

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم
قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude d'un système dynamique à comportement chaotique fractionnaire

Option : COSD

Par :

BOUCHAMA Khadidja

Encadré par : CHOUGUI Zoulikha

MCB U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : FOUGHALI Fouzia
Examineur: BELYACINE Zahia

MCB U. SKIKDA
MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Remerciements :

Au terme de ce travail, je remercie Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour mener à bien ce mémoire.

Je tiens à remercier exceptionnellement ma chère enseignante et encadreuse **Mme Zoulikha Chougui** pour son soutien permanent, ses précieux conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie également les membres du jury d'avoir pris le temps pour lire et discuter ce modeste travail et me donner de précieux conseils.

J'exprime aussi mon infinie gratitude aux enseignants de la faculté de mathématique pour leurs encouragements et soutien moral.

Je remercie également tout ce qui de près ou de loin m'a apporté leur soutien.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A mon cher père :

Mokhtar

A ma chère mère :

Zohra

A mes frères :

Abdelouahab, Ali, Toufik et Badreddine

A mon cher mari :

Ammar

A ma belle-sœur :

Safaa

A ma tout famille ; A ceux qui m'aiment.

Résumé:

Les systèmes dynamiques d'ordre fractal commencent à susciter un grand intérêt de la part des chercheurs, et l'étude de ces systèmes est récemment devenue un domaine de recherche actif en raison de leurs applications potentielles.

Cette mémoire a pour but l'étude qualitative du système micro dynamique chaotique de Lorenz.

Des résultats numériques sont présentés tout au long du chapitre pour illustrer les résultats.

Mots clés:

Chaotique, fractionnaire, caputo dérivé, système dynamique, attracteur, comportement chaotique fractionnaire.

ملخص

بدأت الأنظمة الديناميكية ذات الترتيب الكسري تجذب إهتماما كبيرا من الباحثين، وقد أصبحت دراسة هذه الأنظمة مؤخرا مجالا نشطا للبحث نظرا لتطبيقاتها المحتملة.

تهدف هذه الدراسة النوعية للنظام الديناميكي الجزئي الفوضوي لورنز.

يتم عرض النتائج العددية في جميع أنحاء الفصل لتوضيح النتائج.

الكلمات المفتاحية

فوضوي، كسري، مشتق كابتو، نظام ديناميكي، جاذب، السلوك الفوضوي الجزئي.

Abstract:

Fractal order dynamical systems are beginning to attract great interest from researchers, and the study of these systems has recently become an active area of research due to their potential applications.

This memory aims at the qualitative study of the chaotic micro-dynamic system of Lorenz.

Numerical results are presented throughout the chapter to illustrate the results.

Key words:

Chaotic, fractional, Caputo derivative, dynamic system, attractor, Fractional chaotic behavior.

Table des matières

1	Système dynamique et chaos :	5
1.1	Introduction :	5
1.2	Système dynamique :	5
1.2.1	Systèmes continus et systèmes discrets :	5
1.2.2	Systèmes autonomes et systèmes non- autonomes :	6
1.2.3	Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs :	6
1.2.4	Flot et points fixes :	7
1.2.5	Section et application de Poincaré :	8
1.2.6	Points d'équilibre :	8
1.2.7	Points limites :	9
1.2.8	Attracteur :	9
1.2.9	Bassin d'attraction :	9
1.2.10	Les différents types d'attracteurs :	10
1.3	Stabilité :	10
1.3.1	Différents types de stabilité :	11
1.3.2	Première méthode de Lyapunov (méthode indirect) :	12
1.3.3	Deuxième méthode de Lyapunov (méthode direct) :	13
1.3.4	Stabilité des points fixes : théorème de Hurwitz :	14
1.4	Théorie des bifurcations :	14
1.4.1	Bifurcation locales de codimension 1 :	15
1.4.2	Bifurcation noeud-col :	15
1.4.3	Bifurcation fourche :	15
1.4.4	Bifurcations transcritiques :	16
1.4.5	Bifurcation de Hopf :	17
1.5	Théorie du chaos :	18
1.5.1	Caractéristiques du chaos :	18
1.5.2	Outils de quantification du chaos :	20
1.5.3	Scénario vers le chaos :	22
1.6	Conclusion :	24
2	Calcul et stabilité des systèmes fractionnaire :	25
2.1	Introduction :	25
2.2	Historique :	25

2.3	Fonctions utiles :	26
2.3.1	Fonction Gamma :	26
2.3.2	Fonction Bêta :	28
2.3.3	Fonction Mittag-Leffler :	28
2.4	Dérivées et intégrales fractionnaires :	29
2.4.1	Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov :	30
2.4.2	Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville :	34
2.4.3	Dérivées fractionnaires au sens Caputo :	37
2.5	Propriétés des dérivées fractionnaires :	38
2.5.1	Linéarité :	38
2.5.2	Règle de Leibniz :	39
2.5.3	Intégration par parties :	40
2.5.4	Relation entre les dérivées :	41
2.6	Stabilités des systèmes fractionnaires	43
2.6.1	Stabilité des systèmes fractionnaires linéarisé :	43
2.6.2	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaire :	45
2.7	Conclusion :	45
3	Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz :	46
3.1	Introduction :	46
3.2	Les équations non-linéaires de Lorenz :	46
3.2.1	Les points fixes et leur stabilité :	47
3.2.2	Comportement chaotique et attracteurs étranges :	49
3.3	Les équations de Lorenz d'ordre fractionnaire :	52
3.4	Conclusion :	55

Introduction général :

Le "chaos" est un phénomène d'apparence aléatoire non linéaire qui est déterministe et très sensible aux conditions initiales. Il définit un état spécial d'un système dont le comportement imprévisible ne se répète jamais. De très nombreux systèmes ont été présentés ces dernières années exploitant les comportements chaotique dans les domaines physiques [1], chimiques [2], biologiques [3] et économiques [4], etc. L'étude de tels systèmes est liée à la théorie du chaos qui a été reconnue à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un grand nombre de chercheurs notamment ceux de Lorenz [5], et grâce à la découverte de nouveaux outils de calculs.

D'autre part, le calcul différentiel et intégral est sans aucun doute l'un des concepts les plus importants des mathématiques et apparaît naturellement dans de nombreux problèmes scientifiques, qui ont été largement appliqués en physique, en technologie chimique, en contrôle optimal, en finance, en traitement du signal, etc et sont modélisés par des méthodes ordinaires ou partielles. Différence et équations différentielles.

Ces dernières années, il a été observé que de nombreux phénomènes du monde réel ne peuvent pas être modélisés par des équations différentielles ordinaires ou partielles ou des équations à la différence standard définie via les dérivées et intégrales classiques. En fait, ces problèmes font suite à l'apparition du calcul fractionnaire (dérivées fractionnaires et intégrales), destiné à traiter les problèmes pour lesquels le calcul classique était insuffisant. Avec le développement et les progrès du calcul fractionnaire, la théorie et les applications des équations différentielles ordinaires et partielles avec des dérivés fractionnaires sont devenues l'un des sujets les plus étudiés en mathématiques appliquées. Le large potentiel d'application des équations différentielles fractionnaires dans de nombreux domaines de la science a été souligné par un grand nombre d'articles, de livres et d'événements scientifiques sur le sujet.

Le premier chapitre sera consacré à l'étude des différents éléments, méthodes et concepts de base nécessaires aux systèmes dynamiques et chaotiques, avec leur classification et leur stabilité, en passant par la théorie de bifurcation et finissant par le chaos et ses caractéristiques avec un peu de détail sur les exposants de Lyapunov.

Le seconde chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fraction-

naire, quelques concepts préliminaires seront introduits comme la, fonction gamma et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Trois approches (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation seront ensuite considérées.

Le dernier chapitre, sujet de notre contribution, traite de l'application et de l'adaptation de ces outils pour l'analyse du chaos dans un système autonome tridimensionnel avec des dérivées fractionnaires décrivant le phénomène convection : le système de Lorenz.

Chapitre 1

Systeme dynamique et chaos :

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques brèves notions sur le phénomène chaotique qui apparaît dans un système dynamique déterministe. Nous commencerons par définir la notion des systèmes dynamiques, puis nous aborderons d'autres notions mathématiques notamment les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs, la section de Poincaré, les attracteurs, le bassin d'attraction, les points d'équilibre et quelques notions de stabilité et bifurcations. Enfin nous présenterons la caractérisation du comportement chaotique.

1.2 Systeme dynamique :

En mathématiques, en chimie ou en physique, un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique.

1.2.1 Systèmes continus et systèmes discrets :

1. On appelle système dynamique continu tout système d'équations différentielles du premier définie par :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x,t,v), x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in V \subseteq \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Le système s'appelle un système dynamique. \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres et x est appelé vecteur d'état.

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est un champ de vecteur.

Exemple 1

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \varpi t \end{cases}$$

Où δ, γ, ϖ sont des paramètres physiques réels (variables statiques).

L'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est : \mathbb{R}^3 .

Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).

2. On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes définies par :

$$X_{k+1} = F(X_k, \mu), X_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Où F est la fonction matricielle de récurrence, $X_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k et $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres et $K \in \mathbb{N}$.

Exemple 2 :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètres réels, l'espace des phases est : \mathbb{R}^2 l'espace des paramètres, est : \mathbb{R}^2 .

1.2.2 Systèmes autonomes et systèmes non- autonomes :

- a- Lorsque la variable libre t apparaît explicitement dans l'expression de f , le système on dit qu'il est "non autonome" mais quand f (ou F) ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement du système x est dit "autonome".
- b- On peut toujours transformer un système non-autonome en système autonome (où t n'apparaît pas explicitement), en posant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = t \\ \dot{X}_{n+1} = f_{n+1}(X, p) = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2.3 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs :

- i- Un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement.
- ii- Un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie et qui a au moins un terme dépend de la vitesse.

Théorème 3 (Théorème de divergence)

Soient ϕ_t le flot de, V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0, V(t) = \phi_t(V)$
l'image de V par ϕ_t , on a :

$$\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \int_v \text{Div } f \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \quad (1.4)$$

$$\text{Div } f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

Remarque 4 Le système est dissipatif si : $\frac{dV}{dt} < 0$.
Le système est conservatif si : $\frac{dV}{dt} = 0$.

1.2.4 Flot et points fixes :

Définition 5 Le point \bar{x} est un point fixe du système dynamique si $f(\bar{x}) = 0$, c'est à dire que c'est le zéro du champ de vecteur.

soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in D$, une solution de système dynamique avec conditions initiales $x(0) = x_0$. On appelle flot de, ou du champ de vecteurs f , l'application $\phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t). \quad (1.6)$$

Stabilité des points fixes :

Nous illustrons les concepts de points fixes stable, asymptotiquement stable et instable.

Définition 6 Un point fixe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon. \quad (1.7)$$

Si de plus, il existe δ_0 avec $0 < \delta_0 < \delta$ tel que :

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} \quad (1.8)$$

\bar{x} est asymptotiquement stable. Si \bar{x} n'est pas stable, alors il est instable.

Définition 7 [6] On dit que x_0 est localement attractif pour le système autonome s'il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U$, $\phi_t(x)$ existe (flot) pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$.

Si $U = \mathbb{R}^n$, x_0 est globalement attractif.

