable.

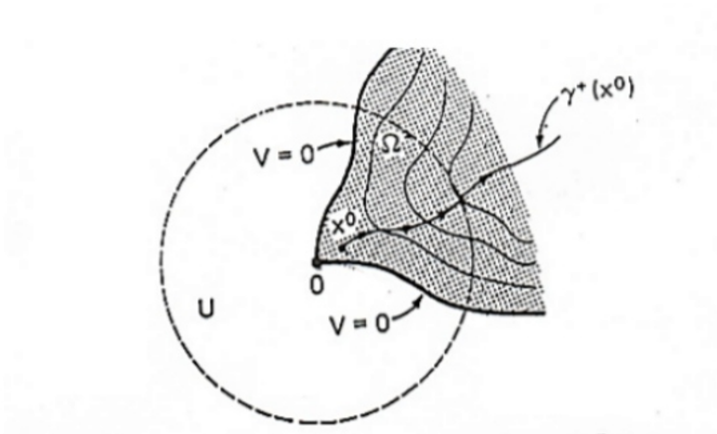

FIGURE 2.7 – Graphe de théorème d'instabilité de Četaev

Exemple 2.5. *Soit le système dynamique*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - xy, \\ \dot{y} = y^2. \end{cases} \tag{2.5}$$

L'origine est un point d'équilibre du système (2.5).

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

l'origine est un point d'équilibre non hyperbolique.

Soit $V(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y + 4xy^2 + \frac{1}{3}y^3.$

Et

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{d}{dt}(V(x,y)) \\ &= \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &= (4x^2+4xy+4y^2)(2x^2-xy)+(2x^2+8xy+y^2)(y^2) \\ &= 8x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\ &= 7x^4+(x+y)^4.\end{aligned}$$

- *$V(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, on peut prendre pour D n'importe quel cercle de centre l'origine et de rayon r.*
- *Si $x=0$, $V(x,y)=\dfrac{y^3}{3}$ qui est strictement positive pour $y>0$, ainsi il existe sur l'axe des y des points arbitrairement près de l'origine tels que $V(x,y)>0$.*
- *$\dot{V}(x,y)=7x^4+(x+y)^4>0$ sur $D-\{(0,0)\}$.*
- $V(0,0)=\frac{4}{3}(0)^3+2(0)^2(0)+4(0)(0)^2+\frac{1}{3}(0)^3=0.$

Donc d'après le théorème d'instabilité de Četaev, l'origine est instable. (Voir la figure(2.8)).

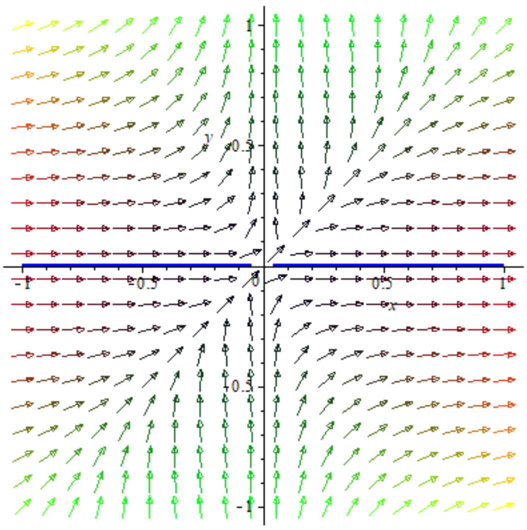

FIGURE 2.8 – Portrait de phase de l'origine du système (2.5)

2.3 Stabilité des systèmes différentiels non-linéaires

Le concept de la stabilité pour les systèmes différentiels non linéaires en général est un concept complexe. Il est impossible d'analyser la stabilité d'un système non linéaire en utilisant la définition de la stabilité uniquement parce que cette définition nécessite la connaissance de la solution de l'équation différentielle non linéaire. Mais la méthode de

Lyapunov est la seule méthode qui permette d'étudier la stabilité des systèmes différentiels non linéaires sans recourir à la solution de l'équation différentielle.

2.3.1 Existence de la fonction de Lyapunov

L'existence de la fonction de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante pour déterminer la stabilité de nombreuses équations différentielles. La difficulté de trouver la fonction de Lyapunov est un problème scientifique. Généralement, il n'y a pas une technique générale pour construire les fonctions de Lyapunov, mais il existe des techniques pour construire cette fonctionnalité qui s'appliquent à des cas précis et pour comprendre ces techniques voici les deux lemmes suivants

Lemme 2.2. *[11] Supposons que la linéarisation autour d'un point d'équilibre du système d'équations différentielles d'ordre* 2 *est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

et supposons :

$$\det M > 0, \qquad a, d < 0 \;\; et \;\; b, c \neq 0.$$

Alors

$$V(x, y) = x^2 + ky^2,$$

est une fonction de Lyapunov locale dans un voisinage du point d'équilibre, telle que :

$$k = \begin{cases} \frac{b}{c} & si \quad b.c > 0, \\ -\frac{b}{c} & si \quad b.c < 0. \end{cases}$$

Preuve.

