وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــية العلـــوم
قسم الرياضيات

N0 : U.S/F.S/D.M/2022/2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

**Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques**

Existence et stabilité des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies

Option: Analyse Numérique Des Equations Aux Dérivées Partielles

Par :

BOUZABIA Hanane

Encadrée par: GHENNAM Karima M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury:

Président: SACI Fateh M.C.B U. SKIKDA

Examinatrice: FOUGHALI Fouzia M.C.B U. SKIKDA

Année : 2022/2023

Remerciement

Tout d'abord, je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'a aidé et m'a inspiré avec détermination et force pour continuer ma carrière universitaire .

Je remercie mes chers parents pour leurs efforts et leur soutien constant pour moi dans tous les petits et grands .

Un grand merci à la superviseure de ce travail Dr, Ghennam Karima, pour ses efforts pour me guider e au cours de cette étude.

Je tiens également à remercier les membres du jury pour leur jugement et leur appréciation de ce travail, car leur participation est pour moi un grand honneur.

En fin, je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, dans la compréhension de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié des poutres de Timoshenko laminéés composées de trois structures à glissement interfacial et à mémoires infinies qui réagissent sur le déplacement transversal et l'angle de rotation. Nous prouvons l'existence de la solution et son unicité en utilisant la théorie des semi-groupes et nous prouvons la stabilité en utilisant la méthode énergétique, qui repose sur la construction d'une fonction équivalente à la fonction énergie appelée fonction de Lyapunov.

Mots clés : Structure Viscoélastique ; Glissement Interfacial ; Semi-groupes ; La Stabilité ; Fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

In this work, we have studied the stationary position of three structures with interfacial sliding and effective infinite memories on the transverse displacement and the angle of rotation, We prove the existence of the solution and its uniqueness using the theory of semi-groups, We prove the stability using the multiplier method, which relies on the construction of a function equivalent to the energy function called the Lyapunov function.

Keywords : Viscoelastic Structure ; Interfacial Slip ; Semigroups ; Stability ; Lyapunov Functional.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الوضع الثابث لثلاثة هياكل مع انزلاق بيني وذكريات لانهائية فعالة على الازاحة المستعرضة و زاوية الدوران . برهنا وجوذ الحل و تفرده باستخدام نظرية شبه المجموعات . برهنا الاستقرار باستعمال طريقة المضاعفات التي تعتمد على بناء دالة مكافئة لدالة الطاقة تسمى دالة ليابونوف .

كلمات مفتاحية: هيكل لزج مطاطي ، زلة بينية ، نصف مجموعات ، استقرار، دالة ليابونوف .

Table des matières

Introduction

Les structures connues sous le nom de poutre laminée sont constituées de deux couches identiques d'épaisseur uniforme, qui est modélisée comme des poutres de Timoshenko. Un adhésif de faible épaisseur vient coller les deux couches et crée une force de récupération qui est proportionnelle à la quantité de glissement et produit un amortissemnt capable de renvoyer le système à son état d'équilibre, tel qu'il est utilisé dans de nombreux domaines scientifiques[9].

On a trois équations de modélisation du mouvement pour ce système et ont été dérivées de la théorie de Timoshenko. La troisième équation est couplée à la première et à la deuxième équations et elle décrivent la dynamique du glissement, comme suit :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} + k(u-\varphi_x)_x = 0 \\ \rho_2(\upsilon - u)_{tt} - b(\upsilon - u)_{xx} - k(u-\varphi_x) = 0 \\ \rho_2\upsilon_{tt} - b\upsilon_{xx} + 3k(u-\varphi_x) + 4\delta\upsilon + 4\gamma\upsilon_t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Où $(x,t) \in (0.1) \times \Re_+$, $\varphi = \varphi(x,t)$ est le déplacement transversal, $u = u(x,t)$ réprésente l'angle de rotation et $\upsilon = \upsilon(x,t)$ est proportionnel à la quantité de glissement le long de l'interface, ρ_1, ρ_2, k, b, δ et γ sont des constantes positives.

Ces dernières années ces structures ont fait l'objet de plusieurs études dans la litérature pour rétablir une bonne posture et stabilité en ajoutant certains types de contrôles (bordure ou intérieur), Les auteurs de [14] prouvent la stabilité exponentielle pour des conditions aux limites Dirichlet-Newman homogènes et mixtes, et deux contrôles aux limites à $x = 1$.

A conditon que les vitesses de propagation des ondes dans les deux premières équations soient différentes

$$\sqrt{\frac{k}{\rho_1}} \neq \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \tag{2}$$

Il a été montré que l'amortissement de frottement $4\gamma v_t$ dans la troisième équation est suffisamment fort pour stabiliser asymptotiquement les structures, mais n'est pas capable de stabiliser significativement les structures. (instabilité exponentielle), le même résultat est également prouvé pour $x = 0$ et $x = 1$, en supposant certaines conditions sur les paramétres ([14] [13])

Il a également été prouvé que la stabilité exponentielle reste constante si les éléments de contrôle aux limites sont remplacés par un amortissement par frottement, en travaillant sur la première équation, En l'absence de contraintes sur les paramétres, la stabilité exponentielle est maintenue si les deux premières équations sont inhibées par l'amortissement par frottement. Quant à la stabilité polynomiale, elle est maintenue sous trois conditions aux limites dynamiques supplémentaires, il s'agit de la stabilité des poutres laminées à conductivité thermique de type Cattanea's ou Fourier .[11][12].

La stabilité est discuter dans le cas d'un amortissement viscoélastique qui agit sur l'angle de rotation effectif sans recourir au contrôle aux frontières, elle est représentée par des termes à mémoire finie sous forme de convolution sur $[0.t]$ [9][13], Et sous certaines restrictions imposées sur les paramètres, la stabilité exponentielle a été prouvée [9]

Dans [6], certains résultats de stabilité exponentielle et polynomiale sous certaines contraintes sur les paramétres $\gamma = 0$ et avec mémoire infinie et dans ce mémoire, on va étudier le système (1) avec deux mémoires infinies.

On considère trois chapitre, le premier chapitre est un rappel de quelques définitions et quelques inégalités utiles pour notre travail, le deuxième chapitre est la position du problème et l'étude de l'existence et l'unicité de la solution, le troisème chapitre étudie la stabilité du système.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons la définitions de quelques espaces de Hilbert et quelques inégalités dans ces espaces. Aussi, nous donnons brièvement, des définitions et quelques lemmes qu'on utilisera ultérieurement.

1.1 Espace de Hilbert

Soit Ω un intervalle de $\Re$,

Définition 1.1. *[2] On définit l'espace :*

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \quad \text{telle que} \quad \int_\Omega |f| d\Omega < +\infty\}$$

Définition 1.2. *[2] On définit l'espace de Hilbert :*

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \quad \text{telle que} \quad \int_\Omega |f|^2 d\Omega < +\infty\}$$

Définition 1.3. *[2]*

On définit les espaces de Hilbert :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad \text{telle que} \quad u' \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad \text{telle que} \quad u' \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad u\backslash_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \quad \text{telle que} \quad u'' \in L^2(\Omega)\}$$

1.2 Quelques inégalités utiles[2]

1.2.1 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\Re$, alors il existe une constante positive c (dépend de Ω)telle que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\|u'\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.2.2 Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors :

$$\forall(f,g) \in (L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)), \forall \varepsilon > 0, \int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega |f^p|dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}}\int_\Omega |g^q|dx.$$

Si $p=q=2$ on a :

$$\forall(f,g) \in (L^p(\Omega))^2, \forall \varepsilon > 0, \int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |f^2|dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |g^2|dx.$$

1.2.3 Inégalité de Hölder

Soient f et g deux fonctions respectivement dans $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Alors ,le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \Big(\int_\Omega |f|^2 dx)^{\frac{1}{p}}(\int_\Omega |g|^2 dx)^{\frac{1}{q}}$$

Remarque 1.2.1

L'inégalité de Cauchys-Chwartz est un cas particulier de l'inégalité de Holder dans le cas $p=q=2$.

1.3 Quelques théorèmes utiles

1.3.1 Théorème de Fubini[16]

Soit $\Delta = [a,b] \times [c,d] (a < b, c < d)$ un rectangle fermé du plan $\Re^2$ et $f : \Delta \longrightarrow \Re$ une fonction continue , alors f est intégrable sur Δ et on a :

$$\int\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

1.3.2 Théorème de Hille-Yosida[2]

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonctionnnelle $u \in C^1([0,+\infty[;H) \cap ([0,+\infty[;D(A))$ unique tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad\quad sur \quad [0,+\infty[, \\ \quad u(0) = u_0 \quad\quad (\text{donnée initiale}). \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = Au(t) \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

1.3.3 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.4. *[2] Soit $a : E \times E \to \Re$ une forme bilinéaire, on dit que :*

- *a est continue sur E s'il existe une constante c_a telle que*

$$\forall x, y \in E, \quad |a(x,y)| \leq c_a ||x||_E ||y||_E$$

- *a est cœrcive s'il existe une constante α_a telle que*

$$\forall x \in E \quad \alpha_a ||x||_E^2 \leq a(x,x)$$

- *a est symétrique si*

$$\forall y \in E \quad a(y,x) = a(x,y)$$

Théorème 1.1. *[2] Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H'$, il existe u unique tel que :*

$$a(u,v) = (f,v) \quad\quad\quad v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u minimise la fonctionnelle $J : H \to \Re$ définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u,v) - (f,v)$$

pour tout v de H.