1.2.5 Section et application de Poincaré :

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé dynamiques et notamment les trajectoires périodiques. Cette méthode transforme un système dynamique continu en un système discret et de réduit sa dimension en conservant les meme propriétés topologiques. Plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique continu autonome dont l'espace des phases est de dimension n par celle de la suite des points d'intersections successives : p_0, p_1, \dots d'une trajectoire $\varphi(t, X_0)$ avec un hyperplan Σ_p de dimension $(n - 1)$. Ce dernier peut etre quelconque. Mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan Σ_p est appelé la section de Poincaré.

L'application de Poincaré qui engendre une telle section par itérations successives est tout simplement définie à partir du flôt par : $x \rightarrow \phi^T(x)$.

Dans ce cas l'application de Poincaré est dite application de premier retour. La section de Poincaré engendrée n'est autre qu'une carte stroboscopique du plan de phase obtenu par les itérées successives de l'application de Poincaré ϕ^T . On peut par exemple visualiser la solution tout les $n.T$ (avec $n > 1$) et dans ce cas, l'application n'est plus une application de premier retour.

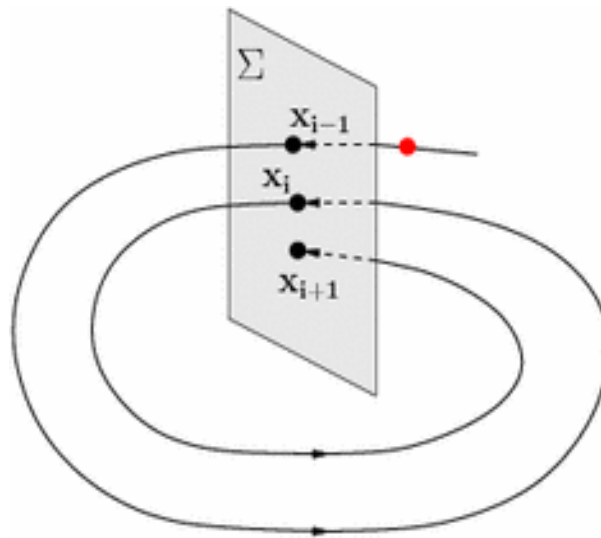


FIG (1.1) : Section de Poincaré

1.2.6 Points d'équilibre :

Les points d'équilibre (ou états stationnaires, ou points fixes, ou points singuliers) d'un système jouent un role important dans la description des propriétés du système.

Définition 8 Un point x^* est dit point d'équilibre du système dynamique (ou

point critique ou point singulier ou point stationnaire) s'il satisfait $f(x^*) = 0$ ou bien de manière équivalente si $\phi_t(x^*) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sinon le point x^* est dit ordinaire.

Par un changement de variable $\zeta = x - x^*$, on peut ramener le point x^* à l'origine (0).

1.2.7 Points limites :

Définition 9 Un point $\alpha \in X$ est un point ω -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que : $\lim \varphi_{t_n} = \alpha$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 10 Un point $b \in X$ est un point α -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que : $\lim \varphi_{t_n} = b$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 11 L'ensemble des points α -limites (resp ω -limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp $\omega(x)$), alors on définit l'ensemble limite de $x(x_0, t)$ par l'ensemble $\alpha(x) \cup \omega(x)$.

1.2.8 Attracteur :

La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques. Il en existe quatre types distincts : un point, un cycle limite, un tore ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale [7].

Définition 12 [8] Soit A un ensemble compact, fermé, de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant par le flot : $\phi_t(A) = A$. On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(X_0, t) = \phi_t(X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$ si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A \quad (1.9)$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

1.2.9 Bassin d'attraction :

Définition 13 Lorsque A est un attracteur, l'ensemble :

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V). \quad (1.10)$$

Définition 14 [9] Bassin d'attraction de A . C'est l'ensemble des points dont les trajectoire de phases qui en est issue tendent vers un attracteur à temps élevé.

1.2.10 Les différents types d'attracteurs :

Il en existe quatre types distincts : un point, un cycle limite, un tore ou avoir une structure encore plus complexe de type fractale.

- 1- L'attracteur "point fixe" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
- 2- L'attracteur "cycle limite" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
- 3- L'attracteur "tore" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".
- 4- Les attracteurs étranges sont bien plus complexes que les autres, ils seront définis ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

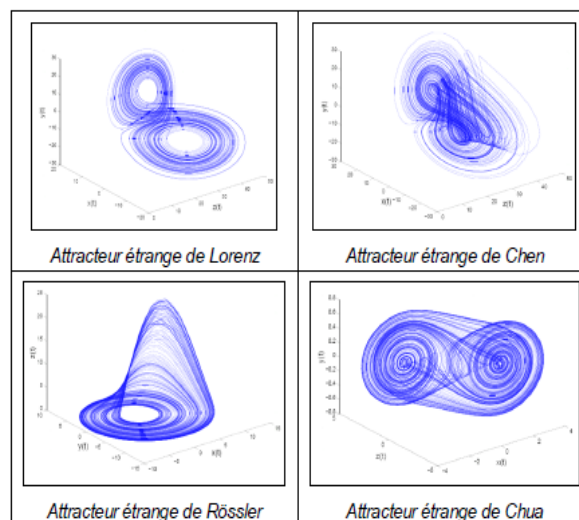


FIG (1.2) : Les différents types d'attracteurs

1.3 Stabilité :

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires.

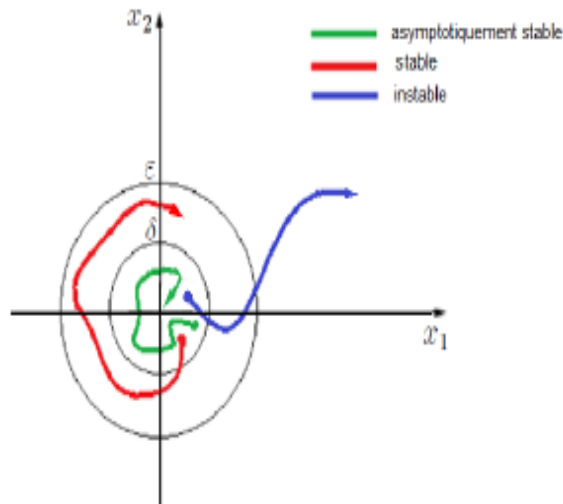


FIG (1.3) : Différents types des stabilités de Lyapunov

1.3.1 Différents types de stabilité :

Nous allons indiquer maintenant quels sont les différents sens possibles que l'on peut donner à la stabilité d'une solution.

Stabilité au sens de Lagrange :

La solution $x(t)$ est stable au sens de Lagrange si elle est borné :

$$\exists L > 0 \text{ tel que } \forall t, \|x(t)\| \leq L.$$

Stabilité au sens de Poincaré :

La solution $x(t)$ de la condition initiale x_0 à $t = t_0$ est stable au sens de Poincaré si la trajectoire du flot initié avec $x_0 + \delta x_0$ à $t = t_0$ reste dans un tube de rayon ϵ autour de la trajectoire de $x(t)$.

Stabilité au sens de Lyapunov :

La solution $x(t)$ est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que toute solution $y(t)$ vérifiant $\|y(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ implique que $\forall t \geq t_0, \|y(t) - x(t)\| < \epsilon$.

Stabilité asymptotique :

La solution $x(t)$ est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si elle est stable au sens de Lyapunov et si de plus on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0.$$

Stabilité structurelle :

On parle de stabilité structurelle si une petite perturbation des équations du système implique une topologie du flôt équivalente. Un système structurellement stable est également dit *robuste*.

1.3.2 Première méthode de Lyapunov (méthode indirect) :

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x_0 du système (1.11) Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre.

Théorème 15 Soit le système dynamique autonome suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

tel que $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- 1- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative alors x_0 est asymptotiquement stable.
- 2- Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive et les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, alors x_0 est instable.

Exemple 16 soit le système :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^3 + xz \\ \frac{dz}{dt} = 2z - xy \end{cases}$$

L'origine 0 est un point critique. Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

1.3.3 Deuxième méthode de Lyapunov (méthode direct) :

Comme on a vu, la première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Ce théorème va résumer cette méthode.

Théorème 17 [10] *Le point d'équilibre x^* du système (1.11) est stable si il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- 1) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.
- 2) $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$, $\forall x \neq x^*$ dans D .
- 3) $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \neq x^*$ dans D .

Si de plus pour x , $V(x) < 0$, $\forall x \neq x^*$ dans D alors x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme),

alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* (on dit que x^* est globalement asymptotiquement stable).

Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement asymptotiquement stable).

Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

Exemple 18 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \epsilon x_1 x_2 \end{cases}$$

- Ce système possède un point d'équilibre à $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
 - Analysons la stabilité de ce système avec cette fonction de Lyapunov :

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$

Dérivant $V(x)$, on trouve : $V(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 x_2 + \epsilon x_1^2 x_2^2 = \epsilon x_1^2 x_2^2$.

Ainsi, $V(x)$ est une fonction définie positive qui est strictement décroissante si $\epsilon < 0$.

En vertu de la théorie de Lyapunov, le système est globalement stable si $\epsilon = 0$. Il est globalement asymptotiquement stable si $\epsilon < 0$. Sinon, il est globalement instable.

1.3.4 Stabilité des points fixes : théorème de Hurwitz :

La stabilité du point fixe est généralement en utilisant le théorème de Lyapunov 1899 [11] qui stipule que, si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne fonctionnelle du système, évaluées en ce point sont strictement négatives, le point fixe est stable. Une autre méthode suggérée par Hurwitz 1893 [12] consiste à exprimer le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle comme : $a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \dots + a_1\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$ où les coefficients a_i sont fonction des coordonnées du point fixe et des paramètres du système dynamique considéré. Les racines de ce polynôme ont des parties réelles négatives et tous les déterminants suivants sont positifs.

$$D_1 = a_1, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, D_m = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2m-1} & a_{2m-2} & a_{2m-3} & a_m \end{vmatrix}$$

où : $a_i = 0, i > n$.

On peut démontrer en dimensions deux, trois puis n que la "positivité" stricte de ces déterminants conduit à la "négativité" stricte des parties réelles des valeurs propres du polynôme caractéristique de la matrice jacobienne fonctionnelle. Par conséquent, les critères de stabilités de Lyapunov et Hurwitz sont strictement équivalents.

1.4 Théorie des bifurcations :

Un autre ensemble de concepts utile à l'analyse des systèmes dynamiques est la théorie des bifurcation. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système dynamique quand le paramètre de système traverse une valeur critique. le changement de la dynamique signifie le changement du nombre des points fixes ou de leur caractère (stabilité, attractivité, etc). La valeur pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation. De nombreux types de bifurcation sont inventoriés dans [13] [14].

1.4.1 Bifurcation locales de codimension 1 :

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

1.4.2 Bifurcation noeud-col :

C'est la bifurcation associée à l'équation :

$$\dot{x} = x^2 - \mu \quad (1.12)$$

avec μ le paramètre de contrôle.

- pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point d'équilibre.
- pour $\mu = 0$; $x = 0$ est un point d'équilibre instable ; plus précisément il est «stable à gauche» et «instable à droite», donc semi-stable.
- pour $\mu > 0$ on a deux équilibres $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$, on voit que $x_1 = \sqrt{\mu}$ est stable, tandis que $x_2 = -\sqrt{\mu}$ est instable.