Le calcul de la dérivée de V où $V(x, y) = x^2 + ky^2$ par rapport au système linéarisé donne :

$$\dot{V} = 2ax^2 + 2(b + ck)xy + 2dky^2.$$

Choisissons $k = \frac{b}{c}$ dans le cas où b et c sont du même signe donnera

$$4 \cdot 2a \cdot 2dk - 2(b + ck)^2 = 16\frac{adb}{c} - 16b^2 = 16\frac{b}{c}\det M > 0.$$

Donc, $\dot{V}$ est définie négative car $2a < 0$. Choisissons $k = -\frac{b}{c}$ dans le cas où b et c sont de signes opposés donnera :

$$\dot{V} = 2ax^2 + 2dky^2,$$

qui est définie négative comme $a, d < 0$ et $k > 0$.

Comme les termes d'ordre supérieur ne peuvent pas changer le signe de V et $\dot{V}$, alors la fonction V est une fonction de Lyapunov locale pour ces choix de k. ■

Exemple 2.6. *Soit le système non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - x^2 y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases} \tag{2.6}$$

Ce système admet un seul point d'équilibre qui est l'origine. Pour étudier la stabilité de l'origine du système (2.6), on utilise la linéarisation.

Le système linéarisé du système (2.6) est

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Comme $\det M = 6 > 0$ *et* $a = -2 < 0$, $d = -2 < 0$, $b = -1 \neq 0$, $c = 2 \neq 0$. *Alors, d'après le lemme 2.2* $V = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ *est une fonction de Lyapunov pour le système linéarisé qui est définie positive.*

Maintenant, nous calculons $\dot{V}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= 2x(-2x - y - x^2 y) + y(2x - 2y) \\ &= -2(2x^2 + y^2) - 2x^3 y < 0. \end{aligned}$$

Donc, l'origine est asymptotiquement stable. (Voir la figure(2.9)).

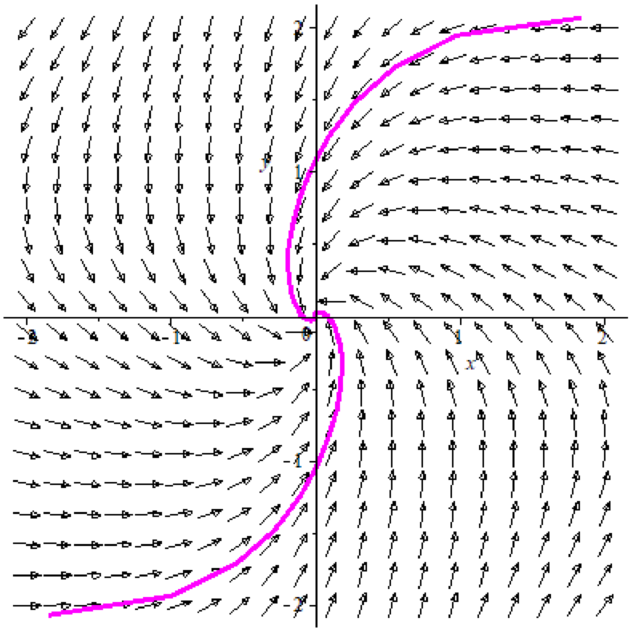

FIGURE 2.9 – Portrait de phase de l'origine du système (2.6)

Lemme 2.3. *[11] Supposons que la linéarisation autour d'un point d'équilibre du système d'équations différentielles d'ordre 2 est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

et supposons que :

$$\det M > 0,$$

et

$$trace(M) = a + d < 0.$$

Alors

$$V(x,y) = x^2 + Bxy + Cy^2,$$

est une fonction de Lyapunov locale dans un voisinage de point d'équilibre si :

$$\begin{cases} B = B_0 = \frac{d-a}{c}, \quad C = C_0 = \frac{(a+d)^2 - 2bc}{2c^2} & pour \quad c \neq 0, \\ B = 0 \quad et \quad C > \frac{b^2}{4ad} & pour \quad c = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.7. *Considérons le système différentiel non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2xy^2, \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ce système admet un seul point d'équilibre qui est l'origine. Pour étudier la stabilité de l'origine du système (2.7), on utilise la linéarisation.
Le système linéarisé du système (2.7) est

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Comme $\det M = 5 > 0$ *et* $trace(M) = -4 < 0$*. Alors, d'après le lemme 2.3 la fonction de Lyapunov est donné par* $V = x^2 + 9y^2$*.*
Maintenant, nous calculons $\dot{V}$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 18y\dot{y} \\ &= 2x(-2x + y - 2xy^2) + 18y(-x - 2y) \\ &= -4(x^2 + 9y^2) - 16xy - 4x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

Donc, l'origine est asymptotiquement stable. (Voir la figure(2.10)).

