



Université du 20 Août 1955 Skikda  
Faculté De Technologie  
*Département Génie Civil*

Réf : **D012123028D**

# Thèse

D'obtention du diplôme de

## Doctorat

3ème cycle

**Option : *Sol et Structures***

---

### Analyse du problème de coudage des fissures (kinking cracks) dans les matériaux anisotropes

---

Par :

*Derouiche Sami*

#### **Jury de Soutenance :**

<b>Dr. DERABLA Riad</b>	Président	Université Skikda 20 Août 1955
<b>Pr. BOUZIANE Salah</b>	Rapporteur	Université Skikda 20 Août 1955
<b>Pr. BOUZERD Hamoudi</b>	Co-rapporteur	Université Skikda 20 Août 1955
<b>Dr. DJEBIEN Rachid</b>	Examineur	Université Skikda 20 Août 1955
<b>Pr. LASSOUED Rachid</b>	Examineur	Université Mentouri, Constantine 1

## *Louange à Allah*

*... à mon père, ma très chère mère, mes  
sœurs et tout mon entourage.*

### **Remerciement**

Ce périple académique, porté par la plume inspirée de mes deux guides éclairés, le Professeur BOUZIANE Salah et le Professeur BOUZRED Hamoudi, s'achève, égrenant les perles de leurs conseils et les éclats de leurs directives. Leur soutien, pareil à une brise douce, représente des dettes que le temps ne saurait effacer, une gratitude éternelle qui fleurira tout au long de ma vie.

Mes remerciements se déploient en direction des membres du jury examinateur. Le Président de Soutenance, le Dr DERABLA Riad, et les deux examinateurs, le Pr LESSOUED Rachid et le Dr DJEBIEN Rachid, ont accordé leur temps précieux à la lecture, l'étude et la discussion de cette œuvre.

Les échos de reconnaissance résonnent également vers mes anciens collègues au sein de la CRCC "China Railways Construction Company," sur le projet de l'autoroute Est-Ouest Lot Est Algérie. À M. HEDJILA Samir, M. KHEDRAOUI Fouad, et M. DEJIE Liu, ma gratitude infinie.

À mes amis, M. CHENIGUER Badis, Dr BOUZEHZEH Lotfi, M. LOUCIF Lamine, M. SADDOK BOUZIANE Walid, Dr GAHMOSSE Zakaria, Dr FERRADJI Med Amine, Dr DIB Mehdi, Dr BENMALEK Haroune, Dr SOULEYMANI Hichem, et d'autres encore, je tisse des remerciements pour les moments sublimes et les souvenirs inaltérables partagés.

Il va de soi que ma famille, phare dans la nuit, m'a offert un soutien indéfectible. À ma mère, Mme KECHID Fella, qui a semé en moi la confiance, à ma grande sœur DEROUCHE Radja, ma petite sœur DEROUCHE Nesrine, à son époux GRIDI Saddek, et à ma petite nièce adorée GRIDI Maïssa, je tresse des vœux de bénédiction.

Un hommage solennel s'élève vers mon père défunt, guide éternel DEROUCHE Farid, dont le sourire résilient et la joie inaltérable ont illuminé même les jours les plus sombres. Que l'âme de cet homme sage trouve la paix, tandis que nos destins se rejoignent dans les replis du paradis éternel.

## RESUME

La fissuration des matériaux engendrant la rupture et la fragilité de ces derniers, a causé à l'humain des pertes et des destructions allant jusqu'à la catastrophe. C'est là que la mécanique de la rupture s'est imposé pour étudier les causes et la manière du développement de la fissure dans les différents matériaux entourant la vie de l'être humain et les différentes natures des matériaux qui évoquent des comportements distincts et particuliers. Dans la littérature il y a un grand penchant à étudier la nature dite *Isotrope* qui est représentée par un état et des propriétés physiques simplifiées afin de faciliter les calculs des théories de la fissuration. Ainsi, la nature dite « *Anisotrope* » des matériaux seras la mieux placés pour présenter toutes les diverses possibilités des matériaux en nature car elle prend en compte les différentes caractéristiques physiques et mécanique.

Dans ce travail, L'intérêt est porté, dans un premier temps, à ces matériaux puis en deuxième temps à l'extension hors plan de la fissure au sein des matériaux anisotropes. Les deux cas de figure sont traités par une approche numérique s'articulant sur un élément fini mixte nommé RMQ7 développé pour l'investigation des discontinuités dans un solide. Le recours à des implémentations, tel que la fermeture virtuelle de fissure et la procédure dérivative de la rigidité, ont aidé à raffiner le calcul d'un paramètre de fissure appelé *taux de restitution d'énergie*, les résultats sont comparés à ceux de la littérature avec lesquels ils montrent des bons résultats et un excellent accord pour les deux cas de figure.

### **Mots clés :**

Anisotropie ; Eléments Finis ; Mécanique de la Rupture ; Fissure ; Kinking (coudage) ; Taux de Restitution d'Energie.

## ABSTRACT

The development of cracks in materials can lead to fracture and brittleness, resulting in significant loss and destruction for humans. To address this issue, the field of fracture mechanics has emerged, focusing on the causes and development of cracks in various materials found in human environments. Different materials exhibit unique behaviors, and studying them requires a consideration of their distinct physical and mechanical characteristics. While literature has primarily focused on isotropic materials, which are represented by simplified physical states and properties to facilitate crack theory calculations, anisotropy is the most representative characteristic of materials in their natural habitat. Anisotropy accounts for the different physical and mechanical properties of materials, making it crucial for a comprehensive understanding of the behavior of materials in real-world environments. In this work, we focus on anisotropic materials and examine the out-of-plane extension of cracks within them, using a numerical approach called RMQ7, a mixed finite element designed for investigating discontinuities in solids. We analyze the two cases, and the use of implementations, such as Crack closure integral and Stiffness derivative procedure, helps refine the calculation of a crack parameter known as the energy restitution rate. We compare our results with existing literature and find excellent agreement for both cases.

### **Key words:**

Anisotropy; Finite Elements; Kinking; Fracture Mechanics; Crack; Energy Restitution Rate

## ملخص

يتسبب تشقق المواد الذي يؤدي إلى كسر و هشاشتها في خسائر للبشرية و دمار يؤول الى كوارث. هنا فرضت أبحاث ميكانيك التشقق نفسها في دراسة اسباب و طرق تطور التشققات في مختلف المواد المحيطة بالانسان حيث اصبح من المعلوم ان طبيعة المواد المختلفة تثير على سلوكيات متميزة و خاصة لكل مادة. في أعمال عدة، يوجد ميول نحو الاعتماد على المواد المتساوية المناحي التي تتمثل في حالة فيزيائية مبسطة و لغرض تسهيل تطبيق مختلف النظريات حول التشقق. و لكن المواد المسماة بالمتباينة المناحي و التي تمثل الحالة العامة للمادة المتواجدة في الطبيعة، لأنها تأخذ بعين الاعتبار جل الخصائص الفيزيائية و الميكانيكية.

في هذا العمل، الاهتمام مركز على التشقق في المواد المتباينة المناحي أولاً ثم انعراج التشقق عن مساره في نفس المواد الثلاثية المناحي. كلتا الحالتين معالجتين بمقاربة رقمية باستعمال عنصر محدود مختلط المسمى بـ "RMQ7" المطور لغاية البحث في الاجسام ذوات انقطاعات. الاستعانة بالتطبيقات الرقمية، كمتكاملة انفلاق التشقق و طريقة مشتق الصلابة، سمحت بحساب عامل التشقق المسمى بمعدل انطلاق الطاقة، و نتائجه قورنت باعمال أخرى و أظهرت تقارب ممتاز في كلتا حالتها الدراسة.

### كلمات مفتاحية:

تباين المناحي، عنصر متناهي، تشقق، انعطاف، ثلاثي المناحي، معدل إطلاق الطاقة

## **Tables des matières :**

Résumé .....	3
Mots clés : .....	3
Abstract .....	3
Key words: .....	3
ملخص .....	4
كلمات مفتاحية: .....	4
Tables des matières : .....	5
Liste des Paramètres .....	8
Liste des figures .....	10

### **Introduction générale**

Contexte .....	13
Objectifs : .....	13
Apport cognitive .....	14
Structure de la thèse .....	14

## **PREMIERE PARTIE : ETAT DE CONNAISSANCE**

### ***Chapitre I : La Mécanique de la Rupture.***

1.1. Introduction .....	17
1.2. Historique .....	17
1.3. Notions sur la mécanique de la rupture .....	18
1.3.1. Le mode d'ouverture d'une fissure .....	18
1.3.2. L'équilibre énergétique de Griffith .....	19
1.3.2.1. Le taux de restitution d'énergie .....	21
1.3.3. L'analyse de contrainte autour d'une fissure .....	23
1.3.3.1. Facteur d'intensité de contrainte .....	24
1.3.4. Relation entre le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie .....	25
1.4. Conclusion .....	26

### ***Chapitre II : Les Méthodes Numériques pour Traiter les Problèmes de Rupture.***

2.1. Introduction .....	28
2.2. Méthode des éléments finis (MEF) .....	28
2.2.1. Définition .....	28
2.2.2. Discrétisation .....	28
2.2.3. Assemblage .....	31
2.3. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM) .....	33

2.4.	<i>Méthode des éléments de frontières (BEM)</i> .....	34
2.5.	<i>Méthode sans maillage (EFG)</i> .....	35
2.6.	<i>Méthode des zones cohésives</i> .....	35
2.7.	<i>Conclusion</i> .....	36

## **DEUXIEME PARTIE : DEVELOPPEMENT**

### ***Chapitre III : Approche Analytique pour les Branchements de Fissures.***

3.1.	<i>Introduction</i> .....	38
3.2.	<i>Branchement de fissures</i> .....	38
3.2.1.	Définition .....	38
3.2.2.	Méthode d'investigation des fissures .....	39
3.2.2.1.	Méthode de l'intégrale J .....	39
3.2.2.2.	La procédure dérivative de la rigidité.....	41
3.2.2.3.	La technique de la fermeture virtuelle de fissure .....	42
3.2.2.4.	Déplacement d'ouverture de la pointe de fissure (CTOD).....	44
3.2.3.	Propagation d'une fissure inclinée .....	45
3.2.4.	Branchement de fissures .....	46
3.3.	<i>Conclusion</i> .....	47