Ceci conduit au diagramme de bifurcation très simple de la figure :

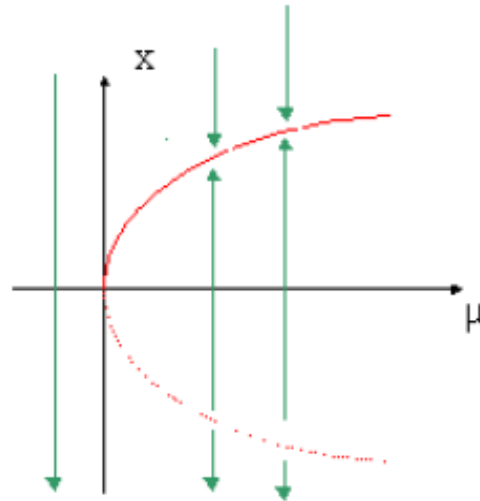


FIG (1.4) : Diagramme de la bifurcation noeud – col

1.4.3 Bifurcation fourche :

C'est la bifurcation liée à l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) = \mu x - x^3. \quad (1.13)$$

- Si $\mu < 0$ on a un seul point d'équilibre $a = 0$, qui est instable.
- Si $\mu = 0$ on a $\dot{x} = x^3$: 0 est toujours l'équilibre unique, instable.
- Si $\mu > 0$ on a trois points d'équilibres qui sont : $a = 0$, $a = -\sqrt{\mu}$, $a = +\sqrt{\mu}$: l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables $\pm\sqrt{\mu}$.

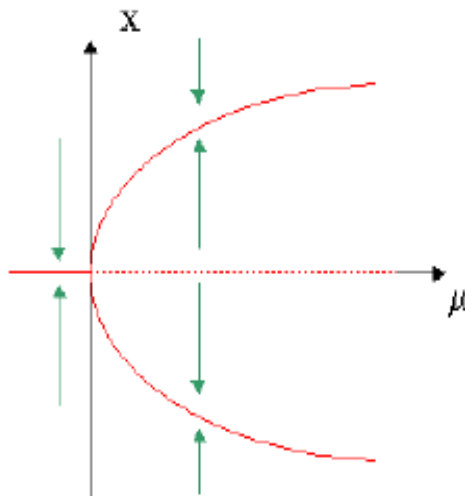


FIG (1.5) : Diagramme de la bifurcation fourche.

1.4.4 Bifurcations transcritiques :

L'équation qui nous intéresse est la suivante :

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad (1.14)$$

Deux solutions stationnaires $x^* = 0$ et $x^* = \mu$ coexistent. Il est facile de voir que la solution $x^* = 0$ est stable si $\mu > 0$, tandis que c'est le contraire pour la solution $x^* = \mu$. Il y a donc échange de stabilité entre ces deux solutions au point de bifurcation figure :

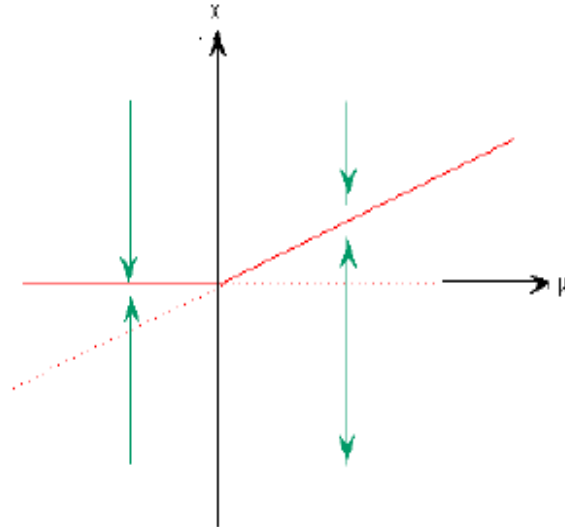


FIG (1.6) : Diagramme de la bifurcation transcritique.

1.4.5 Bifurcation de Hopf :

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plan complexe

$$z(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega)z(t) - |z|^2 z(t) \quad (1.15)$$

pour $z(t) = x(t)\exp(i\theta(t))$, l'équation s'exprime sous forme d'un système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.16)$$

la première équation n'est autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle μ

- Si $\mu < 0$ le système possède un point d'équilibre perd sa stabilité.
- Lorsque $\mu = 0$, ce point d'équilibre perd sa stabilité.
- Lorsque $\mu > 0$, il se forme alors une trajectoire périodique stable ou un cycle limite.

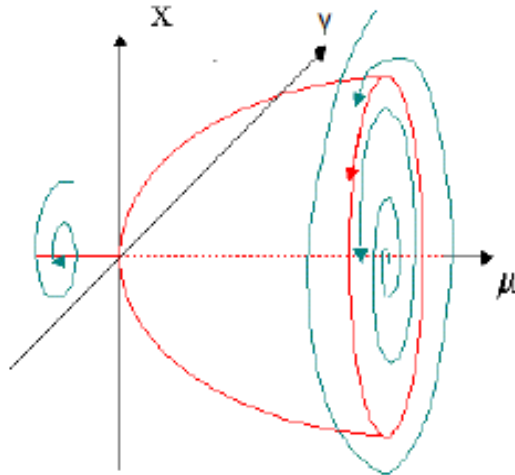


FIG (1.7) : *Diagramme de la bifurcation de Hopf.*

1.5 Théorie du chaos :

On peut dire qu'il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle, mais on pourrait dire que c'est un phénomène qui peut apparaître dans les systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceaux. Ils sont caractérisés par une évolution qui semble aléatoire et un aspect fondamental d'instabilité appelé sensibilité aux conditions initiales. On cherche donc si le système converge vers un état stationnaire à long terme, ou si le comportement à long terme du système dépend des conditions initiales [15].

1.5.1 Caractéristiques du chaos :

Il existe plusieurs approches de définitions possible du chaos, ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos. Ci dessous, nous présentons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre les points marquants d'un système chaotique :

Sensibilité aux conditions initiales :

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert dès la fin du XIXe siècle par Poincaré dans des travaux concernant le problème à N corps en mécanique céleste, puis par Hadamard avec un modèle mathématique abstrait aujourd'hui baptisé "flot géodésique sur une surface à courbure négative". Cette

découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

Définition 19 [16] *On dit que la fonction $f : I \rightarrow I$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in I$ et un certain voisinage $V \subset I$ de x , il existe $y \in I$ tel que $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.*

Attracteur étrange :

Définition 20 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

Attraction : U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T , dont le point initial est dans U , est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devrait et reste aussi proche de A que l'on veut.

Sensibilité : Les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

Fractale : A est un objet fractale.

Mélange : Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans R qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

Diagramme de bifurcation :

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint. Un diagramme de bifurcation délimite des zones de l'espace paramétrique dans les quelles le comportement qualitatif du système est similaire. On voit apparaître aussi un enchaînement

très rapide dedoublements de période qui mène à une situation chaotique. Ce mécanisme de doublements de période est une des routes vers le chaos.

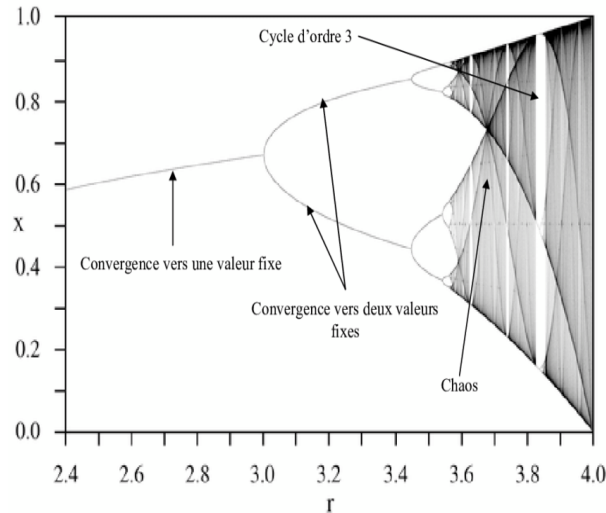


FIG (1.8) : Daigramme de bifurcation

1.5.2 Outils de quantification du chaos :

Exposants de Lyapunov :

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit $L_1, L_2, L_3 \dots$

Une méthode d'approximation des exposants de Lyapunov est l'algorithme de Wolf. Cet algorithme permet de calculer les exposantes de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps par rapport à la perturbation introduite parallèlement, et ce au sein d'un attracteur [17].

1- Exposants de Lyapunov pour un système unidimensionnel :

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches.

Soit x_0 et $x_0 + \epsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel L tel qu'après t itérations :

$$|f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)| \approx \epsilon e^{tL}. \quad (1.17)$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left(\frac{|f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)|}{\epsilon} \right) \approx tL \quad (1.18)$$

si l'on fait tendre ϵ vers 0, il vient :

$$L \approx \frac{1}{t} \left| \frac{df(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (1.19)$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de la dérivation en chaîne, on obtient :

$$L \approx \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{i-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|. \quad (1.20)$$

L est appelé exposant de Lyapunov. Il indique le taux moyen de divergence par itération.

- Si $L \leq 0$, la trajectoire de l'évolution du système peut tendre vers un point fixe et avoir un comportement périodique ou quasi-périodique.
- Si $L > 0$, le système est chaotique.

2- Exposants de Lyapunov pour un système multidimensionnel :

Pour un système de dimension n on parle de spectre d'exposants de Lyapunov dont le nombre est égal à cette dimension.

La classification des comportements des systèmes dynamiques selon les exposants de Lyapunov est représentée dans le tableau suivant :

TAB.1.1- Comportements des systèmes dynamiques en fonction des exposants de Lyapunov :

Régime permanent	Attracteur	Exposant de Lyapunov
Point d'équilibre	Point	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$
Périodique	Courbe fermée (cycle limite)	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 = 0$
Quasi-périodique	Tore	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_{i+1} < 0$
Chaotique	Attracteur chaotique	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Hyperchaotique	Attracteur chaotique	$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$

Dimension de Lyapunov :

Une autre méthode de classification du comportement asymptotiquement est la dimension de Lyapunov (DL). Si $\sigma_1 \dots \sigma_n$ sont les EL du système dynamique, classés dans l'ordre décroissant et j un entier tel que $\sigma_1 + \dots + \sigma_n \geq 0$, alors, pour les espaces de phase de dimension plus que 2, DL telle que proposée par Fredrickson et al [18] sera définie suit :

$$DL = j + \frac{\sigma_1 + \dots + \sigma_j}{|\sigma_j + 1|}.$$

Une dimension non entière est considérée comme un critère d'existence d'un comportement chaotique. Les attracteurs chaotiques sont donc des fractales car ils possèdent une dimension fractionnaire.

Dimension fractale :

Un attracteur étrange est caractérisé, entre autres, par sa dimension fractale. Nous allons dans cette section, expliquer ce qu'est une dimension fractale.

Un ensemble A est fractale si sa dimension de Hausdorff [19] n'est pas entier. Il existe aussi d'autres dimensions non entières ou fractales comme la dimension de Kolmogorov ou de Capacité, la dimension de corrélation [20], la dimension de Lyapunov ... Toutes ces dimensions sont très proches l'une de l'autre et satisfont les propriétés suivantes [21] :

- 1- $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$.
- 2- Si $A = \emptyset$, alors $d(A) = 0$.
- 3- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.
- 4- Si f est une application différentiable sur A , alors $d(f(A)) = d(A)$.