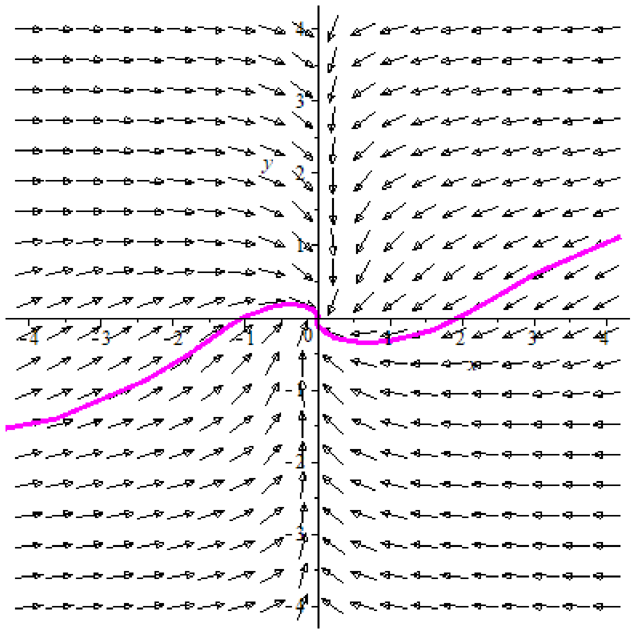

FIGURE 2.10 – Portrait de phase de l'origine du système (2.7)

2.3.2 Généralisation sur l'approche de Crasovskii

Il est difficile de trouver ou de construire la fonction de Lyapunov appropriée et sa fonction dérivée pour les systèmes différentiels non linéaires. Ainsi, il doit construire la fonction de Lyapunov par d'autres moyens.

Dans cette partie, nous allons construire la fonction de Lyapunov et sa fonction dérivée pour analyser et juger la stabilité des systèmes différentiels non linéaires par l'approche de Crasovskii [16] qui a été proposée dans les années 1960. Cette approche fournit une autre façon d'analyser la stabilité des systèmes différentiels non linéaires. Elle est basée sur la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Considérons le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

où $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ et $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^T$ est la fonction vectorielle non linéaire.

Le système différentiel non linéaire peut avoir un ou plusieurs points d'équilibre isolés. Mais ces points d'équilibres, après un évident changement de coordonnées, peuvent se ramener à l'origine. Par conséquent, l'origine est le seul point d'équilibre, alors :

$$f(x) = \begin{cases} = 0, & \forall x = 0, \\ \neq 0, & \forall x \neq 0. \end{cases}$$

Dérivation de l'approche de Crasovskii

Pour le système (2.8). Nous proposons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = f^T(x) f(x).$$

Comme

$$V(x) = f^T(x) f(x) = f^T(x) I f(x),$$

et I est une matrice identité, donc la fonction de Lyapunov proposée $V(x)$ est nécessairement une fonction définie positive a la forme suivante

$$V(x) = f^T(x)f(x) = \begin{cases} = 0, & \forall x = 0, \\ > 0, & \forall x \neq 0. \end{cases}$$

Cherchons la fonction dérivée de la fonction de Lyapunov $V(x)$ et notée $\dot{V}(x)$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}[f^T(x)f(x)] \\
&= \frac{df^T(x)}{dt}f(x) + \frac{df(x)}{dt}f^T(x) \\
&= \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\frac{dx}{dt}\right]^T f(x) + f^T(x)\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\frac{dx}{dt}\right] \\
&= \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}f(x)\right]^T f(x) + f^T(x)\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}f(x)\right] \\
&= f^T(x)\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right]^T f(x) + f^T(x)\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right] f(x) \\
&= f^T(x)f(x)\left[\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right]^T + \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right]\right],
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}$ est la matrice Jacobienne de $f(x)$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Soit $F(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right]$

$$\dot{V}(x) = f^T(x)\left[F^T(x) + F(x)\right]f(x).$$

Remarquons que si $\left[F^T(x) + F(x)\right]$ est définie négative :

$$F^T(x) + F(x) = \begin{cases} = 0, & \forall x = 0, \\ < 0, & \forall x \neq 0. \end{cases}$$

Alors $\dot{V}(x)$ est également définie négative. Par conséquent, conformément à la théorie de la stabilité de Lyapunov, $V(x)$ est définie positive et $\dot{V}(x)$ est définie négative, donc le système (2.8) est asymptotiquement stable. (Voir [16]).

Proposition 2.1. *[16] Pour le système (2.8), l'origine $x = 0$ est le point d'équilibre isolé et $F(x)$ est la matrice Jacobienne de $f(x)$. Si $\left[F^T(x) + F(x)\right]$ est définie négative, alors l'origine est asymptotiquement stable et $V(x) = f^T(x)f(x)$ est une fonction de Lyapunov. De plus, si la norme euclidienne de x tend vers l'infini, c'est-à-dire $\|x\| \to \infty$, la fonction de Lyapunov $V(x)$ tend vers l'infini*

$$V(x) = f^T(x)f(x) \to \infty.$$

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Remarque 2.3. *Lorsque l'approche de Crasovskii est utilisée pour analyser la stabilité du système non linéaire invariant dans le temps, la première étape consiste à résoudre la matrice jacobienne $F(x)$ de $f(x)$ et à calculer $[F^T(x) + F(x)]$. Et la deuxième étape consiste à déterminer le cas où $[F^T(x) + F(x)]$ est définie négative. Si $\left[F^T(x) + F(x)\right]$ est définie négative, alors l'origine est asymptotiquement stable et $V(x) = f^T(x)f(x)$ est la fonction de Lyapunov. De plus, si $\left[F^T(x) + F(x)\right]$ ne peut pas être définie négative, on ne peut rien conclure sur la stabilité du système.*

