الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة
كلية العلوم
قسم الرياضيات

20 août 1955 University – Skikda
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

مذكرة ماستر

الميدان: رياضيات وإعلام آلي
الشعبة: رياضيات
التخصص: التحليل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية

الموضوع

بعض الطرق العددية لحلول المعادلات التفاضلية الكسرية

تقديم الطالب(ة):
بلارو حكيمة

يوم المناقشة: 2025/07/02

لجنة المناقشة

ماوني مسعود	جامعة سكيكدة	أستاذ التعليم العالي	رئيسا
سليماني كمال	جامعة سكيكدة	أستاذ محاضر أ	مؤطرا
لكحل حكيم	جامعة سكيكدة	أستاذ التعليم العالي	ممتحنا

السنة الجامعية: 2024-2025

شكر و تقدير

بسم الله الرحمان الرحيم

" يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات"

(سورة المجادلة ، الآية الحادي عشر)

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبتوفيقه أنجزت هذا العمل الذي يعد ثمرة جهد سنوات من التحصيل العلمي في رحاب قسم الرياضيات.

أتوجه بخالص الشكر وعظيم التقدير إلى الأستاذ المشرف

"كمال سليماني "

على ما قدمه لي من دعم علمي وتوجيهات قيمة ، كان لها بالغ الأثر في إخراج هذا العمل في صورته النهائية ، فجزاه الله عنا خير الجزاء .

وكذلك إلى اللجنة التي شرفتني بقبول مناقشة هذه المذكرة للاستفادة من ملاحظاتهم و توجيهاتهم .

وأتوجه كذلك بالشكر إلى إدارة المؤسسة الجامعية وقسم الرياضيات على كل المجهودات و الإمكانيات المقدمة من أجل تيسير عملية البحث و التحصيل .

أسأل الله أن يوفق الجميع لما فيه الخير، وأن يجعل هذا العمل خطوة على طريق العلم النافع و العمل الصالح .

إهداء

إلى الذي علمني أن أقيم دولة العدل والكلام في إمبراطورية الجهل والصمت

" أبي الغالي"

إلى التي أرضعتني حب العلم ومنحتني الحب والرعاية ومازالت ترعاني بقلبها و أنا بعيدة عنها

" أمي الغالية"

إلى كل أخواتي اللواتي تمنحنني البسمة

حسينة ، مريم ،عقيلة ، نسيمة ، نادية ، نصيرة ، وردة .

إلى إخواني الأعزاء

وليد ، بلال ، هشام ، سفيان ، فؤاد ، بوغابة.

إلى أبناء وبنات إخواني وأخواتي الملائكة الصغار وبسمة الأمل .

إلى كل من يرونني بالأمل ويمنحنني البسمة وأنا معهن

صديقاتي الطيبات

إلى أغلى شخص و أعز الناس إلى زوجي الغالي شريك حياتي حفظك الله ورعاك وجعلك سندي

" إسحاق "

إلى عائلتي الثانية سعيدة ببداية جديدة بينكم ،وأتمنى أن تجمعنا المودة والتفاهم دائما .

وفي الأخير أهدي هذا العمل إلى كل من أعرف من قريب أو بعيد .

وشكراًً

Summary

This thesis aims to study numerical methods for solving fractional differential equations , with a focus on the concepts of fractional calculus and the application of numerical methods such as Euler and finite difference method , along with examples for illustration .

Keywords :Fractional derivative ,fractional integral , numerical methods ,linear and nonlinear fractional differential equations , Caputo ,Riemann-Liouville , fixed point theorems .

ملخص

تهدف هذه المذكرة إلى دراسة بعض الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الكسرية ،مع التركيز على مفاهيم الحساب الكسري وتطبيق طرق عددية مثل أويلر و الفروق المنتهية ...، مع تقديم أمثلة لتوضيح .

كلمات مفتاحية : المشتق الكسري ، التكامل الكسري ،الطرق العددية ، المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية ، كابيتو ، ريمان-ليوفيل ، نظريات النقطة الثابتة .

الفهرس

مدخل

شهدت العقود الأخيرة اهتمامًا متزايدًا بالمعادلات التفاضلية الكسرية، ليس فقط من الناحية النظرية ولكن أيضًا لتطبيقاتها الواسعة والمتنامية في مختلف فروع العلوم والهندسة. تمثل هذه المعادلات تعميمًا طبيعيًا لمفهوم المعادلات التفاضلية التقليدية ذات الرتب الصحيحة، حيث يتم استبدال عملية الاشتقاق ذات الرتبة الصحيحة بمشتقات وتكاملات ذات رتب كسرية أو حتى حقيقية.

إن ظهور هذا الفرع من الرياضيات لم يكن مجرد فضول رياضي، بل جاء استجابة للحاجة إلى نمذجة أكثر دقة للعديد من الظواهر الفيزيائية والهندسية والبيولوجية والاقتصادية التي أظهرت سلوكًا يعتمد على ذاكرة النظام أو تأثيرات غير محلية لا يمكن وصفها بشكل كافٍ باستخدام النماذج التقليدية. على سبيل المثال، أثبتت المعادلات التفاضلية الكسرية فعاليتها في وصف سلوك المواد اللزجة المرنة، وظاهرة الانتشار الشاذ في الأوساط المسامية، ونمذجة العمليات البيولوجية ذات الذاكرة، وتحليل سلوك الأسواق المالية المتقلبة.

تتميز المشتقات الكسرية بخاصية "الذاكرة" أو "التأثير غير المحلي"، حيث يعتمد معدل التغير الحالي للدالة على قيمها في الماضي، مما يجعلها أداة قوية لفهم الأنظمة التي تتطور بمرور الوقت وتتأثر بتاريخها. وقد أدت هذه الخصائص الفريدة إلى تطوير نماذج رياضية أكثر واقعية وتعقيدًا للعديد من الظواهر الطبيعية والصناعية.

على الرغم من أهمية المعادلات التفاضلية الكسرية وتطبيقاتها المتزايدة، إلا أن إيجاد حلول تحليلية لهذه المعادلات غالبًا ما يمثل تحديًا كبيرًا. الطبيعة التكاملية للمشتقات الكسرية وتعقيد الدوال الخاصة التي تظهر كحلول (مثل دالة ميتتاج-ليفلر) تجعل من الضروري استكشاف وتطوير طرق حل متنوعة.

تهدف هذه المذكرة إلى تقديم دراسةبعض الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية كسرية ،بدءًا من المفاهيم الأساسية لبعض الدوال والتعريفات المختلفة للمشتقات والتكاملات الكسرية (مثل مشتقات ريمان-ليوفيل وكابوتو والتكامل الكسري) ، مرورًا بخصائصها الهامة و مبرهنات النقطة الثابتة لإثبات

وجود حلول للمعادلات التفاضلية الكسرية وصولًا إلى استعراض وتحليل لأهم الطرق المستخدمة في إيجاد حلول لهذه المعادلات.

من خلال هذه الدراسة، نسعى إلى توفير فهم واضح وشامل لهذا المجال الحيوي من الرياضيات التطبيقية، وإبراز أهميته في نمذجة وحل المشكلات المعقدة في مختلف التخصصات العلمية والهندسية في الجزائر وخارجها. نأمل أن تساهم هذه المذكرة في إثراء المعرفة حول المعادلات التفاضلية الكسرية وطرق حلها وتشجيع المزيد من البحث والتطبيق في هذا المجال الواعد.

ستتناول هذه المذكرة موضوع المعادلات التفاضلية الكسرية وطرق حلها من خلال ثلاث فصول رئيسية. في الفصل الأول، سيتم تقديم المفاهيم الأساسية لبعض الدوال وخصائصها والتعريفات المختلفة للمشتقات والتكاملات الكسرية وخواصها كما يتضمن مبرهنات النقطة الثابتة لأثبات وجود حل للمعادلات التفاضلية الكسرية . الفصل الثاني سيناقش أمثلة عن المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية وغير الخطية. وأخيرًا، سيعرض الفصل الثالث بعض الطرق العددية الهامة لحل المعادلات التفاضلية الكسرية.

فصل 1

المفاهيم الأساسية

في هذا الفصل نتطرق الى تعريف بعض الدوال الأساسية والتكامل الكسري و أهم المشتقات الكسرية للدوال النظامية (الناعمة)التي تخدمنا في الفصول القادمة

1.1 الدالة غاما

تعريف 1. أنظر [4] نعرف الدالة غاما كمايلي :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx, Re(p) > 0, p \in \mathbb{C}.$$

1.1.1 خواص الدالة غاما

أنظر [4] تتمتع الدالة غاما بالخواص التالية :

1. الدالة $\Gamma(p)$ مستمرة لما $p > 0$
2. الدالة غاما تحقق :

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

3. يمكن تفكيك الدالة غاما كمايلي :

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)....(p+1)p\Gamma(p) \quad ,n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(p+1) = n!$$

$$\Gamma(0) = +\infty$$

.4

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)}=...=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\infty$$

.5 تعرف الدالة Γ أيضا بالعبارة :

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

إذا كان $-n<p<-(n-1)$

.6 : تكتب الدالة غاما أيضا بالشكل التالي

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)...(p+n-1)}$$

بوضع $p+n=\alpha$:

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)...(n-\alpha)}$$

.7

$$\Gamma(m+\frac{1}{2})=\Gamma[1+(m-\frac{1}{2})]=(m-\frac{1}{2})\Gamma(m-\frac{1}{2})$$

$$=(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\Gamma(m-\frac{3}{2})$$

$$=(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})...\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

أو:

$$\Gamma(m+\frac{1}{2})=\frac{(2m-1)!}{2^m}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\Gamma(\frac{1}{2})$$

.8 كما يمكن كتابة الدالة غاما كما يلي :

$$\Gamma(p)=\int_0^1(\ln\frac{1}{y})^{p-1}dy$$

.9

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)}=\binom{p}{q}$$

10. صيغة غوص :

$$\Gamma(p)=\frac{1}{p}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})^{p}(1+\frac{p}{k})^{-1}$$

11. الخاصية الإنعكاس لدالة غاما :

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.1 الدالةبيثا

أنظر [4]

تعريف 2. نعرف الدالة بيثا كمايلي :

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,(p,q)\in\mathbb{C}^2,Re(p)>0$$

1.2.1 خواص الدالة بيثا

أنظر [4] تتميز الدالة بيثا بعدة خواص نذكر منها :

1. إذا كان $p>0,q>0$:

$$B(q,p)=B(p,q)$$

2. إذا كان $p>0,q>1$:

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$$

3. لما $p>0,q>0$:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

4. لما $p>0$, n عدد طبيعي :

$$B(p,n)=B(n,p)=\frac{1.2.3...(n-1)}{P(p+1)(p+2)...(p+n)}$$

وأيضا:

$$B(p,1)=\frac{1}{P}$$

إذا كان $m,n\in\mathbb{N}$:

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

5. صيغة الإزدواجية :

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})$$

6. الصيغة الثلاثية :

$$\Gamma(3p)=\frac{3^{3p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{2}{3})$$

7. صيغة غوص للضرب :

$$\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{K})...\Gamma(p+\frac{k-1}{k})=(2k)^{(k-1)/2}k^{-kp+1}\Gamma(kp)$$

3.1 دالة ميتاج ليفلر

تعريف 3. أنظر [4] تعرف الدالة ميتاج ليفلر من خلال سلسلة الدوال التالية :

$$E_{\alpha}(p)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{p^k}{\Gamma(\alpha k+1)},p\in\mathbb{C},\alpha>0.$$

يتم إعطاء دالة ميتاج ليفلر المعممة بواسطة :

$$E_{\alpha,\beta}(p)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{p^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},p\in\mathbb{C},\alpha,\beta>0.$$

4.1 الدالة $E(t,\alpha,a)$

تعريف 4. أنظر [4] عبارتها تكتب بالصيغة التالية :

$$E(t,\alpha,a)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(at)^z}{\Gamma(k+\alpha+1)}=t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at) \qquad ;t\geq 0$$

عبارة الدالة بواسطة التكامل :

$$E(t,\alpha,a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha-1}e^{a(t-\tau)}d\tau$$

5.1 تعريف بعض الفضاءات

تعريف 5 (فضاء الدوال المستمرة). أنظر [8] ليكن $n\in\mathbb{N}$ و المجال $I\subset\mathbb{R}$ ، ولتكن $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ ، يعرف $C^n(I,\mathbb{R})$ أنه فضاء الدوال القابلة للإشتقاق n مرة و $f^{(n)}$ مستمرة .

تعريف 6 (فضاء L^p). أنظر [8] ليكن $p\in\mathbb{R}$ مع $1\leq p<\infty$ ولتكن $\Omega\subset\mathbb{R}$ ، نعرف الفضاء L^p كمايلي :
$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قيوسة ،و

$$\int_\Omega |f|^p dx<\infty$$

وهو فضاء بناخي نظيمه

$$\|f\|_p^p=\int_\Omega |f|^p dx$$

تعريف 7 (فضاء الدوال المستمرة مطلقا). أنظر [8] لتكن f دالة من $[a,b]$ إلى $\mathbb{R}$ ،نقول أن f مستمرة على نحو مطلق إذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد $\delta(\varepsilon)>0$ بحيث أنه من أجل كل تجزئة $\{|a_k,b_k|\}_{i=1}^n$ من $[a,b]$ ، إذا كان :

$$\sum_{i=1}^n(b_k-a_k)<\delta$$

فإن:

$$\sum_{i=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

فضاء الدوال المستمرة مطلقا على $[a,b]$ يرمز له بالرمز $AC([a,b])$.

تعريف 8 (فضاء الدوال المستمرة مطلقا من الرتبة n). أنظر [8] لتكن الدالة f معرفة من $[a,b]$ نحو $\mathbb{R}$ ، قابلة للإشتقاق (n-1) مرة ،ومشتقاتها من الرتبة (n-1) تنتمي إلى $AC([a,b])$.
-فضاء الدوال المستمرة مطلقا من الرتبة n يرمز له بالرمز $AC^n([a,b])$.