### ***Chapitre IV : Elément Finis Mixte pour les Interfaces Fissurées.***

4.1.	<i>Introduction</i> .....	49
4.2.	<i>L'élément fini mixte RMQ7</i> .....	49
4.3.	<i>Les étapes de construction de l'élément RMQ7</i> .....	50
4.3.1.	La fonctionnelle de Reissner.....	50
4.3.2.	L'élément mixte de Reissner .....	52
4.3.3.	L'élément RMQ5 .....	56
4.3.4.	La configuration de l'élément RMQ11 .....	58
4.3.5.	La construction de l'élément RMQ7.....	61
4.4.	<i>Conclusion</i> .....	64

## **TROISIEME PARTIE : APPLICATIONS NUMERIQUES**

### **Chapitre V : Analyse de la fissure dans un matériau anisotrope avec RMQ7**

5.1.	<i>Introduction</i> .....	66
5.2.	<i>La nature mécanique des matériaux</i> .....	66
5.2.1.	Introduction.....	66
5.2.1.1.	Les matériaux isotropes .....	67
5.2.1.2.	Les matériaux orthotropes : .....	67

5.2.1.3. Les matériaux anisotropes : .....	68
5.3. <i>L'élasticité linéaire anisotrope des matériaux</i> : .....	69
5.3.1. Introduction.....	69
5.3.2. Etat de contrainte .....	69
5.3.2.1. Contraintes principales .....	69
5.3.3. Déformation .....	70
5.3.4. lois de comportement.....	71
5.4. <i>Loi de comportement tridimensionnelle</i> .....	71
5.5. <i>Etude d'une plaque anistrophe fissurée sous traction</i> .....	73
5.5.1. Les constantes élastiques pour un nouveau système de coordonnées.....	76
5.5.2. Taux de restitution d'énergie : .....	80
5.5.2.1. Procédure dérivative de la rigidité SDP .....	80
5.5.2.2. Technique de la fermeture virtuelle de la fissure CCI.....	81
5.5.3. Résultats comparatifs .....	83
5.6. <i>Conclusion</i> .....	84
<b>Chapitre VI : Analyse d'un branchement dans un matériau orthotrope avec RMQ7.</b>	
6.1. <i>Introduction</i> .....	86
6.2. <i>Problématique</i> .....	86
6.2.1 Taux de restitution d'énergie pour le branchement .....	89
6.2.2 Résultats comparatifs .....	91
6.3. <i>Conclusion</i> .....	94
<i>Perspective globale</i> .....	96
<i>Discussions</i> .....	96
<i>Conclusion</i> .....	97
<i>Recommandations pour les travaux future</i> .....	97
<i>Bibliographie</i> .....	99

## LISTE DES PARAMETRES

A	surface de la fissure
2a	Longueur de fissure
E	Energie potentielle totale.
$E_{ij}$	Module de Young (module d'élasticité)
$\Pi$	Energie potentiel fournie par les actions internes et les forces externes.
$\Pi_0$	Energie potentielle d'une plaque non-fracturé
$W_s$	Travail requis pour créer une nouvelle surface de fissure.
B	Epaisseur de la plaque.
$\gamma$	Energie en surface du matériau.
G	Taux de restitution d'énergie.
$G_I$	Taux de restitution d'énergie du mode I.
$G_{II}$	Taux de restitution d'énergie du mode II.
F	Travail effectué par les forces externes.
U	Energie de déformation stockée.
P	Charge fixée.
$\sigma_{ij}$	Tenseur de contraintes.
r et $\theta$	Coordonnées polaire
k	Une constante.
$f_{ij}(\theta)$	une fonction adimensionnelle de $\theta$
$A_m$	Amplitude.
$K_I$	Facteur d'intensité de contrainte du mode I.
$K_{II}$	Facteur d'intensité de contrainte du mode II
$K_{III}$	Facteur d'intensité de contrainte du mode III
$\tau_{ij}$	Contrainte de cisaillement.
$\nu$	Coefficient de poisson.
$\Omega$	Domaine.
$U_d$	Déplacement imposé.

$\vec{F}_d$	Vecteur des forces surfaciques.
$\vec{f}$	Vecteur des forces volumiques.
$\{\delta\}^e$	Vecteur déplacement.
$\{F\}$	vecteur de force dans les éléments finis.
$\{F\}^e$	Vecteur de force nodale.
$[K]$	Tenseur de rigidité.
$[K]^e$	Tenseur de rigidité élémentaire.
$u^H(x)$	Fonction d'enrichissement.
$u^{tip}(x)$	Fonction d'enrichissement ajouter aux élément possèdent la pointe de fissure.
$u^{mat}(x)$	Fonction d'enrichissement ajouter aux éléments qui possèdent des lèvres de fissures
$\Gamma$	Contour autour de la pointe de la fissure,
$W$	Energie élastique calculée par
$\underline{T}$	Vecteur de traction sur le long de $\Gamma$ .
$J$	Taux de restitution d'énergie calculé par l'intégrale de J.
$J_c$	La valeur critique à la rupture.
$a$	Longueur de fissures.
$\beta$	Angle d'inclinaison de fissure.
$\Phi$	Angle de coudage de fissure.
$C_{ij}$	Coefficient de coudage de fissure.
$\beta_i$ et $\lambda_i$	Multiplicateurs de Lagrange.
$\{\varepsilon\}$	Vecteur de déplacement.
$\{\sigma\}$	Vecteur de contrainte.
$[S]$	Matrice de souplesse.
$G_i$	Module de cisaillement.
$\eta_1$	Coefficient d'influence mutelle.

## LISTE DES FIGURES

Figure 1 Fissure dans un milieu continu. ....	18
Figure 2 Les modes de rupture. ....	19
Figure 3 Une plaque de longueur et largeur infinie soumise à un effort de traction.....	20
Figure 4 Plaque fissurée avec chargement fixe. ....	22
Figure 5 Plaque fissurée avec un déplacement fixe. ....	23
Figure 6 Champs de contraintes au voisinage d'une fissure. ....	24
Figure 7 Structure $\Omega$ avec des déformations et des forces imposées. ....	28
Figure 8 Plaque discrétisée qui fait sujet a des forces et des déformations planes. ....	29
Figure 9 Élément triangulaire avec des degrés de libertés. ....	29
Figure 10 Eléments ayant des nœuds en commun. ....	31
Figure 11 Maillage en MEF simple avec 3 éléments. ....	31
Figure 12 Distribution du maillage dans une plaque pour modéliser un phénomène de délamination[83]. ....	33
Figure 13 Trajectoire de la fissure avec le même maillage XFEM [60]. ....	34
Figure 14 Discrétisation avec BEM d'une plaque fissurée au centre et subit un chargement de traction [88]. ....	35
Figure 15 Modélisation avec EFG d'une plaque bi matériaux fissurée au milieu [91]. ....	35
Figure 16 illustration de cas de fissures multiples [107]. ....	38
Figure 17 Cas de fissure inclinée [107]. ....	38
Figure 18 illustration d'un cas de fissure en z [21]. ....	38
Figure 19 Cas de fissure en zigzag [105]. ....	38
Figure 20 Illustration d'un branchement d'une fissure par un angle $\varphi$ . ....	39
Figure 21 Contour du J-intégrale. ....	40
Figure 22 Contour pour le calcul de J Intégrale dans la présence d'un coude.....	40
Figure 23 Modification des nouveaux nœuds pour le calcul par la procédure dérivative de rigidité. ....	42
Figure 24 a) Fissure de longueur a b) Fissure de longueur a+da. ....	43
Figure 25 Les forces et les déplacements utilisées pour le calcul de G avec un élément à 8 nœuds. ....	44
Figure 26 Définition du CTOD [118] ....	45
Figure 27 Fissure Inclinée avec un angle . ....	45
Figure 28 Branchement infinitésimal d'une fissure microscopique. ....	46
Figure 29 Conditions aux limites. ....	50
Figure 30 L'élément de Reissner. ....	52
Figure 31 l'élément RMQ5. ....	57
Figure 32 L'élément RMQ11. ....	59
Figure 33 L'élément RMQ7. ....	62
Figure 34 Plaque rectangulaire sous tension fissuré au milieu. ....	73
Figure 35 Les éléments triangulaires et les domaines de lissage associés aux bords dans l'ES-FEM. ....	74
Figure 36 : Discrétisation du domaine et domaines de lissage associés aux bords dans l'ES-FEM. (a) Éléments quadrilatéraux et (b) éléments polygonaux à n côtés.....	74
Figure 37 Un modèle ES-FEM : maillage d'éléments triangulaires (lignes pleines), domaines de lissage quadrilatéraux (lignes pointillées) pour un problème de fracture avec une fissure ouverte. ....	75
Figure 38 Disposition des nœuds près de la pointe de la fissure.....	76

Figure 39 Les valeurs du premier module de Young dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 40 Les valeurs du deuxième module de Young dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 41 Les valeurs du premier coefficient de Poisson dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 42 Les valeurs du deuxième coefficient de Poisson dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 43 Les valeurs du premier coefficient d' influence mutuelle dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 44 Les valeurs du deuxième coefficient d' influence mutuelle dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	79
Figure 45 Les valeurs du module de cisaillement dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes. ....	80
Figure 46 Les deux configurations $M_0$ (a) et $M_1$ (a+da) pour le calcul de G par la procédure dérivative de rigidité. ....	81
Figure 47 Les deux configurations pour la technique de fermeture de fissure. ....	82
Figure 48 Les deux configurations de la technique intégrale de fermeture de fissure se sont produites dans le RMQ7. ....	83
Figure 49 Taux de restitutions d'énergies des différentes méthodes. ....	84
Figure 50 Plaque orthotrope fissuré sur les bords. ....	86
Figure 51 Etat de contraintes autour de la pointe de fissure dans les coordonnées cartésiens. ....	87
Figure 52 état de contraintes autour de la pointe de fissure dans les coordonnées polaires. ...	87
Figure 53 Les deux configurations du SDP à deux anneaux. ....	88
Figure 54 (a) disposition des éléments autour de la singularité, (b) force et déplacements pour calculé CCI pour une fissure plane. ....	89
Figure 55 Forces et déplacement impliqué pour le calcul du taux de restitution d'énergie avec RMQ7. ....	90
Figure 56 Les taux de restitution d'énergie d'après les méthodes proposés par Maiti[110]. ....	93
Figure 57 Les taux de restitution d'énergie par RMQ7 avec les méthodes SDP et CCI . ....	93

# **Introduction Générale**

## **CONTEXTE**

La présence de fissures dans des éléments structurels entraîne des intensités de contrainte à la pointe des fissures. Cela peut conduire à une défaillance soudaine et catastrophique. Par conséquent, de nombreuses études ont été consacrées à la recherche de paramètres permettant de caractériser la rupture causée par les fissures. Certains de ces paramètres, qui sont utilisés aujourd'hui, sont les facteurs d'intensité de contrainte (SIF), le taux de restitution d'énergie, l'intégrale J et l'ouverture de la fissure au voisinage de sa pointe, qui sont utilisés comme critères de défaillance. Des relations entre ces paramètres existent dans la mécanique de la rupture élastique linéaire.