Chapitre 2

Position du problème et sa régularité

Dans ce chapitre, on définit le problème, puis on utilise la théorie des semi-groupes pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de ce problème.

2.1 Position du problème

On considère le système des poutres de Timoshenko laminées avec glissement interfacial et mémoires infinies suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} + k(u-\varphi_x)_x + \displaystyle\int_0^{\infty} g_1(s)\varphi_{xx}(t-s)ds = 0 \\ \rho_2(\upsilon-u)_{tt} - b(\upsilon-u)_{xx} - k(u-\varphi_x) + \displaystyle\int_0^{\infty} g_2(s)(\upsilon(t-s)-u(t-s))_{xx}ds = 0 \\ \rho_2\upsilon_{tt} - b\upsilon_{xx} + 3k(u-\varphi_x) + 4\delta\upsilon + 4\gamma\upsilon_t = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = u(0,t) = u_x(1,t) = \upsilon(0,t) = \upsilon_x(1,t) = 0 \tag{2.2}$$

et les données initiales

$$\begin{cases} (\varphi(x,-t), u(x,-t), \upsilon(x,-t)) = (\varphi_0(x,t), u_0(x,t), \upsilon_0(x,t)), \\ (\varphi_t(x,0), u_t(x,0), \upsilon_t(x,0)) = (\varphi_1(x), u_1(x), \upsilon_1(x)), \end{cases} \tag{2.3}$$

On considére les hypothéses suivantes :

(H_1) *On suppose que la fonction $g_i : \Re_+ \to \Re_+$, $i = \overline{1,2}$ est dérivable, non croissante et intégrable sur $\mathcal{R}$ telle qu'il existe une constante positive k_0 satisfaisant, pour tout*

$$(\varphi, \psi, w) \in H_0^1(0,1) \times H_*^1(0,1) \times H_*^1(0,1)$$

$$k_0(||\varphi_x||^2+||\psi_x||^2+||w_x||^2)\leq 3k||\varphi_x+\psi-\upsilon||^2+3(b-g_2^0)||\psi_x||^2$$
$$+b||\upsilon_x||^2+4\delta||\upsilon||^2-3g_1^0||\varphi_x||^2 \tag{2.4}$$

De plus, supposons qu'il existe deux constantes positives β_1 *et* β_2 *telles que*

$$-\beta_i g_i(s)\leq g_i'(s),\quad s\in\Re_+,\quad i=\overline{1,2} \tag{2.5}$$

(H_2) *On suppose que* $g_1^0>0$, $g_2^0>0$ *et qu'il existe deux constantes positives* α_1 *et* α_2 *et une fonction strictement convexe croissante* $G:\Re_+\longrightarrow\Re_+$ *de class* $C^1(\Re_+)\cap C^2(0,\infty)$ *vérifiant :*

$$G(0)=G'(0)\,et\,\lim_{t\longrightarrow\infty}G'(t)=\infty \tag{2.6}$$

tel que, pour i=$\overline{1,2}$

$$g_i'(s)\leq-\alpha_i g_i(s),s\in\Re_+ \tag{2.7}$$

ou

$$\int_0^\infty\frac{g_i(s)}{G^{-1}(-g_i'(s))}ds+\sup_{s\in\Re_+}\frac{g_i(s)}{G^{-1}(-g_i'(s))}<\infty \tag{2.8}$$

On introduit la variable $\psi=\upsilon-u$, *et comme dans [4], on considère les variables* η *et* z *et leur données initiales par*

$$\begin{cases}\eta(x,t,s)=\varphi(x,t)-\varphi(x,t-s), & x\in(0,1),s,t\in\Re_+,\\ \eta_0(x,s)=\varphi_0(x,0)-\varphi_0(x,0), & x\in(0,1),s,t\in\Re_+,\\ z(x,t,s)=\psi(x,t)-\psi(x,t-s), & x\in(0,1),s,t\in\Re_+,\\ z_0(x,s)=\upsilon_0(x,0)-u_0(x,0)-(\upsilon_0(x,s)-u_0(x,s)), & x\in(0,1),s,t\in\Re_+.\end{cases}$$

Donc le système(2.1) *devient*

$$\begin{cases}\rho_1\varphi_{tt}-k(\varphi_x+\psi-\upsilon)_x+g_1^0\varphi_{xx}-\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(t-s)ds=0\\ \rho_2\psi_{tt}-(b-g_2^0)\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi-\upsilon)-\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds=0\\ \rho_2\upsilon_{tt}-b\upsilon_{xx}-3k(\varphi_x+\psi-\upsilon)+4\delta\upsilon+4\gamma\upsilon_t=0\end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$g_i^0=\int_0^\infty g_i(s)ds,\quad i=\overline{1,2}$$

avec les conditions aux limites

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi_x(1,t) = \upsilon(0,t) = \upsilon_x(1,t) = 0, \quad t \in \Re_+. \tag{2.10}$$

Les fonctionnels η et z satisfaisant

$$\begin{cases} \eta_t(x,t,s) + \eta_s(x,t,s) - \varphi_t(x,t) = 0, & x \in (0,1), s,t > 0, \\ z_t(x,t,s) + z_s(x,t,s) - \psi_t(x,t) = 0, & x \in (0,1), s,t > 0, \\ \eta(x,0,s) = \eta_0(x,s), z(x,0,s) = z_0(x,s), & x \in (0,1), s \in \Re_+, \\ \eta(x,t,0) = z(x,t,0) = z_x(1,t,s) = 0, & x \in (0,1), s,t \in \Re_+. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.2 L'existence et l'unicité de La solution

En utilisant la théorie des semi-groupes, on donne un résultats d'existence et d'unicité pour le système (2.9).

Soient

$$\begin{cases} \varphi_t = \tilde{\varphi}, \quad \psi_t = \tilde{\psi}, \quad \upsilon_t = \tilde{\upsilon}, \\ U = (\varphi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \psi, \upsilon, \tilde{\upsilon}, \eta, z), \\ U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \upsilon_0 - u_0, \upsilon_1 - u_1, \upsilon_0, \upsilon_1, \eta_0, z_0). \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors, le système peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} U_t - \mathcal{A}U = 0, \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.13}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi - \upsilon) - \dfrac{g_1^0}{\rho_1}\varphi_{xx} + \dfrac{1}{\rho_1}\displaystyle\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}ds \\ \tilde{\psi} \\ \dfrac{1}{\rho_2}[(b - g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi - \upsilon)] + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds \\ \tilde{\upsilon} \\ \dfrac{1}{\rho_2}[b\upsilon_{xx} + 3k(\varphi_x + \psi - \upsilon) - 4\delta\upsilon - 4\gamma\tilde{\upsilon}] \\ -\eta_s + \tilde{\varphi} \\ -z_s + \tilde{\psi} \end{pmatrix}$$

Considérons l'espace standard $L^2(0,1)$, son produit scalaire classique $\langle .,. \rangle$ et sa norme $\|\|$. On considère aussi les espaces de Hilbert suivants

$$L_{g_i} = \{\upsilon : \Re_+ \to \tilde{\mathcal{H}}_i, \int_0^\infty g_i(s)\|\upsilon_x\|^2 ds < \infty\},$$

associé au produit scalaire

$$\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle_{L_{gi}} = \int_0^\infty g_{i(s)} \langle \omega_x(s), \tilde{\omega}_x(s) \rangle ds,$$

tel que

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}_0^1(0,1), \tilde{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{H}_*^1(0,1)$$

et

$$\mathcal{H}_*^1(0,1) = \{h \in \mathcal{H}^1(0,1) : h(0) = 0\},$$

$\mathcal{H}$ l'espace d'énergie est donné par

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times [H_*^1(0,1) \times L^2(0,1)]^2 \times L_{g_1} \times L_{g_2},$$

pour tout
$U_1 = (\varphi_1, \tilde{\varphi}_1, \psi_1, \tilde{\psi}_1, \upsilon_1, \tilde{\upsilon}_1, \eta_1, z_1), U_2 = (\varphi_2, \tilde{\varphi}_2, \psi_2, \tilde{\psi}_2, \upsilon_2, \tilde{\upsilon}_2, \eta_2, z_2) \in \mathcal{H}$,

le produit intérieur défini par :