ملاحظة 1. الدوال التي تكون مستمرة بإنتظام في AC فهي مستمرة .

6.1 التكامل و المشتق الكسري

1.6.1 تكامل ريمان -ليوفيل و مشتقه

تكامل ريمان -ليوفيل

تعريف 9. أنظر [1] لتكن الدالة f معرفة كمايلي :

$$f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$$

نرفق بهذه الدالة الدالة التالية :

$$I^1_{a+}f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longmapsto(I^1_{a+}f)(x)=\int_a^x f(t)dt$$

وبنفس الطريقة نعرف :

$$I^1_{b-}f:[a,b[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longmapsto(I^1_{b-}f)(x)=\int_x^b f(t)dt$$

حيث $I^1_{a+};I^1_{b-}$ مؤثر خطي في $C([a,b],\mathbb{R})$ نحو نفسه .

يعمم إلى الرتبة n بالشكل التالي :

$$(I^n_{a+}f)(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

$$(I^n_{a+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt$$

و

$$(I^n_{b-}f)(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^b(t-x)^{n-1}f(t)dt$$

$$(I_{b-}^{n}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-1}f(t)dt$$

أنظر [7] كما يعمم التعريف السابق بوضع $n=\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ بالشكل التالي :

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, (x>a)$$

و

$$(I_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, (x<b)$$

ويسمى تكامل ريمان -ليوفيل .

خواص تكامل ريمان -ليوفيل

يتمتع تكامل ريمان ليوفيل بالخواص التالية :

- إذا كانت $f \in L^{p}([a,b],\mathbb{R}), 1 \le p \le \infty$ فإن:

1. أنظر [5] $\exists k>0$ حيث :

$$\begin{cases} \|I_{a+}^{\alpha}f\|_{L^p} \le k\|f\|_{L^p} \\ \|I_{b-}^{\alpha}f\|_{L^p} \le k\|f\|_{L^p} \end{cases}$$

مع $k = \dfrac{(b-s)^{s}}{\Gamma(\alpha+1)}, \alpha>0$

2. لما $0<\alpha<1$ و $1<p<\dfrac{1}{\alpha}$ فإنه يوجد $k>0$ حيث:

$$\begin{cases} \|I_{a+}^{\alpha}f\|_{L^q} \le k\|f\|_{L^p} \\ \|I_{b-}^{\alpha}f\|_{L^q} \le k\|f\|_{L^p} \end{cases}$$

مع $\forall f \in L^{p}([a,b],\mathbb{R}), q = \dfrac{p}{1-\alpha p}$

3. أنظر [7] إذا كانت $y \in C([a,b],\mathbb{R})$ لكل $\alpha,\beta>0$ لدينا :

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}y = I_{a+}^{\alpha+\beta}y$$

$$I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}y = I_{b-}^{\alpha+\beta}y$$

__مثال__ **1.** لتكن $f(t) = t^{\mu}$ حيث $\mu > -1$ و $t > 0$ ولنوجد التكامل الكسري للدالة f من الرتبة $\alpha > 0$.

$$I^{\alpha} f(t) = I^{\alpha} t^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{\mu} ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} (1-\frac{s}{t})^{\alpha-1} s^{\mu} ds$$

$$= \frac{t^{\alpha-1} t^{\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-\frac{s}{t})^{\alpha-1} (\frac{s}{t})^{\mu} ds.$$

بإجراء تغير متغير $u = \frac{s}{t}$ يكون $ds = t.du$ ومنه :

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{t^{\mu+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\mu} t du = \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\mu} du = \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\mu+1, \alpha)$$

$$= \frac{t^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)} t^{\mu+\alpha}.$$

مشتق ريمان -ليوفيل

__تعريف__ **10.** أنظر [7] المشتق الكسري لريمان - ليوفيل D^{α}_{a+} و D^{α}_{b-} من الرتبة $\alpha \in \mathbb{R}^+$ معرف بالشكل التالي :

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+} y)(x)$$

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt; (n = [\alpha]+1; x > a)$$

و

$$(D^{\alpha}_{b-} y)(x) = \left(\frac{-d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b-} y)(x)$$

$$(D^{\alpha}_{b-} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt; (n = [\alpha]+1; x < b)$$

بعض خواص مشتق ريمان -ليوفيل

أنظر [7] يملك مشتق ريمان -ليوفيل العديد من الخواص نذكر منها:

1. إذا كانت $\alpha = 0$ فإن :

$$(D^0_{a+} y) = (D^0_{b-} y) = y(x)$$

2. لما $\alpha = n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$\begin{cases}(D^n_{a+}y)(x) = y^{(n)}(x)\\ (D^n_{b-}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x)\end{cases}$$

3. بأخذ $0 < \alpha < 1$ لدينا :

$$\begin{cases}(D^\alpha_{a+}y)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x \dfrac{y(t)}{(x-t)^\alpha}dt, \quad (0<\alpha<1; x>a).\\ (D^\alpha_{b-}y)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{-d}{dx}\displaystyle\int_x^b \dfrac{y(t)}{(t-x)^\alpha}dt, \quad (0<\alpha<1; x<b).\end{cases}$$

4. إذا كان $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n-\alpha} = (n-\alpha)(n-\alpha-1)...(1-\alpha)(x-a)^{-\alpha}$$

5. المشتق الكسري لعدد ثابت يكتب بالصيغة التالية :

$$\begin{aligned}(D^\alpha_{a+}c) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}c) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{c}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{n-\alpha} = \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\end{aligned}$$

مبرهنات أساسية لمشتق ريمان -ليوفيل

مبرهنة 1. أنظر [5] لتكن $\alpha \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}$ حيث $n = [\alpha] + 1$ و $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة معطاة، نفترض أن $D^\alpha_{a+}f = 0$ إذن:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}$$

حيث c_k ثوابث .

مبرهنة 2. أنظر [7] لتكن $\alpha \geqq 0$ و $n = [\alpha] + 1$، إذا كان $y \in AC^n([a,b])$ فإن المشتقات الكسرية $D^\alpha_{b-}y$ و $D^\alpha_{a+}y$ موجودة أين ما كان تقريبا على $[a,b]$ ويمكن تمثيلها في الصيغ التالية :

$$(D^\alpha_{a+}y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y^n(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

و

$$(D^\alpha_{b-}y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^k(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b \frac{y^n(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt$$

مبرهنة 3. أنظر [7]
إذا كان $(\alpha \neq 0)$ $0 \leq a < 1$ و $y \in AC([a,b])$ فإن :

$$(D_{a+}^{\alpha}y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{y'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right].$$

و

$$(D_{b-}^{\alpha}y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{y'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

تركيب المؤثرات وفقا لمفهوم ريمان -ليوفيل

نظرية 1 (تركيب المؤثر D_{a+}^{α} مع المؤثر I_{a+}^{α} وفقا لمفهوم ريمان - ليوفيل). أنظر [5] ليكن $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة تكامل ،فإن :

$$(D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}y)(x) = (D_{a+}^{n}I_{a+}^{n-\alpha}I_{a+}^{\alpha}y)(x) = (D_{a+}^{n}I_{a+}^{n}y)(x) = Id, n = [\alpha]+1$$

نظرية 2 (تركيب المؤثر $D_{a+}^{\alpha_1}$ مع المؤثر $D_{a+}^{\alpha_2}$ وفقا لمفهوم ريمان- ليوفيل). أنظر [5] ليكن $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\varphi \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ و $y = I_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi$. فإن:

$$D_{a+}^{\alpha_1}D_{a+}^{\alpha_2}y = D_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2}y = D_{a+}^{\alpha_2+\alpha_1}y.$$

نظرية 3 (تركيب المؤثر I_{a+}^{α} مع المؤثر D_{a+}^{α} وفقا لمفهوم ريمان -ليوفيل). أنظر [5] -إذا كانت $\alpha > 0$ و $y \in L^p(a,b)$ $1 \leqq p \leqq \infty$، فإن :

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = y(x).$$

و $\alpha > 0$

$$(I_{b-}^{\alpha}D_{b-}^{\alpha}y)(x) = y(x).$$

صالحة تقريبا في كل مكان على $[a,b]$. - إذا كانت $\alpha > \beta > 0$ ،
فإن لكل $y \in L^p(a,b)$ و $(1 \leqq p \leqq +\infty)$ إذن :

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\beta}y)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta}y)(x).$$

و

$$(I_{b-}^{\alpha}D_{b-}^{\beta}y)(x) = I_{b-}^{\alpha-\beta}y)(x).$$

ينطبقان تقريبا في كل مكان على $[a,b]$ على وجه الخصوص عندما $\beta = k \in \mathbb{N}$ و $\alpha > k$ فإن:

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{k}y)(x) = I_{a+}^{\alpha-k}y(x).$$

و

$$(I_{b-}^{\alpha}D_{b-}^{k}y)(x) = I_{b-}^{\alpha-k}y(x).$$

- لتكن $\alpha \geqq 0, m \in \mathbb{N}$ و $D = \dfrac{d}{dx}$

1- إذا كانت المشتقات الكسرية $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ و $(D_{a+}^{\alpha+m}y)(x)$ موجودة،فإن :

$$(D_{a+}^{m}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m}y)(x)$$

2- إذا كانت المشتقات الكسرية $(D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ و $(D_{b-}^{\alpha+m}y)(x)$ موجودة فإن :

$$(D_{b-}^{m}D_{b-}^{\alpha}y)(x) = (-1)^m(D_{b-}^{\alpha+m}y)(x)$$

- فضاء الدوال

$I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ و $I_{b-}^{\alpha}(L^p)$ معرف من أجل كل $\alpha > 0$ و $1 \leqq p \leqq +\infty$ بواسطة :

$$I_{a+}^{\alpha}(L^p) = \left\{ y : y = I_{a+}^{\alpha}\varphi, \varphi \in L^p(a,b) \right\}.$$

و

$$I_{b-}^{\alpha}(L^p) = \left\{ y : y = I_{b-}^{\alpha}\varphi, \varphi \in L^p(a,b) \right\}.$$

نظرية 4. أنظر [5] لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha] + 1$، وليكن $y_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x)$ التكامل الكسري اليميني من الرتبة $n-\alpha$، بحيث : $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

-إذا كان $1 \leqq p \leqq \infty$ و $y \in I_{a+}^{\alpha}(L^p)$ فإن :

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = y(x).$$

- إذا كان $y \in L^1(a,b)$ و $y \in AC^n[a,b]$ فإن المساواة

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}.$$

تتناسب أين ما كان تقريبا على $[a,b]$.

نظرية 5. أنظر [5]

لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha] + 1$، وليكن $g_{n-\alpha}(x) = (I_{b-}^{n-\alpha}g)(x)$ التكامل الكسري اليساري من الرتبة $n-\alpha$.

- إذا كان $1 \leqq p \leqq +\infty$ و $g \in I_{b-}^{\alpha}(L^p)$ فإن :

$$(I_{b-}^{\alpha}D_{b-}^{\alpha}g)(x) = g(x).$$

- إذا كان $g(x) \in L^1(a,b)$ و $g_{n-\alpha} \in AC^n([a,b])$ فإن الشكل

$$(I_{b-}^{\alpha}D_{b-}^{\alpha}g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{(n-j)}g_{n-\alpha}^{(n-j)}}{\Gamma(\alpha-j+1)}(b-x)^{\alpha-j}.$$

يتناسب أين ما كان تقريبا على $[a,b]$.

ملاحظة 2. بشكل عام :

$$D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} y \neq D_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2} y.$$

و

$$D_{b-}^{\alpha_1} D_{b-}^{\alpha_2} y \neq D_{b-}^{\alpha_1+\alpha_2} y.$$

مثال 2. أنظر
ليكن

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = y(t)$$

$$D^{\frac{-1}{2}} y(0) = -2\sqrt{\pi}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[D^{\frac{1}{2}} y(t)] = y'(t) - D^{\frac{1}{2}} y(0) \frac{t^{\frac{-1}{2}-1}}{\Gamma(1-\frac{1}{2}-1)}$$

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = y(t)$$

$$y'(t) - t^{\frac{-3}{2}} y(t) = y(t).$$

2.6.1 كابيتو

مشتق كابيتو

تعريف 11. المشتق الكسري لكابيتو $({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ و $({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x)$ من الرتبة α مع $0 \geqq \alpha$ على المجال $[a,b]$ معرف بالصيغة التالي :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^n dt$$

و

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^n dt$$

أنظر [7] ويعرف أيضا بالصيغة التالية :

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x).$$

و

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = \left(D_{b-}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right)(x).$$

$n = [\alpha] + 1$ لما $\alpha \notin \mathbb{N}_0$; $n = \alpha$ لما $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

خواص مشتق كابيتو

أنظر [7] يتمتع المشتق الكسري لكابيتو بالخواص التالية :

1. لتكن $\alpha \geqq 0$ و $n = [\alpha] + 1$ لدينا:

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

و

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y(t))(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}.$$

2. لتكن $\alpha > 0$ لدينا :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y(t))(x) = y^{(k)}(a) = 0, \forall k.$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y(t))(x) = y^{(k)}(b) = 0, \forall k.$$

3. لتكن $n = [\alpha] + 1.$، $\alpha > 0$ إذا كان $y \in AC^n([a,b])$ فإن :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{n-\alpha+1}} dt.$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)}{(t-x)^{n-\alpha+1}} dt.$$

4. أنظر [5] ليكن $y \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ مع $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ ولدينا $({}^C D^{\alpha}_{a+}y) = 0$ فإن:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k, c_k \in \mathbb{R}.$$

ملاحظة 3. -إذا $\alpha = n$ لدينا :