La présence d'encoches entraîne également des intensités de contrainte aux alentours de leurs extrémités. Par conséquent, calculer les paramètres de rupture à travers le développement de diverses méthodes est d'une grande importance pour anticiper le développement d'une encoche pour devenir une entaille qui a son tour peut évoluer pour former une fissure, ce qui conduit à la détérioration du matériau ainsi que la structure. En effet, ces méthodes d'investigation permettent aux concepteurs et aux analystes intéressés de calculer les paramètres de rupture des différents cas et des différentes conditions imposées.

L'utilité est plus grande si une méthode peut être développée ou étendue pour calculer les paramètres de rupture pour les entailles et les fissures dans des matériaux avec des paramètres mécaniques plus complexes. Ceci est important, en raison de l'utilisation de composants constitués de différents matériaux les plus souvent présents dans la nature et dans les différents domaines de l'ingénierie. Ces paramètres de rupture aident le concepteur et l'opérateur à comprendre l'intégrité mécanique de ces composants dit *anisotropes*.

L'élément finis mixte RMQ7 (Reissner Modified Quadrilateral) a été développé initialement en 1992 par Pr. Bouzard pour traiter les cas des interfaces qui présentent une discontinuité. Le taux de restitution d'énergie est le paramètre d'investigation des fissures avec l'utilisation de la méthode nommée *Procédure dérivative de rigidité*. Ses résultats ont prouvé leur efficacité dans le traitement des divers problématiques de la mécanique de rupture avec une excellente précision. Également la simplicité d'implémenter les différentes méthodes d'investigation des problèmes de fissures à l'élément finis mixte RMQ7, lui donne un avantage supplémentaire.

L'objectif de cette thèse est d'implémenter une nouvelle méthode de calcul du taux de restitution d'énergie associant *la technique virtuelle de la fermeture de fissure*, qui avec la précédente méthode vont permettre d'étudier les différents cas de fissures tantôt dans les matériaux anisotropes et orthotropes et tantôt dans l'étude des branchements de fissures, autrement dit les fissures qui changent de chemin. Chacune des méthodes a prouvé son efficacité, et au cours de la recherche, chacune des méthodes est évalué selon ses points forts et ses points faibles.

## **OBJECTIFS :**

Les objectifs spécifiques à cette étude sont :

- L'implémentation des matrices de rigidité pour les formes orthotropes et anisotropes dans l'élément mixte.
- Trouver des méthodes adéquates du calcul des matrices de rigidité anisotropes depuis la matrice de rigidité d'un matériau orthotrope en changeant ses axes par une rotation.

- Comparer ces multiples méthodes et choisir la plus convenante pour l'étude courante.
- Etendre l'élément RMQ7 afin de calculer le taux restitution d'énergie avec la *technique virtuelle de fermeture de fissure*.
- Adapter la technique virtuelle de fermeture de fissure à la disposition des nœuds contraintes et déplacements de l'élément RMQ7.
- Modéliser le coudage de fissure dans un matériau orthotrope, et calculer le taux de restitution d'énergie pour différents angles de coudage.
- Calculer le taux de restitution d'énergie d'une extension de fissure dans un matériau anisotrope.

## APPORT COGNITIVE

Cette recherche fournit un moyen de calculer le taux de restitution d'énergie des structures soumises au problème de la fissuration. Elle utilise l'élément fini mixte RMQ7 pour calculer le taux de restitution d'énergie par deux méthodes dans deux cas de figures, en premier lieu en se focalisant sur les matériaux anisotropes et le deuxième cas en se concentrant sur l'extension non-linéaire de fissures (coudage). Pour évaluer l'exactitude des méthodes implémentées, des comparaisons avec des travaux publiés dans la littérature ont été entrepris. Afin d'étudier les matériaux anisotropes, des techniques de calcul des matrices de rigidité depuis la matrice de rigidité d'un matériau orthotrope orienté par un angle donné ont été comparées pour choisir la plus adéquate.

Une technique de calcul du taux de restitution d'énergie est implémentée à l'élément RMQ7. Elle se base sur le principe stipulant que l'énergie nécessaire pour la fermeture d'une fissure a le même taux d'énergie nécessaire pour l'ouvrir. Cette technique et l'élément mixte RMQ7 peuvent être un excellent mariage, car la disponibilité des nœuds au tour des lèvres de fissures peut contourner le problème de singularité de manière complémentaire. Elle permet aussi de prendre en compte le phénomène de coudage et donne de résultats plus précis. Néanmoins la technique dites *Procédure dérivative de rigidité* déjà implémenté donne de bons résultats dans le cas d'un matériau anisotrope fissuré prouvant ainsi sa fiabilité.

## STRUCTURE DE LA THESE

Ce mémoire est divisé en trois axes. La **première partie** présente l'état de connaissance pour la bonne compréhension des prérequis de cette étude. Elle est divisée par deux chapitre : **Le premier chapitre** comporte une introduction à la mécanique de la rupture avec la présentation de ses notions de bases. Le **Deuxième chapitre** expose les méthodes numériques pour traiter les problèmes de la mécanique de la rupture notamment la méthode des éléments finis avec d'autres méthodes issues de la littérature. **Le deuxième axe** dévoile les méthodes développées au cours de cette étude. Elle inclut deux chapitres : **Le troisième chapitre** présentant les méthodes développées pour le calcul du taux de restitution d'énergie d'une fissure coudée avec la présentation d'autres méthodes provenant de la littérature. **Le quatrième chapitre** expose la constitution et le développement de l'élément RMQ7 depuis ses trois éléments parents, en commençant par l'élément mixte avec quatre nœuds puis l'élément à cinq nœuds qui aboutit à l'élément à onze nœuds générant l'élément RMQ7 par condensation statique. **Le troisième axe** qui entame les méthodes établies pour fournir des solutions aux problématiques de cette thèse. Elle se répartie en deux chapitres : **Le cinquième chapitre** met en exergue l'étude de la rupture dans un matériau anisotrope dont les caractéristiques mécaniques sont issues de celles d'un matériau initialement orthotrope et subissant une rotation d'un certain angle. Dans ce chapitre,

une technique de calcul du taux de restitution d'énergie a été implémentée. *Le sixième chapitre* est dédié à l'étude du cas de la fissure coudée dans un matériau orthotrope. La technique implémentée précédemment est étendue pour étudier le cas du coudage.

**Première partie :**  
**Etat des Connaissances.**

**Chapitre I : La Mécanique de la  
Rupture.**

## **1.1. INTRODUCTION**

La rupture des matériaux est une complication posée en science des matériaux et en ingénierie. Elle a un effet direct à la durabilité d'une structure, son rendement et à sa sécurité portée à ses utilisateurs au cours et long terme. Cette première partie de ce chapitre a pour but de présenter les notions essentielles de la rupture linéaire et les critères de sa propagation.

## **1.2. HISTORIQUE**

Dans les siècles récents, la diversité des matériaux se multipliaient pour les différentes utilisations couvrant les besoins de l'homme. L'usage de l'acier et d'autres alliages métalliques augmenta considérablement pour les exigences industrielles notamment, ainsi que des multiples matériaux dédiés à la construction. Cette inflation a attiré l'attention de plusieurs scientifiques et ingénieurs pour étudier tous les aspects nécessaires afin d'assurer le bon rendement de ces matériaux et préserver leur durée de vie.

La durabilité d'un matériau quelconque est liée à ses critères de rupture. Les débuts de l'étude sur la rupture des matériaux fragiles remontent aux années 1920, avec les célèbres travaux pionniers de Griffith [1]. Ses études ont été établies sur un milieu élastique possédant une fissure d'un point de vue énergétique ce qui a mis en évidence une notion qui caractérise les matériaux et sera appelée plus tard le Taux de Restitution d'Energie. Une autre notion qui caractérise l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit a été apporté dans les années 1950-1960 par les travaux d'Irwin [2,3] et qui la nomma Facteur d'Intensité de Contraintes.

Ces deux critères de rupture ont été les piliers des études portant sur la fissuration des matériaux. Ces études se sont beaucoup diversifiées au cours des années 1970-1980 où des chercheurs se sont penchés sur les types de matériaux tels que les matériaux orthotropes [4–6] et anisotropes [7–9]. D'autres s'y sont mis sur les modes de ruptures [10–12] ; ou aussi sur la forme de la rupture courbée [13–15], coudée [13,16–19] et les fissures « Z » [20,21].