Exemple 2.8. *Soit le système différentiel non linéaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - y - y^5. \end{cases} \tag{2.9}$$

Le système (2.9) admet un seul point critique qui est l'origine. On calcule la matrice Jacobienne $F(x)$ et $[F^T(x) + F(x)]$:

$$F(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 - 5y^4 \end{bmatrix},$$

et

$$F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 - 10y^4 \end{bmatrix}.$$

Pour $[F^T(x)+F(x)]$, *ses mineurs principaux du premier et de deuxième ordre* Δ_1 *et* Δ_2 *sont respectivement :*

$$\begin{cases} \Delta_1 = -2 < 0, \\ \Delta_2 = 20y^4 > 0. \end{cases}$$

Selon le critère de Sylvester, $[F^T(x)+F(x)]$ *est définie négative. De plus, lorsque* $\|x\| \to \infty$, *alors la fonction de Lyapunov* $V(x)$ *tend vers l'infini :*

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x)f(x) \\ &= (-x+y)^2 + (x-y-y^5)^2 \to \infty \end{aligned}$$

Par conséquent, le système est globalement asymptotiquement stable à l'origine. (Voir la figure(2.11)).

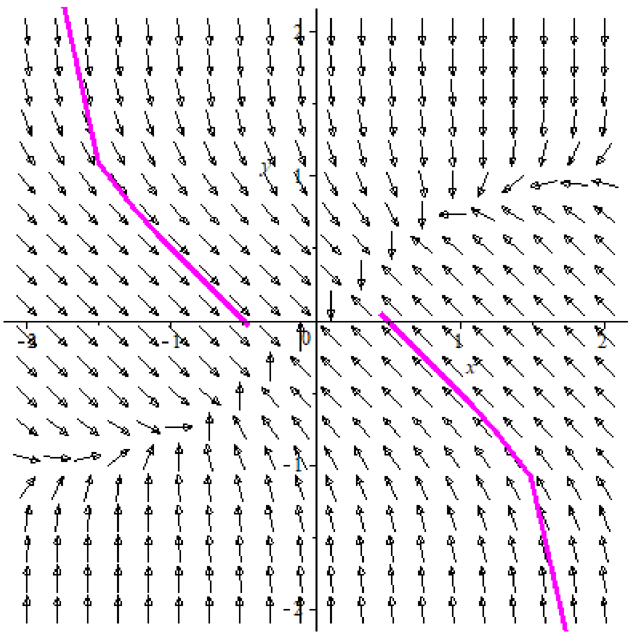

FIGURE 2.11 – Portrait de phase du système (2.9)

Exemple 2.9. *Soit le système différentiel non linéaire suivant dépendant de deux paramètres réels* a, b *quelconques :*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y, \\ \dot{y} = x - y + by^5. \end{cases} \tag{2.10}$$

Déterminer maintenant les valeurs des paramètres a *et* b, *de manière à ce que le système (2.10) globalement asymptotiquement stable à l'origine. On calcule la matrice jacobienne*

$F(x)$ et $[F^T(x) + F(x)]$, on a

$$F(x) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\right] = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5by^4 \end{bmatrix},$$

et

$$F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2 & -2 + 10by^4 \end{bmatrix}.$$

Les mineurs principaux du premier et deuxième ordre de $[F^T(x)+F(x)]$ sont respectivement Δ_1 et Δ_2 et supposons que $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2a < 0, \\ \Delta_2 = 20aby^4 - 4a - 4 > 0. \end{cases}$$

Résoudrons ce système des inégalités, on obtient :

$$a < 0, \ b < \frac{a+1}{5a}.$$

Par exemple, soit $a = -2$ et $b = -3$, on peut dire que la fonction de Lyapunov est définie positive :

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x)f(x) \\ &= (-2x + y)^2 + (x - y - 3y^5)^2 > 0, \end{aligned}$$

et $F^T(x) + F(x)$ est définie négative

$$F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 - 30y^4 \end{bmatrix} < 0.$$

Ainsi, le système considéré est globalement asymptotiquement stable à l'origine. (Voir la figure(2.12)).