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{n}_{a+}y)(x).$$

-إذا $0 < \alpha < 1$ لدينا:

$$({}^C D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

و

$$({}^C D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}.$$

تركيب المؤثرات وفقا لمفهوم كابيتو

نظرية 6 (تركيب المؤثر ${}^CD^{\alpha}_{a+}$ مع المؤثر I^{α}_{a+}). أنظر [7] - إذا كان $Re(\alpha) \notin \mathbb{N}$ أو $\alpha \in \mathbb{N}$ فإن :

$$({}^CD^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x).$$

و

$$({}^CD^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x).$$

-إذا كان $Re(\alpha) \in \mathbb{N}$ و $Im(\alpha) \neq 0$ فإن:

$$({}^CD^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+n-1}_{a+}y)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}.$$

و

$$({}^CD^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+n-1}_{b-}y)(b)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-x)^{n-\alpha}.$$

نظرية 7 (تركيب المؤثر ${}^CD^{\alpha}_{a+}$ مع المؤثر ${}^CD^{\beta}_{a+}$). أنظر [5] ليكن $\alpha, \beta \in [0,1]$ ، مع $\alpha+\beta \leq 1$ و $y \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ فإن:

$${}^CD^{\alpha}_{a+}.{}^CD^{\beta}_{a+} = {}^C D^{\alpha+\beta}_{a+}y = {}^C D^{\beta}_{a+}.{}^CD^{\alpha}_{a+}y.$$

نظرية 8 (تركيب المؤثر I^{α}_{a+} مع المؤثر ${}^CD^{\alpha}_{a+}$). أنظر [5] لتكن $\alpha > 0$ مع $[\alpha] = n \in \mathbb{N}$ و $y \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ فإن :

$$(I^{\alpha}_{a+}.{}^CD^{\alpha}_{a+}y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

مثال 3. أنظر لتكن $f(t) = t^{\beta}$، $\alpha > 0$، $n-1 < \alpha < n$، $\beta > n-1$:

$${}^CD^{\alpha}f(t) = {}^C D^{\alpha}t^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{(u^{\beta})^{(n)}}{(t-u)^{\alpha+1-\beta}}du$$

بإجراء تغير متغير $u = vt$ يكون $du = tdv$:

$${}^CD^{\alpha}f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (uv)^{\beta-n}[(t-v)^{n-\alpha-1}]tdv.$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}B(\beta-n+1, n-\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}$$

3.6.1 مقارنة مشتق كابيتو ومشتق ريمان - ليوفيل

أنظر [3]

1. ليكن y دالة حيث المؤثرين $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ مع $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ و $(D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ مع $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ موجودين ، مع $n-1<\alpha<n, n\in\mathbb{N}$ فإن :

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \neq ({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x).$$

و

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) \neq ({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x).$$

2. لتكن $n-1<\alpha<n$ فإن :

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n} D^{\alpha}_{a+}y(t) = \lim_{\alpha\longrightarrow n} ({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(t) = y^{(n)}(t).$$

و

$$\lim_{\alpha\longrightarrow n} D^{\alpha}_{b-}y(t) = \lim_{\alpha\longrightarrow n} ({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(t) = y^{(n)}(t).$$

3. ليكن y دالة حيث $s=0,1,2,...,n-1, y^{(s)}(a)=0$ فإن : المشتق الكسري ريمان -ليوفيل و كابيتو يتطابقان .

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}y(t) = D^{\alpha}_{a+}y(t).$$

ملاحظة 4. أنظر [1] لتكن الدالة y حيث $s=0,1,2,...m, y^{(s)}(a)$ فإن : المشتقيين الكسريين ريمان -ليوفيل وكابيتو يكونان تبديليين مع المشتق من الرتبة m ، $m\in\mathbb{N}.$

$$D^{m}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y(t) = D^{\alpha+m}_{a+}y(t) = D^{\alpha}_{a+}D^{m}_{a+}y(t).$$

و

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}D^{m}_{a+}y(t) ={}^{C} D^{\alpha+m}_{a+}y(t) = D^{m}_{a+}.{}^{C}D^{\alpha}_{a+}y(t).$$

4.6.1 بعض خصائص المشتقات الكسررية

أنظر [6] مؤثر المشتق الكسري هو مؤثر خطي .

$$D^{\alpha}(\lambda f(x)+\mu g(x)) = \lambda D^{\alpha}f(x)+\mu D^{\alpha}g(x), x>0.$$

نظرية 9 (قاعدة لابنيتز). أنظر [3] ليكن $t>a, a\in\mathbb{R}, n-1<a<n\in\mathbb{N}$ إذا كان $y_1(t)$ و $y_2(t)$ وكل مشتقاتها مستمرة على $[a,b]$ ،فإن :

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}(y_1(t)y_2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}(D^{\alpha}_{a+}y_1(t))y_2^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}((y_1(t)y_2(t))^{(k)}(a)).$$

7.1 تحويل لابلاس لمعادلة تفاضلية من الرتبة الكسرية

تعريف 12 (تحويل لابلاس). لتكن $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة مستمرة ، نعرف تحويل لابلاس لدالة f بالصيغة التالية :

$$L\{f(t),s\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \quad ;t>0$$

تعريف 13 (تحويل لابلاس العكسي). يعرف تحويل لابلاس العكسي لدالة F ب:

$$f(t)=L^{-1}\{F(s),t\}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{st}ds \quad ;c=Re(s)>c_0$$

1.7.1 تحويل لابلاس للمشتقة الكسرية ريمان -ليوفيل

أنظر [6] نعرف تحويل لابلاس للمشتق الكسري ريمان -ليوفيل من الدرجة $\alpha>0$ بالصيغة التالية :

$$L\left\{D_{a+}^{\alpha}f(x),s\right\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k[D_{a+}^{\alpha-k-1}f(x)]_{x=0},(n-1<\alpha<n).$$

2.7.1 تحويل لابلاس للمشتقة الكسرية كابيتو

أنظر [6] نعرف تحويل لابلاس للمشتقة الكسرية كابيتو كمايلي :

$$L\left\{{}^{C}D_{a+}^{\alpha}f(x),s\right\}=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),(n-1<\alpha<n).$$

8.1 مبرهنات النقطة الثابتة

لتكن f دالة ما من مجموعة X إلى نفسها ،ولتكن النقطة $X\in$ نقطة ثابتة إذا كان $x=f(x)$.
على سبيل المثال ليكن [a,b] مجال مغلق عندئذ أي دالة مستمرة $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ تملك نقطة ثابتة واحدة على الأقل .

1.8.1 مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة

تعريف 14. أنظر [2] ليكن (X,d) فضاء متري عندئذ يقال عن الدالة $f:X\longrightarrow X$ أنها تقليص على X ، إذا وجد ثابت $0<M<1$ بحيث يكون :

$$d(f(x),f(y))\leq Md(x,y)$$

من أجل كل $x,y\in X$.

مبرهنة 4. أنظر [2] كل تطبيق تقليص على فضاء متري (بناخ)يملك نقطة ثابتة وحيدة .

2.8.1 مبرهنة شاودر للنقطة الثابتة

مبرهنة شاودر الأولى

لتكن K مجموعة محدبة ومتراصة وغير خالية وجزئية من فضاء بناخ X .
وليكن $T : K \longrightarrow K$ مستمر عندئذ يوجد لT نقطة ثابتة واحدة على الأقل .

تعريف 15. أنظر [2] نقول عن المؤثر T من فضاء X أنه متراص ، إذا كان يحول المجموعات المحدودة الى مجموعات متراصة نسبياً ، أي أنه إذا كانت $\{u_n\}$ متتالية من فضاء X ، $\|u_n\| < M$ عندئذ $\{T_{u_n}\}$ تحوي متتالية جزئية تتقارب إلى نقطة ما في X .

تعريف 16. أنظر [2] لتكن A مجموعة من الدوال المستمرة على X يقال عن A محدودة بإنتظام إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث يحقق:

$$\|f\| < M$$

من أجل $f \in A$

تعريف 17. أنظر [2]
ليكن X فضاء طبولوجي وليكن (Y,d) فضاء متري ولتكن A مجموعة من الدوال المستمرة على X ،نقول عن A أنها متساوية الإستمرار إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ وكل $x \in X$ يوجد جوار مفتوح ل x ،وليكن $U \subseteq X$ بحيث أنه من أجل كل $f \in A$ ومن أجل كلy ،إذا كانت $y \in U$ عندئذ :

$$d(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

مبرهنة (أرزيلا-أسكولي)

أنظر [2] ليكن X فضاء متري متراص ولتكن A مجموعة من الدوال على X والمحدودة بإنتظام ومتساوية الإستمرار ،عندئذ A تحوي متتالية جزئية متقاربة (أي A متراصة).

مبرهنة شاودر الثانية

أنظر [2] لتكن K مجموعة محدودة ومغلقة ومحدبة وغير خالية جزئية من فضاء بناخ X ،
وليكن $T : K \longrightarrow K$ متراص ،عندئذ يوجد لT نقطة ثابتة واحدة على الأقل .

3.8.1 مبرهنة شيفر للنقطة الثابتة

أنظر [2] ليكن X فضاء بناخ وليكن $T : X \longrightarrow X$ مستمر ومتراص بحيث تكون المجموعة :
$\{x \in X : x = \lambda T(x), 0 \leq \lambda \leq 1\}$ محدودة .
عندئذ يوجد ل T نقطة ثابتة واحدة على الأقل .

9.1 قضايا

قضية 1. أنظر [2] لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ إذا كان $D^\alpha u(t) = 0$ فإن :

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^n.$$

حيث

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n.$$

قضية 2. أنظر [2] لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ فإن :

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_n t^n.$$

حيث

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n.$$

قضية 3. أنظر [2] لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ ، $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ إذا كان $D^\alpha u(t) = 0$ فإن :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n}.$$

حيث

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, ..., n.$$

قضية 4. أنظر [2] لتكن $\alpha > 0$ و $n = [\alpha]$ ، وليكن $u \in C[0,1] \cap L[0,1]$ ، فإن :

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + ... + c_n t^{\alpha-n}.$$

حيث

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, ..., n.$$

فصل 2

المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و غير الخطية

1.2 أمثلة عن المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية

نقدم بعض الأمثلة عن المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية :

مثال 4. لنأخذ المعادلة الأتية :

$$D_{a+}^{\frac{1}{2}}y(x) + ay(x) = 0 \qquad , x > 0$$

مع الشرط الإبتدائي التالي :

$$\left[D_{a+}^{-\frac{1}{2}}y(x)\right]_{x=0} = C$$

D_{a+} يمثل مشتق ريمان -ليوفيل.
بتطبيق تحويل لابلاس لمشتق ريمان ليوفيل الكسري على المعادلة نجد:

$$L\left\{D_{a+}^{\frac{1}{2}}y(x) + ay(x)\right\} = 0$$

يصبح لدينا :

$$s^{\frac{1}{2}}Y(s) - D_{a+}^{-\frac{1}{2}}Y(0) + aY(s) = 0$$

بما أن الشرط الإبتدائي لديه قيمة ،أي :

$$\left[D_{a+}^{-\frac{1}{2}}y(x)\right]_{x=0} = C$$

فإن :

$$s^{\frac{1}{2}}Y(s)+aY(s)=C$$

وبالتالي :

$$Y(s)=\frac{C}{s^{\frac{1}{2}}+a}$$

بتطبيق التحويل العكسي للابلاس نجد :

$$y(x)=L^{-1}\left\{\frac{C}{s^{\frac{1}{2}}+a}\right\}=Cx^{-\frac{1}{2}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-ax^{\frac{1}{2}})$$

<u>**مثال**</u> **5.** لتكن المعادلة التالية :

$$D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+}y(x))+D^{q}_{a+}y(x)=h(x)$$

حيث :

$$0<\alpha<1,0<\beta<1,0<q<1,\alpha+\beta=Q>q$$

و الشروط التالية :

$$b_1=\left[D^{\alpha-1}_{a+}(D^{\beta}_{a+}y(x))\right]_{x=0}+\left[D^{q}_{a+}y(x)\right]_{x=0}$$

$$b_2=\left[D^{\beta-1}_{a+}y(x)\right]_{x=0}$$

بإستعمال تحويل لابلاس الكسري لريمان -ليوفيل يصبح لدينا :

$$L\left[D^{\alpha}_{a+}(D^{\beta}_{a+}y(x))\right]+L\left[D^{q}_{a+}y(x)\right]=L\left[h(x)\right]$$

ومنه نجد :

$$(s^{\alpha+\beta}+s^{q})Y(s)=H(s)+s^{\alpha}b_2+b_1$$

أي :

$$Y(s)=\frac{H(s)+s^{\alpha}b_2+b_1}{(s^{\alpha+\beta}+s^{q})}$$

بإستعمال التحويل العكسي للابلاس نجد :

$$y(x)=b_2x^{\beta-1}E_{\alpha+\beta,\beta}(-x^{\alpha+\beta-q})+b_1x^{\alpha+\beta-q}E_{\alpha+\beta,\beta}(-x^{\alpha+\beta-q})$$

$$+\int_0^x(x-t)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-(x-t)^{\alpha+\beta-q})h(t)dt$$

مثال 6. لنأخذ المعادلة التالية :

$$D_{a+}^{\alpha_2}(D_{a+}^{\alpha_1}y(x)) - \lambda y(x) = h(x)$$

مع

$$b_1 = \left[D_{a+}^{\alpha_2 - 1}(D_{a+}^{\alpha_1}y(x))\right]_{x=0}$$
$$b_2 = \left[D_{a+}^{\alpha_1 - 1}y(x)\right]_{x=0}$$

حيث :
$0 < \alpha - 1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1$ و b_1, b_2 ثوابت حقيقية .
بتطبيق تحويل لابلاس الكسري لريمان -ليوفيل نجد :

$$L\left[D_{a+}^{\alpha_2}(D_{a+}^{\alpha_1}y(x))\right] - \lambda L\left[y(x)\right] = L\left[h(x)\right]$$

أي :

$$(s^{\alpha_2+\alpha_1} - \lambda)Y(s) = H(s) + s^{\alpha_2}b_2 + b_1$$

إذن :

$$Y(s) = \frac{H(s) + s^{\alpha_2}b_2 + b_1}{s^{\alpha_2+\alpha_1} - \lambda}$$

بتطبيق التحويل العكسي للابلاس نجد :

$$L^{-1}\left[Y(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{H(s) + s^{\alpha_2}b_2 + b_1}{s^{\alpha_2+\alpha_1} - \lambda}\right]$$

إذن :

$$y(x) = b_2 x^{\alpha-1}E_{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1}(\lambda x^{\alpha_1+\alpha_2}) + b_1 x^{\alpha-1}E_{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}(\lambda x^{\alpha_1+\alpha_2})$$
$$+ \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2}(\lambda(x-t)^{\alpha_1+\alpha_2})h(t)dt$$

2.2 أمثلة عند المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية

نقوم بدراسة المسائل التالية :

$$^{C}D^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0 \tag{1.2}$$
$$au(0) + bu(T) = c \qquad ; 0 < \alpha < 1; t \in J = [0, T]$$

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), D^{\beta}u(t)) \tag{2.2}$$

$$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2$$

$u(0) = u(1) = 0$ أو $u(1) = u'(0) = 0$ أو $u(0) = u'(1) = 0$

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)) \qquad (3.2)$$

$$u(0) = a, u'(0) = b, u''(T) = c \quad ; 2 < \alpha \leq 3$$

1.2.2 دراسة المسألة (1.2)

$$^{C}D^{\alpha}u(t) + f(t, u(t)) = 0$$

$$au(0) + bu(T) = c \qquad ; 0 < \alpha < 1; t \in J = [0, T]$$

حيث $^{C}D_{a+}$ مشتق كابيتو الكسري ،و $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، a,b,c ثوابت وتحقق $a + b \neq 0$.