1.5.3 Scénario vers le chaos :

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos [22]. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent.

On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

L'intermittence vers le chaos :

Une intermittence est sorte de régime périodique (ou quasi-périodique avec des "bouffées chaotique". Ce type de phénomène est particulièrement étudié en mécanique des fluides où un écoulement laminaire peut être interrompu par turbulences donnant lieu à une succession désordonnée laminaire peut être interrompu par des turbulences donnant lieu à une succession désordonnée de phases turbulentes et de phases de relaminarisation. Soit un système dynamique où v désigne le paramètre de contrôle et qui possède un attracteur périodique pour v inférieur à une valeur critique v_c . Pour $v < v_c$, le système oscille de manière régulière et

reste stable pour de faibles perturbations. En revanche si v devient légèrement supérieur à v_c , la réponse du système présente de longues phases avec des oscillations qui semblent régulières et proches du comportement obtenu avec $v < v_c$ (phase laminaire), mais ces oscillations sont perturbées de manière intermittente par des comportements chaotiques et ce la à des intervalles irréguliers. En augmentant v les phases laminaires deviennent de plus en plus petites, difficiles à distinguer et peuvent éventuellement disparaître laissant place à un comportement complètement chaotique.

Le dédoublement de période :

Un autre scénario vers le chaos est le scénario par cascade de doublement de la période. Par augmentation progressive d'un paramètre de contrôle, le régime périodique voit tout d'abord sa période doubler puis être multipliée. Les seuils d'apparition de ces doublements successifs étant de plus en plus rapprochés, on atteint ainsi un point d'accumulation pour lequel il existe, en principe, une multiplication de la période de base jusqu'à l'infini. C'est là que le seuil du chaos est atteint.

La quasi - périodicité :

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens (1971) illustré par exemple sur le modèle de Lorenz (1963). Ce scénario a été confirmé par de nombreuses expériences dont les plus célèbres se trouvent en thermo-hydrodynamique - convection de Rayleigh-Bénard dans une petite boîte - et en chimie - réaction de Bélousov-Zabotinsky - entre autres. Cette route vers le chaos résulte de la "concurrence" de différentes fréquences dans le système dynamique. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Dans ce cas, les trajectoires couvrent la surface d'un tore. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos. Il existe aussi des systèmes qui passent directement de deux fréquences au chaos.

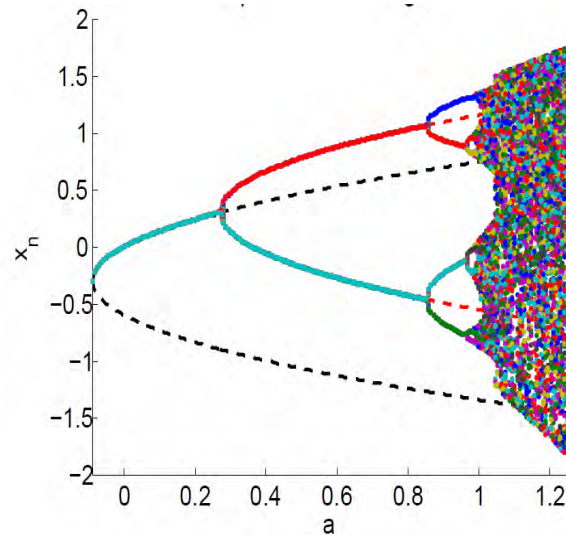


FIG (1.9) : Casade dedoublements de periode

1.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exhibé quelques notions de base des systèmes dynamiques. Nous avons présenté également les définitions mathématiques relatives au chaos et les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.

Chapitre 2

Calcul et stabilité des systèmes fractionnaire :

2.1 Introduction :

Ces dernières années, le calcul fractionnaire est devenu un excellent outil dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, mathématiques appliquées, technologie et des problèmes géométriques. Le but de ce chapitre est de définir quelques notions générales de dérivées fractionnaire : au sens de l'approche de Riemann-Liouville, Grünward et Caputo, incluant quelques propriétés.

2.2 Historique :

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17^{ème} siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [23]). A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a

commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines.

2.3 Fonctions utiles :

Dans cette section nous présentons des définitions et quelques propriétés pour les fonctions : Gamma, Bêta et Mittag-Leffler.

2.3.1 Fonction Gamma :

Sans doute, une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, qui généralise la factorielle $n!$ et permet à n de prendre aussi des valeurs non entières et même complexes. Nous serons importants pour d'autres parties de ce travail [23].

Définition 21 [23] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est défini par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

qui converge dans la moitié droite du plan complexe $Re(z) > 0$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

l'expression entre crochets dans (2.2) est bornée pour tout t ; la convergence à l'infini est donnée par e^{-t} , et pour la convergence à $t = 0$ on doit avoir $x = Re(z) > 1$.

Définition 22 Avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

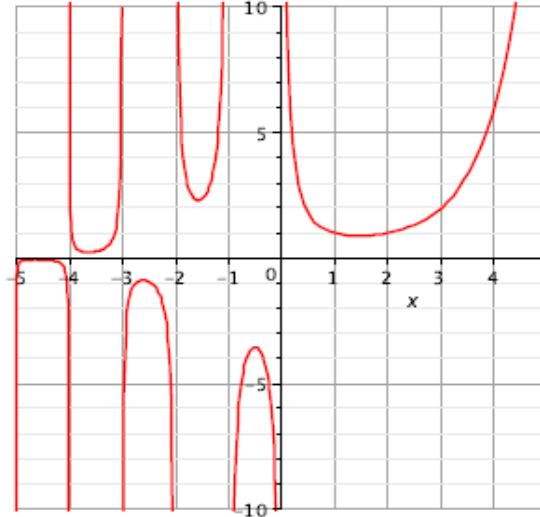


FIG (2.1) : La fonction Gamma.

- Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad \text{Re}(z) > 0, \quad (2.3)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z). \quad (2.4)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n + 1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en effet $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation (2.4) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

Donc, par récurrence, il s'ensuit que $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^z}{z(z + 1)\dots(z + n)}, \quad (2.5)$$

où nous supposons que $\text{Re}(z) > 0$.

2.3.2 Fonction Bêta :

Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison des valeurs de la fonction Gamma.

Définition 23 [23] *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, t > 0, (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0). \quad (2.6)$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta nous allons utiliser la transformée de Laplace.

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau. \quad (2.7)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0 \quad (2.8)$$

il s'ensuit de que :

$$B(z,w) = B(w,z), \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (2.9)$$

Avec la fonction Bêta, il est possible d'obtenir deux résultats utiles pour la fonction Gamma

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (2.10)$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{2z-1} \Gamma(2z). \quad (2.11)$$

2.3.3 Fonction Mittag-Leffler :

La fonction exponentielle, $\exp(z)$, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Sa généralisation à un paramètre. la fonction qui est maintenant notée par [24] :

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, z \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

- ■ Une fonction à deux paramètres du type Mittag-Leffler est définie par le développement en série suivant [24] :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.13)$$

La fonction de Mittag-Leffler classique a deux paramètres et nous notons :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

on remarque alors que pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ et on a :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.14)$$

et en général :

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (2.15)$$

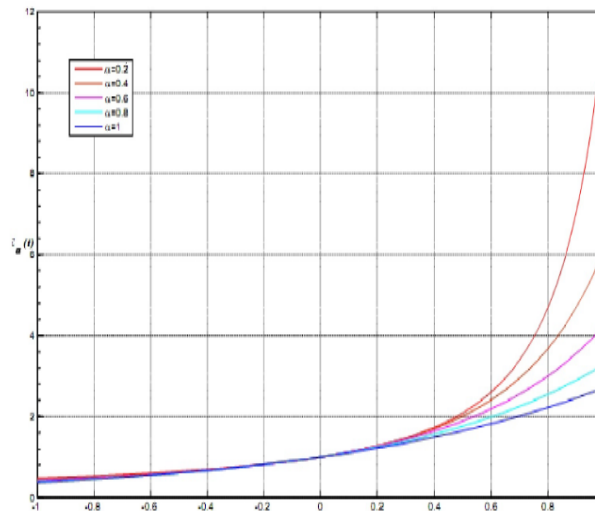


FIG (2.2) : Fonction Mittag – Leffler à un seul paramètre.

2.4 Dérivées et intégrales fractionnaires :

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie la définition de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

2.4.1 Dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov :

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f au point t est donnée par :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (2.16)$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(f'(t) - f'(t-h) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \left(f'(t) - 2f'(t-h) + f'(t-2h) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

par dérivation successive de la fonction f , on obtient une de la formule (2.16) l'ordre n (n est un entier positif ou nul) de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \quad (2.17)$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

La formule (2.17) représente la dérivée d'ordre entier n , si n est positif et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul.

$$(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{-n(1-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}.$$

On définit donc la dérivée d'ordre non entier α par :

$$\begin{aligned} {}^G D_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.18)$$

et

$$\begin{aligned} {}^G D_t^{-\alpha} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} f(t - kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les formules (2.18) et (2.19) définissent respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f , où f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[\alpha, t]$.

Si f est de classe C^m , des intégrations par parties de (2.18) et (2.19) nous permet d'écrire :

$${}^G D_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t - \alpha)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

et

$${}^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)(t - \alpha)^{k+\alpha}}{\Gamma(k + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(m + \alpha)} \int_{\alpha}^t (t - \tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

La formule (2.20) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) sont continues sur l'intervalle fermé $[\alpha, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante : $m - 1 < \alpha < m$.

Dérivée fractionnaire de la fonction $(t - \alpha)^a$:

Calculons la dérivée fractionnaire ${}^G D_t^p f(t)$ au sens de Grünwalde-Letnikov de la fonction polynômiale

$$f(t) = (t - \alpha)^a$$

où a est un nombre réel.

On va commencer par considérer des valeurs négatives de p , c'est-à-dire qu'on va commencer par évaluer l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-p)$.