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} = & 3k\langle (\varphi_{1x} + \psi_1 - \upsilon_1), (\varphi_{2x} + \psi_2 - \upsilon_2) \rangle + 3(b - g_2^0)\langle \psi_{1x}, \psi_{1x} \rangle \\ & -3g_1^0 \langle \varphi_{1x}, \varphi_{2x} \rangle + b\langle \upsilon_{1x}, \upsilon_{2x} \rangle + 4\delta\langle \upsilon_1, \upsilon_2 \rangle + 3\rho_1 \langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle \\ & +3\rho_2 \langle \tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2 \rangle + \rho_2 \langle \tilde{\upsilon}_1, \tilde{\upsilon}_2 \rangle + 3\langle \eta_1, \eta_2 \rangle l_{g1} + 3\langle z_1, z_2 \rangle L_{g2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est donné par :

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}, AU \in \mathcal{H}, \psi_x(1) = \upsilon_x(1) = \eta(x,0) = z(x,0) = z_x(1,s) = 0\}.$$

où $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Ainsi nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.1. *Supposons que (H_1) est vérifie. Alors, pour tout $U_0 \in D(A)$, le système (2.13) admet une unique solution U vérifiant*

$$U \in C(\mathcal{R}_+ : \mathcal{H})$$

Si $U_0 \in D(A)$, Alors U satisfait

$$U \in C^1(\mathcal{R}_+; D(\mathcal{A})) \cap C(\mathcal{R}_+; D(\mathcal{A}))$$

Preuve. *Pour obtenir le résultat ci-dessus, on va prouver que $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone maximal. C'est à dire A est dissipatif et $I - A$ est surjectif.*

♦ *A dissipatif :* *En utilisant l'équation.(2.13), on obtient :*

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \quad t > 0, \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ -\dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi - \upsilon) - \dfrac{g_1^0}{\rho_1}\varphi_{xx} + \dfrac{1}{\rho_1}\displaystyle\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}ds \\ \tilde{\psi} \\ \dfrac{1}{\rho_2}[(b - g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi - \upsilon)] + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds \\ \tilde{\upsilon} \\ \dfrac{1}{\rho_2}[b\upsilon_{xx} + 3k(\varphi_x + \psi - \upsilon) - 4\delta\upsilon - 4\gamma\tilde{\upsilon}] \\ -\eta_s + \tilde{\varphi} \\ -z_s + \tilde{\psi} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \tilde{\varphi} \\ \psi \\ \tilde{\psi} \\ \upsilon \\ \tilde{\upsilon} \\ \eta \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= 3k\int_0^1 (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} - \tilde{\upsilon})(\varphi_x + \psi - \upsilon)dx + 3(b - g_2^0)\int_0^1 \tilde{\psi}_x\psi_x dx - 3g_1^0\int_0^1 \tilde{\varphi}_x\varphi_x dx \\ &+ b\int_0^1 \tilde{\upsilon}_x\upsilon_x dx + 4\delta\int_0^1 \tilde{\upsilon}\upsilon + 3\int_0^1 (k(\varphi_x + \psi - \upsilon)_x - g_1^0\varphi_{xx} + \int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}ds)\tilde{\varphi}dx \\ &+ 3\int_0^1 ((b - g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi - \upsilon) + \int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds)\tilde{\psi}dx + \int_0^1 (b\upsilon_{xx} + 3k(\varphi_x + \psi - \upsilon) \\ &- 4\delta\upsilon - 4\gamma\tilde{\upsilon})\tilde{\upsilon}dx + 3\int_0^1 (-\eta_s + \tilde{\varphi})\eta dx + 3\int_0^1 (-z_s + \tilde{\psi})z dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + \upsilon)_t(\varphi_x + \psi - \upsilon)dx + 3(b - g_2^0)\int_0^1 \psi_{tx}\psi_x dx \\ &- 3g_1^0\int_0^1 \varphi_{tx}\varphi_x dx + b\int_0^1 \upsilon_{tx}\upsilon_x dx + 4\delta\int_0^1 \upsilon_t\upsilon dx + 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)_x\varphi_t dx \\ &- 3g_1^0\int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx + 3\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}dsdx + 3(b - g_2)\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx \\ &- 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\psi_t dx + 3\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}dsdx + b\int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_t dx \\ &+ 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\upsilon_t dx - 4\delta\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx - 4\gamma\int_0^1 \upsilon_t^2 dx + 3\int_0^1 (-\eta_s + \varphi_t)\eta dx \\ &+ 3\int_0^1 (-z_s + \psi_t)z dx\end{aligned}$$
(2.15)

Grâce à la formule d'intégration par partie et les conditions au bord, on trouve

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 3k\int_0^1 (\varphi_x+\psi-\upsilon)_t(\varphi_x+\psi-\upsilon)dx - 3k\int_0^1 (\varphi_x+\psi-\upsilon)_t(\varphi_x+\psi-\upsilon)dx$$

$$-3(b-g_2^0)\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + 3(b-g_2^0)\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + 3g_1^0\int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx$$

$$-3g_1^0\int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx - b\int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_t dx + b\int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_t dx + 4\delta\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx - 4\delta\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx$$

$$-4\gamma\int_0^1 \upsilon_t^2 dx - 3\int_0^\infty g_1(s)\int_0^1 \eta_{tx}\eta_x dxds + 3\int_0^\infty g_1'(s)||\eta_x||^2 ds + 3\int_0^\infty g_1(s)\int_0^1 \eta_{tx}\eta_x dxds$$

$$+3\int_0^\infty g_2(s)\int_0^1 z_{tx}z_x dxds + 3\int_0^\infty g_2'(s)||z_x||^2 ds - 3\int_0^\infty g_2(s)\int_0^1 z_x z_{tx} dxds \tag{2.16}$$

Après la simplification, on trouve

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -4\gamma||\upsilon_t||^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g_1'(s)||\eta_x||^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^\infty g_2'(s)||z_x||^2 ds \leq 0. \tag{2.17}$$

par conséquent , l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.

♦ *<u>L'opérateur $(I-\mathcal{A})$est surjectif :</u> pour tout $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)^T \in \mathcal{H}$, on montre qu'il existe $U \in D(\mathcal{A})$tel que*

$$(I-\mathcal{A})U = F. \tag{2.18}$$

Ceci s'écrit en termes de composants, comme suit

$$\begin{cases} \varphi - \tilde{\varphi} = f_1 \in H_0^1(0,1) \\ \tilde{\varphi} - \dfrac{k}{\rho_1}(\varphi_x+\psi-\upsilon)_x - \dfrac{g_1^0}{\rho_1}\varphi_{xx} + \dfrac{1}{\rho_1}\displaystyle\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}ds = f_2 \in L_{g_1} \\ \psi - \tilde{\psi} = f_3 \in L^2(0,1) \\ \tilde{\psi} - \dfrac{1}{\rho_2}\left[(b-g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi-\upsilon)\right] + \dfrac{1}{\rho_2}\displaystyle\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds = f_4 \in L_{g_2} \\ \upsilon - \tilde{\upsilon} = f_5 \in H_*^1(0,1) \\ \tilde{\upsilon} - \dfrac{1}{\rho_2}\left[b\upsilon_x + 3k(\varphi_x+\psi-\upsilon) - 4\delta\upsilon - 4\gamma\tilde{\upsilon}\right] = f_6 \in L^2(0,1) \\ \eta + \eta_s - \tilde{\varphi} = f_7 \in H_*^1(0,1) \\ z + z_s - \tilde{\psi} = f_8 \in L^2(0,1) \end{cases} \tag{2.19}$$

premièrement, les première, troisième et cinquième équation de (2.19) *sont équivalentes à :*

$$\tilde{\varphi} = \varphi - f_1 \quad , \quad \tilde{\psi} = \psi - f_3 \quad et \quad \tilde{\upsilon} = \upsilon - f_5 \tag{2.20}$$

deuxièment, à partir de (2.19)*, nous voyons que les deux dernières équations de* (2.19) *se réduisent à*

$$\eta_s + \eta = \varphi + f_7 - f_1 \quad et \quad z_s + z = \psi + f_8 - f_3 \tag{2.21}$$

En intégrant par rapport à s et notant que η et z doivent satisfaire $\eta(0) = z(0) = 0$, On a

$$\begin{array}{c} \eta(s) = (1 - \exp(-s))(\varphi - f_1) + \displaystyle\int_0^s \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau \\ et \\ z(s) = (1 - \exp(-s))(\psi - f_3) + \displaystyle\int_0^s \exp(\tau - s) f_8(\tau) d\tau \end{array} \tag{2.22}$$