نأخذ الفضاء $C(J, \mathbb{R})$فضاء بناخ لكل الدوال المستمرة من J الى $\mathbb{R}$ ، والمزود بالنظيم :

$$\|u\| = \sup\{|u(t)|, t \in J\}.$$

بأخذ $f(t, u(t)) = y(t)$ حيث $y : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، يصبح لدينا :

$$^{C}D^{\alpha}u(t) = y(t)$$

$$au(0) + bu(T) = c, \quad t \in J = [0, T]$$

بأخذ التكامل الكسري لطرفي المعادلة :

$$I^{\alpha}.^{C}D^{\alpha}u(t) = I^{\alpha}y(t)$$

حسب التعريف 23 من التعاريف (10.1) يصبح لدينا :

$$u(t) + c_0 = I^{\alpha}y(t)$$

$$u(t) = c_0 + I^{\alpha}$$

$$u(t) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} y(s) ds$$

لدينا:

$$u(0) = c_0$$

$$u(T) = c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha - 1} y(s) ds$$

بالتعويض في الشرط الإبتدائي نجد :

$$ac_0 + b(c_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds) = c$$

$$ac_0 + bc_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds = c$$

$$c_0(a+b) = c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds$$

$$c_0 = \frac{c}{(a+b)} - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds$$

إذن الحل يكون كمايلي :

$$u(t) = \frac{c}{(a+b)} - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds$$

وبصورة عكسية نجد أنه إذا كان $u(t)$ يساوي القيمة أعلاه ،فأن مسألة القيم الحدية (1.2) محققة .

مبرهنة 5. أنظر [2]
لنفرض وجود ثابت $k > 0$ بحيث :

$$| f(t,u) - f(t,v) | \leq k \mid u - v \mid$$

حيث $u, v \in \mathbb{R}, t \in J = [0,T]$.

عندئذ إذا كان :

$$\frac{kT^\alpha (1 + \frac{|b|}{|a+b|})}{\Gamma(\alpha+1)} < 1.$$

فإنه يوجد للمسألة حلاً وحيداً على J .

الإثبات 1. نأخذ المؤثر $F : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ والمعرف كمايلي :

$$Fu(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s)) ds$$

$$-\frac{1}{(a+b)} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} . f(s,u(s)) ds - c \right]$$

من الواضح أن النقطة الثابتة ل F هي حل للمسألة (2.1).
- نبين وجود نقطة ثابتة ل F وذلك من خلال إثبات أن F تقليص .
ليكن $u_1, u_2 \in C(J,\mathbb{R})$، عندئذ من أجل كل $t \in J$ يكون:

$$|Fu_1(t) - Fu_2(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \right| ds$$

$$+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left| f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \right| ds$$

$$|Fu_1(t) - Fu_2(t)| \leq \frac{k\|u_1-u_2\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{k|b|\|u_1-u_2\|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds$$

$$|Fu_1(t) - Fu_2(t)| \leq \left[\frac{kT^\alpha \left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right] \|u_1-u_2\|$$

$$\|Fu_1(t) - Fu_2(t)\| \leq \left[\frac{kT^\alpha \left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right] \|u_1-u_2\|$$

$$\|Fu_1(t) - Fu_2(t)\| \leq K\|u_1-u_2\|$$

ومنه $K < 1$، إذن F تقليص .

مبرهنة 6. أنظر [2] لنفرض أن $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، ولنفرض وجود ثابت $M > 0$ بحيث : $| f(t,u) | \leq M$ من أجل كل $t \in J$ و $u \in \mathbb{R}$ ،
عندئذ يوجد للمسألة على الأقل حلاً واحداً على J .

الإثبات 2. -سنبرهن أن ل F نقطة ثابتة من خلال تطبيق مبرهنة شيفر للنقطة الثابتة (1.9.3):
-الخطوة الأولى : إثبات أن F مستمر .
لتكن $\{u_n\}$ متتالية بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $C(J,\mathbb{R})$، عندئذ من أجل كل $t \in J$ يكون :

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left| f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \right| ds$$

$$+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left| f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)) \right| ds$$

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\, ds$$
$$+\frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{0\leqslant s\leqslant T} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|\, ds$$

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{\|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|}{\Gamma(\alpha)}$$
$$.\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds\right]$$

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{T^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

بماأن f مستمر فإن :

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{T^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|}{\alpha\Gamma(\alpha)} \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$$

إذن F مستمر .

- الخطوة الثانية :نبين أن F يحول المجموعات المحدودة إلى مجموعات محدودة في $C(J,\mathbb{R})$.

من أجل ذلك نبين أنه من أجل $\eta > 0$ فإنه يوجد ثابت موجب l بحيث أنه من أجل كل $u \in B_\eta \{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\| \leq \eta\}$ يكون $\|Fu\| \leq l$.

$$|Fu(t)| \leqslant \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds\right|$$
$$+\left|\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds\right| + \left|\frac{c}{(a+b)}\right|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|ds$$
$$+\frac{|c|}{|a+b|}$$
$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{M|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$
$$|Fu(t)| \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha|a+b|\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}$$
$$\|Fu(t)\| \leq \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|} = l$$

-الخطوةالثالثة :نبين أن F يحول المجموعات المحدودة إلى مجموعات متساوية الإستمرار في $C(J,\mathbb{R})$.
لتكن $t_1, t_2 \in J$ بحيث $t_1 < t_2$ ،ولتكن B_η مجموعة محدودة في $C(J,\mathbb{R})$ ،
وليكن $u \in B_\eta$ عندئذ :

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, u(s)) ds \right|$$

$$+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right|$$

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] |f(s, u(s))| ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds$$

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds$$

$$+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds$$

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left[(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha \right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (t_1 - t_2)^\alpha$$

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)$$

عندما $t_1 \longrightarrow t_2$:

$$|Fu(t_2) - Fu(t_1)| \leq 0$$

ومنه حسب مبرهنة أرزيلا أسكولي نستنتج أن F مستمر ومتراص .
- الخطوة الرابعة :نبين أن المجموعة $\zeta = \{u \in C(J,\mathbb{R}), u = \lambda F u, 0 < \lambda < 1\}$ هي مجموعة محدودة.
ليكن $u \in \zeta$ عندئذ $u = \lambda F u$ من أجل $t \in J,\ 0 < \lambda < 1$ لدينا:

$$u(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds \right]$$

$$-\lambda \left[\frac{1}{(a+b)} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds - c \right] \right]$$

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, u(s))| ds$$

$$+\frac{|c|}{|a+b|}$$

$$|u(t)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$|u(t)| \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha|a+b|\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\|u(t)\| \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha|a+b|\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R$$

ومنه المجموعة ζ مجموعة محدودة .
إذن حسب مبرهنة النقطة الثابتة لشيفر (3.9.1)نستنتج أنه يوجد ل F نقطة ثابتة والتي هي حل للمسألة(2. 1).

2.2.2 دراسة المسألة (2.2)

$${}^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t), {}^C D^\beta u(t))$$
$$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2$$
$$u(0) = u'(1) = 0 \text{ أو } u(1) = u'(0) = 0 \text{ أو } u(0) = u(1) = 0$$

حيث $1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1$ أعداد حقيقية ، ${}^C D^\beta, {}^C D^\alpha$ مشتقات كابيتو الكسرية ،و: f $[0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة .
ليكن

$${}^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t), D^\beta u(t)) \tag{4.2}$$
$$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2، u(0) = u'(1) = 0$$

$${}^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t), D^\beta u(t)) \tag{5.2}$$
$$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2، u(1) = u'(0) = 0$$

$${}^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t), D^\beta u(t)) \tag{6.2}$$
$$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2، u(0) = u(1) = 0$$

بما أن الطرق المستعملة في الإثبات متماثلة ،فإننا سنركز إهتمامنا على المسألة (4.2).
ليكن $y \in C[0,1]$ عندئذ تصبح المسألة بالشكل التالي :

$${}^C D^\alpha u(t) + y(t) = 0$$

$0 < \beta < 1, 1 < \alpha \leq 2$،$u(0) = u'(1) = 0$

الشكل العام لحل يكون يالصيغة التالية :

$$u(t) = \int_0^1 G_1(t,s)y(s)ds$$

بأخذ التكامل الكسري للطرفين نجد:

$$I^{\alpha}.^{C}D^{\alpha}u(t) = I^{\alpha}y(t)$$

من التعريف23 من تعاريف (10.1) يصبح لدينا :

$$u(t) = c_0 + c_1 t + I^{\alpha}y(t)$$

$$u(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds.$$

لدينا

$$u(0) = c_0 = 0$$

$$u'(t) = c_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}y(s)ds.$$

$$u'(1) = c_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (\alpha-1)(1-s)^{\alpha-2}y(s)ds.$$

$$c_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds.$$

ومنه نجد:

$$u(t) = -\frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds.$$

وبالتالي :

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & ; 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & ; 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ملاحظة 5. -إذا كانت الشروط $u(1) = u'(0) = 0$:

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & ; 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ \dfrac{-(t-s)^{\alpha-1} - t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & ; 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

-إذا كانت الشروط $u(1)=u(0)=0$:

$$G_3(t,s)=\begin{cases}\dfrac{-t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & ;0\leq t\leq s\leq 1\\ \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}-t(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & ;0\leq s\leq t\leq 1\end{cases}$$

ملاحظة 6. من مشتق كابيتو الكسري :

$$^{C}D^{\beta}u(t)=I^{1-\beta}u'(t) \qquad ;0<\beta<1$$

$$^{C}D^{\beta}u(t)=u'(t) \qquad ;\beta=1$$

بما أن $C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$: I^{α} حيث $\alpha>0$ فيكون $^{C}D^{\beta}u(t)$ مستمر من أجل كل $u(t)\in\mathbb{X}$.
حيث :$\mathbb{X}=C([0,1]\mathbb{R})$ فضاء بناخ لكل الدوال المستمرة من [0،1] إلى $\mathbb{R}$ والمزود بالنظيم :

$$\|u\|=\begin{cases}\max\limits_{0\leq t\leq 1}|u(t)|+\max\limits_{0\leq t\leq 1}|D^{\beta}u(t)|+\max\limits_{0\leq t\leq 1}|u'(t)| & ;0<\beta<1\\ \max\limits_{0\leq t\leq 1}|u(t)|+\max\limits_{0\leq t\leq 1}|u'(t)| & ;\beta=1\end{cases}$$

-الدالة $u(t)$ تمثل حلاً لمسألة القيم الحدية (4.2) حيث :

$$u(t)=\int_0^1 G_1(t,s)f(t,u(t),D^{\beta}u(t))ds.$$

لنعرف المؤثر التكاملي T بحيث أنه من أجل كل $u(t)\in\mathbb{R}$ يكون :

$$Tu(t)=\int_0^1 G_1(t,s)f(t,u(t),D^{\beta}u(t))ds.$$

من الواضح أن النقطة الثابتة ل T هي حل لمسألة القيم الحدية (2.4).

مبرهنة 7. أنظر [2]

نفرض أن f دالة مستمرة على $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ،ولتكن الشروط الأتية محققة :

1- يوجد دوال موجبة $h(x,y)$ و $a(t)$ بحيث أن:

$$|f(t,x,y)|\leqslant a(t)+h(x,y).$$

حيث $a(t)\in L^1[0,1]$ و $h(x,y)$ مستمرة على $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

2- تكون

$$\lim_{(|x|+|y|)\longrightarrow+\infty}\frac{h(x,y)}{|x|+|y|}<\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)}{(3\alpha+1)\Gamma(2-\beta)+2\alpha}=A,0<\beta<1.$$

$$\lim_{(|x|+|y|)\longrightarrow+\infty}\frac{h(x,y)}{|x|+|y|}<\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(3\alpha+1)}=B,\beta=1.$$

عندئذ يوجد حل للمسألة .