Utilisons la formule (2.18) :

$${}^G D_t^p (t - \alpha)^a = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t - \tau)^{-p-1} (\tau - \alpha)^a d\tau \quad (2.22)$$

et supposons $\alpha > -1$ pour la convergence de l'intégrale. En effectuant dans (2.22), le changement de variables $\tau = \alpha + \xi(t - \alpha)$ et en utilisant la définition de la fonction Bêta on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_a^G D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\alpha-p} \int_a^t \xi^\alpha (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, \alpha+1) (t-a)^{\alpha-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}, \quad (p < 0, \alpha > -1). \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Cosidérons maintenant le cas : $0 \leq m \leq p \leq m+1$. Pour appliquer la formule on a besoin d'imposer $\alpha > m$ pour la convergence de l'intégrale dans (2.20) Alors on a :

$${}_a^G D_t^p (t-\alpha)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-\alpha)^\alpha}{d\tau^{m+1}} d\tau. \quad (2.24)$$

En tenant compte de

$$\frac{d^{m+1}(\tau-\alpha)^\alpha}{d\tau^{m+1}} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)(\tau-\alpha)^{\alpha-m+1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha-m} (\tau-\alpha)^{\alpha-m+1}$$

et en effectuant le changement de variables $\tau = \alpha + \xi(t-\alpha)$, on arrive à :

$$\begin{aligned}
 {}_a^G D_t^p (t-\alpha)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-\alpha)^{\alpha-m-1} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(-p+m+1, \alpha-m)}{\Gamma(\alpha-m)\Gamma(-p+m+1)} (t-\alpha)^{\alpha-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-\alpha)^{\alpha-p}. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Notons que l'expression (2.25) est formellement identique à l'expression (2.23), on peut donc conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynômiale $f(t) = (t-\alpha)^\alpha$ est donnée par la formule :

$${}_a^G D_t^p (t-\alpha)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(-p+\alpha+1)} (t-\alpha)^{\alpha-p} \quad (2.26)$$

avec

$$p < a, a > -1 \text{ ou bien } (0 \leq m \leq p < m+1, a > m).$$

Dérivées fractionnaire d'une constante :

La dérivée fractionnaire de Grunwald-Lenikov d'une fonction constante est en générale ni nulle ni constante, en effet :

Si $f(t) = C$ et α non entier, on a $\int^k(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \dots, m$ et donc :

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.27)$$

D'autre part, pour $j = 1, \dots, [\alpha] + 1$, nous avons :

$${}_a^G D_t^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = 0.$$

Composition avec les dérivées d'ordre entier :

Proposition 24 Soient m un entier strictement positif et p non entier. Alors :

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^p f(t)) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) \quad (2.28)$$

et

$${}_a^G D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)}. \quad (2.29)$$

Composition avec les dérivées fractionnaires :

Définition 25 Considérons maintenant la dérivée fractionnaire d'ordre q d'un fractionnaire dérivative de commande p

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q f(t)).$$

Proposition 26 Trois cas sont à distinguer :

1. Pour $q < 0$ et $p \in \mathbb{R}$, on a :

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t)$$

2. Si $0 \leq m < q < m+1, p < 0$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions :

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

alors,

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t).$$

3. Si $0 \leq m < q < m + 1$, $0 \leq n < p < n + 1$ et la fonction $f(t)$ vérifie les conditions

$$f^{(k)}(a) = 0, \text{ pour tout } k = 0, 1, 2, \dots, r - 1 \text{ où } r = \max(m, n)$$

alors,

$${}_a^G D_t^p ({}_a^G D_t^q (f(t))) = {}_a^G D_t^q ({}_a^G D_t^p (f(t))) = {}_a^G D_t^{p+q} f(t).$$

2.4.2 Dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville :

Dans cette section nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

Intégrales de Riemann-Liouville :

Définition 27 [23], [25] Soit $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in (\operatorname{Re}(\alpha) > 0)$ notée I^α est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 28 La formule (2.30) est une généralisation de la n -ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.

Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles :

Soit la fonction $f(t) = (t - \alpha)^\beta$ où $\beta > -1$

$$I_a^\alpha (t - \alpha)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - \alpha)^\beta d\tau.$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = \alpha + (t - \alpha)s$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t - \alpha)^\beta &= \frac{(t - \alpha)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1 - s)^{\alpha - 1} s ds \\
&= \frac{(t - \alpha)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\
&= \frac{(t - \alpha)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (t - a)^{\beta + \alpha}. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

La relation (2.31) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

Et en particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
{}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{\frac{x}{\pi}} \\
{}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\
{}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15} \sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Proposition 29 Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0[a, b)$.

i)

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha + \beta} f, \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0). \tag{2.32}$$

ii)

$$\frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha - 1} f)(t), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 1. \tag{2.33}$$

iii)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.34}$$

Dérivées d'ordre arbitraire :

Définition 30 Soit $\alpha \in [m - 1, m]$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
{}^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m [(I_a^{m - \alpha} f)(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} f(\tau) d\tau. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles :

Remarque 31 *i) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation se réduit à :*

$${}^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} = \beta (t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt} (t-a)^\beta \quad (2.36)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

c'est à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a :

$${}^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^\alpha.$$

Définition 32 (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*) :

$$\forall t > a, {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 33 (*Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*) :

$$\forall t < b, {}^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (\tau-t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 34 (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche*) :

$$\forall t > a, {}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 35 (*Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite*) :

$$\forall t < b, {}^R D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^R D_t^\alpha f(t)$ et ${}^R D_b^\beta f(t)$ sont définies.

2.4.3 Dérivées fractionnaires au sens Caputo :

Dans le développement de la théorie des intégrations et des dérivations fractionnaires ainsi que ses applications en mathématiques pures, la définition de Riemann-Liouville a joué un rôle très important. Néanmoins, les résolutions des problèmes physiques requièrent une certaine révision de cette approche bien établie. Plusieurs travaux sont apparus, notamment en diffusion et en électricité où la dérivation fractionnaire est utilisée pour mieux décrire certaines propriétés physiques.

En général, les problèmes appliqués requièrent des définitions permettant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales de types fractionnaires que sont difficiles à interpréter physiquement. En dépit du fait qu'un tel problème de valeur ou condition initiale peut être bien résolu en utilisant une représentation diffusivité. Cependant, Sabatier et al [26] montrent que ni l'approche de Riemann-Liouville, ni l'approche de Caputo ne peuvent être utilisées pour prendre en compte les conditions initiales d'une manière commode d'un point de vue physique. Pour éventuellement pallier à cette situation, Caputo dans [27] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par Caputo et Mainardi [28] dans leurs travaux en viscoélasticité.

Définition 36 [25] *la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par la relation suivante :*

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.37)$$

avec $m \in \mathbb{N}$ et $m = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Remarque 37 *L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

Exemple 38 *La dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$, ($n - 1 < \alpha \leq n$) de $f(x) = (x - a)^\beta$*

pour $\beta \geq 0$ est :

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0, \beta \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} (x - a)^{\beta - \alpha}, \text{ si } \beta > n - 1 \end{cases}$$

en particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors :

$${}^C D_a^\alpha f = 0.$$

Définition 39 (*Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche*)

$$\forall t > \alpha, {}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_\alpha^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Définition 40 (*Dérivée fractionnaire de Caputo à droite*)

$$\forall t > b, {}^C D_b^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} (-1)^m \int_t^b (t - \tau)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}^C D_t^\beta f(t)$ sont définies.

Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[\alpha, t]$ (respectivement $[t, b]$) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).

2.5 Propriétés des dérivées fractionnaires :

Dans cette section, nous intéressons aux propriétés de dérivation et d'intégration fractionnaire, qui sont utilisées à la suite de cette thèse.

2.5.1 Linéarité :

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire :

$${}_a D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^p f(t) + \mu {}_a D_t^p g(t) \quad (2.38)$$

où ${}_a D_t^p$ désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans cette thèse.

La linéarité de la dérivation fractionnaire découle de la définition correspondante.

Par exemple, pour les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov définies par la formule (2.18) on a :

$$\begin{aligned} {}_a^{GL} D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} (\lambda f(t-kh) + \mu g(t-kh)) \\ &= \lambda \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh) \\ &\quad + \mu \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} g(t-kh) \\ &= \lambda {}_a^{GL} D_t^p f(t) + \mu {}_a^{GL} D_t^p g(t) \end{aligned}$$

et pour les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre $p(k - 1 \leq p < k)$ définies par la formule (2.35), on a :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} (\lambda f(\tau) + \mu g(\tau)) d\tau \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\mu}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} g(\tau) d\tau \\ &= \lambda_a^R D_t^p f(t) + \mu_a^R D_t^p g(t) \end{aligned}$$

2.5.2 Règle de Leibniz :

Prenons deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, et commençons par la règle connue, de Leibniz, pour évaluer la n -ième dérivée de la produit $f(x) \times g(x)$, on a pour tout entier n :

$$\frac{d^n}{dt^n} (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t). \quad (2.39)$$

La généralisation de cette formule pour la dérivation fractionnaire est la suivante :

Si f continue dans $[a; b]$, g admet $(n + 1)$ dérivée continue dans $[a; b]$ alors la règle de Leibniz pour la dérivée fractionnaire du produit $f(t)g(t)$ est donnée par :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) - R_n^p(t), \quad n \geq p + 1 \quad (2.40)$$

où

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n d\xi \quad (2.41)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0.$$

Si f et g avec toutes ses dérivées sont continues sur $[a, b]$, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} f^{(k)}(t)D^{p-k}g(t) \quad (2.42)$$

D^p désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

2.5.3 Intégration par parties :

Théorème 41 Soient $0 < \alpha < 1$ et $\alpha < t < b$. Alors :

$$\int_{\alpha}^t [{}^R D_t^{\alpha} f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^t f(\tau) [{}^R D_t^{\alpha} g(\tau)] d\tau \quad (2.43)$$

$$\int_t^b [{}^R D_b^{\alpha} f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_t^b f(\tau) [{}^R D_t^{\alpha} g(\tau)] d\tau. \quad (2.44)$$

En particulier :

$$\int_a^b [{}^R D_b^{\alpha} f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) [{}^R D_b^{\alpha} g(\tau)] d\tau \quad (2.45)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_a^t [{}^R D_t^{\alpha} f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{d}{d\tau} \left(\int_a^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_a^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right) g'(\tau) d\tau \\ &\quad + \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(\tau) \int_a^{\tau} (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \right]_{\tau=\alpha}^{\tau=t} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\int_u^t (\tau-u)^{-\alpha} g'(\tau) d\tau \right) f(u) du \\ &\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \\ &= \int_a^t f(u) [{}^C D_t^{\alpha} g(u)] du \\ &\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \\ &= \int_a^t f(u) \left[{}^R D_t^{\alpha} g(u) - g(t) \frac{(t-u)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] du \\ &\quad + g(t) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau-u)^{-\alpha} f(u) du \\ &= \int_a^t f(u) [{}^R D_t^{\alpha} g(u)] du \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^R D_t^{\alpha} g(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

■

La second formule se montre de la même manière.

Théorème 42 soient $0 < \alpha < 1$ et $a < t < b$. Alors :

$$\int_a^t [{}^C D_t^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) [{}^C D_\tau^\alpha g(\tau)] d\tau + g(t) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} f(t) - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a) \quad (2.46)$$

$$\int_a^b [{}^C D_b^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau = \int_t^b f(\tau) [{}^C D_\tau^\alpha g(\tau)] d\tau + g(t) {}_t D_b^{-(1-\alpha)} f(t) - f(b) {}_t D_b^{-(1-\alpha)} g(b). \quad (2.47)$$

En particulier :

$$\int_a^b [{}^C D_t^\alpha f(t)] g(t) dt = \int_a^b f(t) [{}^C D_t^\alpha g(t)] dt + g(b) {}_a D_b^{-(1-\alpha)} f(b) - f(a) {}_a D_b^{-(1-\alpha)} g(a). \quad (2.48)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_a^t [{}^C D_t^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau &= \int_a^t [{}^R D_t^\alpha f(\tau)] g(\tau) d\tau - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (\tau-a)^{-\alpha} g(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^R D_t^\alpha g(\tau)] d\tau - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^C D_t^\alpha g(\tau)] d\tau + \frac{g(t)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \\ &\quad - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a) \\ &= \int_a^t f(\tau) [{}^C D_t^\alpha g(\tau)] d\tau - f(t) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(t) \\ &\quad - f(a) {}_a D_t^{-(1-\alpha)} g(a). \end{aligned}$$

■

Il en va de même pour l'autre formule.