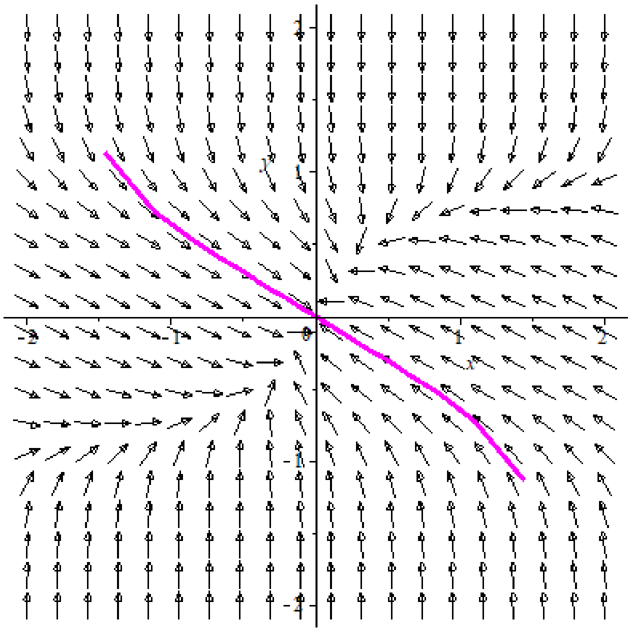

FIGURE 2.12 – Portrait de phase du système (2.10)

3

Sur la stabilité de certaines classes de systèmes différentiels non linéaires

La théorie de la stabilité joue un rôle important en théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrée dans l'étude des systèmes dynamiques. Dans ce chapitre, nous utilisons quelques théorèmes pour étudier la stabilité de certaines équations différentielles non linéaires, afin que nous discutions des conditions nécessaires pour construire la fonction de Lyapunov appropriée pour déterminer la stabilité asymptotique de ces équations proposée par **N. Bildik** et **S. Deniz** [1].

3.1 Stabilité des systèmes planaires

Dans cette partie, on va discuter la construction de la fonction de Lyapunov du système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y), \\ \dot{y} = Q(x,y), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f(x,y) = a(x) + \alpha y$ et $Q(x,y) = b(x) + \beta y$, avec $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions et α, β sont des paramètres réelles, en introduisant une technique explique cette construction pour étudier la stabilité asymptotique de l'origine pour le système donné.

Proposition 3.1. *[1] Considérons le système* (3.1)*, où* $a(0) = 0, b(0) = 0$*. Si les conditions suivantes*

$$[\beta a(x) - \alpha b(x)]x > 0 \text{ et } xa(x) + \beta x^2 < 0, \quad x \neq 0, \tag{3.2}$$

au voisinage de l'origine sont satisfaites. Alors la fonction

$$V(x,y) = (\beta x - \alpha y)^2 + 2\int_0^x [\beta a(\xi) - \alpha b(\xi)]d\xi, \tag{3.3}$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1).

Preuve.

Il est clair que la fonction (3.3) est définie positive si :

$$[\beta a(x) - \alpha b(x)]x > 0. \tag{3.4}$$

La dérivée de cette fonction

$$\dot{V}(x,y) = 2[\beta a(x) - \alpha b(x)][\beta x + a(x)]$$

est définie négative si et seulement si

$$[\beta a(x) - \alpha b(x)][\beta x + a(x)] < 0 \tag{3.5}$$

au voisinage de $x \neq 0$. Les inéquations (3.4) et (3.5) donnent

$$xa(x) + \beta x^2 < 0,\ \ x \neq 0. \tag{3.6}$$

■

Application

1. Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 + 2y, \\ \dot{y} = x^4 - 4x^3 - 2y. \end{cases} \tag{3.7}$$

   On a

$$a(x) = x^4, \quad b(x) = x^4 - 4x^3, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -2.$$

Les conditions

$$\begin{aligned}
[\beta a(x) - \alpha b(x)]x &= [-2x^4 - 2(x^4 - 4x^3)]x \\
&= [-2x^4 - 2x^4 + 8x^3]x \\
&= -4x^5 + 8x^4 \\
&= x^4(8 - 4x) > 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
xa(x) + \beta x^2 &= x(x^4) - 2x^2 \\
&= x^5 - 2x^2 \\
&= x^2(x^3 - 2) < 0,
\end{aligned}$$

pour $x < 2$, sont satisfaites.

Par conséquence, la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V(x,y) &= (-2x - 2y)^2 + 2\int_0^x [-2\xi^4 - 2(\xi^4 - 4\xi^3)]d\xi \\
&= (2x + 2y)^2 + 2[-\frac{4}{5}x^5 + 2x^4] \\
&= (2x + 2y)^2 + x^4[4 - \frac{8}{5}x],
\end{aligned}$$

est définie positive. La dérivée de V

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= 2[-2x^4 - 2x^4 + 8x^3][-2x + x^4] \\
&= 2[-4x^4 + 8x^3][-2x + x^4] < 0,
\end{aligned}$$

est définie négative pour $x < 2$. Alors, le système (3.7) est asymptotiquement stable à l'origine pour $x < 2$. (Voir la figure(3.1)).