الإثبات 3. في حال كون $\beta<1$:

ليكن $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(A-\overline{\lim_{(|x|+|y|)\longrightarrow+\infty}\frac{h(x,y)}{|x|+|y|}}\right)$ عندئذ من حسب المبرهنة 7 الشرط 2 ، يوجد ثابت $d_1>0$ بحيث أن :

$$h(x,y)\leq(A-\varepsilon)(|x|+|y|)\qquad ;|x|+|y|\geqslant d_1$$

لنضع :

$$M=\max\{h(x,y):|x|+|y|\leqslant d_2\}$$

ونختار $d_2>d_1$ بحيث :

$$\frac{M}{d_2}\leq A-\varepsilon.$$

عندئذ :

$$h(x,y)\leq(A-\varepsilon)d_2\qquad ;|x|+|y|\leq d_2.$$

وبالتالي من أجل $c\geq d_2$ لدينا :

$$h(x,y)\leq(A-\varepsilon)c\qquad ;|x|+|y|\leq c.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right|ds&=\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds+\int_t^1\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds\\&=-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\\\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right|ds&=-\frac{(1+t^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned}$$

لذلك يكون $\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right|$ قابلة للمكاملة من أجل أي $t\in[0,1]$.

لنضع :-

$$k_1=\max_{0\leq t\leq1}\int_0^1|G_1(t,s)a(s)|\,ds.$$

$$k_2=\max_{0\leq t\leq1}\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)a(s)\right|ds.$$

$$k=\max\left\{k_1,k_2,\frac{k_2}{\Gamma(2-\beta)}\right\}.$$

$$d_3 = \left(\frac{3A}{\varepsilon}\right) k.$$

$$d = \max\{d_2, d_3\}.$$

ولنعرف:

$$U = \{u(t) : u(t) \in \mathbb{X}, \|u(t)\| \leq d, t \in [0,1]\}.$$

عندئذ المجموعة U مغلقة ومحدودة ومحدبة وأكثر من ذلك من أجل $u(t) \in U$ فإن المؤثر T معرف جيداً بما أن $f(t, u(t), ^C D^\beta u(t))$ محدود من أجل $u(t) \in U$ وأيضا :

$$(A - \varepsilon)d \geq h(u(t), D^\beta u(t))$$

المؤثر T مستمر :

لتكن $\{u_n\}$ متتالية بحيث $u \in \mathbb{R}$ و0 $\|u_n - u\| \longrightarrow_{n \longrightarrow +\infty}$ عندئذ من أجل كل $t \in [0,1]$ وبإستخدام إستمرارية f يكون :

$$|Tu_n(t) - Tu(t)| = \left| \int_0^1 G_1(t,s) \left(f(s, u_n(s), ^C D^\beta u_n(s)) - f(s, u(s), ^C D^\beta u(s) \right) ds \right|.$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t)) \right| \int_0^1 |G_1(t,s)|\, ds.$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t)) \right|$$

$$\cdot \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds + \int_t^1 \frac{t(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} ds \right).$$

$$\leq -\left(\frac{t^\alpha + \alpha t}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t)) \right|$$

$$\leq -\left(\frac{1+\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t) \right|$$

$$|^C D^\beta T u_n(t) -^C D^\beta T u(t)| = \left| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (T' u_n(t) - T' u(t)) ds \right|.$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) \left(f(\tau, u_n(\tau), ^C D^\beta u_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau), ^C D^\beta u(\tau)) \right) d\tau \right| ds \right].$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t)) \right|$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \left[\int_0^1 \left| \frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) \right| d\tau \right] ds.$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} \left| f(t, u_n(t), ^C D^\beta u_n(t)) - f(t, u(t), ^C D^\beta u(t)) \right| \left(\frac{-2}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \right) \int_0^t (t-s)^{-\beta} ds$$

$$\leq \frac{-2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \max_{0\leq t\leq 1} \left|f(t,u_n(t),^C D^\beta u_n(t)) - f(t,u(t),^C D^\beta u(t))\right|$$

$$|T'u_n(t)-T'u(t)| = \left|\int_0^1 \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\left(f(s,u_n(s),^C D^\beta u_n(s)) - f(s,u(s),^C D^\beta u(s))\right)ds\right|.$$

$$\leq \int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| ds. \max_{0\leq t\leq 1} \left|f(t,u_n(t)),^C D^\beta u_n(t)) - f(t,u(t),^C D^\beta u(t))\right|$$

$$\leq \frac{-2}{\Gamma(\alpha)} \max_{0\leq t\leq 1} \left|f(t,u_n(t),^C D^\beta u_n(t)) - f(t,u(t),^C D^\beta u(t))\right|$$

إذن المؤثر T مستمر.

إثبات أن $T : U \longrightarrow U$:

من أجل كل $u(t) \in U$ ومن الشرط 1 من المبرهنة 3 لدينا :

$$|Tu(t)| = \left|\int_0^1 G_1(t,s) f(s,u(s),^C D^\beta u(s))ds\right|$$

$$\leq \int_0^1 |G_1(t,s)a(s)|\, ds + \int_0^1 \left|G_1(t,s)h(u(s),^C D^\beta u(s))\right| ds$$

$$\leq k + d(A-\varepsilon)\int_0^1 |G_1(t,s)|\, ds$$

$$|Tu(t)| \leq k - d(A-\varepsilon)\frac{(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$|^C D^\beta Tu(t)| = \left|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(T'u(s)\right)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left[\int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) f(\tau,u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right| d\tau\right] ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left[\int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)a(\tau)\right| d\tau + \int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)h(u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right| d\tau\right] ds$$

$$\leq \frac{k_2}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta} ds + d(A-\varepsilon)\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(\int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)\right| d\tau\right) ds$$

$$|^C D^\beta Tu(t)| \leq k - d(A-\varepsilon)\frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}$$

$$|T'u(t)| = \left|\int_0^1 \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) f(s,u(s),^C D^u(s))ds\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)a(s)\right| ds + \int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)h(u(s),^C D^\beta u(s))\right| ds$$

$$\leq k + d(A-\varepsilon)\int_0^1 \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| ds$$

$$|T'u(t)| \leq k - d(A-\varepsilon)\frac{2}{\Gamma(\alpha)}$$

وبذلك لدينا :

$$\|Tu\| \leq 3k - d(A-\varepsilon)\frac{(1+\alpha)\Gamma(2-\beta)+2\alpha+2\alpha\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)}$$

$$\leq 3k - d(A-\varepsilon)\left(\frac{2\alpha+3\alpha\Gamma(2-\beta)+\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)}\right)$$

$$\leq d_3\frac{\varepsilon}{A} - d(A-\varepsilon)\frac{1}{A} \leq d\frac{\varepsilon}{A} - d(A-\varepsilon)\frac{1}{A} = d$$

وبالتالي $T : U \longrightarrow U$.

-إثبات أن TU مجموعة متساوية الإستمرار :

ليكن $\epsilon > 0$ ولنضع $\delta = \dfrac{T(\alpha)\epsilon}{8N}$ وذلك من أجل أي $u \in U$ ولنأخذ $t_1, t_2 \in [0,1]$ بحيث $t_1 < t_2$ و $|t_2 - t_1| < \delta$ و $N = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t,u(t),^C D^\beta u(t))|$ عندئذ :

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| = \left|\int_0^1 \left(G_1(t_1,s) - G_1(t_2,s)\right) f(s,u(s),^C D^\beta u(s))ds\right|$$

$$\leq N\left(\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{t_1}(G_1(t_1,s)-G_1(t_2,s))ds + \int_{t_1}^{t_2}(G_1(t_1,s)-G_1(t_2,s))ds \\ \displaystyle +\int_{t_2}^{1}(G_1(t_1,s)-G_1(t_2,s))ds\end{array}\right)$$

$$\leq N\left(\frac{t_2-t_1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

من جهة أخرى لدينا :

$$|^C D^\beta Tu(t_1) -^C D^\beta Tu(t_2)|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left|\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{t_1}(t_1-s)^{-\beta}\left[\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)f(\tau,u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right|d\tau\right]ds- \\ \displaystyle\int_0^{t_1}(t_2-s)^{-\beta}\left[\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)f(\tau,u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right|d\tau\right]ds\end{array}\right|$$

$$+\left|\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{t_2}(t_1-s)^{-\beta}\left[\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)f(\tau,u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right|d\tau\right]ds- \\ \displaystyle\int_0^{t_2}(t_2-s)^{-\beta}\left[\int_0^1\left|\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)f(\tau,u(\tau),^C D^\beta u(\tau))\right|d\tau\right]ds\end{array}\right|$$

$$\leq \frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left((t_1-s)^{-\beta}-(t_2-s)^{-\beta}\right) ds+\frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{-\beta} ds$$

$$\leq \frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \left[(t_2-t_1)^{1-\beta}-t_1^{1-\beta}+t_2^{1-\beta}\right]+\frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)^{1-\beta}$$

$$\leq \frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \left[t_2^{1-\beta}+2(t_2-t_1)^{1-\beta}-t_1^{1-\beta}\right]$$

كما أن :

$$|T'u(t_1)-T'u(t_2)|$$

$$= \left|\int_0^1 \frac{\partial G_1}{\partial t_1}(t_1-s) f(s,u(s),{}^C D^\beta u(s)) ds - \int_0^1 \frac{\partial G_1}{\partial t_2}(t_2-s) f(s,u(s),{}^C D^\beta u(s)) ds\right|$$

$$\leq N \int_0^{t_1} \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} \left[(t_1-s)^{\alpha-2}-(t_2-s)^{\alpha-2}\right] ds+N \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\alpha-1)(t_2-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} ds$$

$$\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \left[(t_2-t_1)^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}+t_2^{\alpha-1}\right]+\frac{N}{\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)^{\alpha-1}$$

$$\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \left[t_2^{\alpha-1}+2(t_2-t_1)^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right]$$

ولكن $t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}<2\delta$ و $t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}<2\delta$ و $t_2^{1-\beta}-t_1^{1-\beta}<2\delta$ حيث :

1)إذا كان $\delta \leq t_1 < t_2 \leq 1$:

$$t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha} \leq \alpha(t_2-t_1) < \alpha\delta \leq 2\delta$$
$$t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)(t_2-t_1) < (\alpha-1)\delta \leq \delta < 2\delta$$
$$t_2^{1-\beta}-t_1^{1-\beta} \leq (1-\beta)(t_2-t_1) < (1-\beta)\delta \leq \delta < 2\delta$$

2)أما إذا كان $t_1<\delta<t_2$ فإن $t_2<2\delta$ وبالتالي :

$$t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha} \leq t_2^{\alpha} < (2\delta)^{\alpha} \leq 2\delta$$
$$t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1} \leq t_2^{\alpha-1} < (2\delta)^{\alpha-1} \leq 2\delta$$
$$t_2^{1-\beta}-t_1^{1-\beta} \leq t_2^{1-\beta} < (2\delta)^{1-\beta} \leq 2\delta$$

3)إذا كان $t_1<t_2\leq\delta$ فإن :

$$t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha} \leq t_2^{\alpha} < \delta^{\alpha} \leq 2\delta$$

$$t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1} \leq t_2^{\alpha-1} < \delta^{\alpha-1} \leq \delta < 2\delta$$
$$t_2^{1-\beta}-t_1^{1-\beta} \leq t_2^{1-\beta} < \delta^{1-\beta} \leq \delta < 2\delta$$

ومنه :

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq N\left(\frac{t_2 - t_1}{\Gamma(\alpha)} + \frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$
$$< N\left(\frac{\delta}{\Gamma(\alpha)} + \frac{2\delta}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = N\left(\frac{(\alpha+2)\delta}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$
$$\leq \frac{4N}{\Gamma(\alpha+1)}\delta < \frac{8N}{\Gamma(\alpha)}\delta = \epsilon$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$|^C D^\beta Tu(t_1) -^C D^\beta Tu(t_2)| \leq \frac{2N}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\left[t_2^{1-\beta} + 2(t_2 - t_1)^{1-\beta} - t_1^{1-\beta}\right]$$

$$< \frac{2N}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}[2\delta + 2\delta] = \frac{8N}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}\delta \leq \frac{8N}{\Gamma(\alpha)}\delta = \epsilon$$

كما أن :

$$|T'u(t_1) - T'u(t_2)| \leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)}\left[t_2^{\alpha-1} + 2(t_2 - t_1)^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}\right]$$
$$< \frac{N}{\Gamma(\alpha)}[2\delta + 2\delta] = \frac{4N}{\Gamma(\alpha)}\delta < \frac{8N}{\Gamma(\alpha)}\delta = \epsilon$$

وبالتالي TU مجموعة متساوية الإستمرار كما أنها محدودة بإنتظام وحسب مبرهنة أرزيلا -أسكولي نجد أن T متراص ،
وبنفس الطريقة يتم الإثبات من أجل $\beta = 1$.
إذن حسب مبرهنة شاودر لنقطة الثابتة (2.9.1) فإنه يوجد للمسألة (4.2) حل .

3.2.2 دراسة المسألة (3.2)

$$^C D^\alpha u(t) = f(t, u(t))$$
$$u(0) = a, u'(0) = b, u''(T) = c \quad ; 2 < \alpha \leq 3$$

حيث $^C D^\alpha$ مشتق كابيتو الكسري ،$f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، a,b,c ثوابت حقيقية .
-نأخذ الفضاء $C(J, \mathbb{R})$ فضاء بناخ لكل الدوال المستمرة من J إلى $\mathbb{R}$ والمزود بالنظيم :

$$\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in J\}$$

-لتكن $2 < \alpha \leq 3$ ولتكن $y : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ،عندئذ تصبح المعادلة :

$$^C D^\alpha u(t) = y(t)$$

حيث: $y(t) = f(t, u(t))$.
بأخذ التكامل الكسري للطرفين :

$$I^{\alpha}.{}^{C}D^{\alpha}u(t) = I^{\alpha}y(t)$$

حسب التعريف 23 من تعاريف (10.1) نجد :

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + I^{\alpha}y(t)$$

لدينا :

$$u(0) = c_0 = a$$

$$u'(t) = c_1 + 2c_2 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}y(s)ds$$

$$u'(0) = c_1 = b$$

$$u''(t) = 2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\alpha-1)(\alpha-2)(t-s)^{\alpha-3}y(s)ds$$

$$u''(T) = 2c_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (\alpha-1)(\alpha-2)(T-s)^{\alpha-3}y(s)ds = c$$

$$c_2 = \frac{c}{2} - \frac{1}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}y(s)ds$$

إذن الحل يكون كمايلي :

$$u(t) = a + bt + \frac{c}{2}t^2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}y(s)ds$$

وبصورة عكسية نجد أنه إذا كانت :

$$u(t) = a + bt + \frac{c}{2}t^2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}y(s)ds$$

فمن الواضح أن مسألة القيم الحدية (3.2) محققة

مبرهنة 8. أنظر [2]
لنفرض وجود ثابت $k > 0$ بحيث :

$$| f(t,u) - f(t,v) | \leq k | u - v |$$

حيث $u, v \in \mathbb{R}, t \in J = [0, T]$.