2.5.4 Relation entre les dérivées :

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}^*$ $m = [\alpha] + 1$. Si ${}^C D_t^p f(t)$ et ${}^R D_t^p$ existent, alors :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \quad (2.49)$$

et :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)}{i!} (t-a)^i \right). \quad (2.50)$$

On déduit que si $f^i(a) = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, m-1$, on aura :

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t).$$

2) Si $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville celle de Caputo sont définies respectivement par :

$${}_a^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left(D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau \quad (2.51)$$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^{-(1-\alpha)} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

et on a les propriétés suivantes :

- Si $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}_a^C D_t^\alpha f(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

et

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha (f(t) - f(a)). \quad (2.54)$$

- Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

$$[{}_a^C D_t^\alpha I_a^\alpha f(t)] = f(t). \quad (2.55)$$

- Si $f \in C^m [a, b]$, alors :

$$I_a^\alpha [{}_a^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^i(a)}{i!} (t-a)^i. \quad (2.56)$$

pour la preuve (voir [23]).

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Caputo du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Exemple 43 Soient la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$, m un entier et p un réel tels que $0 \leq m - 1 < \alpha < m$ avec $\beta > m - 1$

on a :

$$f^m(\tau) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - m + 1)} (\tau - a)^{\beta - m}$$

donc :

$${}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - m} d\tau,$$

en effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t - a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - m} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{m - \alpha - 1} s^{\beta - m} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(m - \alpha, \beta - m + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Remarque 44 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit : ${}_a^C D_t^\alpha = 0$.

2.6 Stabilités des systèmes fractionnaires

2.6.1 Stabilité des systèmes fractionnaires linéarisé :

Soit le système fractionnaire linéaire suivant :

$${}_a^C D_t^p y(t) = Ay(t); 0 < p < 1 \quad (2.58)$$

A est la matrice jacobienne f et puis on a appliqué le théorème suivant :

Théorème 45 [29] :

Soit le système (2.58) :

Le système (2.58) est asymptotiquement stable, si et si seulement si, $|\arg(\lambda)| > p\frac{\pi}{2}$, pour tout : valeurs propres de la matrice A . Aussi, le vecteur d'état $y(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante : $\|y(t)\| < Nt^{-p}, p > 0$

Le système (2.58) est stable, si et si seulement si, la condition $|\arg(\lambda)| \geq p\frac{\pi}{2}$ est vérifiée pour toute valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfont à $|\arg(\lambda)| = p\frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique qui coïncide avec leur multiplicité algébrique ($\lambda v = \lambda A$).

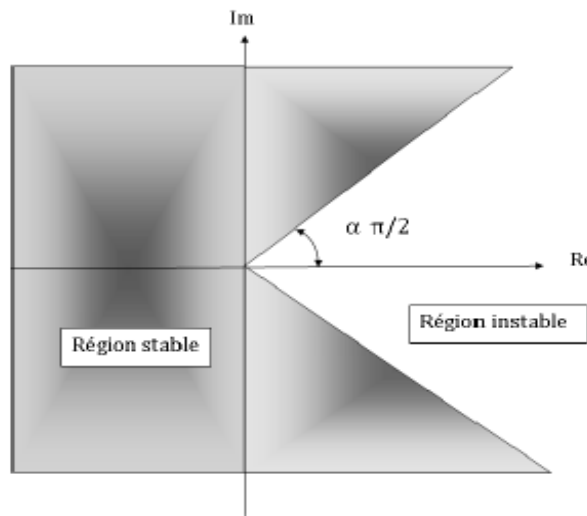


FIG (2.3) : Regions stable et instable.

Corollaire 46 [30] Supposons que $p_1 \neq p_2 \neq \dots p_n$ et tous les i sont des nombres rationnels entre 0 et 1 soit m le plus petit commun multiple des dénominateurs u_i de p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) où $p_i = \frac{v_i}{u_i}, v_i$ et $u_i \in \mathbb{Z}_+$ avec $i = 1; 2 \dots, n$ et en posant $\rho = \frac{1}{m}$; donc le système (2.58) est asymptotiquement stable si $|\arg(\lambda)| > \rho\frac{\pi}{2}$ pour toutes les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$\det(\text{diag}([\lambda^{mp_1}, \dots, \lambda^{mp_n}] - A) = 0.$$

Exemple 47

$$\begin{cases} {}^c D_t^{0.75} y_1 = -y_2 \\ {}^c D_t^{0.75} y_2 = y_1 \end{cases}$$

alors :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres est : $\lambda_1 = i; \lambda_2 = -i$

on a : $\arg(\lambda_1) = \frac{\pi}{2}; \arg(\lambda_2) = \frac{3\pi}{2}$.

il est clair que : $|\arg(\lambda_{1,2})| > \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$

Donc : le système est asymptotiquement stable.

2.6.2 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaire :

Soit le système fractionnaire non linéaire donné par :

$$\begin{cases} {}^c D_t^p y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; k = 0, 1 \dots n-1 \end{cases} \quad (2.59)$$

Théorème 48 [31] *La solution trivial du système (2.59)*

est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction Lyapunov définie positive $V(y(t))$ telle que ${}^c D_t^p (Vy(t)) < 0$ pour $t > 0$.

Lemme 49 [32] *Soit $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, avais des dérivées continues dans, H est une matrice définie positive; alors $\forall t > 0$*

$${}^c D_t^p \left(\frac{1}{2} y^T(t) H y(t) \right) < y^T(t) H {}^c D_t^p y(t); \forall 0 < p < 1.$$

Exemple 50

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = -x_2(t) + x_1(t) (x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \\ {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = x_1(t) + x_2(t) (x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre est $(0,0)$, la matrice jacobienne du système à l'origine est donnée par :

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1 + i$ et $\lambda_2 = -1 - i$.

Ce qui donne

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \frac{3}{4}\pi > \frac{1}{4}\pi$$

donc le point d'équilibre est asymptotiquement stable.

2.7 Conclusion :

Ce chapitre nous a permis d'une part de connaître des fonctions Gamma, Beta et Mittag-Leffler d'autre part il nous a permis de comprendre les concepts de base du calcul fractionnaire et les propriétés de la dérivée fractionnaire, et finalement cela nous a permis d'introduire le théorème de Matignon.

Chapitre 3

Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz :

3.1 Introduction :

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Nous étudions la dynamique de ce modèle dans ce chapitre.

3.2 Les équations non-linéaires de Lorenz :

On considère le système de Lorenz suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = rx - xz - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec $\sigma = 10$; $b = \frac{8}{3}$.

Ce système est un modèle simplifié du phénomène de convection naturelle entre deux plaques planes horizontales, infinies. La plaque supérieure étant à la température T et la plaque inférieure à la température $T + \Delta T$. Le lecteur intéressé par l'établissement de ce système pourra se reporter à ou Le paramètre r est lié à ΔT et donc au nombre de Rayleigh ; x est proportionnel à la vitesse du fluide, y caractérise la différence de température entre le fluide montant et le fluide descendant, z est proportionnel à la déviation du profil vertical de température par rapport à sa valeur d'équilibre. Ce modèle n'est valable que dans le voisinage immédiat de la transition conduction/convection car les coefficients de Fourier retenus par Lorenz décrivent de simples rouleaux. Le chaos de Lorenz

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 47

est donc différent du chaos expérimental pour lequel il faut beaucoup de modes Fourier.

3.2.1 Les points fixes et leur stabilité :

L'origine est un point fixe. La matrice jacobienne à l'origine est :

$$D(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Son équation caractéristique ;

$$(\lambda + b) [(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + (1 - r))] = 0 \quad (3.3)$$

a pour racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1 + \sigma) \pm \sqrt{(1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}, \lambda_3 = -b. \quad (3.4)$$

Tant que $0 < r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives : le point fixe est stable.

Quand $r = 1$, valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\sigma + 1), \lambda_3 = -b. \quad (3.5)$$

Nous verrons dans l'exemple que ce cas correspond à une bifurcation fourche.

Pour $r > 1$, on a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. L'origine est devenue instable. Mais lorsque $r > 1$, deux nouveaux points fixes apparaissent que nous désignons par C , C' et dont les coordonnées sont :

$$x^* = y^* = \pm \sqrt{b(r - 1)}, z^* = r - 1, \quad (3.6)$$

La matrice jacobienne correspondant à ces points fixes s'écrit :

$$D(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \quad (3.8)$$

Les relations entre les racines et les coefficients de $P(\lambda)$ s'écrivent :

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 48

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -(\sigma + b + 1), \\
 \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 &= b(\sigma + r), \\
 \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -2\sigma b(r - 1).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pour $r > 1$, les coefficients de (3.8) sont tous positifs. On en déduit qu'une racine de (3.8) est réelle négative ; notons λ_3 cette racine. On n'applique la formule de Cardon, les deux autres racines sont réelles si :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \leq 0$$

où p et q sont les coefficients de l'équation réduite :

$$u^3 + pu + q = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
 u &= \lambda + \frac{1}{3}(\sigma + b + 1), \\
 p &= b(r + \sigma) - \frac{1}{3}(\sigma + b + 1)^2, \\
 q &= \frac{2}{27} = (\sigma + b + 1)^3 - \frac{1}{3}b(r + \sigma)(\sigma + b + 1) + 2\sigma b(r - 1).
 \end{aligned}$$

Pour les valeurs des paramètres $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$, la relation $q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ est obtenue pour $r = r_1 = 1.34561 \dots$. Les trios racines (3.8) de sont donc réelles si $r < r_1$ et elles sont toutes négatives.

Si r est légèrement plus grand que r_1 , il y a une racine réelle négative λ_3 et deux racines complexes conjuguées. Écrivons le polynôme caractéristique (3.8) sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_r - i\lambda_i)(\lambda - \lambda_r + i\lambda_i) \text{ avec } \lambda_{1,2} = \lambda_r \pm i\lambda_i$$

(3.9) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \lambda_3 + 2\lambda_r &= -(\sigma + b + 1), \\
 \lambda_r^2 + \lambda_i^2 + 2\lambda_3\lambda_r &= b(\sigma + r), \\
 \lambda_3(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) &= -2\sigma b(r - 1).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour $r > r_1$ et proche de r_1 , λ_r reste négatif et les points fixes C, C' sont restés stables. Si r continue à croître, on obtient $\lambda_r = 0$ lorsque :

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 49

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (3.11)$$

(c'est-à-dire $r_c \approx 24.7368$ pour $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$). Cette valeur du paramètre r correspond à une bifurcation de Hopf. Les valeurs propres sont alors, d'après (3.10) :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0; \lambda_3 = -(\sigma + b + 1) \quad (3.12)$$

avec $\omega_0^2 = b(r_c + \sigma) = 2\sigma b(\sigma + 1) / (\sigma - b - 1)$.

Si r croît encore, pour $r > r_c$ les points fixes C, C' deviennent instables à leur tour car λ_r est devenue positive et on obtient un attracteur chaotique (trouvé par Lorenz [33] à $r = 28$).