Troisièment, en utilisant (2.20) *et* (2.22) *nous trouvons que les deuxièmes, quatrièmes ét sixième équations de* (2.19)*, sont réduits à*

$$\begin{cases} \rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi - \upsilon)_x + \tilde{g}_1\varphi_{xx} = \rho_1(f_1 + f_2) \\ + \displaystyle\int_0^\infty g_1(s)((1 - \exp(-s))f_1 + \int_0^\infty \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau)_{xx} ds \\ \rho_2\psi - (b - \tilde{g}_2)\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi - \upsilon) = \rho_2(f_3 + f_4) \\ + \displaystyle\int_0^\infty g_2(s)((1 - \exp(-s))f_3 + \int_0^\infty \exp(\tau - s) f_8(\tau) d\tau)_{xx} ds \\ (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta)\upsilon - b\upsilon_{xx} - 3k(\varphi_x + \psi - \upsilon) = (\rho_2 + 4\gamma) f_5 + \rho_2 f_6 \end{cases} \tag{2.23}$$

où

$$\tilde{g}_i = \int_0^\infty \exp(-s) g_i(s) ds \quad , i = \overline{1,2}$$

$$\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi - \upsilon)_x + \tilde{g}_1\varphi_{xx} = h_1 \in H_0^1(0,1) \tag{2.24}$$

$$\rho_2\psi - (b - \tilde{g}_2)\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi - \upsilon) = h_2 \in H_*^1(0,1) \tag{2.25}$$

$$(\rho_2 + 4\gamma + 4\delta)\upsilon - b\upsilon_{xx} - 3k(\varphi_x + \psi - \upsilon) = h_3 \in H_*^1(0,1) \tag{2.26}$$

On pose

$$h_1 = \rho_1(f_1 + f_2) + \int_0^\infty g_1(s)((1 - \exp(-s))f_1 + \int_0^\infty \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau)_{xx} ds$$

$$h_2 = \rho_2(f_3 + f_4) + \int_0^\infty g_2(s)((1 - \exp(-s))f_3 + \int_0^\infty \exp(\tau - s) f_8(\tau) d\tau)_{xx} ds$$

$$h_3 = (\rho_2 + 4\gamma) f_5 + \rho_2 f_6$$

On définit l'espace $W = H_0^1(0,1) \times H_*^1(0,1) \times H_*^1(0,1)$

En multipliant les équations (2.24) ,(2.25) *et* (2.26) *par des fonctions* $\varphi_1 \in H_0^1(0,1)$, $\psi_1 \in H_*^1(0,1)$, $\upsilon_1 \in H_*^1(0,1)$ *réspectivement puis intégrant par parties sur* $[0,1]$ *on obtient*

$$3\rho_1 \int_0^1 \varphi_1 \varphi dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)_x \varphi_1 dx + 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_1 dx = 3 \int_0^1 \varphi_1 h_1 dx$$

$$3\rho_2 \int_0^1 \psi \psi_1 dx - 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_{xx}\psi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\psi_1 dx = 3 \int_0^1 \psi_1 h_2 dx$$

$$(\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon \upsilon_1 dx - b \int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_1 dx - 3k \int_0^1 \varphi_x + \psi - \upsilon)\upsilon_1 dx = \int_0^1 h_3 \upsilon_1 dx$$

Ce qui implique

$$3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\varphi_{1x} dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx = 3 \int_0^1 h_1 \varphi_1 dx$$

$$3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\psi_1 dx = 3 \int_0^1 h_2 \psi_1 dx$$

$$(\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon\upsilon_1 dx + b \int_0^1 \upsilon_x \upsilon_{1x} dx - 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\upsilon_1 dx = \int_0^1 h_3 \upsilon_1 dx$$

additionnons les trois équation on obtient

$$3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)(\varphi_{1x} + \psi_1 - \upsilon_1) dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx$$
$$+3(b-\tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon\upsilon_1 dx + b \int_0^1 \upsilon_x \upsilon_{1x} dx = \int_0^1 (3h_1\varphi_1 + 3h_2\psi_1 + h_3\upsilon_1) dx$$

Pour $u = (\varphi, \psi, \upsilon)$ *et* $u_1 = (\varphi_1, \psi_1, \upsilon_1)$ *on définit sur* W *une forme bilinéair* $a(.,.)$ *est une forme linéaire* $l(.)$ *par*

$$a(u, u_1) = 3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)(\varphi_{1x} + \psi_1 - \upsilon_1) dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx$$
$$+ 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x \psi_{1x} dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon\upsilon_1 dx + b \int_0^1 \upsilon_x \upsilon_{1x} dx$$

$$l(u_1) = \int_0^1 (3h_1\varphi_1 + 3h_2\psi_1 + h_3\upsilon_1) dx$$

0n applique le théoréme de Lax-Milgram, sur l'espace W pour la forme bilinéaire $a(u,u_1)$ et la forme linéaire $l(u_1)$

1- *Continuité de a(.,.)*

$$|a(u,u_1)| = |3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)(\varphi_{1x} + \psi_1 - \upsilon_1)dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x\varphi_{1x}dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_1 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x\psi_{1x}dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon\upsilon_1 dx + b \int_0^1 \upsilon_x\upsilon_{1x}dx|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz on obtient

$$|a(u,u_1)| \leq 3\rho_1||\varphi||_{L_2}||\varphi_1||_{L_2} + 3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||_{L_2}||\varphi_{1x} + \psi_1 - \upsilon_1||_{L_2} - 3\tilde{g}_1||\varphi_x||_{L_2}||\varphi_{1x}||_{L_2} + 3\rho_2||\psi||_{L_2}||\psi_1||_{L_2} + 3(b - \tilde{g}_2)||\psi_x||_{L_2}||\psi_{1x}||_{L_2} + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta)||\upsilon||_{L_2}||\upsilon_1||_{L_2} + b||\upsilon_x||_{L_2}||\upsilon_{1x}||_{L_2}$$

Alors, nous prouvons facilement prouver que :

$$|a((\varphi,\psi,\upsilon),(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1))| \leq C_1||(\varphi,\psi,\upsilon||_W)||(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1||_W)$$

Donc a(u,u_1) est continue

2- *Coercivité de a(.,.)*

$$|a(u,u)| = 3\rho_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + 3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)^2 dx - 3\tilde{g}_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi^2 dx + 3(b - \tilde{g}_2) \int_0^1 \psi_x^2 dx + (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta) \int_0^1 \upsilon^2 dx + b \int_0^1 \upsilon_x^2 dx$$

$$a((\varphi,\psi,\upsilon),(\varphi,\psi,\upsilon)) \geqslant C_2||(\varphi,\psi,\upsilon)||_W^2$$

Où

$$C_2 = \min\{3\rho_1, 3k, 3\tilde{g}_1, 3\rho_2, 3(b - \tilde{g}_2), (\rho_2 + 4\gamma + 4\delta), b\}$$

Donc a(u,u) est coercive

3 - *Continuité de l*

$$|l(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1))| = |3\int_0^1 h_1\varphi_1 dx + 3\int_0^1 h_2\psi_1 dx + \int_0^1 h_3\upsilon_1 dx|$$

$$|l(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1)| \leq 3||h_1||_{L_2}||\varphi_1||_{L_2} + 3||h_2||_{L_2}||\psi_1||_{L_2} + ||h_3||_{L_2}||\upsilon_1||_{L_2}$$

$$|l(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1)| \leq \max(3||h_1||_{L_2}, 3||h_2||_{L_2}, ||h_3||_{L_2})(||\varphi_1||_{L_2} + ||\psi_1||_{L_2} + ||\upsilon_1||_{L_2})$$

Où

$$C_3 = \max(3||h_1||_{L_2}, 3||h_2||_{L_2}, ||h_3||_{L_2})$$

$$|l(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1)| \leq C_3(||\varphi_1||_{H_0^1} + ||\psi_1||_{H_*^1} + ||\upsilon_1||_{H_*^1})$$

$$|l(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1)| \leq C_3||(\varphi_1,\psi_1,\upsilon_1)||_W, \quad C_3 > 0$$

$$|l(u_1)| \leq C_3||u_1||_W$$

Donc $l(.)$ est continue

a(.,.) est bilinéaire, continue et coercive sur W, et $l(.)$ est linéaire et continue sur W. Alors d'après le théorème de Lax-Miligram, il existe une solution unique $(\varphi,\psi,\upsilon) \in W = H_0^1(0,1) \times H_*^1(0,1) \times H_*^1(0,1)$ telle que

$$a(u,u_1) = l(u_1), \quad \forall u_1 \in W$$

On voit que, si (2.23) admet une solution satisfaisant la régularité requise dans $D(A)$, alors (2.20) implique que $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ et $\tilde{\upsilon}$ existe et satisfait la régularité requise dans $D(A)$.

Maintenant on va démontrer que η et z existent et satifait η_s, $\eta \in L_{g1}$ et $z_s, z \in L_{g2}$.