عندئذ إذا كان :

$$kT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right]<1.$$

فإنه يوجد للمسألة حلاً وحيداً على J .

<u>الإثبات</u> 4. لنأخذ المؤثر $F: C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ المعرف كمايلي :

$$Fu(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds-\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}f(s,u(s))ds+a+bt+\frac{c}{2}t^2$$

واضح أن النقطة الثابتة ل F هي حل للمسألة (3.2).
لنبين وجود نقطة ثابتة ل F وذلك عن طريق إثبات أن F تقليص .
لتكن $u,v\in C(J,\mathbb{R})$ عندئذ من أجل كل $t\in J$ يكون :

$$|Fu(t)-Fv(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds$$
$$+\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds$$

لدينا $T \leq t$ إذن $t^2 \leq T^2$:

$$\begin{aligned}|Fu(t)-Fv(t)| &\leq \frac{k\|u-v\|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{kT^2\|u-v\|}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}ds\\ &\leq \frac{kT^{\alpha}\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{kT^2\|u-v\|T^{\alpha-2}}{2(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2)}\\ &\leq \frac{kT^{\alpha}\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{kT^{\alpha}\|u-v\|}{2\Gamma(\alpha-1)}\\ &\leq kT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right\}\|u-v\|\end{aligned}$$

وبالتالي :

$$\|Fu(t)-Fv(t)\| \leq kT^{\alpha}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2\Gamma(\alpha-1)}\right\}\|u-v\|$$

$$\|Fu(t)-Fv(t)\| \leq K\|u-v\|$$

ومنه $K<1$، إذن F تقليص .

مبرهنة 9. أنظر [2] لنفرض أن $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة ، ولنفرض وجود ثابت $M > 0$ بحيث : $| f(t,u) | \leq M$ من أجل كل $t \in J$ و $u \in \mathbb{R}$ ،
عندئذ يوجد للمسألة على الأقل حلاً واحداً على J .

الإثبات 5. نبرهن وجود نقطة ثابتة ل F وذلك بإستخدام مبرهنة شيفر للنقطة الثابتة ،من أجل ذلك نتبع الخطوات التالية :
- الخطوة الأولى : نثبت أن المؤثر F مستمر .
لتكن $\{u_n\}$ متتالية بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $C(J,\mathbb{R})$ ، عندئذ من أجل كل $t \in J$ يكون :

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| ds$$

$$+\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{0\leq s\leq T} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| ds$$

$$+\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \sup_{0\leq s\leq T} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| ds$$

بما أن $t \leq T$ إذن $t^2 \leq T^2$:

$$\leq \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\| \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} ds \right]$$

$$\leq T^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \right] \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|$$

بما أن f تابع مستمر يكون :

$$|Fu_n(t) - Fu(t)| \leq T^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-1)} \right] \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\| \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$$

-الخطوة الثانية : نبين أن F يحول المجموعات المحدودة إلى مجموعات محدودة في $C(J,\mathbb{R})$.
من أجل ذلك يكفي أن نبين أنه من أجل أي $\eta > 0$ فإنه يوجد ثابت موجب l بحيث أنه من أجل كل $u \in B_\eta = \{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\| \leq \eta\}$ يكون $\|Fu\| \leq l$
من الفرض لدينا أنه من أجل كل $t \in J$ يكون :

$$|Fu(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| ds + \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} |f(s,u(s))| ds +$$

$$|a|+|b|t+\frac{|c|}{2}t^2$$

لدينا $t \leq T$ فإن $t^2 \leq T^2$:

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{MT^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}ds+|a|+|b|T+\frac{|c|}{2}T^2$$

$$\leq \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{MT^\alpha}{2\Gamma(\alpha-1)}+|a|+|b|T+\frac{|c|}{2}T^2$$

وبالتالي لدينا :

$$\|Fu\| \leq \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{MT^\alpha}{2\Gamma(\alpha-1)}+|a|+|b|T+\frac{|c|}{2}T^2=l$$

- الخطوة الثالثة : نبين أن F يحول المجموعات المحدودة إلى مجموعات متساوية الإستمرار في $C(J,\mathbb{R})$.

لتكن $t_1,t_2 \in J$ بحيث $t_1<t_2$ و لتكن B_η مجموعة محدودة في $C(J,\mathbb{R})$ كما في الخطوة الثانية .
وليكن $u \in B_\eta$ عندئذ :

$$|Fu(t_2)-Fu(t_1)| \leq |a|+|b|(t_2-t_1)+\left|\begin{array}{c}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]f(s,u(s))ds+ \\ \frac{(t_2-t_1)^2}{\Gamma(\alpha-2)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-3}f(s,u(s))ds\end{array}\right|$$

$$+\frac{|c|}{2}(t_2-t_1)^2$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]ds+\frac{M(t_2-t_1)^2}{\Gamma(\alpha-2)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-3}ds$$

$$+|a|+|b|(t_2-t_1)+\frac{|c|}{2}(t_2-t_1)^2$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\alpha}-\frac{t_2^\alpha}{\alpha}+\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right]+\frac{M(t_2-t_1)^2}{\Gamma(\alpha-2)}\left[\frac{(t_2-t_1)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)}\right]+|a|+|b|(t_2-t_1)+\frac{|c|}{2}(t_2-t_1)^2$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_2-t_1)^\alpha-t_2^\alpha+t_1^\alpha\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha-1)}(t_2-t_1)^\alpha+|a|+|b|(t_2-t_1)+\frac{|c|}{2}(t_2-t_1)^2$$

عندما $t_1 \longrightarrow t_2$ فإن الطرف الأيمن من المتراجحة العليا سوف يؤول لصفر وكنتيجة للخطوات السابقة ومبرهنة أرزيلا أسكولي نستنتج أن $F: C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ متراص .

-الخطوة الرابعة : نبين أن المجموعة $\zeta=\{u \in C(J,\mathbb{R}) : u=\lambda Fu; 0<\lambda<1\}$ مجموعة محدودة

ليكن $u \in \zeta$ عندئذ $u = \lambda Fu$ من أجل $0 < \lambda < 1$ ، وبالتالي من أجل كل $t \in J$ لدينا :

$$u(t) = \lambda \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} f(s,u(s))ds \\ +a + bt + \frac{c}{2}t^2 \end{array} \right]$$

حسب الفرض وبإدخال القيمة المطلقة لطرفي المعادلة نجد :

$$|u(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} |f(s,u(s))| ds$$

$$+|a| + |b|t + \frac{|c|}{2}t^2$$

بما أن $t \leq T$ فإن $t^2 \leq T^2$:

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds - \frac{MT^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} ds + |a| + |b|T + \frac{|c|}{2}T^2$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha - \frac{M}{2\Gamma(\alpha-1)}T^\alpha + |a| + |b|T + \frac{|c|}{2}T^2$$

وبالتالي من أجل كل $t \in J$ يكون :

$$\|u\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha - \frac{M}{2\Gamma(\alpha-1)}T^\alpha + |a| + |b|T + \frac{|c|}{2}T^2$$

إذن ζ مجموعة محدودة .

ومنه حسب مبرهنة شيفر للنقطة الثابتة نستنتج أن F يملك نقطة ثابتة والتي هي حل للمسألة (2.3).

نظرية 10. أنظر [4] إذا كانت السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$ متقاربة عند $t = t_0$، فإنها تكون متقاربة كلما كان $0 \leq t < t_0$.

برهان 1. أنظر [4] نفرض أن $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t_0^{k\alpha}$ متقاربة ،والسلسلة $a_k t_0^{k\alpha} \longrightarrow 0$ لما $k \longrightarrow +\infty$ ،وبالتالي يوجد ثابت $M > 0$ حيث:

$$|c_k t_0^{k\alpha}| \leq M \qquad , k = 0, 1, 2...$$

وبالتالي :

$$|c_k t^{k\alpha}| = |c_k t_0^{k\alpha}| \left| \frac{t}{t_0} \right|^{k\alpha} \leq M \left| \frac{t}{t_0} \right|^{k\alpha}$$

ومنه إذا كان $0 \leq t < t_0$ فإن :

$$\left|\frac{t}{t_0}\right|^{k\alpha} < 1$$

ومنه السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{t}{t_0}\right|^{k\alpha}$ متقاربة .

أي :

$$|c_k t_0^{k\alpha}| \leq M$$

إذن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$ متقاربة .

ومنه $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$ متقاربة مطلقا وبالتالي متقاربة .

<u>ملاحظة</u> 7. أنظر [4] إذا تباعدت $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$ عند $t = t_0$، فإنها متباعدة عند $t > t_0$.

<u>مثال</u> 7. تحديد حل للمسألة:

$$D^{2\alpha}y(t) + w^2 y(t) = 0$$

مع الشروط التالية :

$$y(0) = A \quad , D^{\alpha}y(0) = B$$

حيث A,B ثوابت حقيقية .

يمكننا كتابة الحل على شكل سلسلة :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} D^{2\alpha}y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{2\alpha} t^{n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n-2)\alpha+1)} t^{(n-2)\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \frac{\Gamma((n+2)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} t^{n\alpha} \end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة لدينا :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \frac{\Gamma((n+2)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)} t^{n\alpha} + w^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha} = 0$$

وبالتالي :

$$c_{n+2}\frac{\Gamma((n+2)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}=-w^2c_n$$

$$c_{n+2}=-\frac{w^2\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+2)\alpha+1)}c_n \quad ,n=0,1,...$$

$$c_0=A \quad ,c_1=\frac{B}{\Gamma(\alpha+1)}$$

بأخذ $n=0$ نجد :

$$c_2=-\frac{w^2\Gamma(1)}{\Gamma(2\alpha+1)}c_0=-\frac{w^2c_0}{\Gamma(2\alpha+1)}=-\frac{w^2A}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

إذن الحل يكون بالصيغة التالية :

$$y(t)=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nw^{2\alpha}}{\Gamma(2n\alpha+1)}t^{2n\alpha}+B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nw^{2\alpha}}{\Gamma((2n+1)\alpha+1)}t^{(2n+1)\alpha}$$

أي :

$$y(t)=AE_{2\alpha}(-w^2t^{2\alpha})+B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nw^{2\alpha}}{\Gamma((2n+1)\alpha+1)}t^{(2n+1)\alpha}$$

3.2 طريقة سلسلة تايلور

تعريف 18. إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للاشتقاق عدد لانهائي من المرات عند نقطة a ، فإن سلسلة تايلور للدالة f حول النقطة a تعطى بالصيغة التالية :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

نظرية 11. أنظر [4] السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^{k\alpha}$ متقاربة عند $0<t<R^{\frac{1}{\alpha}}$ ،حيث $c_0\neq 0$ وR نصف قطر التقارب .

برهان 2. أنظر [4] يمكن كتابة مايلي :

$$\left|\frac{c_{n+1}t^{(n+1)\alpha}}{c_nt^{n\alpha}}\right|<1$$

أي :

$$0 < t^{\alpha} < \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

بما أن :

$$R = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

فإن :

$$0 < \lim_{n \longrightarrow +\infty} t^{\alpha} < \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R$$

أي :

$$0 < t^{\alpha} < R$$

ومنه :

$$0 < t < R^{\frac{1}{\alpha}}$$

نظرية 12. أنظر [4] نفرض أن $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ مع $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$ و $0 \leq t < R^{\frac{1}{\alpha}}$.
إذا كانت $f \in C([0, R^{\frac{1}{\alpha}}))$ و $D^{(n\alpha)} f \in C((0, R^{\frac{1}{\alpha}}))$ عند $n = 0, 1, ...$، فإن :

$$c_n = \frac{D^{(n\alpha)} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

حيث:

$$D^{(n\alpha)} = D^{(\alpha)} D^{(\alpha)} ... D^{(\alpha)} = (D^{(\alpha)})^n$$

برهان 3. أنظر [4] عند $t = 0$ لدينا $f(0) = c_0$.
بإستخدام الصيغة :

$$D^{n\alpha} t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1 - n\alpha)} t^{\lambda - n\alpha}$$

ينتج :

$$D^{\alpha} f(t) = c_1 \Gamma(\alpha + 1) + c_2 \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha} + c_3 \frac{\Gamma(3\alpha + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + ...$$

عند $t = 0$ لدينا :

$$D^{\alpha} f(0) = c_1 \Gamma(\alpha + 1)$$

أي :

$$c_1 = \frac{D^{\alpha} f(0)}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

إذا وصلنا تطبيق المشتق D^{α} عدد n من المرات فإننا نتحصل عند $t = 0$ على :

$$c_n = \frac{D^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}$$

وبالتالي نتحصل على سلسلة ماكورين المعممة :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}$$

ملاحظة 8. وبالمثل بالنسبة إلى $t_0 < t < R^{\frac{1}{\alpha}}$ وتوضع $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t - t_0)^{n\alpha}$ نتحصل على صيغة تايلور المعممة كمايلي :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} (t - t_0)^{n\alpha}$$

4.2 معادلة بيسل المعممة

أنظر [4] يمكن تقديم معادلة بيسل FDE على النحو التالي :

$$t^{2\alpha} D^{2\alpha} y(t) + t^{\alpha} D^{\alpha} y(t) + (t^{2\alpha} - p^2) y(t) = 0 \quad , p \in \mathbb{R}$$

نعتبر الحل بالصيغة التالية :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda + n\alpha} \qquad , (c_0 \neq 0)$$