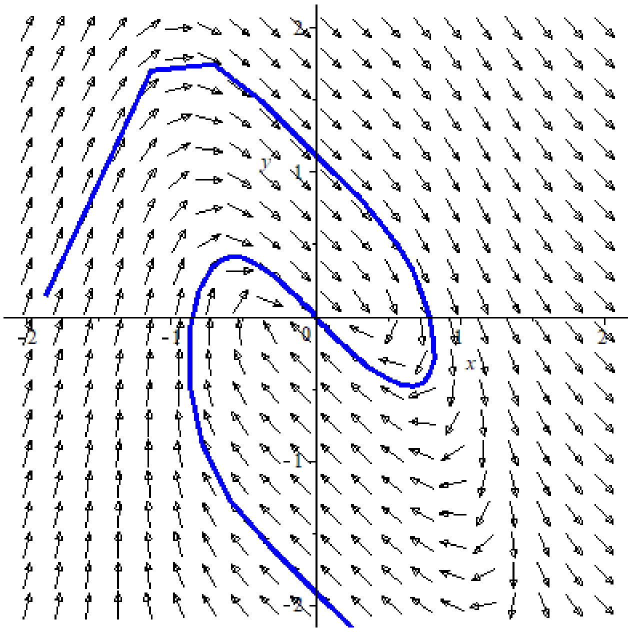

FIGURE 3.1 – Portrait de phase du système (3.7)

2. Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^4 - x^2 - y, \\ \dot{y} = -2x^2 + x - 2y. \end{cases} \tag{3.8}$$

Avec $\quad a(x) = -x^4 - x^2, \quad b(x) = -2x^2 + x, \quad \alpha = -1, \quad \beta = -2.$

On a

$$\begin{aligned} [\beta a(x) - \alpha b(x)]x &= [-2(-x^4 - x^2) + (-2x^2 + x)]x \\ &= [2x^4 + 2x^2 - 2x^2 + x]x \\ &= 2x^5 + x^2 \\ &= x^2(1 + 2x^3) > 0, \end{aligned}$$

pour $x \geq 1$.

Et

$$\begin{aligned} xa(x) + \beta x^2 &= x(-x^4 - x^2) - 2x^2 \\ &= -x^5 - x^3 - 2x^2 \\ &= -x^2(x^3 + x + 2) < 0, \end{aligned}$$

pour $x \geq 1$.

Alors, la fonction de Lyapunov prend la forme :

$$\begin{aligned} V(x,y) &= (-2x+y)^2 + 2\int_0^x [-2(-\xi^4-\xi^2)+(-2\xi^2+\xi)]d\xi \\ &= (y-2x)^2 + 2[\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2] \\ &= (y-2x)^2 + x^2(\frac{4}{5}x^3+1) > 0. \end{aligned}$$

$V(x,y)$ est définie positive. On calcule la dérivée de V

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= 2[-2(-x^4-x^2)+(-2x^2+x)][-2x+(-x^4-x^2)] \\ &= 2[2x^4+x][-2x-x^4-x^2] < 0. \end{aligned}$$

$\dot{V}(x,y)$ est définie négative pour $x \geq 1$. Alors, le système (3.8) est asymptotiquement stable à l'origine pour $x \geq 1$. (Voir la figure(3.2)).

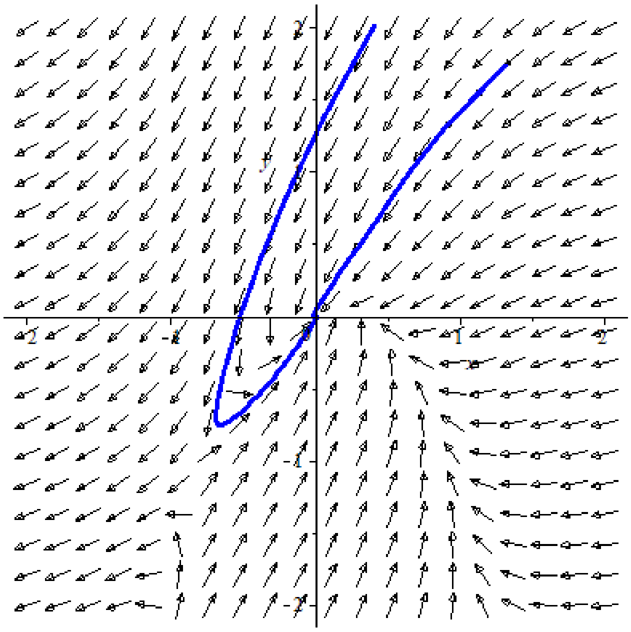

FIGURE 3.2 – Portrait de phase du système (3.8)

3.2 Stabilité d'une classe généralisée des équations différentielles de Liénard

Dans cette partie, on va discuter des résultats concernant la stabilité des équations spéciales appelées "les équations de Liénard" obtenus par **N. Bildik** et **S. Deniz** [1]. Ces équations ont été introduites par l'ingénieur Liénard en 1928. En fait, il a généralisé l'équation de Van Der Pol. Cette équation est apparue dans l'étude d'un circuit étectrique utilisé pour les premières radios par l'ingénieur Van Der Pol, pour décrire les oscillations dans une triode.