D'aprés (2.19), on remarque qu'il suffit de prouver que $\eta \in L_{g1}$ et $z \in L_{g2}$: nous avons $s \longrightarrow (1-\exp(-s))(\varphi - f_1) \in L_{g1}$ et $s \longrightarrow (1-\exp(-s))(\psi - f_3) \in L_{g2}$ parce que $\varphi, f_1 \in H_0^1(0.1)$ et $\psi, f_3 \in H_*^1(0.1)$ d'autre part , En utilisant le théorème de fubini et l'inégalité de Holder, on trouve :

$$\int_0^1 \int_0^\infty g_1(s)|(\int_0^s \exp(\tau - s) f_7(\tau) d\tau)_x|^2 ds dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty \exp(-2s)g_1(s)(\int_0^s \exp(\tau)d\tau) \int_0^s \exp(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 d\tau ds \\
&\leq \int_0^\infty \exp(-s)(1-\exp(-s))g_1(s) \int_0^s \exp(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 d\tau ds \\
&\leq \int_0^\infty \exp(-s)g_1(s) \int_0^s \exp(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 d\tau ds \\
&\leq \int_0^\infty \exp(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 \int_\tau^\infty \exp(-s)g_1(s) ds d\tau \\
&\leq \int_0^\infty exp(\tau)g_1(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 \int_\tau^\infty \exp(-s) ds d\tau \\
&\leq \int_0^\infty g_1(\tau)||f_{7x}(\tau)||^2 d\tau \\
&\leq ||f_7||^2_{Lg_1} < \infty
\end{aligned}
$$

$$s \longrightarrow \int_0^s \exp(\tau - s)f_7(\tau)d\tau \in L_{g_1}.$$

De même on obtient

$$s \longrightarrow \int_0^s \exp(\tau - s)f_8(\tau)d\tau \in L_{g_2}.$$

Donc

$$\eta \in L_{g_1} \quad et \quad z \in L_{g_2}$$

Finalement, $\exists(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}, \upsilon, \tilde{\upsilon}, \eta, z)^T \in D(A)$ *qui vérifie* $AU = F$ *pour tout* $F \in H$

Donc l'operateur $I - A$ *est surjectif*

$I - A$ *est surjectif et* A *est dissipatif . Alors par le théoréme de Hille-Yosida ([2]) nous obtenons le résultat du théorème 2.1.*

Chapitre 3

Etude de la stabilité

Pour l'étude de la stabilité du système (2.9), on va utiliser la méthode énergétique qui se base sur la construction d'une fonction équivalente à l'énergie et qu'on appelle fonctionlle de Lyapunov.

3.1 L'énergie du Système

Lemme 3.1

L'énergie définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}(3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 - 3g_1^0||\varphi_x||^2 + b||\upsilon_x||^2 + 4\delta||\upsilon||^2) + \frac{1}{2}(3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho||\upsilon_t||^2 + 3\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2)ds) \quad (3.1)$$

satisfait

$$E'(t) = -4\gamma||\upsilon_t||^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty (g_1'(s)||\eta_x||^2 + g_2'(s)||z_x||^2)ds \leq 0 \quad (3.2)$$

Preuve 3.1

Multipliant la première équation du système (2.9) *par* $3\varphi_t$ *et intégrant sur*(0.1)

$$3\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)_x \varphi_t dx + g_1^0 \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx - 3\int_0^1 \varphi_t \int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(t-s)dsdx = 0 \quad (1)$$

Multipliant la deuxième équation du système (2.9) *par* $3\psi_t$ *et intégrant sur*(0.1)

$$3\rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - 3(b - g_2^0)\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\psi_t dx - 3\int_0^1 \psi_t \int_0^\infty g_2(s) z_{xx} dsdx = 0 \quad (2)$$

Multipliant la troisième équation du système (2.9) *par* υ_t *et intégrant sur*(0.1)

$$\rho_2\int_0^1 \upsilon_{tt}\upsilon_t dx - b\int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_t dx - 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)\upsilon_t dx + 4\delta\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx + 4\gamma\int_0^1 \upsilon_t^2 = 0 \qquad (3)$$

la somme de (1), (2) *et* (3) *nous donne :*

$$3\rho_1\int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t - 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)_x + g_1^0\int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t - 3\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}(t-s)ds$$

$$+3\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\psi_t dx - 3(b-g_2^0)\int_0^1 \psi_{xx}\psi_t dx + 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)\psi_t dx$$

$$-3\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}dsdx + \rho_2\int_0^1 \upsilon_{tt}\upsilon_t dx - b\int_0^1 \upsilon_{xx}\upsilon_t dx$$

$$-3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)\upsilon_t dx + 4\delta\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx + 4\gamma\int_0^1 \upsilon_t^2 dx = 0$$

on a

$$\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)_x\varphi_t dx = -\int_0^1 \varphi_{tx}(\varphi_x+\psi-\upsilon)dx$$

$$\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx}dsdx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^\infty g_1(s)\eta_x^2(s)dsdx - \int_0^1\int_0^\infty g_1'(s)\eta_x^2(s)dsdx$$

$$\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}dsdx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^\infty g_2(s)z_x^2dsdx + \int_0^1\int_0^\infty g_2'(s)z_x^2dsdx$$

En utilisant l'intégration par partie et les propriétes de dérivations, on trouve :

$$\frac{3}{2}\rho_1\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_t^2dx + \frac{3}{2}k\frac{d}{dt}\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)^2dx - \frac{3}{2}g_1^0\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi_x^2dx + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^\infty g_1(s)\eta_x^2dsdx$$

$$-3\int_0^1\int_0^\infty g_1'(s)\eta_x^2dsdx + \frac{3}{2}\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_t^2dx + \frac{3}{2}(b-g_2^0)\frac{d}{dt}\int_0^1 \psi_x^2dx$$

$$+\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^\infty g_2(s)z_x^2dsdx - 3\int_0^1\int_0^\infty g_2'(s)z_x^2dsdx + \frac{1}{2}\rho_2\frac{d}{dt}\int_0^1 \upsilon_t^2dx$$

$$+\frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \upsilon_x^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}4\delta\int_0^1 \upsilon^2 + 4\gamma\int_0^1 \upsilon_t^2dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[3\rho_1\int_0^1 \varphi_t^2dx + k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)^2dx - 3g_1^0\int_0^1 \varphi_x^2dx$$

$$+3\int_0^1\int_0^\infty g_1(s)\eta_x^2dsdx+3\rho_2\int_0^1\psi_t^2dx+(b-g_2^0)\int_0^1\psi_x^2dx$$

$$+3\int_0^1\int_0^\infty g_2(s)z_x^2dsdx+\rho_2\int_0^1\upsilon_t^2dx+b\int_0^1\upsilon_x^2dx+4\delta\int_0^1\upsilon_t^2dx\,]$$

$$=-4\gamma\int_0^1\upsilon_t^2dx+3\int_0^1\left(\int_0^\infty g_1'(s)\eta_x^2ds+\int_0^\infty g_2'(s)z_x^2ds\right)dx$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\,[3\rho_1||\varphi_t||^2+k||(\varphi_x+\psi-\upsilon)||^2-3g_1^0||\varphi_x||^2$$

$$+3\rho_2|||\psi_t^2||+3(b-g_2^0))||\psi_x||^2+3\int_0^\infty(g_1(s)||\eta_x||^2+g_2(s)||z_x||^2ds)$$

$$+\rho_2||\upsilon_t||^2+b||\upsilon_x||^2+4\delta||\upsilon_t||^2\,]$$

$$=-4\gamma\int_0^1\upsilon_t^2+3\int_0^\infty(g_1'(s)||\eta_x||^2ds+g_2'(s)||z_x||^2ds).$$

Donc $E'(t)=-4\gamma\int_0^1\upsilon_t^2+3\int_0^\infty(g_1'(s)||\eta_x||^2ds+g_2'(s)||z_x||^2ds)$

Et comme g_1 *et* g_2 *sont deux fonctions décroissantes. Alors* $g_1'<0$ *et* $g_2'<0$ *et nous avons aussi* $\gamma>0$ *donc* $E'(t)\leq 0$.

Ainsi l'énergie est décroissante et le système est dissipatif.

3.2 Les fonctionnelles de La fonction de Lyapaunov

Nous considérons les données suivantes :

$$\partial_t\int_0^\infty g_1(s)\eta ds=\partial_t\int_{-\infty}^t(\varphi(t)-\varphi(s))ds$$

$$=\int_{-\infty}^t g_1'(t-s)(\varphi(t)-\varphi(s))ds+\left(\int_{-\infty}^t g_1(t-s)ds\right)\varphi_t$$

C'est

$$\partial_t\int_0^\infty g_1(s)\eta ds=\int_0^\infty g_1'(s)\eta ds+g_1^0\varphi_t \tag{3.3}$$

de même, nous avons

$$\partial_t \int_0^\infty g_2(s) z ds = \int_0^\infty g_2'(s) z ds + g_2^0 \psi_t \tag{3.4}$$

Utilisant les inégalités de Young et de Hölder. Alors pour tout $\lambda > 0$, il existe $C_\lambda > 0$ tel que, pour tout $\upsilon \in L^2(0,1)$ et $\hat{\eta} \in \{\eta, \eta_x\}$ dans le cas $i = 1$, et $\hat{\eta} \in \{z, z_x\}$ dans le cas $i = 2$, on obtient les inégalités suivantes :

$$|\int_0^1 \upsilon \int_0^\infty g_i(s)\tilde{\eta} ds dx| \leq \lambda ||\upsilon||^2 + C_\lambda \int_0^\infty g_i(s)||\tilde{\eta}||^2 ds \tag{3.5}$$

$$|\int_0^1 \upsilon \int_0^\infty g_i'(s)\tilde{\eta} ds dx| \leq \lambda ||\upsilon||^2 - C_\lambda \int_0^\infty g_i'(s)||\tilde{\eta}||^2 ds \tag{3.6}$$