بإستخدام الصيغة :

$$D^{n\alpha} t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda\lambda - n\alpha + 1)} t^{\lambda - n\alpha}$$

نجد:

$$D^{2\alpha} y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda + n\alpha + 1)}{\Gamma(\lambda + n\alpha 2\alpha + 1)} t^{\lambda + n\alpha - 2\alpha}$$

أي :

$$t^{2\alpha}D^{2\alpha}y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(\lambda+n\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+n\alpha-2\alpha+1)}t^{\lambda+n\alpha}$$

ونجد أيضا :

$$D^{\alpha}y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(\lambda+n\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+n\alpha-\alpha+1)}t^{\lambda+n\alpha-\alpha}$$

أي :

$$t^{\alpha}D^{\alpha}y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(\lambda+n\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+n\alpha-\alpha+1)}t^{\lambda+n\alpha}$$

وكذلك :

$$(t^{2\alpha}-p^2)y(t)=(t^{2\alpha}-p^2)\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}=t^{2\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha-2\alpha}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-2}t^{\lambda+n\alpha}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(\lambda+n\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+n\alpha-2\alpha+1)}t^{\lambda+n\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{\Gamma(\lambda+n\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+n\alpha-\alpha+1)}t^{\lambda+n\alpha}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-2}t^{\lambda+n\alpha}-p^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nt^{\lambda+n\alpha}=0$$

من العلاقة نجد :

$$c_0\left[\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-2\alpha+1)}+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}-p^2\right]=0$$

$$c_1\left[\frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}+\frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+1)}-p^2\right]=0$$

حتى رتبة k نحصل على :

$$c_k\left[\frac{\Gamma(\lambda+k\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+(k-2)\alpha+1)}+\frac{\Gamma(\lambda+k\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+1)}-p^2\right]+c_{k-2}=0$$

بأخذ $\alpha = 1$ لدينا :

$$c_0\left[\lambda^2 - p^2\right] = 0$$
$$c_1\left[(\lambda+1)^2 - p^2\right] = 0$$

بأخذ c_0 كيفي ،$(\lambda =^{+}_{-} p)$ $c_1 = 0$ و $c_1 = 0$ ينتج :

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{(2p+2k)(2k)}$$

أي :

$$c_{2k} = (-1)^{k+1}\frac{c_0}{2.4.6...2k(2p+2)...(2p+2k)}$$

ومنه الحل يكتب بالصيغة التالية :

$$y(t) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{p+2k}}{4^k k!(p+1)(p+2)...p(p+k)}$$

إذن :

$$J_p(t) = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{p+2k}}{4^k k!(p+1)(p+2)...p(p+k)}$$

أي :

$$J_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{p+2k}$$

حيث J_p دالة بيسل من النوع الأول .

فصل 3

بعض الطرق العددية لحل معادلات تفاضلية كسرية

نقدم في هدا الفصل بعض الطرق العددية التي تساعدنا في حل معادلات تفاضلية كسرية وإيجاد الحل التقريبي للمعادلات ،نذكر أبرزها :

1.3 الطريقة التكرارية التغايرية

أنظر [4] الطريقة التكرارية التغايرية (VIM) هي تقنية تحليلية فعالة تستخدم لحل معادلات تفاضلية ،بما في ذلك المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية و غير الخطية .
نأخذ المعادلة التالية :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) + R[y(t)] + N[y(t)] = g(t)$$

حيث g دالة معطاة و $N[y(t)]$ مؤثر غير خطي ،و $R[y(t)]$ مؤثر خطي .
يتم حل المعادلة بالإستعانة بالشروط الإبتدائية التالية :

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad , m-1 < \alpha \leq [\alpha] = m \quad , k = 0, 1, ...m-1$$

مع العلم أن شروط الوجود و الوحدانية محققة .
نطبق تحويل لابلاس للمشتق كابيتو الكسرية :

$$L[y(t)] = Y(s) = Y \qquad , L[g(t)] = G(s)$$

$$L[D^{\alpha}y(t), s] = s^{\alpha}Y - \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} s^{\alpha-k-1}$$

يصبح لدينا :

$$s^{\alpha}Y-\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}s^{\alpha-k-1}+L[R[y(t)]+N[y(t)]-g(t)]=0$$

الصيغة التكرارية تكتب كمايلي :

$$Y_{n+1}=Y_n+\lambda(s)\left[s^{\alpha}Y-\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}s^{\alpha-k-1}+L[R[y(t)]+N[y(t)]-g(t)]\right]$$

حيث $\lambda(s)$ معامل لاغرانج .

نفرض التغير يساوي الصفر ،أي: $\frac{\delta Y_{n+1}}{\delta Y_n}=0$ ينتج :

$$1+\lambda(s)s^{\alpha}=0$$

ومنه :

$$\lambda(s)=-\frac{1}{s^{\alpha}}$$

إذن :

$$Y_{n+1}=\frac{1}{s^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}s^{\alpha-k-1}-\frac{1}{s^{\alpha}}L[R[y(t)]+N[y(t)]-g(t)]$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي:

$$y_{n+1}(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}s^{\alpha-k-1}-\frac{1}{s^{\alpha}}L[R[y(t)]+N[y(t)]-g(t)]\right]$$

مثال 8. لتكن المعادلة التالية :

$$^{C}D^{\alpha}y(t)=1+\int_0^t y(u)du$$

مع الشروط التالية :

$$y(0)=1 \qquad ,0<\alpha\leq 1$$

نتطبيق تحويل لابلاس للمشتق كابيتو الكسري :

$$L[^{C}D^{\alpha}y(t),s]=s^{\alpha}Y(s)-\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}s^{\alpha-k-1} \qquad ,n=[\alpha]+1$$

بماأن n=1 يصبح لدينا :

$$L[{}^C D^\alpha y(t), s] = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}$$

$$L[y(t)] = Y(s) \qquad , L[1] = \frac{1}{s}$$

بالتعويض في المعادلة يصبح لدينا :

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} = \frac{1}{s} + L[\int_0^t y(u)du]$$

الصيغة التكرارية تكتب كمايلي :

$$Y_{n+1} = Y_n + \lambda(s)\left[s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} - \frac{1}{s} - L[\int_0^t y(u)du]\right]$$

-إيجاد معامل لاغرانج :

$$\frac{\delta Y_{n+1}}{\delta Y_n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(s) = -\frac{1}{s^\alpha}$$

ومنه :

$$Y_{n+1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} + \frac{1}{s^\alpha}L[\int_0^t y(u)du]$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نحصل على :

$$y_{n+1}(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} + \frac{1}{s^\alpha}L[\int_0^t y(u)du]\right]$$

أي :

$$y_{n+1}(t) = 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + L^{-1}\left[\frac{Y_n}{s^{\alpha+1}}\right]$$

بأخذ n=1 نجد :

$$y_1(t) = 1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$$

2.3 طريقة المربعات الصغرى

أنظر [4] طريقة المربعات الصغرى هي طريقة عددية تستخدم لتقريب حلول المعادلات التفاضلية الكسرية ،تعمل على افتراض شكل تقريبي للحل بإستخدام دوال مناسبة ،ثم تقلل الخطأ بين طرفي المعادلة على

المجال المحدد.
لتكن المعادلة التالية :

$$D^{\alpha}y(t) + y(t) + f(t) = 0$$

مع الشروط التالية :

$$y(0) = 0 \qquad , y(1) = 0 \qquad , 0 < \alpha \leq 1$$

نتفرض الحل التقريبي يكون بالشكل التالي :

$$y_{app} = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$$

حيث c_i ثوابت و $\phi_i = \phi_i(t)$ ، $i = 1, 2, ..., n$ دوال إختبار.

$$L[y_{app}] = D^{\alpha} y_{app} + y_{app}$$

كما نعرف الدالة I بالشكل التالي :

$$I[c_1, c_2, .., c_n] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 [L[y_{app}] + f(t)]^2 \, dt \longrightarrow min$$

من أجل الحصول على الثوابت $c_1, c_2, .., c_n$ نقوم بإشتقاق الدالة I كمايلي :

$$\frac{\partial I[c_1, c_2, .., c_n]}{\partial c_i} = 0 \qquad , i = 1, 2, ..., n$$

<u>مثال</u> 9. لتكن المعادلة التالية :

$${}^{C}D^{\alpha}y(t) + 1 - (1+\alpha)t = 0$$

مع الشروط التالية :

$$y(0) = 0; y(1) = 0; 0 < \alpha \leq 1; n = [\alpha] + 1 = 1$$

نقوم بتطبيق تحويل لابلاس لمشتق كابيتو الكسرية :

$$L[{}^{C}D^{\alpha}y(t), s] = -L[1] + (\alpha+1)L[t]$$

أي :

$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) = -\frac{1}{s} + \frac{(\alpha+1)}{s^2}$$

ومنه لدينا :

$$s^{\alpha}Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{(\alpha+1)}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{(\alpha+1)}{s^{\alpha+2}} - \frac{1}{s^{\alpha+1}}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد :

$$y(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

نأخذ الحل التقريبي كمايلي :

$$y_{app} = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$$
$$D^{\alpha}y_{app} = c_1D^{\alpha}\phi_1 + c_2D^{\alpha}\phi_2$$

نتحصل على الدالة I كمايلي :

$$I[c_1,c_2] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 \left[c_1D^{\alpha}\phi_1 + c_2D^{\alpha}\phi_2 + 1 - (\alpha+1)t\right]^2 dt \longrightarrow min$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I[c_1,c_2]}{\partial c_1} = 0 \\ \dfrac{\partial I[c_1,c_2]}{\partial c_2} = 0 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left[c_1D^{\alpha}\phi_1 + c_2D^{\alpha}\phi_2 + 1 - (\alpha+1)t\right] D^{\alpha}\phi_1 dt = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \left[c_1D^{\alpha}\phi_1 + c_2D^{\alpha}\phi_2 + 1 - (\alpha+1)t\right] D^{\alpha}\phi_2 dt = 0 \end{cases}$$

لتكن :

$$B_{ij} = \int_0^1 (D^{\alpha}\phi_i)(D^{\alpha}\phi_j)dt \quad ,F_i = \int_0^1 (1-(\alpha+1)t)D^{\alpha}\phi_i dt \quad ,i,j = 1,2,...$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \qquad ;C = [c_1,c_2] \qquad ;F = [F_1,F_2]$$

ومنه يصبح لدينا :

$$BC^T = F^T \quad \Rightarrow \quad C^T = F^TB^{-1}$$

كما لدينا :

$$D^{\alpha}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}$$
$$I^{\alpha}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}t^{k+\alpha}$$

نأخذ دوال الإختبار التالية :

$$\vartheta_1 = t(1-t) \quad , \vartheta_2 = t^2(1-t)$$

$$y_{app} = c_1\vartheta_1 + c_2\vartheta_2 \Rightarrow D^\alpha y_{app} = c_1 D^\alpha \vartheta_1 + c_2 D^\alpha \vartheta_2$$

$$D^\alpha \vartheta_1 = D^\alpha t(1-t) = D^\alpha t - D^\alpha t^2 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} - \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}$$

$$D^\alpha \vartheta_2 = D^\alpha t^2(1-t) = D^\alpha t^2 - D^\alpha t^3 = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha}$$

بوضع :

$$P = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \quad , Q = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} \quad , R = \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)}$$

نجد :

$$D^\alpha \vartheta_1 = Pt^{1-\alpha} - Qt^{2-\alpha}$$

$$D^\alpha \vartheta_2 = Qt^{2-\alpha} - Rt^{3-\alpha}$$

$$D^\alpha \vartheta_1 D^\alpha \vartheta_1 = P^2 t^{2-2\alpha} - 2PQt^{3-2\alpha} + Q^2 t^{4-2\alpha}$$

$$D^\alpha \vartheta_1 D^\alpha \vartheta_2 = D^\alpha \vartheta_2 D^\alpha \vartheta_1 = PQt^{3-2\alpha} - (PR + Q^2)t^{4-2\alpha} + QRt^{5-2\alpha}$$

$$D^\alpha \vartheta_2 D^\alpha \vartheta_2 = Q^2 t^{4-2\alpha} - 2RQt^{5-2\alpha} + R^2 t^{6-2\alpha}$$

بأخذقاعدة التكامل :

$${}_0I^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}$$

نجد :

$$B_{11} = \int_0^1 (D^\alpha \phi_1)(D^\alpha \phi_1) dt = P^2 \frac{\Gamma(3-2\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)} - 2QP \frac{\Gamma(4-2)}{\Gamma(4-\alpha)} + Q^2 \frac{\Gamma(5-2\alpha)}{\Gamma(5-\alpha)}$$

$$B_{12} = B_{21} = \int_0^1 (D^\alpha \phi_1)(D^\alpha \phi_2) dt = \int_0^1 (D^\alpha \phi_2)(D^\alpha \phi_1) dt$$

$$= PQ \frac{\Gamma(4-2\alpha)}{\Gamma(4-\alpha)} - RP \frac{\Gamma(5-2\alpha)}{5-\alpha} - Q^2 \frac{\Gamma(5-2\alpha)}{\Gamma(5-\alpha)} + QR \frac{\Gamma(6-2\alpha)}{\Gamma(6-\alpha)}$$

$$B_{22} = \int_0^1 (D^\alpha \phi_2)(D^\alpha \phi_2) dt = Q^2 \frac{\Gamma(5-2\alpha)}{\Gamma(5-\alpha)} - 2RQ \frac{\Gamma(6-2\alpha)}{\Gamma(6-\alpha)} + R^2 \frac{\Gamma(7-2\alpha)}{\Gamma(7-\alpha)}$$

$$F_1 = \int_0^1 (1 - (\alpha+1)t) D^\alpha \phi_2 dt = -P\Gamma(2-\alpha) + Q \frac{\Gamma(3-\alpha)}{2} +$$

$$(\alpha+1)P \frac{\Gamma(3-\alpha)}{2} - Q(\alpha+1) \frac{\Gamma(4-\alpha)}{6}$$

$$F_2 = \int_0^1 (1-(\alpha+1)t)D^\alpha \phi_2 dt = -Q\frac{\Gamma(3-\alpha)}{2} + R\frac{\Gamma(4-\alpha)}{6}$$
$$(\alpha+1)Q\frac{\Gamma(4-\alpha)}{6} - (\alpha+1)R\frac{\Gamma(5-\alpha)}{24}$$