Bien évidemment après ces différents travaux analytiques ou semi-analytiques, les travaux d'investigation des fissures grâce aux méthodes numériques ont commencé à faire surface en 1990 jusqu'à présent. L'application de l'intégrale de J à une fissure dans un composite anisotrope [22] ou bien la comparaison faite par Maïti entre des différentes approches (procédé de dérivé de rigidité, l'intégrale J et la procédure de fermeture intégrale d'une fissure) au problème de branchement de fissure au sein d'un milieu orthotrope [23] représentent un véritable lancement des méthodes numériques. Plusieurs types d'éléments finis ont été utilisés afin d'étudier les problèmes de fissures, tel que les quadrilatérales [6,24–26] et les triangulaires [27]. Les méthodes numériques ont aussi utilisé des approches propres telles que la technique de la fermeture virtuelle de la fissure bien définie par R. Krueger [28] et qui a été l'objet d'étude dans plusieurs travaux [29–32], la XIGA (extended iso-geometric analysis) l'analyse iso-géométrique étendue [33–37], la fameuse X-FEM (extended finite element method) la méthode d'éléments finis étendue [33,38–42] ; la BEM (boundary element method) la méthode des éléments aux frontières [43–49] et d'autres.

Après cette incursion historique modeste sur la discipline, il est impératif de mentionner les différentes sciences et recherches où la mécanique de rupture est intensément utilisée. On cite l'aéronautique [29,50–52], les matériaux de construction (bois [53,54] béton [54–58], les métaux [59–62] céramique [63–66] ...etc), l'industrie [59,67–72], la chirurgie dentaire avec ce

travail sur le branchement d'une fissure dans la dentine (la couche supérieur de la dent) [73] ou même sur le contact de la dent avec la pomme [74]

### **1.3. NOTIONS SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE**

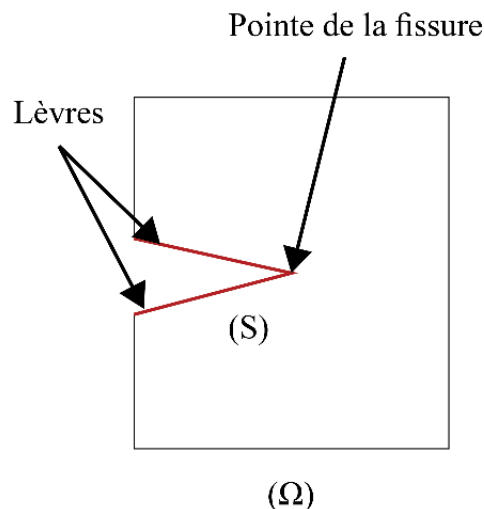
La mécanique de la rupture permet d'entrevoir les conditions de la rupture des matériaux et des structures, lorsqu'ils contiennent une fissure. La mécanique de la rupture est l'étude des fissures macroscopiques. Elle permet de déterminer les champs de contraintes et de déformations et d'exprimer les conditions d'expansion des fissures. Elle propose des relations entre les contraintes et la longueur des fissures macroscopiques en fonction des caractéristiques du matériau. La longueur et la position de la fissure au sein du solide ou de la structure doivent être préalablement connues.

La mécanique linéaire de la rupture par fissuration est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations. L'analyse des contraintes et des déformations au voisinage des pointes ou fronts de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures.

#### **1.3.1. Le mode d'ouverture d'une fissure**

La théorie de la fissuration décrit le comportement des solides ou structures arborant des discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme bidimensionnels, discontinuités surfaciques dans les milieux tridimensionnels et permet de présager son évolution jusqu'à la rupture complète de la structure.

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique (S) de séparation de ce milieu (Figure 1) :



**Figure 1 Fissure dans un milieu continu.**

Cette discontinuité du champ de déplacement formé à travers cette surface détermine les trois modes de rupture :

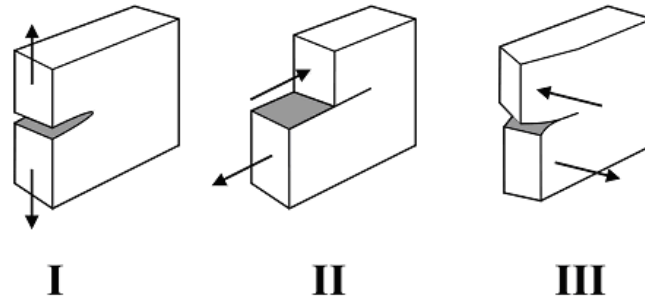


Figure 2 Les modes de rupture.

- **Mode I :** C'est une ouverture des lèvres qui peut aussi être traduit par un déplacement des lèvres suivant un axe perpendiculaire à la fissure.
- **Mode II :** Un cisaillement plan, il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à la fissure.
- **Mode III :** Un cisaillement anti-plan, il est produit par un cisaillement situé dans le plan de la fissure parallèle à l'axe transperçant le plan de la fissure.

Ce dernier mode est résolu par une représentation 3D anti-plane, tandis que les deux précédents sont résolus par une analyse 2D en contrainte ou en déformation plane.

### 1.3.2. L'équilibre énergétique de Griffith

Selon la première loi de la thermodynamique, lorsqu'un système passe d'un état de non-équilibre à un état d'équilibre, il y a une diminution nette d'énergie. En 1920, Griffith a appliqué cette idée à la formation d'une fissure [1] :

*« On peut supposer, pour notre propos, que la fissure est formée par l'annihilation soudaine des tractions agissant sur sa surface. A l'instant qui suit cette opération, les déformations, et par conséquent l'énergie potentielle considérée, ont leurs valeurs initiales ; mais en général, le nouvel état n'est pas un état d'équilibre. Si ce n'est pas un état d'équilibre, alors, par le théorème de l'énergie potentielle minimale, l'énergie potentielle est réduite par l'obtention de l'équilibre ; si c'est un état d'équilibre, l'énergie ne change pas. »*

Griffith 1920

The Phenomena of rupture and flow in solid

Une fissure peut se former (ou une fissure existante peut se développer) uniquement si ce processus entraîne une diminution ou une constance de l'énergie totale. Ainsi, les conditions critiques pour la rupture peuvent être définies comme le point où la croissance de la fissure se produit dans des conditions d'équilibre, sans changement net de l'énergie totale. Considérons une plaque soumise à une contrainte constante  $\sigma$  qui contient une fissure de  $2a$  de long (figure 3). Supposons que la largeur de la plaque  $\gg 2a$  et que les conditions de contrainte plane prévalent. Pour que cette fissure augmente en taille, une énergie potentielle suffisante doit être disponible dans la plaque pour surmonter l'énergie de surface du matériau. Le bilan énergétique de Griffith pour une augmentation incrémentale de la surface de la fissure  $dA$ , dans des conditions d'équilibre, peut être exprimé de la manière suivante :

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (1)$$

On peut donc écrire :

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad (2)$$

Où :

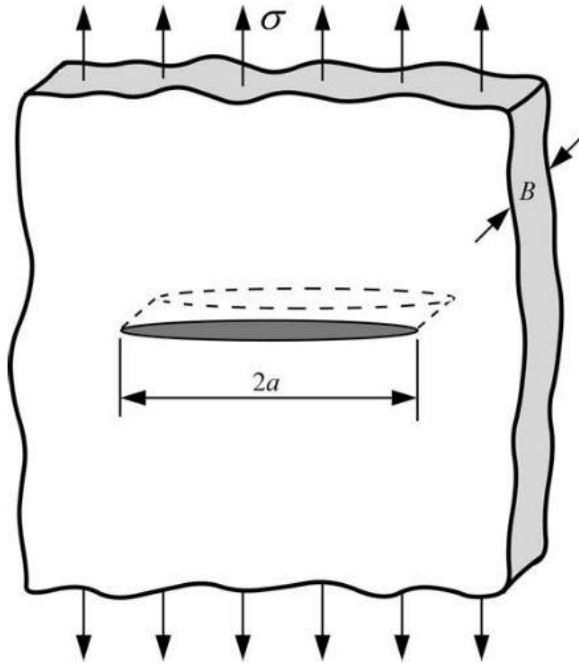
E est l'énergie totale.

$\Pi$  est l'énergie potentiel fournie par les actions internes et les forces externes.

$W_s$  est le travail requis pour créer une nouvelle surface.

Pour la fissure de la plaque illustrée dans la figure 3. Griffith a utilisé l'analyse de contrainte de Inglis [75] pour démontrer :

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (3)$$



**Figure 3** Une plaque de longueur et largeur infinie soumise a un effort de traction[76]

Où  $\Pi_0$  est l'énergie potentielle d'une plaque non-fracturé et B est l'épaisseur de la plaque. Puisque la formation d'une fissure requiert la création de deux surface,  $W_s$  et donnée comme :

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (4)$$

Où  $\gamma$  est l'énergie en surface du matériau. Donc :

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (5)$$

Et

$$\frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad (6)$$

Après simplification de l'équation (2) en prenant compte des équations (5) et (6) on obtient :

$$\sigma_f = \left( \frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (7)$$

$\sigma_f$  est la contrainte de rupture.

Il est important de noter la distinction entre l'aire des lèvres de la fissure et l'aire de la fissure. L'aire des lèvres de la fissure est définie comme la surface projetée de la fissure ( $2aB$  dans le présent exemple), mais comme une fissure comprend deux surfaces correspondantes, l'aire de la fissure est  $2A$

### **1.3.2.1. Le taux de restitution d'énergie**

En 1956, Irwin [2] a proposé une approche énergétique de la rupture qui est essentiellement équivalente au modèle de Griffith, sauf que l'approche d'Irwin est sous une forme plus pratique pour résoudre les problèmes d'ingénierie. Irwin a défini un taux de libération d'énergie  $G$ , qui est une mesure de l'énergie disponible pour un incrément d'extension de la fissure :

$$G = - \frac{d\Pi}{dA} \quad (8)$$

Le terme *taux*, tel qu'il est utilisé dans ce contexte, ne fait pas référence à une dérivée par rapport au temps ;  $G$  est le taux de changement de l'énergie potentielle avec la surface de la fissure. Comme  $G$  est obtenu à partir de la dérivée d'un potentiel, il est également appelé force d'extension de la fissure ou force motrice de la fissure. D'après l'équation 5, le taux de libération d'énergie pour une plaque large en contrainte plane avec une fissure de longueur  $2a$  (Figure 3) est donné par :

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (9)$$

Si l'on se réfère à la section précédente, l'extension des fissures se produit lorsque  $G$  atteint une valeur critique, à savoir :

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad (10)$$

Où  $w_f$  est l'énergie de fissuration, qui peut inclure l'effet plastic, viscoélastique ou viscoplastique dépendant du matériau. Et  $G_c$  est une mesure de la ténacité à la rupture du matériau.