Lemme 3.3

La dérivée de la fonctionnelle

$$I_1(t) = -3\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx \tag{3.7}$$

Satisfait, pour toute $\delta_0 > 0$, $C_{\delta_0} > 0$ l'estimation suivante :

$$I_1'(t) \leq -3\rho_1(g_1^0 - \delta_0)||\varphi_t||^2 + \delta_0(||\varphi_x||^2 + ||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2) + C_{\delta_0} \int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds \tag{3.8}$$

Preuve 3.3

$$\frac{d}{dt}(I_1(t)) = \frac{d}{dt}\left(-3\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx\right)$$

$$= -3\rho_1 \left(\int_0^1 \varphi_{tt} \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx\right) - 3\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \partial_t \left(\int_0^\infty g_1(s)\eta ds\right) dx$$

En utilisant la première équation du système(2.9)

$$\varphi_{tt} = \frac{1}{\rho_1}(k(\varphi_x + \psi - \upsilon)_x - g_1^0 \varphi_{xx} + (\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx} ds dx),$$

en intégrant par partie et en prenant les condition aux limites et la relation (3.3), *on trouve*

$$I_1'(t) = -3k \int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)_x \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx + 3g_1^0 \int_0^1 \varphi_{xx} \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx$$
$$-3\int_0^1 (\int_0^\infty g_1(s)\eta_{xx} ds \int_0^\infty g_1(s)\eta ds) dx - 3\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \partial_t (\int_0^\infty g_1(s)\eta ds) dx$$

$$I_1'(t) = 3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\int_0^\infty g_1(s)\eta_x dsdx - 3g_1^0\int_0^1 \varphi_x\int_0^\infty g(s)\eta_x dsdx$$
$$+ 3\int_0^1 (\int_0^\infty g_1(s)\eta_x ds)^2 dx - 3\rho_1\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1'(s)\eta dsdx - 3\rho_1 g_2^0\int_0^1 \varphi_t^2 dx$$

donc

$$I_1'(t) = -3\rho_1 g_1^0||\varphi_t||^2 + 3||\int_0^\infty g_1(s)\eta_x ds||^2 - 3\rho_1\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1'(s)\eta dsdx$$
$$+3k\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\int_0^\infty g_1(s)\eta_x dsdx - 3g_1^0\int_0^1 \varphi_x\int_0^\infty g_1(s)\eta_x dsdx$$

appliquer (3.5), (3.6) aux trois derniers termes de $I_1'(t)$

$$\int_0^1 \varphi_t\int_0^\infty g_1'(s)\eta dsdx \leq \lambda||\varphi_t||^2 - C_\lambda\int_0^\infty g_1'(s)||\eta||^2 ds$$
$$\int_0^1 \varphi_x\int_0^\infty g_1(s)\eta_x dsdx \leq \lambda||\varphi_x||^2 + C_\lambda\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds$$
$$\int_0^1 (\varphi_x + \psi - \upsilon)\int_0^\infty g_1(s)\eta_x dsdx \leq \lambda||(\varphi_x + \psi - \upsilon)||^2 + C_\lambda\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds$$

Et en utilisant l'inégalité de poincaré pour η et l'inégalité de Hölder pour estimer son second terme, et (2.5) pour estimer $-g_1'$ par $\beta_1 g_1$, on obtient (3.8).

Lemme 3.4

La dérivée de la fonctionnelle

$$I_2(t) = -3\rho_2\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2(s)zdsdx \tag{3.9}$$

Satisfait, pour toute $\delta_0 > 0$, $C_{\delta_0} > 0$ l'estimation suivante :

$$I_2'(t) \leq -3\rho_2(g_2^0 - \delta_0)||\psi_t||^2 + \delta_0(||\psi_x||^2 + ||\varphi_x||^2 + ||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2) + C_{\delta_0}\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds \tag{3.10}$$

Preuve 3.4

$$\frac{d}{dt}(I_2(t)) = \frac{d}{dt}(-3\rho_2\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2(s)zdsdx)$$

En utilisant la deuxième équation du système (2.9) et la relation(3.4)

$$I_2'(t) = -3\rho_2\int_0^1 \psi_{tt}\int_0^\infty g_2(s)zdsdx - 3\rho_2\int_0^1 \psi_t\int_0^\infty g_2'(s)zdsdx - 3\rho_2 g_2^0\int_0^1 \psi_t^2 dx$$

$$\psi_{tt} = \frac{1}{\rho_2}\left[(b-g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi-\upsilon) + \int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds\right]$$

$$I_2'(t) = -3\int_0^1((b-g_2^0)\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi-\upsilon) + \int_0^\infty g_2(s)z_{xx}dsdx)(\int_0^\infty g_2(s)zdsdx)$$
$$-3\rho_2\int_0^1\psi_t\int_0^\infty g_2'(s)zdsdx - 3\rho_2 g_2^0\int_0^1\psi_t^2dx$$

$$I_2'(t) = -3(b-g_2^0)\int_0^1\psi_{xx}\int_0^\infty g_2(s)zdsdx + 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi+\upsilon)\int_0^\infty g_2(s)zdsdx$$
$$-3\int_0^1\int_0^\infty g_2(s)z_{xx}ds\int_0^\infty g_2(s)zdsdx - 3\rho_2\int_0^1\psi_t\int_0^\infty g_2'(s)zdsdx - 3\rho_2 g_2^0\int_0^1\psi_t^2dx$$

En utilisant l'intégration par partie :

$$I_2'(t) = 3(b-g_2^0)\int_0^1\psi_x\int_0^\infty g_2(s)z_xdsdx + 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)\int_0^\infty g_(s)zdsdx$$
$$+3\int_0^1(g_2(s)z_xds)^2dx - 3\rho_2\int_0^1\psi_t\int_0^\infty g_2'(s)zdsdx - 3\rho_2 g_2^0\int_0^1\psi_t^2dx$$

Alors

$$I_2'(t) = 3(b-g_2^0)\int_0^1\psi_x\int_0^\infty g_2(s)z_xdsdx + 3k\int_0^1(\varphi_x+\psi-\upsilon)\int_0^\infty g_2(s)zdsdx$$
$$+||\int_0^\infty g_2(s)z_xds||^2 - 3\rho_2\int_0^1\psi_t\int_0^\infty g_2'(s)zdsdx - 3\rho_2 g_2^0||\psi_t||^2$$

de même, appliquant (3.5) (3.6), *on obtient* (3.10)

Lemme 3.5

La dérivéee de la fonctionnelle

$$I_3(t) = \int_0^1(3\rho_1\varphi\varphi_t + 3\rho_2\psi\psi_t + \rho_2\upsilon\upsilon_t)dx \tag{3.11}$$

Satisfait, pour tout $\delta_0 > 0$, $C_{\delta_0} > 0$ *l'éstimation suivante*

$$\begin{aligned} I_3'(t) \le& -3k||\varphi_x+\psi-\upsilon||^2 + 3(g_1^0+\delta_0)||\varphi_x||^2 \\ &-(b-g_2^0-\delta_0)||\psi_x||^2 - (b-\delta_0)||\upsilon_x||^2 - 4\delta||\upsilon||^2 + 3\rho_2||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 \\ &+C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty(g_1(s)\eta_x||^2 + g_2(s)_x||z_x||^2)ds \end{aligned} \tag{3.12}$$

Preuve 3.5

$$\frac{d}{dt}(I_3(t)) = \frac{d}{dt}(\int_0^1 (3\rho_1\varphi\varphi_t + 3\rho_2\psi\psi_t + \rho_2\upsilon\upsilon_t)dx$$

$$I_3'(t) = 3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_t dx + 3\rho_1 \int_0^1 \varphi\varphi_{tt} dx + 3\rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx$$
$$+ 3\rho_2 \int_0^1 \psi\psi_{tt} dx + \rho_2 \int_0^1 \upsilon_t^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \upsilon\upsilon_{tt} dx$$

$$I_3'(t) = 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 + \rho_2||\upsilon_t||^2 - 3k\int_0^1 \varphi_x(\varphi_x + \psi - \upsilon)dx + 3g_1^0||\varphi_x||^2$$
$$- 3\int_0^1 \varphi_x \int_0^\infty g_1(s)\eta_x ds dx - 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 + 3k\int_0^1 \psi(\varphi_x + \psi - \upsilon)dx$$
$$- 3\int_0^1 \psi_x \int_0^\infty g_2(s)z_x ds dx - b||\upsilon_x||^2 + 3k\int_0^1 \upsilon(\varphi_x + \psi - \upsilon)dx + 4\delta||\upsilon||^2 + 4\gamma\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx$$

$$I_3'(t) = -3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3g_1^0||\varphi_x||^2 - 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 - b||\upsilon_x||^2 + 4\delta||\upsilon||^2$$
$$+ \rho_2||\upsilon_t||^2 + 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 - 4\gamma\int_0^1 \upsilon\upsilon_t dx - 3\int_0^1 \varphi_x \int_0^\infty g_1(s)\eta_x dx ds$$
$$- 3\int_0^1 \psi_x \int_0^\infty g_2(s)z_x ds dx$$