La divergence du champ de vecteurs f est partout négative :

$$Div f = -\sigma - 1 - b = -\frac{41}{3}.$$

Donc les éléments de volume se contractent. Au bout d'une unité de temps cette contraction réduit un volume donné V_0 d'un facteur

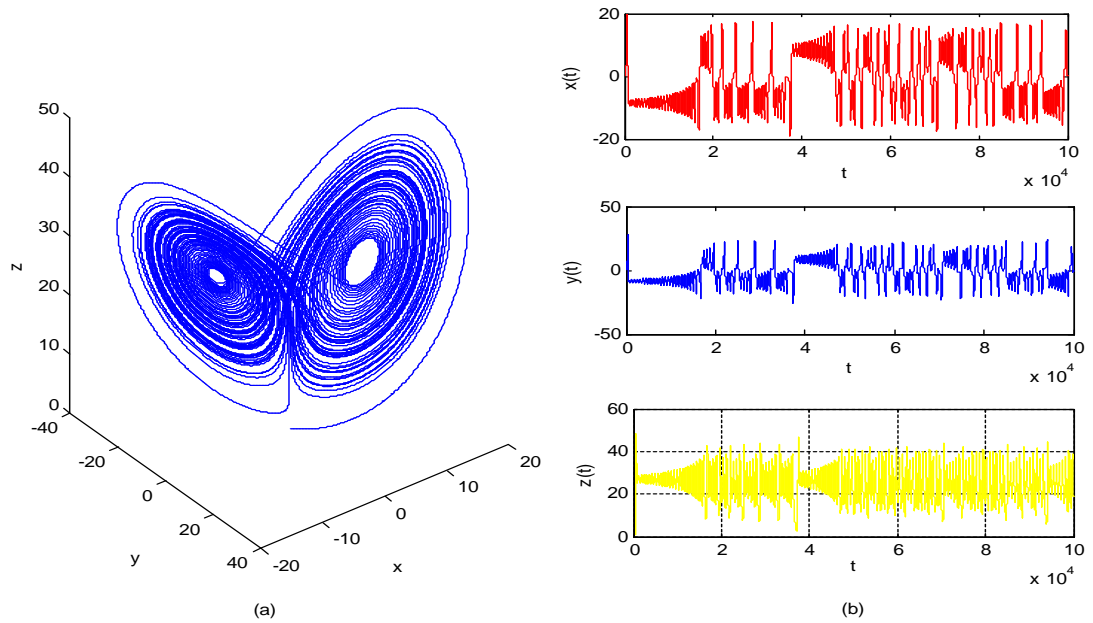
$$e^{-(\sigma+b+1)} = e^{-41/3}.$$

3.2.2 Comportement chaotique et attracteurs étranges :

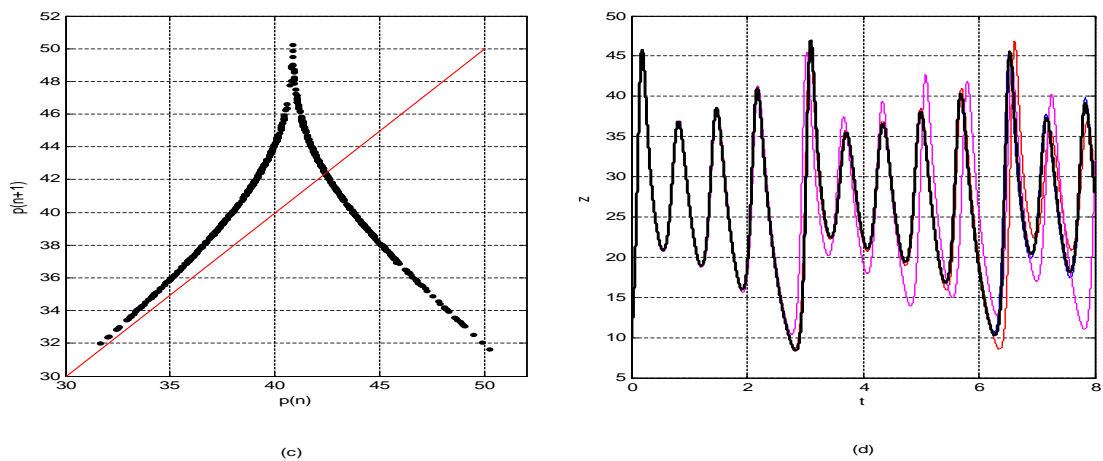
Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions chaotiques des équations de Lorenz non-linéaires. Les équations (3.10) dépendent de trois paramètres, ce qui rend une recherche complète des régions chaotiques dans cet espace de paramètres très difficile. Comme il n'existe pas de méthode simple pour prédire quelle région de l'espace des paramètres donne une solution chaotique, on va fixer les paramètres, et considérer la phase du champ feedback r comme paramètre de contrôle. Parmi plusieurs ensembles dans l'espace des paramètres, pour lesquels un comportement chaotique a pu être observé, nous citons les deux

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 50

configurations.



FIG(3.1) : (a) Attracteur de Lorenz (b) séries temporelles



FIG(3.2) : (c) Application de Poincaré (d) sensibilité des conditions initiales différentes

On peut construire l'application de Poincaré comme la fonction reliant x_{k+1} à x_k . E.N. Lorenz lui-même avait tracé une telle application en portant la valeur

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 51

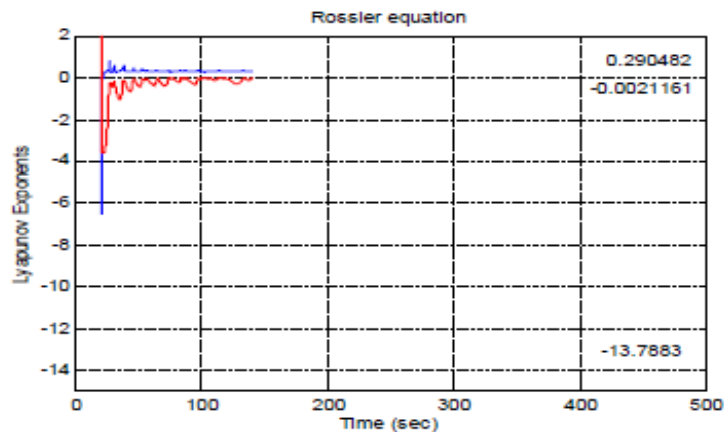
d'un maximum de z , soit z_{k+1} en fonction du maximum précédent z_k . Ces valeurs z_{\max} sont les coordonnées z des points de la section de Poincaré faite suivant la surface d'intersection: $xy - bz = 0$ (soit $z = 0$ dans la troisième équation du modèle de Lorenz. La pente de la courbe donnant $z_{k+1} = f(z_k)$ qu'il avait obtenu et dont l'allure est celle d'un accent circonflexe était partout supérieure à l'unité en valeur absolue.

Ce qui indique qu'indépendamment du déterminisme inhérent à l'existence d'une relation bien définie entre z_{k+1} et z_k , l'écart entre deux trajectoires voisines distantes de Δz est multiplié par la pente locale de la courbe. Cette amplification indéfinie des écarts interdit la prédictibilité à long terme. Ainsi, quelle que soit la valeur initiale z_0 dans l'intervalle considéré, le comportement sera chaotique.

Les exposants de Lyapounov ont été calculé pour chacun de ces ensembles, en utilisant l'algorithme de Wolf [18]. l'existence d'un attracteur chaotique a été attestée.

Par l'existence d'une valeur positive du plus grand exposant de Lyapounov. Certaines régions critiques ont ensuite été identifiées et étudiées plus étroitement.

Une fois les régions chaotiques identifiées, les attracteurs correspondants ont été étudiés pour certaines valeurs choisies de c . Le comportement à long terme est étudié pour c se trouvant dans la région où un exposant de Lyapounov positif a été détecté. Une telle évolution est illustrée dans la figure FIG(3.3)



FIG(3.3) : Exposants de Lyapounov de Lorenz

est aussi caractérisé par l'estimation de sa dimension de Lyapounov 2.65.

Une autre caractéristique de cet attracteur chaotique est fournie par l'application de Poincaré représentée dans la figure FIG(3.2).

3.3 Les équations de Lorenz d'ordre fractionnaire :

Nous allons maintenant nous intéresser au modèle fractionnaire et essayer d'obtenir quelques résultats sur la dynamique de ce modèle.

$$\begin{cases} {}^C D_t^p x = \sigma(y - x) \\ {}^C D_t^p y = rx - xz + y \\ {}^C D_t^p z = xy - bz \end{cases} \quad (3.13)$$

Considérons le système fractionnaire commensurable suivant :

$${}^C D_t^p x = f(x)$$

où $0 < p < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Les points d'équilibre de ce système sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. D'après le théorème [29], ces points sont localement asymptotiquement stables si :

toutes les valeurs propres i de la matrice Jacobienne $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ évaluée au point d'équilibre vérifient la condition suivante :

$$Arg(\lambda_i) > p \frac{\pi}{2}.$$

Dans la théorie des systèmes dynamiques tridimensionnels, un point selle est un point d'équilibre pour lequel le système linéarité équivalent possède au moins une valeur propre dans la région stable et une dans la région instable, de plus, ce point est un point selle d'indice 1 si une des valeurs propres est instable et les autres sont stables, et d'indice 2 si deux valeurs propres sont instables et la troisième est stable.

Concernant les systèmes chaotiques, il a été prouvé que les "les scrolls" sont générés seulement autour d'un point selle d'indice 2. Cependant, les points selles d'indice 1 ne sont responsables que de connecter ces scrolls.

Supposons qu'un système chaotique de dimension 3 possède un attracteur 1-scroll, ce système possède alors un point selle d'indice 2 encerclé par cet attracteur, et supposons que $\lambda = \alpha \pm j\beta$.

Sont les valeurs propres instables de ce point selle d'indice 2. Une condition nécessaire pour le système fractionnaire (3.13) d'avoir un comportement chaotique est de maintenir les valeurs propres dans la région instable, ce qui revient à dire :

$$p_c = \frac{2 \min_{1 \leq i \leq N} |\arg(\lambda_i)|}{\pi}. \quad (3.14)$$

Pour les valeurs : $a = 10, b = 8/3, r = 28$, les points fixes sont :

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 53

Points d'équilibres	Valeurs propres
(0, 0, 0)	$\lambda_1 = -22.8277, \lambda_2 = 11.8277, \lambda_3 = -2.6667$
(8.4853, 8.4853, 24)	$\lambda_1 = -13.8546, \lambda_{2,3} = 0.0940 \pm 10.1945i$
(-8.4853, -8.4853, 24)	$\lambda_1 = -13.8546, \lambda_{2,3} = 0.0940 \pm 10.1945i$

Pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre, nous allons utiliser le théorème 36 (Matignon [29]).

De plus, en utilisant les valeurs de paramètres mentionnées ci-dessus, on vérifie que :

- (1) Pour le point fixe $E_0 = (0, 0, 0)$, $|\arg(\lambda_2)| = 0 < p\frac{\pi}{2}$ pour tout $0 < p < 1$ donc E_0 est instable.
- (2) Pour les points fixes $E_1 = (8.4853, 8.4853, 24)$, $E_2 = (-8.4853, -8.4853, 24)$ on a : $|\arg(\lambda_1^i)| = \pi$, $|\arg(\lambda_{2,3}^i)| = 1.5616$
Alors, $\min_{1 \leq i \leq 3} |\arg(\lambda_{1,2,3})| = 1.5616$.