L'énergie potentielle d'un corps élastique,  $\Pi$ , est définie comme suit :

$$\Pi = U - F \quad (11)$$

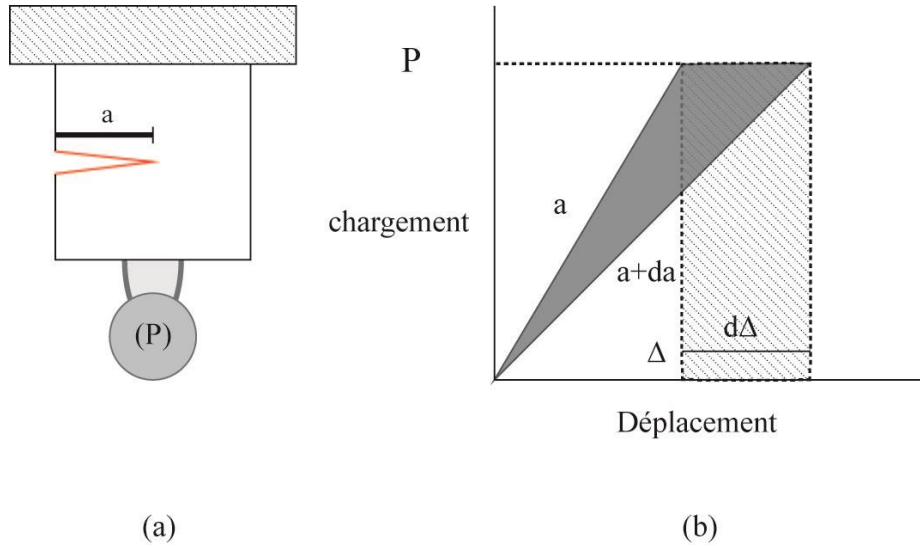
Où  $U$  est l'énergie de déformation stockée dans le corps et  $F$  est le travail effectué par les forces externes.

Considérons une plaque fissurée qui est soumise à une charge morte, comme illustré à la figure 4. Comme la charge est fixée à  $P$ , on dit que la structure est contrôlée par la charge. Dans ce cas :

$$F = P\Delta \quad (12)$$

Et

$$U = \int_0^{\Delta} Pd\Delta = \frac{P\Delta}{2} \quad (13)$$



**Figure 4** Plaque fissurée avec chargement fixe.

Donc :

$$\Pi = -U \quad (14)$$

Et :

$$G = \frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_P = \frac{P}{2B} \left( \frac{d\Delta}{da} \right)_P \quad (15)$$

Quand le déplacement est fixé (Figure 5), la plaque est à déplacement contrôlé,  $F=0$  et  $\Pi=U$ . donc :

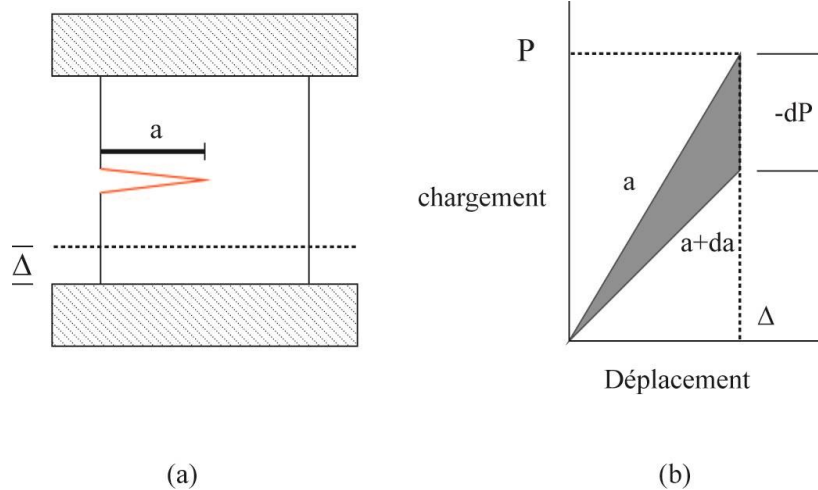
$$G = -\frac{1}{B} \left( \frac{dU}{da} \right)_\Delta = -\frac{\Delta}{2B} \left( \frac{dP}{da} \right)_\Delta \quad (16)$$

Il est pratique à ce point d'introduire une souplesse, qui est l'inverse de la rigidité de la plaque :

$$C = \frac{\Delta}{P} \quad (17)$$

En remplaçant l'équation (17) dans les équations (15) ou (16), on peut montrer :

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} = -\frac{\Delta^2}{2B} \frac{1}{dCda} \quad (18)$$



**Figure 5** Plaque fissurée avec un déplacement fixe.

### 1.3.3. L'analyse de contrainte autour d'une fissure

Pour certaines configurations fissurées soumises à des forces externes, il est possible de dériver des expressions en forme fermée pour les contraintes dans le corps, en supposant un comportement élastique linéaire isotrope du matériau. Westergaard [77], Irwin [2], et Williams [78] ont été parmi les premiers à publier de telles solutions. Si nous définissons un axe de coordonnées polaires dont l'origine se trouve à la pointe de la fissure (Figure 6), il est possible de montrer que le champ de contraintes dans un corps élastique linéaire fissuré est donné par la formule suivante :

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^m A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}(\theta) \tag{19}$$

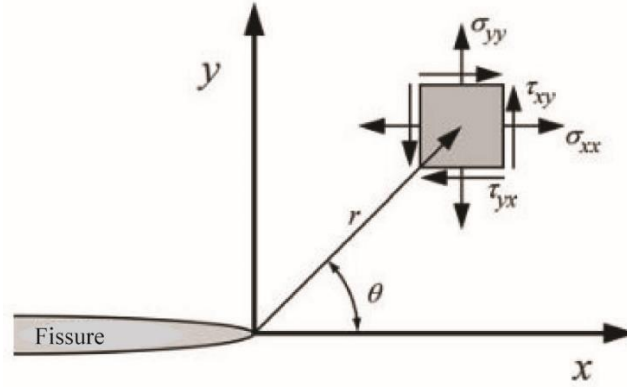
Où

$\sigma_{ij}$  est le tenseur de contraintes.

$r$  et  $\theta$  sont définis dans la figure 6.

$k$  est une constante.

$f_{ij}$  est une fonction adimensionnelle de  $\theta$ .



**Figure 6** Champs de contraintes au voisinage d'une fissure [76].

Pour les termes d'ordre supérieur,  $A_m$  est l'amplitude et  $g_{ij}(\theta)$  est une fonction sans dimension de  $\theta$  pour le  $m^{\text{ème}}$  terme. Les termes d'ordre supérieur dépendent de la géométrie, mais la solution pour toute configuration donnée contient un terme principal qui est proportionnel à  $1/\sqrt{r}$ . Lorsque  $r \rightarrow 0$ , le terme principal s'approche de l'infini, mais les autres termes restent finis ou s'approchent de zéro. Ainsi, la contrainte près de la pointe de la fissure varie avec  $1/\sqrt{r}$ , quelle que soit la configuration du corps fissuré. On peut également montrer que le déplacement près de la pointe de la fissure varie avec  $\sqrt{r}$ . L'équation (19) décrit une singularité de la contrainte, puisque la contrainte est asymptotique par rapport à  $r = 0$ .

### 1.3.3.1. Facteur d'intensité de contrainte

Chaque mode de chargement produit la singularité  $1/\sqrt{r}$  à la pointe de la fissure, mais les constantes de proportionnalité  $k$  et  $f_{ij}$  dépendent du mode. Il est pratique à ce stade de remplacer  $k$  par le facteur d'intensité de contrainte  $K$ , où  $K = k\sqrt{2\pi}$ . Le facteur d'intensité de contrainte est généralement doté d'un indice pour indiquer le mode de chargement, c'est-à-dire  $K_I$ ,  $K_{II}$  ou  $K_{III}$ . Ainsi, les champs de contrainte en avant de la pointe d'une fissure dans un matériau élastique linéaire isotrope sont les suivants :

**Tableau 1** Champ de contraintes autour de la pointe de fissure pour le Mode I et Mode II dans une élastique linéaire et un matériau isotrope.

	Mode I	Mode II
$\sigma_{xx}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{yy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
$\tau_{xy}$	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$
$\sigma_{zz}$	0 (Etat plan de contraintes) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Etat plan de déformation)	0 (Etat plan de contrainte) $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (Etat plan de déformation)
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	0	0

Cela peut aussi être écrit pour chaque mode comme :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(I)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\theta) \\ \sigma_{ij}^{(II)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\theta) \\ \sigma_{ij}^{(III)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\theta)\end{aligned}\tag{20}$$

Dans un problème de mode mixte (i.e., quand plusieurs modes sont présents), la contribution individuel donnée aux composantes de contraintes sont ajouté :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}\tag{21}$$

L'équation (21) est issue du principe de superposition linéaire.

Des expressions détaillées sur le champ de contraintes singulier pour le Mode I et le Mode II sont présentées dans le tableau 1. Et les relations de déplacement pour les deux modes sont listées dans le tableau 2. Avec :

$\nu$  est le coefficient de Poisson.

$\mu$  est le module de cisaillement

$\kappa = 3 - 4\nu$  (contrainte plane) et  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  (déformation plane)

**Tableau 2** champ de déplacement autour de la pointe de fissure pour le Mode I et le Mode II (élasticité linéaire, matériau isotrope)

	<b>Mode I</b>	<b>Mode II</b>
<b>u<sub>x</sub></b>	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$
<b>u<sub>y</sub></b>	$\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

Le facteur d'intensité des contraintes définit l'amplitude de la singularité à la pointe de la fissure. En d'autres termes, les contraintes près de la pointe de fissure augmentent proportionnellement avec K. De plus, le facteur d'intensité des contraintes définit complètement les conditions de la pointe de la fissure ; si K est connu, il est possible de résoudre toutes les composantes de la contrainte, de la déformation et du déplacement en fonction de r et  $\theta$ . Cette description à paramètre-unique des conditions de la pointe de la fissure s'avère être l'un des concepts les plus importants de la mécanique de la rupture.