Appliquant les inégalités de Young et de Poincaré et r (3.5) *pour estimer les trois dernières intégrales de cette égalité*

De l'inégalité de Young on arrive à

$$\int_0^1 |\upsilon\upsilon_t|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |\upsilon|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 |\upsilon_t|^2 dx \qquad (*),$$

de l'inégalté de Poincaré on a

$$\int_0^1 |\upsilon|^2 dx \leq C_\rho \int_0^1 |\upsilon_x|^2 dx$$

donc la relation $(*)$ *devient :*

$$\int_0^1 |\upsilon\upsilon_t|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}C_\rho \int_0^1 |\upsilon_x|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 |\upsilon_t|^2 dx.$$

Et ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3'(t) \leq & -3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3(g_1^0 - \lambda)||\varphi_x||^2 - 3(b - g_2^0 + \lambda)||\psi_x||^2 - (b - 2\gamma\varepsilon C_\rho)||\upsilon_x||^2 \\ & -4\delta||\upsilon||^2 + 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 + (\rho_2 + \frac{2\gamma}{\epsilon})||\upsilon_t||^2 - 3C_\lambda \int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2 ds, \end{aligned}$$

telles que $\delta_0 = -\lambda$ *ou* $\delta_0 = 2\gamma\varepsilon C_\rho$, $C_{\delta 0} = \rho_2 + \dfrac{2\gamma}{\varepsilon}$ *ou* $C_{\delta_0} = -3C_\lambda$.

C'est à dire

$$I_3'(t) \leq -3k||\varphi_x+\psi-\upsilon||^2+3(g_1^0-\lambda)||\varphi_x||^2-3(b-g_2^0+\lambda)||\psi_x||^2-4\delta||\upsilon||^2+3\rho_1||\varphi_t||^2$$
$$+3\rho_2||\psi_t||^2+C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2-(b-\delta_0)||\upsilon_x||^2+C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2+g_2(s)||z_x||^2)ds$$

3.3 Résultat de Stabilité

Le résultat principal de ce mémoire est donné par :

Théorème 3.1. *Supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vraies. Soit* $U_0 \in H$*, tel que, pour tout* $i = \overline{1,2}$, (2.7) *est vraie.*

ou

$\sup_{t\in\Re_+}\int_t^\infty \frac{g_i(s)}{G^{-1}(g_i'(s))}||f_{0x}(.,s-t)||^2ds < \infty,$ *où* $f_0 = \varphi_0$ *si* $i = 1$*, et* $f_0 = \upsilon_0 - u_0$ *si* i*=2.*
Alors ils existent deux constantes positives C_1 *et* C_2 *telles que la solution* U *de* (2.13) *satisfait*

$$E(t) \leq C_2 G_1^{-1}(C_1 t), \qquad t \in \Re_+, \tag{3.13}$$

où

$$G_1 = \int_s^1 \frac{1}{G_0(\tau)}d\tau \quad et \quad G_0(s) = \begin{cases} s & si\ (2.7)\ et\ vraie\ pour\ tout\ i == \overline{1,2} \\ sG'(s) & sinon. \end{cases}$$

Preuve du théorème 3.1

Lemme 3.6

Soit la fonctionnelle F définie par

$$F(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$$

satisfait : 1)

$$F'(t) \leq -E(t) + C||\upsilon_t||^2 + C\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2ds + C\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2ds \tag{3.14}$$

2) il existe une constante positive μ_0 tel que

$$-\mu_0 E \leq F \leq \mu_0 E. \tag{3.15}$$

Preuve 3.6

1) En ajoutant (3.9), (3.11) et (3.13) et en utilisant la définition de E nous avons :

$$F'(t) = -3\rho_1 g_1^0||\varphi_t||^2 + 3\rho_1\delta_0||\varphi_t||^2 + \delta_0||\varphi_x||^2 + \delta_0||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds$$
$$- 3\rho_2 g_2^0||\psi_t||^2 + 3\rho_2\delta_0||\psi_t||^2 + \delta_0||\psi_x||^2 + \delta_0||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds$$
$$- 3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3g_1^0||\varphi_x||^2 + 3\delta_0||\varphi_x||^2 - 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 + 3\delta_0||\psi_x||^2 - b||\upsilon_x||^2$$
$$+ \delta_0||\upsilon_x||^2 - 4\delta||\upsilon||^2 + 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 + C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2 ds)$$

$$F'(t) = -(3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 - 3g_1^0||\varphi_x||^2 + b||\upsilon_x||^2 + 4\delta||\upsilon||^2)$$
$$+ \delta_0(2||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 4||\varphi_x||^2 + 4||\psi_x||^2 + ||\upsilon_x||^2 + 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2)$$
$$+ 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 + C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2)ds$$
$vaonpose\mathrm{C}_{\delta_0} = 3$ et on a pose $C_{\delta_0} = \rho_2 + C_{\delta_0}$

$$F'(t) = -(3k||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 3(b - g_2^0)||\psi_x||^2 - 3g_1^0||\varphi_x||^2 + b||\upsilon_x||^2 + 4\delta||\upsilon||^2)$$
$$+ 3\rho_1||\varphi_t|| + 3\rho_2||\psi_t|| + \rho_2||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2)ds$$
$$+ \delta_0(2||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 4||\varphi_x||^2 + 4||\psi_x||^2 + ||\upsilon_x||^2 + 3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2)$$
$$+ C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2)ds$$

donc

$$F'(t) \leq -2E(t) + \delta_0(2||\varphi_x + \psi - \upsilon||^2 + 4||\varphi_x||^2 + 4||\psi_x||^2 + ||\upsilon_x||^2$$
$$+3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2) + C_{\delta_0}||\upsilon_t||^2 + C_{\delta_0}\int_0^\infty (g_1(s)||\eta_x||^2 + g_2(s)||z_x||^2)ds$$

2)

$$F(t) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$$

$$|F(t)| = |I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)|$$

$$|F(t)| \leq |I_1(t)| + |I_2(t)| + |I_3(t)|$$

Substituant les valeurs de I_1, I_2, I_3

$$|F(t)| \leq |-3\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \int_0^\infty g_1(s)\eta ds dx| + |-3\rho_2 \int_0^1 \psi_t \int_0^\infty g_2(s) z ds dx| \\ +|\int_0^1 (3\rho_1 \varphi\varphi_t + 3\rho_2 \psi\psi_t + \rho_2 \upsilon\upsilon_t)dx|$$

$$|F(t)| \leq 3\rho_1 \int_0^1 |\varphi_t \int_0^\infty g_1(s)\eta ds| dx + 3\rho_2 \int_0^1 |\psi_t \int_0^\infty g_2(s) z ds| dx \\ +3\rho_1 \int_0^1 |\varphi\varphi_t| dx + 3\rho_2 \int_0^1 |\psi\psi_t| dx + \rho_2 \int_0^1 |\upsilon\upsilon_t| dx$$

à partir des inégalités de Young et de Poincaré et de la relation (2.4)

$$|F(t)| \leq \frac{3\rho_1\varepsilon}{2}||\varphi_t||^2 + \frac{3\rho_1 C_\rho}{2\varepsilon} \int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds + \frac{3\rho_2\varepsilon}{2}||\psi_t||^2 + \frac{3\rho_2}{2\varepsilon} C_\rho \int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds \\ + \frac{3\rho_1}{2}||\varphi_x||^2 + \frac{3\rho_2}{2}||\psi_x||^2 + \frac{\rho_2}{2}||\upsilon_x||^2 + \frac{1}{2}(3\rho_1||\varphi_t||^2 + 3\rho_2||\psi_t||^2 + \rho_2||\upsilon_t||^2)$$

$$F(t) \leq \mu_0 E(t)$$

pour certains $\mu_0 > 0$, Donc F(t) et E(t) sont équivalentes

Lemme 3.7

Soit la fonctionnelle L définit comme suit

$$L(t) = E(t) + \epsilon F(t)$$

et satisfait

1) Il existe une constante positive ε telle que la fonctionnelle L satisfait

$$L(t) \leq -\varepsilon E(t) + C \int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds + C \int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds. \tag{3.16}$$