Considérons l'équation de Liénard suivante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \tag{3.9}$$

où $f(x)$ est une fonction paire et $g(x)$ est une fonction impaire, et elles sont des fonctions continues et différentiables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la fonction de Lyapunov, nous étudierons la stabilité de l'équation de Liénard (3.9). Cette équation peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles du second ordre, on pose $\frac{dx}{dt} = z$, on obtient le système suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -g(x) - f(x)z \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

et on peut aussi l'écrire dans une autre forme équivalente au système (3.10). On pose $z = y - F(x)$ où $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$, on aura le système suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - F(x) \\ -g(x) \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

où $F(x)$ et $g(x)$ deux polynômes de degrés n et m. On appelle le système (3.11) le système de Liénard.

Proposition 3.2. *[1] Soit l'équation* (3.9)*. Supposons que $g(x)$ est positive (négative) lorsque x est positive (négative) pour tout x. Par conséquent, $G(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, où*

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi. \tag{3.12}$$

Alors, l'équation (3.9) *admet une fonction de Lyapunov de la forme suivante*

$$V(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2. \tag{3.13}$$

Si de plus $f(x) > 0$ pour tout x. Alors, l'équation (3.9) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve.

Pour montrer ce résultat, on calcule la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.13) et on obtient

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} \\ &= g(x)\dot{x} + y\dot{y} \\ &= g(x)(y - F(x)) + y(-g(x)) \\ &= -g(x)F(x).\end{aligned}$$

Si $f(x) > 0$ pour tout x, alors la fonction dérivée $\dot{V}(x,y)$ est définie négative pour tout x. Alors, le système est globalement asymptotiquement stable. Cela complète la preuve. ■

Application

1. Considérons l'équation de Liénard :

$$\ddot{x} + (x^2 + x^6)\dot{x} + x^3 = 0. \tag{3.14}$$

On a $f(x) = x^2 + x^6$ et $g(x) = x^3$. Remarquant que f est une fonction paire et g est une fonction impaire. Premièrement, on calcule $F(x)$ et $G(x)$

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x (\xi^2 + \xi^6)d\xi \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7,\end{aligned}$$

$$G(x) = \int_0^x \xi^3 d\xi = \frac{1}{4}x^4.$$

On écrit l'équation (3.14) sous forme système comme suit

$$\begin{bmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7 \\ -x^3\end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Comme $G(x) > 0$. Alors, le système (3.15) admet la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x,y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2,$$

qui est définie positive.

En suite, on calcule la dérivée de V

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= -g(x)F(x)\\ &= -x^3(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{7}x^7)\\ &= -x^6(\frac{1}{7}x^4+\frac{1}{3}) < 0.\end{aligned}$$

Cette dérivée est définie négative. Alors, le système de Liénard (3.15) est globalement asymptotiquement stable. (Voir la figure(3.3)).

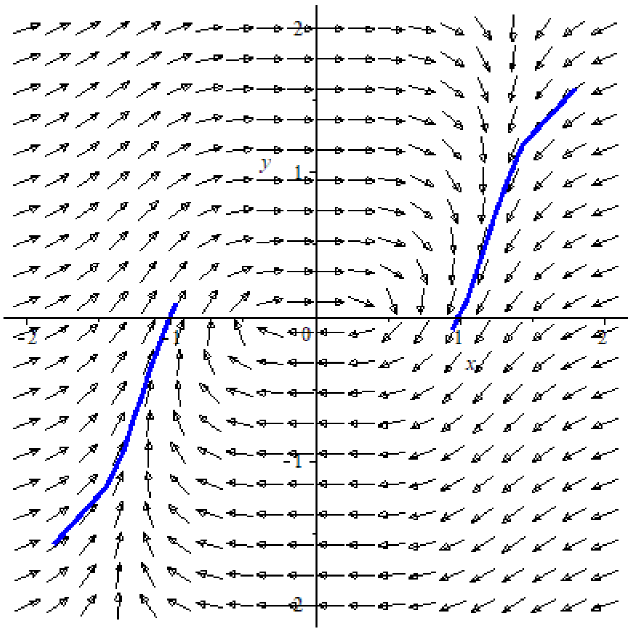

FIGURE 3.3 – Portrait de phase du système (3.15)

2. Soit l'équation de Liénard suivante

$$\ddot{x}+\mu x^4\dot{x}+x^5=0, \quad \mu>0, \tag{3.16}$$

où $f(x)=\mu x^4$ et $g(x)=x^5$. On calcule $F(x)$ et $G(x)$

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x(\mu\xi^4)d\xi\\ &= \frac{\mu}{5}x^5,\end{aligned}$$

$$G(x)=\int_0^x \xi^5 d\xi=\frac{1}{6}x^6.$$

Écrivant l'équation (3.16) sous forme système comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \frac{\mu}{5}x^5 \\ -x^5 \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

On remarque que f est une fonction paire et g est une fonction impaire et $G(x) > 0$. Alors, le système (3.17) admet la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}y^2.$$

$V(x, y)$ est définie positive. Maintenant, on calcule sa dérivée

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= -g(x)F(x) \\ &= -x^5(\frac{\mu}{5}x^5) \\ &= -\frac{\mu}{5}x^{10} < 0. \end{aligned}$$

Cette dérivée est définie négative. Alors, le système de Liénard (3.17) est globalement asymptotiquement stable. (Voir la figure(3.4)).