### **1.3.4. Relation entre le facteur d'intensité de contrainte et le taux de restitution d'énergie**

Dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et des petites perturbations, le taux de restitution d'énergie (par unité de surface de propagation d'une fissure) G et les facteurs d'intensité de contraintes associés à une pointe de fissure sont reliés par la formule d'Irwin :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} \quad (22)$$

Avec :

$E' = E$  Pour l'état plan de contrainte.

$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$  Pour l'état plan de déformation.

#### **1.4. CONCLUSION**

Dans les siècles précédents la rupture était l'une des raisons qui causait des catastrophes dans les structures. Ainsi la discipline de la mécanique de la rupture est née pour prévoir les risques potentiels dès la conception et le design de toute type de structure. Cette discipline a deux approches alternatives pour l'analyse de la rupture, l'une se base sur le critère énergétique et la deuxième se base sur l'intensité de contrainte. L'approche énergétique stipule que l'extension de la fissure se produit quand l'énergie disponible pour l'accroissement de la fissure est suffisante pour dépasser la résistance du matériau. La deuxième approche analyse l'état d'élasticité-plasticité ainsi que la distribution des contraintes autour de la pointe de fissure.

## **Chapitre II : Les Méthodes Numériques pour Traiter les Problèmes de Rupture.**

## 2.1. INTRODUCTION

Dans ces récentes années les problèmes liés aux phénomènes de rupture se sont de plus en plus compliqués, ce qui a rendu nécessaire l'utilisation des méthodes plus sophistiquées afin de traiter cette complexité.

Dans cette section, une introduction à la méthode des éléments finis et à quelques méthodes numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture seront présentés en discutant brièvement leurs avantages et inconvénients.

## 2.2. METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF)

### 2.2.1. Définition

L'idée de la méthode des éléments finis est de décomposer (ou aussi discrétiser) le domaine  $\Omega$  en un certain nombre de sous-domaines (les éléments). Les éléments recouvriront l'intégralité du domaine sans chevauchement ni vide entre eux (les éléments peuvent se chevaucher dans une autre méthode appelé *méthode des volumes finis*). Cette méthode permet de trouver les déplacements et les contraintes dans le solide sollicité par des fonctions d'interpolation définies dans chaque élément.

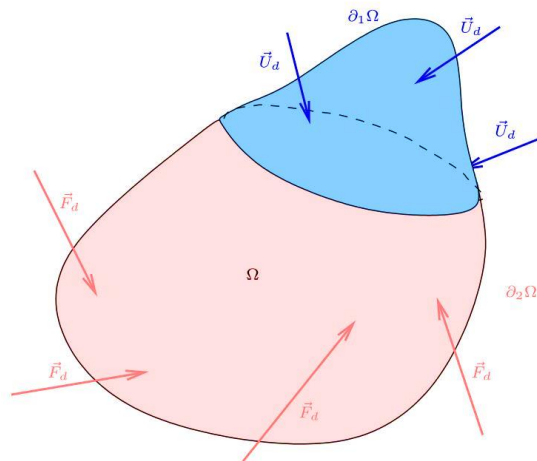


Figure 7 Structure  $\Omega$  avec des déformations et des forces imposées[79].

La figure 7 représente le domaine  $\Omega$  avant la déformation. La frontière de  $\Omega$  est notée  $\partial\Omega$ . Le déplacement  $U_d$  est imposé sur la partie  $\partial_1\Omega$  de  $\partial\Omega$ . Les efforts surfaciques  $\vec{F}_d$  sont imposés sur la partie  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$ . Les forces volumiques  $\vec{f}$  sont imposées sur  $\Omega$ .

### 2.2.2. Discrétisation

Pour illustrer les idées utilisées dans l'MEF, considérons d'abord un exemple bidimensionnel en élasticité linéaire et montrons la stratégie générale utilisée pour le résoudre. La figure 8 montre une plaque plane soumise à des forces appliquées à son bord, les forces étant dans le plan de la plaque. La plaque est divisée en éléments triangulaires. Les nœuds et les éléments sont numérotés. Concentrons-nous sur un élément (figure 9), l'élément numéroté  $e$  avec des nœuds numérotés  $i, j$  et  $m$ .

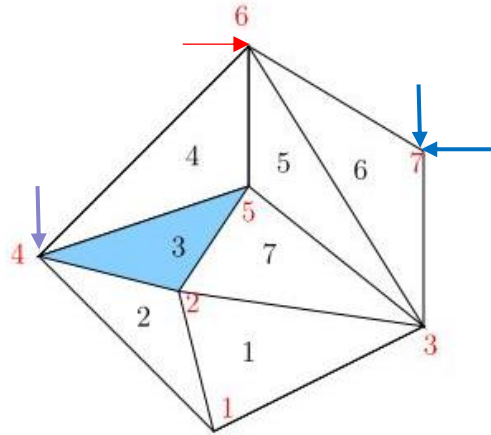


Figure 8 Plaque discrétisée qui fait sujet a des forces et des déformations planes.

On a que l'élément communique avec ses voisins par des forces appliquées à ses nœuds. Au nœud  $i$  par exemple, la force  $\{F\}$  a deux composantes,  $U_i$  et  $V_i$ , parallèles aux axes  $x$  et  $y$  respectivement. L'ensemble des six composantes de la force est représenté par un vecteur de forces nodales,  $\{F\}^e$ .

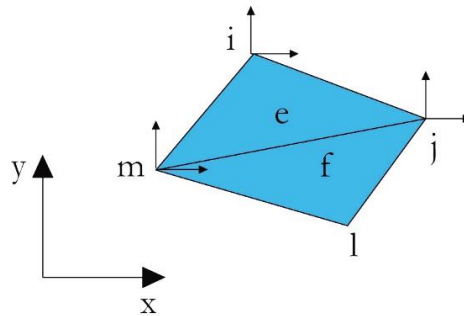


Figure 9 Élément triangulaire avec des degrés de libertés.

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \\ F_m^e \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Où :

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m]^T \quad (24)$$

De même, le déplacement de chaque nœud a deux composantes,  $u$  et  $v$ , le déplacement du nœud  $i$  parallèle à l'axe des  $x$  étant désigné par  $u_i$  et celui parallèle à l'axe des  $y$  par  $v_i$ . Il existe donc un vecteur de déplacements nodaux,  $\{\delta\}^e$ .

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Où :

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Et ainsi de suite, de sorte que :

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j & u_m & v_m \end{bmatrix}^T \quad (27)$$

Les forces nodales dépendent des déformations produites dans l'élément par le déplacement des nœuds. Bien entendu, si tous les nœuds sont déplacés par le même vecteur, l'élément est simplement translaté sans déformation, et les forces nodales sont nulles. De même, si le mouvement se réduit à une rotation sans déformation, les forces nodales sont également nulles. Les propriétés mécaniques du matériau constituant l'élément sont nécessaires pour passer des déplacements nodaux aux forces nodales. On examine plus en détail la dérivation plus tard, mais à ce stade, on se contente d'énoncer le résultat selon lequel les forces nodales peuvent être liées aux déplacements nodaux en utilisant une matrice 6x6, appelée matrice de rigidité de l'élément,  $[K]^e$ .

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ \vdots \\ V_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{61} & \cdots & & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \vdots \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Ou bien,

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (29)$$

Les lignes en pointillés montrent le partitionnement de la matrice de rigidité des éléments 6x6 en neuf sous-matrices 2x2, de sorte que,

$$\{F\}^e = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e & k_{im}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e & k_{jm}^e \\ k_{mi}^e & k_{mj}^e & k_{mm}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Par exemple

$$[k_{ii}]^e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

### 2.2.3. Assemblage

Une fois que les matrices de rigidité des éléments ont été calculées, la procédure suivante consiste à les assembler pour former la matrice d'assemblage ou de rigidité globale pour l'ensemble du modèle. Pour ce faire, on note que la force externe appliquée à un nœud spécifique est partagée entre tous les éléments qui ont un nœud en commun, comme on peut le voir sur la figure 10.

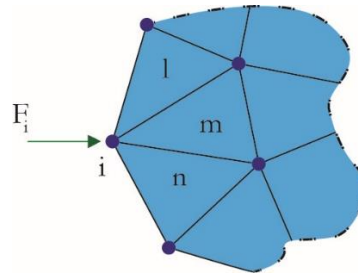


Figure 10 Eléments ayant des nœuds en commun.

La force  $\{F_i\}$  appliquée de l'extérieur produit des forces nodales  $\{F_i\}^l$ ,  $\{F_i\}^m$  et  $\{F_i\}^n$  agissant sur les éléments l, m et n respectivement. Pour le maillage simple constitué de trois éléments, illustré à la figure 11, la matrice de rigidité globale se construit comme suit à partir des matrices de rigidité des éléments.

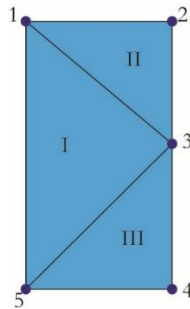


Figure 11 Maillage en MEF simple avec 3 éléments.