Donc la valeur critique est :

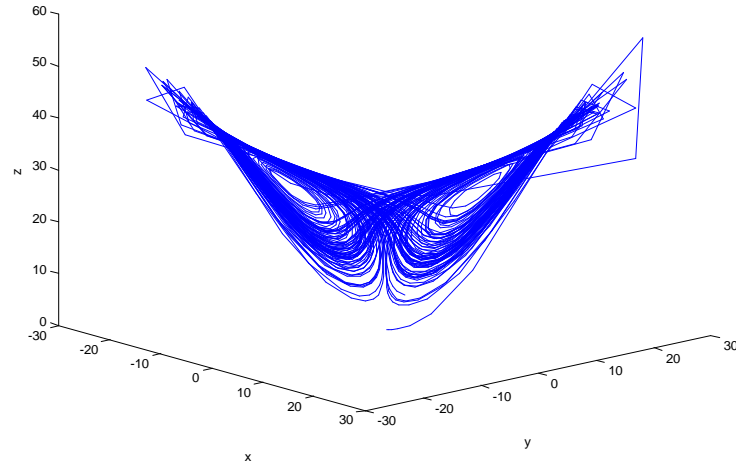
$$p_c = \frac{2 \min_{1 \leq i \leq 3} |\arg(\lambda_{1,2,3})|}{\pi} = 0.99415.$$

- (i) Si $p < 0.99415$ donc E_1, E_2 sont asymptotiquement stable.
- (ii) Si $p > 0.99415$ donc E_1, E_2 sont instable.

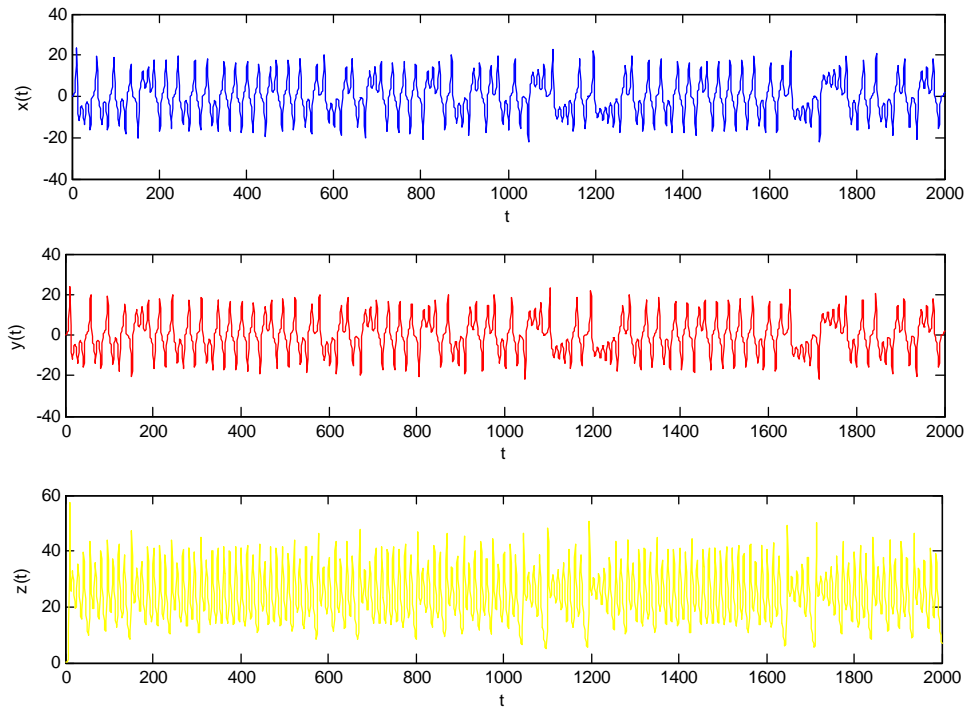
Par conséquent, l'ordre fractionnaire ; le plus bas, dont le système d'ordre fractionnaire (3.13) montre le chaos est donné par l'inégalité $p > 0.85408$.

Ce système sera intégré numériquement pour montrer la chaotification en utilisant une méthode efficace de résolution équations différentielles d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire le schéma de Grünwald-Letnikov pour les valeurs : $\sigma = 1, b = 10, r = 28, p = 0.993$; et la condition initial $(x, y, z) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

3. Application de la théorie du Chaos sur le système de Lorenz : 54



FIG(3.4) : 3-D Attrateur chaotique du système fractionnaire de Lorenz



FIG(3.5) : Séries chronologique

3.4 Conclusion :

Ce chapitre contient l'application de la théorie de chaos au système de Lorenz dans laquelle les attracteurs chaotiques de ce système sont représentés, dan des figures obtenu par simulation en matlab.

Conclusion générale :

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'étude d'un système dynamique chaotique d'ordre fractionnaire :

Nous avons introduit quelques notions de base des systèmes dynamiques chaotiques et nous avons exposé la théorie de la dérivation fractionnaire : différents types de dérivation fractionnaire (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo), et nous avons exposé les différents critères de stabilité d'un système non-linéaire. système, et enfin nous avons réalisé l'étude qualitative et numérique du système de Lorenz.

Annexe A :

Rappelons que le système de Lorenz est le suivant :

$$\begin{aligned} D_t^{p_1} x &= \sigma(y - x) \\ D_t^{p_2} y &= x(r - z) - y \\ D_t^{p_3} z &= xy - \beta z \end{aligned}$$

L'algorithme de système de Lorenz par la méthode de Runge-kutta :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(t_n, y(t_n)) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n) + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(t_n + h, y(t_n) + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

L'algorithme de système de Lorenz fractionnaire par la méthode de Grünwad-Letnikov :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varpi_k^{(p_1)} = (1 - \frac{1+p_1}{k})\varpi_{k-1}^{(p_1)} \\ \varpi_k^{(p_2)} = (1 - \frac{1+p_2}{k})\varpi_{k-1}^{(p_2)} \\ \varpi_k^{(p_3)} = (1 - \frac{1+p_3}{k})\varpi_{k-1}^{(p_3)} \\ x_k = [\sigma(y_{k-1} - x_{k-1})]h^{p_1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p_1)} x_{k-j} \\ y_k = [x_k(r - z_{k-1}) - y_{k-1}]h^{p_1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p_1)} y_{k-j} \\ z_k = [x_k y_k - \beta z_{k-1}]h^{p_1} - \sum_{j=1}^k \varpi_k^{(p_1)} z_{k-j} \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] R.Roy, Jr, T. W, Murphy, T. D.Maier, Z.Gills, E. R,Hunt, "Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system.Physical Review Letters" 68 (9) (1992) 1259-1262.
- [2] V.Petrov, V.Gaspar, J.Masere, and K. Showalter,"Controlling chaos in the Belousov Zhabotinsky reaction".Nature 361 (6409) (1993) 240-243.
- [3] A.GarÖnkel, J. N.Weiss,W. L. Ditto, and M. L.Spano,"Chaos control of cardiac arrhythmias.Trends in Cardiovascular Medicine " (2) (1995) 76-80.
- [4] J.Ding, and H.X.Yao,"Chaos control of a kind of non-linear Önance system". Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition) 25 (6) (2004) 500-504.
- [5] C.F. Lorenzo, T.T.Hartley " *Initialisation in the generalised fractionl calculus* ", Technical report,NASA/TM-1998-208415,1998
- [6] Ourida Chabour, Stabilisation des systèmes non linéaires, ThÈse, Université de Metz, Mars 2000.
- [7] RUELLE, D et TAKENS, F. On the nature of turbulence. Commun Math Phys 1971, 20, 167-192
- [8] E. Cherrier, Estimation dd l'état des entées inonnues pour une classe de systèmes non linéaires, Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, (2006).
- [9] P. Bergé, Y. Pomeau, and C.Vidal : "Líordre dans le chaos",Collection Enseignement des Sciences, Hermann édition (1988).
- [10] Marc. Chaperon, Calcul différentiel et calcul intégrale 3^e année, Dunod, paris, (2008).
- [11] A.M.Lyapunov "The general problem of the stability of motion", Thèse, St Petersburg, (1899), reproduite dans "Problème général de la stabilité de mouvement,"Ann. Fac. Sci., Toulouse 9, 203-474, (1907), reproduit dans Ann. Math.Stud., N° 12, (1949).
- [12] A.Hurwitz,Über die "Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt", Math. Ann., 41, 403-442, (1893).

-
- [13] Dang-Vu, H and Delcarte, C, "Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica,"Marketing, Paris : Ellipses Ed, 2000.
- [14] Berger, P and Pomeau, Yves and Vidal, Charles, "L'ordre dans le Chaos : Vers une Approche Deterministe de la Turbulence,"Paris : Hermann, 1984.
- [15] Goncalves, E. "Introduction aux systèmes dynamiques et chaos." Institution National Polytechnique de Grenoble (2004).
- [16] Zeraoulia Elhadj, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d'un modèle issu du modèle de chen, Thèse, constantine, fevrier, (2006).
- [17] Michaels, Alan Jason. Digital chaotic communications. Diss. Georgia Institute of Technology, 2009.
- [18] A.Wolf, J.B.Swift, H.L.Swinney and J.A.Vastano : "Determining Lypunov Expoents from a Time series" , Physica.vol16, pp.285-317-1985
- [19] Hausdorff, Felix. Dimension und äufres Maf, Mathematische Annalen, vol. 79, no . 1-2, pp. 157-179, (1918).
- [20] Peter Grassberger. I.Procaccia. "Measuring the strangeness of strange attractor," Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 9 no. (1,2), pp . 189-208. (1983).
- [21] Tidjani Menacer, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Université de Constantine 1, (Mai 2014).
- [22] Layec Alan. Développement de modèles de CAO pour la simulation système des systèmes de communication : application aux communications chaotiques. Thèse de doctorat : Électronique des Hautes Fréquences et Optoélectronique. Limoges : Université de Limoges, (2006)
- [23] I. Podlubny "*Fractional Differential Equations*", Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [24] A. Erdélyi (ed), Higher Transcendental Functions, vol. 3, AICGrawHill, New York, 1955.
- [25] A.Kilbas, H. M. Srivastava, et J. J. Trujillo. Theory and Application of Fractional Differential equations. Elsevier, North-Holland, 2006.
- [26] J. Sabatier, O. P. Agrawal, et J. A. Tenreiro Machado. Advances in fractional calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, 2007.
- [27] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 :529–539, 1967.
- [28] M. Caputo et F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. Riv. Nuovo Cimento (Ser. II), 1 :161–198, 1971.

-
- [29] D. Matignon "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", MQCS-SMC Proceeding July.Lille france ,1996,pp.963-968l
- [30] Z .Chougui , A. Ouannas, "*A new generalized synchronization scheme to control fractional chaotic dynamical systems with different dimensions and orders*"
- [31] D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks", Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 19(12)(2014)4105-4121.
- [32] N. Aguila-Camacho, M. Duarte-Mermoud, J. Gallegos "Lyapunov functions for fractional order systems", Commun Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 19(9)(2014)2951-2957
- [33] C.F. Lorenzo, T.T.Hartley "*Initialisation in the generalised fractionl calculus*", Technical report,NASA/TM-1998-208415,1998