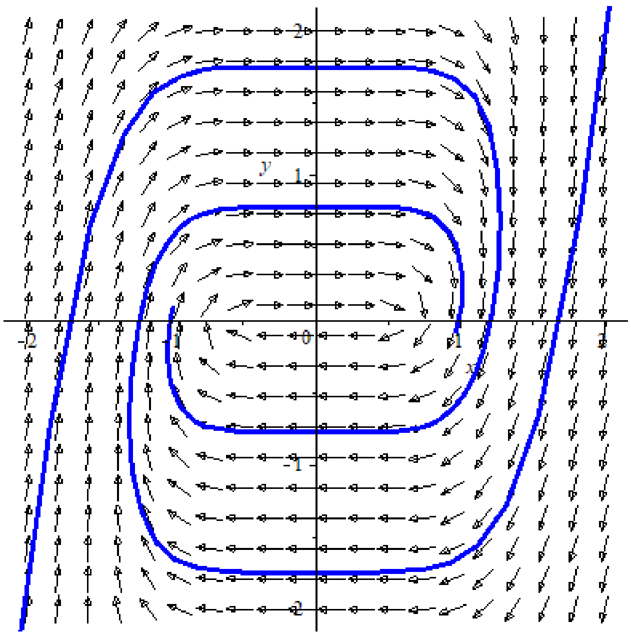

FIGURE 3.4 – Portrait de phase du système (3.17)

Conclusion

Le concept de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires en générale est un concept complexe. L'un des problèmes les plus importants des systèmes non linéaires est l'étude de leur stabilité. Dans cette note, nous avons mené une étude liée à la stabilité de ces systèmes.

La méthode de Lyapunov est considérée comme l'une des méthodes les plus utilisées pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires, mais cette méthode a la caractéristique qu'elle n'est utilisée que dans un voisinage du point d'équilibre car elle est continue à l'origine.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les concepts de base à utiliser dans ce travail, et dans le deuxième chapitre, nous avons traité le principe de la théorie de la stabilité de Lyapunov à travers des définitions, des théories et des applications pour clarifier et mieux comprendre cette méthode. Et nous avons également discuté l'approche de Crasovskii qui est une méthode éprouvée pour analyser la stabilité des systèmes différentiels non linéaires.

Dans le dernier chapitre, nous avons discuté des conditions nécessaires pour déterminer la fonction de Lyapunov pour certaines classes de systèmes dynamiques non linéaires, en étudiant leur stabilité et en appliquant des exemples pour vérifier les résultats.

Bibliographie

[1] Bildik N and Deniz S. *On the asymptotic stability of some particular differential equations.* International Journal of Applied Physics and Mathematics. 252-258. 2015.

[2] Birkhof G. D. *Dynamical Systems.* AMS, New-York, 1927.

[3] Bouasla N. Mémoire de Master : *Les cycles limites des systèmes diffé- rentiels perturbés et la théorie de moyennisation.* Université 20 Aout 1955 Skikda. 2022.

[4] Bouchema H. Mémoire de Master : *La bifurcation zéro-Hopf dans le système hyperchotique de Lorenz. Université 20 Aout 1955 Skikda.* 2021.

[5] Boudour R. Mémoire de Magister : *Determination de la région de stabilité transitoire au sens de Lyapunov d'un oscillateur non linéaire force par l'approche graphique : Application au pendule.* Université M'Hamed Bougara Boumerdes. 2011.

[6] Bouguessas Z. Mémoire de Master : *La stabilité des systèmes dynamiques et la fonction de Lyapunov.* Université Badji Mokhtar Annaba. 2020.

[7] Caro F, Popier A. *Stabilite des équilibres. Exemples.* https ://perso.univ-lemans.fr.

[8] Charles S, Lopes C. Cours 2 : *Systèmes dynamiques dans* $\mathbb{R}^2$. Université Lyon 1. 2008.

[9] Charles S, Lopes C. Cours 3 : *Fonctions de Lyapunov Notion de cycle limite.* Université Lyon 1. 2008.

[10] Eze E.O, Obasi U.E and Ezeh S.I. *On the Stability and Asymptotic Stability of the Periodic Solution of a Lienard Equation.* International Journal of Scientific Engineering Research.10, 2, 2229-5518, 2019.

[11] Gunnar S. *Lyapunov functions and stability problems.* Workshop Ghana, 29,5-10,5, 2013.

[12] Liu S, Liberzon D and Zharnitsky V. *Almost Lyapunov Functions for Nonlinear Systems* . Automatica by Elsevier. Volume 113, March 2020, 108758.

[13] Lyapunov A. *Problème général de la stabilité du mouvement.* Ann, Fac. Sci. Univ. Toulouse, 9, 203, 1907.

[14] Perko L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, 2001.

[15] Poincaré H. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892.

[16] Zang S, Liu W and all. *Crasovskii approach to construct Lyapunov function and its derivative function for analyzing stability of non-linear systems.* IOP Conf. Series : Earth and Environmental Science. 69, 2017.