Les matrices de rigidité de chacun de ces éléments sont,

Elément 1 :

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 \\ & k_{22}^1 & k_{23}^1 \\ sym & & k_{33}^1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Elément 2 :

$$[k]^2 = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ & k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ sym & & k_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Elément 3 :

$$[k]^3 = \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 \\ & k_{22}^3 & k_{23}^3 \\ sym & & k_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

La matrice de rigidité global est une matrice de dimension 5x5 :

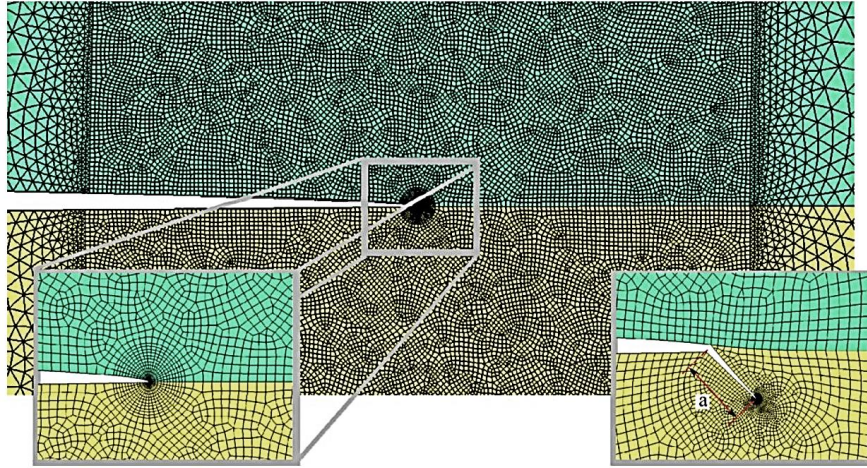
$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 \\ & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^1 + k_{23}^2 & k_{24}^2 & 0 \\ & & k_{33}^1 + k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{35}^3 \\ sym & & & k_{44}^2 + k_{44}^3 & k_{45}^3 \\ & & & & k_{55}^3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

De cette façon, si le vecteur des forces externes appliquées aux différents nœuds est  $[F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5]^T$  alors,

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_2^2 \\ F_3^1 + F_3^2 + F_3^3 \\ F_4^2 + F_4^3 \\ F_5^3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

La méthode des éléments finis est la principale méthode pour le calcul des structures en mécanique. Elle a donc été naturellement adaptée pour résoudre des problèmes de fissuration et rupture. Parmi les références les plus récentes on retrouve [59,80–82], qui étudient la propagation de fissures en 2D et des études en 3D comme [31,83,84].

Le principal inconvénient de cette méthode est que la fissure doit être explicitement décrite par le maillage. L'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) nécessite souvent une préparation lourde des maillages, et la précision n'est pas toujours excellente pour l'estimation des facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie. La figure 12 présente une plaque sandwich fissurée avec un maillage structuré autour des pointes de la fissure avant et après embranchement [85]. Ces pointes sont entourées par un cercle d'éléments identiques qui se raccordent avec le maillage externe.



**Figure 12** Distribution du maillage dans une plaque pour modéliser un phénomène de délamination[85].

C'est au cours du déboutonnage (relâchement des nœuds dû à l'élongation de la fissure, créant de nouveaux éléments de bords libre) que ça se complique car il est impératif de refaire un nouveau maillage adapté au nouvel état de la fissure (i.e. figure 12 remaillage après l'embranchement). Ce remaillage à chaque étape de la propagation de la fissure ajoute des difficultés de plus pour la précision du calcul et le temps.

### 2.3. METHODE DES ELEMENTS FINIS ETENDUS (X-FEM)

La XFEM (Extended Finite Element Method), La méthode des éléments finis étendus a été mise au point pour résoudre les problèmes présentant des caractéristiques localisées qui ne sont pas résolues efficacement par le raffinement du maillage. Dans cette implémentation originale, des fonctions de base discontinues sont ajoutées aux fonctions de base polynomiales standard pour les nœuds appartenant aux éléments qui sont intersectés par une fissure afin de fournir une base qui inclut les déplacements d'ouverture de fissure. L'équation de déplacement dans les éléments impliqués par la discontinuité est écrite comme suite :

$$u^k(x) = u(x) + u^H(x) + u^{tip}(x) + u^{mat}(x) \quad (37.a)$$

Avec  $u(x)$  la fonction des déplacements tel que défini par la méthode MEF,  $u^H(x)$  fonction d'enrichissement,  $u^{tip}(x)$  fonction d'enrichissement ajouter aux élément possèdent la pointe de fissure,  $u^{mat}(x)$  fonction d'enrichissement ajouter aux éléments qui possèdent la discontinuité des lèvres de fissures.

$$u^h(x) = \left[ \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j \right] + \left[ \sum_{h=1}^{mh} N_h(x) H(x) a_h \right] + \left[ \sum_{k=1}^{mf} N_k(x) \left( \sum_{l=1}^{mf} F_l(x) b_k^l \right) \right] + \left[ \sum_{j=1}^n N_j(x) \chi(x) c_m \right] \quad (37.b)$$

Avec :

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases}$$

$$F(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (37.c)$$

$$\chi_m(x) = |\xi(x)| - |\xi(x_m)|$$

Un avantage clé de XFEM est que, dans de tels problèmes, le maillage des éléments finis n'a pas besoin d'être mis à jour pour suivre la trajectoire de la fissure (Figure 13), où les éléments 2, 3, 4, 5 et 6 sont concernés par la fonction d'enrichissement de discontinuité causés par les lèvres de fissures et les éléments 1 et 7 sont concernés par la fonction d'enrichissement des lèvres de fissures et des pointes de fissures. Des recherches ultérieures ont illustré l'utilisation plus générale de la méthode pour des problèmes impliquant des singularités [86], des interfaces de matériaux [87], un maillage régulier de caractéristiques micro-structurelles telles que des vides[88], et d'autres problèmes où une caractéristique localisée peut être décrite par un ensemble approprié de fonctions de base. Il a été démontré que pour certains problèmes, une telle intégration de la caractéristique du problème dans l'espace d'approximation peut améliorer de manière significative les taux de convergence et la précision. De plus, le traitement des problèmes comportant des discontinuités avec les méthodes d'éléments finis étendus supprime la nécessité de mailler et de remailler les surfaces des discontinuités, ce qui allège les coûts de calcul et les erreurs de projection associés aux méthodes d'éléments finis conventionnelles, au prix de la restriction des discontinuités aux bords du maillage.

Pourtant, les fonctions utilisées (non-polynomiales) entraînent certaines difficultés dans l'intégration élémentaire et dans l'adaptation des critères de rupture, ainsi que la présence d'une zone de transition qui limite le taux de convergence en maillage. La mise à jour de la géométrie de la fissure peut aussi être difficile lors de brusques changements topologiques.

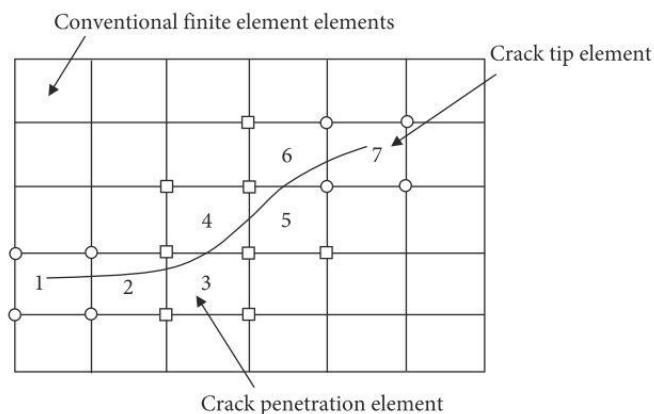


Figure 13 Trajectoire de la fissure avec le même maillage XFEM [60].

## 2.4. METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERES (BEM)

La BEM (Boundary Element Method) est une alternative intéressante pour l'étude de la mécanique de la rupture est la méthode des éléments de frontières qui présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière des domaines ( figure 14) et donc le travail de remaillage est beaucoup plus léger et la présentation de la fissure est naturelle [43,48,89]. Les quelques limitations sont des problèmes de conditionnement des matrices et le stockage de données.

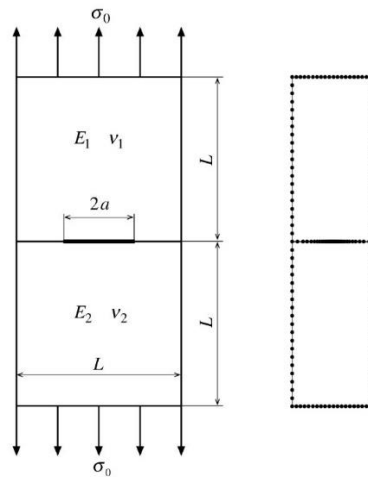


Figure 14 Discretisation avec BEM d'une plaque fissurée au centre et subit un chargement de traction [90].

## 2.5. METHODE SANS MAILLAGE (EFG)

Cette méthode, dite EFG (Element Free Galerkin) proposé par Belytshko [91], est plus proche de la méthode des éléments finis que la méthode des éléments de frontières. L'avantage principal de ces méthodes sans maillage est l'absence de discrétisation de la fissure (figure 15), qui se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin (comme pour la méthode des éléments finis), par contre l'estimation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de nœuds est réparti dans le domaine et l'estimation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux nœuds qui l'entourent et non de l'appartenance à un certain élément fini. [92]

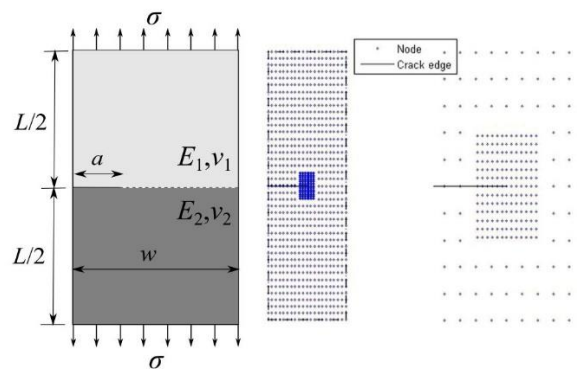


Figure 15 Modélisation avec EFG d'une plaque bi matériaux fissurée au milieu [93].

En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de nœuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point si la ligne joignant ce nœud et ce point est coupée par la fissure. Cependant, ainsi que toute méthode numérique, elle connaît un certain nombre d'inconvénients, tels que la lourdeur du calcul des voisins et la taille du domaine d'influence et surtout la difficulté d'imposition des conditions aux limites cinématiques.

## 2.6. METHODE DES ZONES COHESIVES

La méthode de zones cohésives, basée sur la mécanique de l'endommagement, permet de modéliser l'amorçement et l'expansion d'une fissure grâce à des éléments d'interface insérés

entre deux éléments solides classiques. Dans cette méthode, l'évolution de la fissuration est décrite par le moyen de critères locaux, le plus souvent énergétiques, et en termes de relation entre la contrainte appliquée sur les lèvres de la fissure et la discontinuité de déplacement qui apparaît à l'interface[94]. L'équation de cohésion s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} |\underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\perp} \\ |\underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\parallel} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |\underline{u}|_{\perp} \\ |\underline{u}|_{\parallel} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} |\underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\perp} \\ |\underline{\sigma} \cdot \underline{n}|_{\parallel} \end{Bmatrix}^* \quad (378)$$

Avec  $\perp$  pour les paramètre en traction ou compression et  $\parallel$  pour les paramètres en cisaillement. La matrice C définit un comportement général de ramollissement en cas de fracture en mode I, mode II ou mode mixte.