ومنه نتحصل على الثوابت c_i حيث :

$$C^T = F^T.B^{-1}$$

3.3 طريقة جاليركين لتفاضل الكسري

طريقة جاليركين هي أسلوب عددي يستخدم لحل المعادلات التفاضلية بما فيها المعادلات التفاضلية الكسرية عن طريق تقريب الحل بدوال إختبار تنتمي إلى فضاء معين ،وذلك من خلال تحويل المعادلة الأصلية إلى شكل ضعيف ،ثم فرض أن الخطأ في التقريب يكون متعامداً مع كل دوال الإختبار في هذا الفضاء،تستخدم هذه الطريق على نطاق واسع في تحليل العناصر المنتهية (FEM) .
أنظر [4] لتكن :

$$D^\alpha y(t) + f(t) = 0 \quad ,0<t<1 \quad ,0<\alpha\leq 1$$

مع الشروط الأتية :

$$y(0)=0 \quad ;y(1)=0$$

نرمز ب R(t) إلى باقي المعادلة حيث :

$$R(t) = D^\alpha y_{app}(t) + f(t)$$

مع أخذ الحل التقريبي بالصيغة التالية :

$$y_{app}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t)$$

حيث ϕ_i دوال إختبار، مع :

$$\int_0^1 R(t)\phi_i(t)dt = 0 \quad ;i=1,2,...,n$$

أي :

$$\int_0^1 \left[D^\alpha y_{app}(t) + f(t)\right]\phi_i(t)dt = 0$$

و بالتالي يصبح لدينا :

$$\int_0^1 D^\alpha y_{app}(t)\phi_i(t)dt = -\int_0^1 f(t)\phi_i(t)dt$$

مثال 10. لتكن المعادلة التالية :

$$D^{\alpha}y(t) - t = 0 \ ; y(0) = 0 \ ; y^{(\alpha)}(0) = 0 \ ; 0 < \alpha \leq 1$$

نختار دوال الإختبار التالية :

$$\phi_1 = t \qquad \phi_2 = t^2$$

ومنه الحل التقريبي يكون كمايلي :

$$y_{app}(t) = c_1 t + c_2 t^2$$

عند إشتقاق الحل نجد :

$$D^{\alpha}y_{app}(t) = c_1 D^{\alpha}t + c_2 D^{\alpha}t^2$$

بإستخدام الصيغ التالية :

$$D^{\alpha}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}t^{k-\alpha}$$

$$I^{\alpha}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}t^{k+\alpha}$$

نجد :

$$D^{\alpha}y_{app}(t) = \frac{c_1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} + \frac{2c_2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}$$

ومنه :

$$\begin{cases} \int_0^1 D^{\alpha}y_{app}(t)\phi_1(t)dt = -\int_0^1 f(t)\phi_1(t)dt \\ \int_0^1 D^{\alpha}y_{app}(t)\phi_2(t)dt = -\int_0^1 f(t)\phi_2(t)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^1 \left[\frac{c_1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} + \frac{2c_2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\right] tdt = -\int_0^1 t^2 dt \\ \int_0^1 \left[\frac{c_1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha} + \frac{2c_2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\right] t^2 dt = -\int_0^1 t^3 dt \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} c_1\frac{(2-\alpha)}{2} + c_2\frac{(3-\alpha)}{3} = -\frac{2}{\Gamma(3+\alpha)} \\ c_1\frac{(3-\alpha)(2-\alpha)}{6} + c_2\frac{(4-\alpha)(3-\alpha)}{12} = -\frac{6}{\Gamma(4+\alpha)} \end{cases}$$

بأخذ $\alpha = 0.5$ نجد :

$$\begin{cases} c_1 = -0.594 \\ c_2 = 0.494 \end{cases}$$

و بأخذ $\alpha = 1$ نجد :

$$\begin{cases} c_1 = -0.10 \\ c_2 = -0.133 \end{cases}$$

4.3 طريقة أويلر

هي طريقة عددية تقريبية تعتمد على تمثيل المشتقة الكسرية بإستخدام تقريبات مثل صيغة تايلور أو صيغة كابيتو ، ثم حل المعادلة .

أنظر [4] نأخذ المعادلة التالية :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad ; y(t_0) = y_0 \quad ; 0 < \alpha \leq 1$$

نفرض أن $y(t)$ و $^{C}D^{\alpha}, ^{C}D^{2\alpha}$ مستمرة على $[t_0, a]$ ،نطبق صيغة تايلور المعممة :

$$y(t) = y(t_0) + ^{C}D^{\alpha}y(t_0)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + ^{C}D^{2\alpha}(\eta)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \qquad ; t_0 < \eta \leq t$$

نتحصل على صيغة أويلر :

$$y(t) \approx y(t_0) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t_0, y(t_0))$$

الصيغة التكرارية لأويلر تكون كمايلي :

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(t_n, y_n)$$

مثال 11. لتكن المعادلة التالية :

$$D^{\frac{1}{2}}y(t) = y(t) - \frac{2t}{y(t)}$$

مع الشرط الإبتدائي التالي :

$$y(0) = 1$$

يمكن حساب الحل في *Maple* و*Mathematice* بإستخدام صيغة أويلر :

```
MAPLE
> restart;
> Digits:=4:
```

```
> unassign(t,y);
> f:=(t,y)->y-2*t/y:
> d:=0.2:
> a:=1/2:
>h := evalf(d^a/GAMMA(a+1)) :
> t:=array[0..10]:
> y:=array[0..10]:
> for k from 0 to 5 do t[k]:=k*0.2 od:
> y[0]:=1:
> for k from 0 to 5 do y[k+1]:=y[k]+h*f(t[k],y[k]) od:
> for k from 0 to 5 do print(t[k]," " ,y[k]) od;
0.0, 1
0.2, 1.504
0.4, 2.128
0.6, 3.012
0.8, 4.331
1.0, 6.329
```

MATHEMATICE

```
Clear["*"]
\[Delta] = 0.1; \[Alpha] = 1/2;
f[t, y] := y - 2*t/y
values =
RecurrenceTable  t[k + 1] == t[k] +  [Delta],
y[k + 1] ==
y[k] + \[Delta]\[Alpha]/Gamma[\[Alpha] + 1
*f[t[k], y[k]],
t[0] == 0, y[0] == 1, {t, y} , {k, 0, 10} ;
Grid[values]
ListLinePlot[values, PlotMarkers -> Automatic]
```

5.3 طريقة رونج - كوتا

نذكر بطريقة رونج- كوتا الكلاسيكية :

1.5.3 طريقة رونج -كوتا الكلاسيكية

هي طريقة عددية تستخدم لحل المعادلات التفاضلية من الشكل :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad ; y(x_0) = y$$

ونميز فيها حالتين :

1. رونج -كوتا من الدرجة الثانية :
تعمل هذه الطريقة على حساب y_{n+1} بإستخدام الخطوة h ، وذلك من خلال حساب مايلي : حساب :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

و

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h * k_1)$$

ثم نحسب

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

2. رونج -كوتا من الدرجةالرابعة :
تعمل كذلك على حساب y_{n+1} بإستخدام الخطوة وذلك،h من خلال حساب الدوال التالية :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

و

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} * k_1)$$

وكذلك :

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} * k_2)$$

و

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h * k_3)$$

وفي الأخير نحسب :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

2.5.3 طريقة رونج -كوتا لحل المعادلات التفاضلية الكسرية

أنظر [4] هي طريقة عددية تقريبية تستخدم لحل المعادلات التفاضلية الكسرية من الشكل :

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \qquad ; y(0) = y_0, 0 < \alpha \leq 1$$

حيث D_t^α يمثل مشتقة كابيتو الكسرية من الرتبة α ،و $y \in C^{p+1}([t_0, t_0 + T])$.
تعد هذه الطريقة إمتداد لطريقة رونج -كوتا الكلاسيكية ،تستخدم فيها معاملات معدلة تأخذ في الإعتبار تأثير التكامل الكسري في تعريف المشتق الكسري ، الهدف منها هو تقريب الحل $y(t)$ وبإستخدام خطوات زمنية صغيرة h بطريقة توازن بين الدقة وسهولة الحساب .
نميز فيها حالتين :

1. رونج -كوتا من الدرجة الثانية (RK2) :
هي إحدى طرق رونج -كوتا ، والتي تقرب الحل بالصيغة التالية:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right)$$

k_1, k_2 دوال بحيث:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \qquad ; k_2 = f\left(x_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, y_n + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} k_1 \right)$$

2. رونج -كوتا من الدرجة الرابعة (RK4) :
تعمل على إنشئ خوارزمية لحل المعادلات التفاضلية الكسرية ، من خلال تقريب الحل بالصيغة التالية :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^\alpha}{6\Gamma(\alpha+1)} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

بحيث k_1, k_2, k_3, k_4 دوال ، وفي جوار t_0 نفرض أن :

$$D^\alpha E(0) = D^{2\alpha} E(0) = 0 \quad ; E(h) = y(t+h) - y(t)$$

6.3 طريقة الفروق المنتهية

أنظر [9] تعد من الطرق العددية المهمة ،وخصوصاً عندما تكون الحلول التحليلية صعبة أو مستحيلة ،هذه الطريقة تعتمد على تقريب المشتقات الكسرية بواسطة متتاليات من الفروق المنتهية .
تدرس المعادلات الكسرية التي من الشكل التالي :

$$D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \qquad ; y(0) = y_n \quad ; 0 < \alpha \leq 1$$

يتم حلها من خلال الخطوات التالية :

-الخطوة الأولى :تقسيم الزمن إلى شبكة .

1. نختار الفترة الزمنية .[0,T]
2. نختار عدد الخطوات .N
3. نحسب خطوة الزمن :

$$h = \frac{T}{N} \Rightarrow t_n = nh$$

-الخطوة الثانية : تقريب المشتق الكسري . نستخدم تقريب $L_1 - approximation$ وهو الأفضل في البدايات :

$$D_t^{\alpha} y(t_n) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left(y_{n-k} - y_{n-k-1} \right)$$

بحيث $y_n = y(t_n)$ قيمة الحل عند الزمن t_n، b_k معاملات تحسب بالعبارة التالية :

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$$

-الخطوة الثالثة : نعوض تقريب المشتقة في المعادلة الأصلية ، ثم يتم حل المعادلة لإيجاد y_n .

<u>مثال</u> 12. لنحل المعادلة التالية :

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = -y(t) \quad ; y(0) = 1$$

-الخطوة الأولى :تقسيم الزمن إلى شبكة .

1. نختار الفترة الزمنية .$[0,T]=[0,1]$
2. نختار عدد الخطوات $N=4$.
3. نحسب خطوة الزمن :

$$h = \frac{T}{N} = \frac{1}{4} = 0.25 \Rightarrow t_n = nh$$

-الخطوة الثانية : حساب المعاملات b_k :

$$b_0 = (k+1)^{1-\frac{1}{2}} - k^{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$b_1 = 2^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 0.4142$$
$$b_2 = 3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0.318$$
$$b_3 = 4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 0.268$$

الخطوة الثالثة : حساب y_n لدينا :

$$y_0 = 1$$

نحسب y_1

$$2b_0(y_1 - y_0) = -y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0.6667$$

ثم نحسب y_2

$$2\left[b_0(y_2 - y_1) + b_1(y_1 - y_0)\right] = -y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0.5365$$

وكذلك نحسب

$$2\left[b_0(y_3 - y_2) + b_1(y_2 - y_1) + b_2(y_1 - y_0)\right] = -y_3 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 0.4643$$

النتيجة النهائية (التقريبية):

الحل y_n	الزمن t_n
1.0000	0.00
0.6667	0.25
0.5365	0.50
0.4643	0.75

خاتمة

في هذه المذكرة تم إستعراض بعض الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية الكسرية ، والتي توفر حلولاً دقيقة وفعالة للمسائل التي يصعب حلها تحليلياً .
على الرغم من النجاح الكبير لهذه الطرق فإن هناك تحديات تتعلق بدقة الحسابات وكفاءتها ،ويبقى البحث مستمراً لتحسين هذه الأساليب وتوسيع تطبيقاتها في مختلف المجالات .

المراجع

[1] أسماء حازمون ، دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية الغير خطية ، مذكرة ماستر ، فرع رياضيات ، جامعة 20 أوث 1955 -سكيكدة ، 2021/2022 .

[2] نيرمين محمود الرفاعي ، مسائل القيم الحدية للمعادلات اللاخطية ذات التفاضلات الكسرية ،مذكرة الماجستير ، فرع رياضيات ،جامعة دمشق ، 2015 .

[3] A.Kolmogorov,S .Fomine,Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle ,2e edition , Editions Mir-Moscou.1974.

[4] Albert C. J. Luo ,Constantin Milici ,Gheorghe Drăgănescu ,J. Tenreiro Machado ,Introduction to Fractional Diff erential Equations ,2019, Springer .

[5] B.Bollobas , W.Fulton,A.Katok,F.Kirwan,P.Sarnak,Fixed Point Theory and Appliations ,2004.

[6] E.Pitcher arid , Mr.E.Sewcll.Existence theorems for solutions of differential equations of non -integral order .Bull .Amer .Math .Soc .. vol .44,no .2,1938,pp.100-107; and a corrcction in :vol.44,no .9.1938,p.888.

[7] Haim.Brézis .Analyse fonctionnelle ,Théorie et applications .Dunod ,PARIS-Francc,1999.

[8] H.brezis,Analyse fonctionnelle ,theorie et aplications ,Masson .parie New - york Barcelon Milan Mixico sao paulo 1987 .

[9] Mustapha ,K.An L1 approximation for a fractional reaction-diffusion equation , asecond - order error analysis over time - graded meshes .