2) Il existent deux constantes positives μ_1, μ_2 telles que

$$\mu_1 E \leq L \leq \mu_2 E. \tag{3.17}$$

Preuve 3.7

1)

$$L'(t) = E'(t) + \varepsilon F'(t)$$

$$|L'(t)| \leq |-4\gamma||\upsilon_t||^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty (g_1'(s)||\eta_x||^2 + g_2'(s)||z_x||^2)ds$$
$$+\varepsilon(-E(t) + C||\upsilon||^2 + C\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds + C\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds)|$$

comme g_1 et g_2 sont deux fonctions non croissantes on obtient

$$L'(t) \leq -\varepsilon E(t) + (\varepsilon C - 4\gamma)||\upsilon_t||^2 + \varepsilon C\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds + \varepsilon C\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds$$

puis pour

$$\varepsilon C - 4\gamma < 0$$

donc

$$0 < \varepsilon < \frac{4\gamma}{C} \tag{3.18}$$

2) On a

$$(1-\varepsilon\mu_0)E \leq L \leq (1+\varepsilon\mu_0)E.$$

donc pour

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\mu_0} \tag{3.19}$$

Prenant $\mu_1 = 1 - \varepsilon\mu_0 \quad et \quad \mu_2 = 1 + \varepsilon\mu_0$

Et choisissant

$$0 < \varepsilon < min\left\{\frac{4\gamma}{C}, \frac{1}{\mu_0}\right\}$$

donc L et E sont equivalentes

Lemme 3.8

Il existent deux constantes positives d_1 et d_2 telles que, pour tout ε_0, on a les inégalités-suivantes suivantes :

$$\frac{G_0(\varepsilon_0 E(t))}{\varepsilon_0 E(t)}\int_0^\infty g_1(s)||\eta_x||^2 ds \leq -d_1 E'(t) + d_1 G_0(\varepsilon_0 E(t)) \tag{3.20}$$

et

$$\frac{G_0(\varepsilon_0 E(t))}{\varepsilon_0 E(t)}\int_0^\infty g_2(s)||z_x||^2 ds \leq -d_2 E'(t) + d_2 G_0(\varepsilon_0 E(t)). \tag{3.21}$$

Nous sommes maintenant prêts à prouver le résultat de la stabilité (3.13). Multipliant (3.16) par $\dfrac{G_0(\varepsilon_0 E)}{\varepsilon_0 E}$ et combinant (3.20) et (3.21), on trouve, pour $c_0 = d_1 + d_2$

$$\frac{G_0(\varepsilon_0 E(t))}{\varepsilon_0 E(t)} L'(t) + c_0 C E'(t) \leq -\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - c_0 C\right) G_0(\varepsilon_0 E(t)). \tag{3.22}$$

Nous définissons notre fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{R}$ par

$$\mathcal{R} = \tau_0 \left(\frac{G_0(\varepsilon_0 E)}{\varepsilon_0 E} L + c_0 C E\right) \tag{3.23}$$

Où τ_0 est une constante positive qui sera choisie plus tard.
comme E est non croissante et G est convexe, alors $\dfrac{G_0(\varepsilon_0 E)}{\varepsilon_0 E}$ est non croissante, et donc (3.22) et (3.23) conduisent à

$$\mathcal{R}'(t) \leq -\tau_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - c_0 C\right) G_0(\varepsilon_0 E(t)). \tag{3.24}$$

De plus, en rappelant que $\dfrac{G_0(\varepsilon_0 E)}{\varepsilon_0 E}$ est non croissante, et en utilisant (3.19), on obtient

$$\tau_0 c_0 C E \leq \mathcal{R} \leq \tau_0 \left[(1 + \varepsilon \mu_0) \frac{G_0(\varepsilon_0 E(0))}{\varepsilon_0 E(0)} + c_0 C\right] E(t). \tag{3.25}$$

En choisissant $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{\varepsilon}{c_0 C}$, on déduit de (3.24) et (3.25) que $\mathcal{R}$ est équivalent à E et vérifie

$$\mathcal{R}'(t) \leq -\tau_0 C G_0(\varepsilon_0 E(t)). \tag{3.26}$$

Ainsi, pour $\tau_0 > 0$ tel que

$$\mathcal{R} \leq \varepsilon_0 E \quad et \quad \mathcal{R}(0) \leq 1,$$

on obtient, pour $C_1 = \tau_0 C$,

$$\mathcal{R}'(t) \leq -C_1 G_0(\mathcal{R}(t)). \tag{3.27}$$

Alors (3.27) implique que $(G_1(\mathcal{R}))' \geq c_1$, où G_1 est défini par

$$G_1 = \int_s^1 \frac{1}{G_0(\tau)} d\tau \quad et \quad G_0(s) = \begin{cases} s & \textit{si (2.7) et vrai pour tout } i = 1:2 \\ sG'(s) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, une intégration directe donne

$$G_1(\mathcal{R}(t)) \geq C_1 t + G_1(\mathcal{R}(0)). \tag{3.28}$$

Comme $\mathcal{R}(0) \leq 1$ et G_1 est décroissante, on obtient $G_1(R(t)) \geq C_1 t$ ce qui implique que $\mathcal{R}(t) \leq G_1^{-1}(C_1 t)$.

Enfin, à partir de l'équivalence entre $\mathcal{R}(t)$ et $E(t)$, le résultat (3.13) s'ensuit et la preuve du théoréme (3.1) est complète.

Remarque 3.1. *L'hypothèse (2.7) montre que $g_i(s)$ converge exponentiellement vers 0 à l'infini. Alors si cette hypothèse est vérifié on aura une convergence exponentielle du système c'est à dire*

$$E(t) \leq C_2 e^{-C_1 t}, \qquad t \in \Re_+, \tag{3.29}$$

Cependant, l'hypothése (2.7) permet à $s \longrightarrow g_i(s)$d'avoir un taux de decroissance à l'infinu arbitraiment proche de $\frac{1}{s}$. En effet par exemple, pour $g_i(s) = d_i(1+s)^{-qi}$ avec $d_i > 0$ et $q_i > 1$, l'hypothése (2.8) est satisfaite avec $G(s) = s^r$, pour tout $r > \max\left\{\frac{q_1+1}{q_1-1}, \frac{q_2+1}{q_2-1}\right\}$. Et alors(3.13) implique

$$E(t) \leq C_2(t+1)^{\frac{-1}{r-1}}, \quad t \in \Re_+.$$

En général, le taux de décroissance de E dépend du taux de décroissance de g_i qui a le taux de décroissance le plus faible.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié l'unicité, l'existence et la stabilité des poutres laminée de Timoshenko avec glissement interfacial et mémoires infinies. Sous certaines conditions sur les fonctions g_i $i = \overline{1,2}$ on est arrivé à une stabilité générale.

Bibliographie

[1] C. F. Beards and I. M. A. Iman, " *The damping of plate vibration by interfacial slip between layers,* "Int. J. Math. Tool. Des. Res ,18(1978), 131-137.

[2] H. Brézis.*Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, PARIS-France, (1999).

[3] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, F. A. Falcao Nascimento, I. Lasiecka and J. H. Rodrigues, "*Uniform decay ratees for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping,*" Z Angew. Math. Phys, 65(2014), 1189-1206.

[4] C. M. Dafermos, "*Asymptotic stability in viscoelasticity,*"Arch. Rational Mech. Anal , 37(1970), 297-308

[5] A. Guesmia, S. Messaoudi and A. Soufyane, "*On the stabilization for a linear Timoshenko system with infinite history and applications tothe coupled Timoshenko-heat systems,*"Elec. J.Diff. Equa, 2012(2012), 1-45.

[6] A. Guesmia, "*Well-posedness and stability results for laminated Timoshenko beams with interfacial slip and infinite memory,* "IMA J. Math. Control and Information, DOI : 10. 1093/imamci/dnz002.

[7] Z. Liu and S. Zheng, "*Semigroups associated with dissipative systems,*" CRC Research notes in Mathematics, Chapmans & Hall/CRC, New York, 1999

[8] A.Lo and N-E Tatar, " *Stabilization of laminated beams with interfacial slip,*"Eleo.J. Diff. Equa, 2015(2015), 1-14.

[9] A. Lo and, N. E. Tatar Rivera and M. S Alves, "*Exponentielle stabilization of a structure with interfacial slip,* "Discrete Contin. Dyn. Syst, 36(2016), 6285-6306.

[10] A. Pazy, *"Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equaations,"* Springer-Verlag, New (2016),85-91.

[11] C. A. Raposo, *" Exponentielle stability for a structure with interfacial slip and frictional damping ,"*Appl. Math. Lett , 53(2016), 85-91.

[12] C. A. Raposo, O. V. Villlagràn, J. E. Mu Rivera and M. S Alves, *" Hybrid laminated timoshenko beam, "*J. Math. Phys, 85 (2017), 11pages

[13] N. E. Tatar, *"Stabization of a laminated beam with interfacial slip by bounday controls, "*Boundary Values Problems, 2015(2015), 11 pages.

[14] J.M. Wang, G. Q. Xu and S. P. Yung, *"Exponential Stabilization of laminated beams with structural damping and boundary feedback controls,"*SIAM J.Control Optim.,44(2005), 1575-1597.

[15] Ferdjani.R. Abdel.F, *"Sur la stabilite exponentielle des c_0-semigroupes Aplication a un système de type Timoshenko, "* Mémoire de fin d'etude. 2014-2015.

[16] J.Yameogo, *" Résumé des séanes du 24 et du 31 mars 2010, "*