En décrivant, au moyen d'une loi surfacique, l'effort de résistance à la séparation en fonction de l'écart de lèvres de fissures ou de cavités en train de se créer, ces modèles apparaissent particulièrement maniables pour rendre compte de certains mécanismes d'endommagement et de fissuration pouvant aller de l'amorçage de microfissures à la ruine du matériau[95]. De nombreuses lois d'interface ont été proposées dans la littérature : elles diffèrent selon la nature du matériau considéré (ductile, fragile, composite), du type de chargement entrevu (monotone croissant ou cyclique...). L'avantage de cette méthode est d'offrir la possibilité de suivre l'amorçage et la propagation de la fissure pour un coût numérique réduit. De plus, il permet de prendre en compte les phénomènes physiques mettant en jeu les lèvres de la fissure, tout en se libérant de la condition de bords libres. La modification de certains coefficients du modèle ou l'introduction de paramètres physiques supplémentaires dans le comportement cohésif rendent également possible le suivi de l'évolution temporelle des trajets de fissuration. Le principal inconvénient de cette méthode est la difficulté pour déterminer une longueur caractéristique qui permet d'étudier la propagation de la fissure, puisque la notion de discontinuité du déplacement en présence de la fissure est remplacée par celle de déformation de la surface matérielle.

## 2.7. CONCLUSION

Afin d'analyser un système, un modèle mathématique est développé pour décrire le système. L'expression mathématique est développée pour décrire le système à partir de plusieurs hypothèses simplificatrices. Ces expressions sont généralement d'un niveau de difficulté assez élevé qui aide à obtenir le comportement du système, qui avec les performances des outils numériques modernes la tâche est devenue moins lourde. Différentes techniques numériques se sont développées au cours de l'histoire notamment les méthodes qui se basent sur les éléments finis qui aide à trouver des solutions approximatives du système en cours d'investigation. La méthode des éléments finis requiert la division du domaine en petits sous-domaines et chaque sous-domaine est appelé élément fini, ainsi le problème devient un ensemble de plusieurs parcelles d'éléments finis. Suivent par les méthodes des éléments finis étendues qui enrichissent les éléments impliqués par la fissure mais nécessitent un grand nombre de calculs. La méthode sans maillage assure une interpolation d'un ou de plusieurs nœuds entre eux pour mieux englober les problèmes locaux sauf que l'intégration des calculs des paramètres de fissures prends un temps considérable à cause de la complexité des équations. La méthode des zones cohésives se concentre sur la plasticité autour de la pointe de fissures et a comme défauts : c'est une méthode issue plutôt de la mécanique d'endommagement que la mécanique de rupture et qu'elle étudie que les fissures rectilignes.

## **Deuxième partie**

### **Développement.**

## **Chapitre III : Approche Analytique et Numérique pour le Branchement de Fissures.**

### 3.1. INTRODUCTION

Les études sur les phénomènes reliés à la mécanique de la rupture sont différentes et multiples. Les différents modes de chargements, comme présentés au cours des chapitres précédents, présentent multiples possibilités de travaux d'investigation (mode I[96], mode II[97], mode III [98] et les modes mixtes[99]). Ainsi, il va de soit pour les différents types de matériaux (i.e. isotropes[100], orthotropes[101] ou anisotropes[102]) ou les comportements linéaires[103] et non-linéaires [104] des matériaux. La forme de la fissure et son trajet. Un solide avec multiples fissures[105], fissures inclinées[106], fissure en zigzag [107] ou fissures en Z[108] ; chacune a fait l'objet des recherches particulières. Dans ce chapitre un phénomène parmi d'autres sera le plus introduit et présenté, le branchement/coudage de fissure.

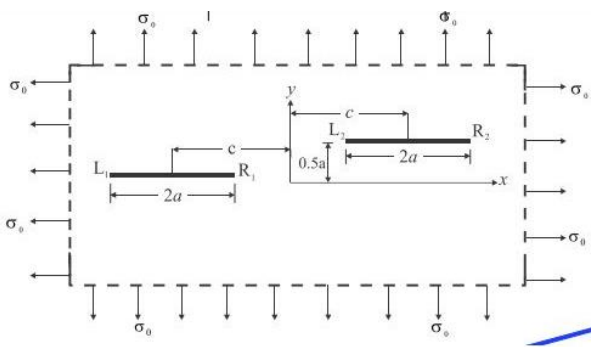


Figure 16 illustration du cas des fissures multiples [109].

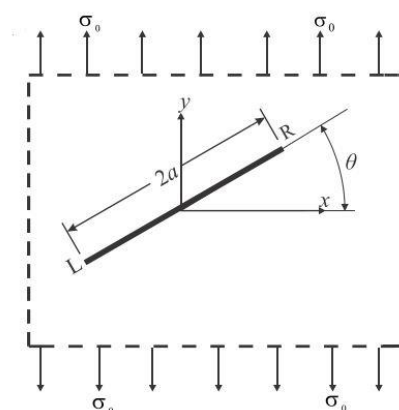


Figure 17 Cas d'une fissure inclinée [109].

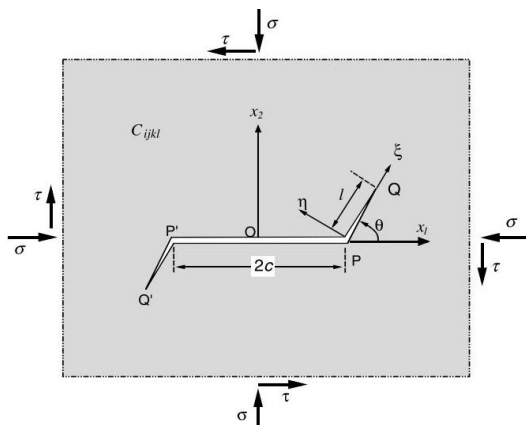


Figure 18 illustration d'un cas de fissure en z [21].

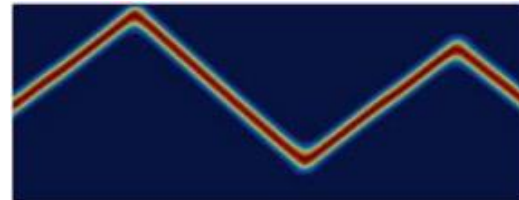


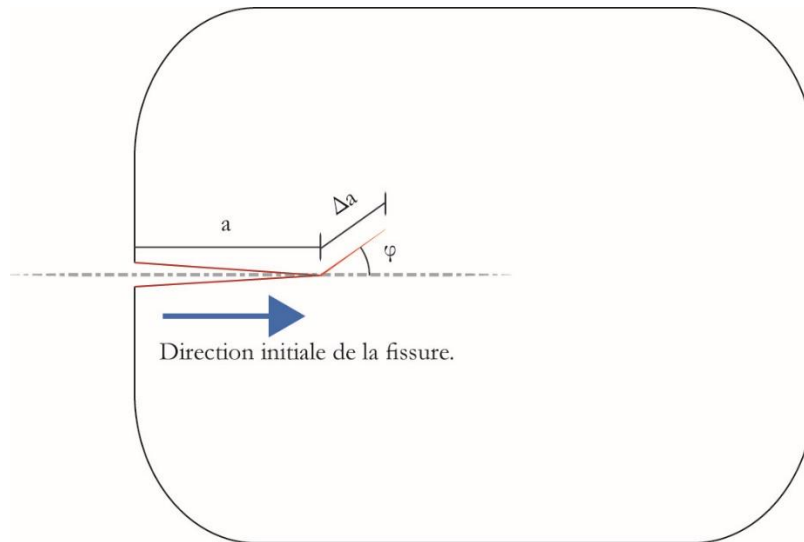
Figure 19 Cas d'une fissure en zigzag [107].

### 3.2. BRANCHEMENT DE FISSURES

#### 3.2.1. Définition

L'extension linéaire d'une fissure en gardant la même direction est le cas qui représente le moins de complication dans la mécanique de la rupture. Dans la réalité, la propagation de la fissure s'oriente suivant des directions souvent différentes de sa direction initiale. Ce qui définit

un branchement, c'est l'extension d'une fissure dans une différente orientation formant ainsi un angle entre la fissure préexistante et sa nouvelle extension (Figure 20).



**Figure 20** Illustration d'un branchement d'une fissure par un angle  $\varphi$ .

### 3.2.2. Méthode d'investigation des fissures

Les méthodes d'investigation des fissures sont multiples. On y distingue les méthodes classiques telles que présentées au premier chapitre et les méthodes plus récentes et plus sophistiquées développées au cours de l'histoire par plusieurs chercheurs. Quant à l'investigation du phénomène de branchement des fissures la plupart de ces méthodes ont connu des modifications ou des extensions adaptées afin de prendre en compte l'angle produit au cours du branchement.

#### 3.2.2.1. Méthode de l'intégrale J

Cette méthode est définie par une ligne intégrale proposé par Rice en 1968 [110] admissible pour tous les contours entourant la pointe d'une fissure dans un milieu élastique ou élasto-plastique [111]. Ce dernier a pour but d'analyser la concentration de la contrainte et de la déformation à l'entourage de la fissure. Cette intégrale est ensuite nommée « intégrale-J » et présentée par l'équation ci-dessous :

$$J = \int_{\Gamma} W dy + \underline{T} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} ds \tag{38}$$

Avec :

$\Gamma$  : Contour autour de la pointe de la fissure,

$W$  : Energie élastique calculée par  $W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$

$\underline{T}$  : Vecteur de traction sur le long de  $\Gamma$ .

$ds$  : Longueur infinitésimale du contour  $\Gamma$ .

$\underline{u}$  : Vecteur de déplacement.

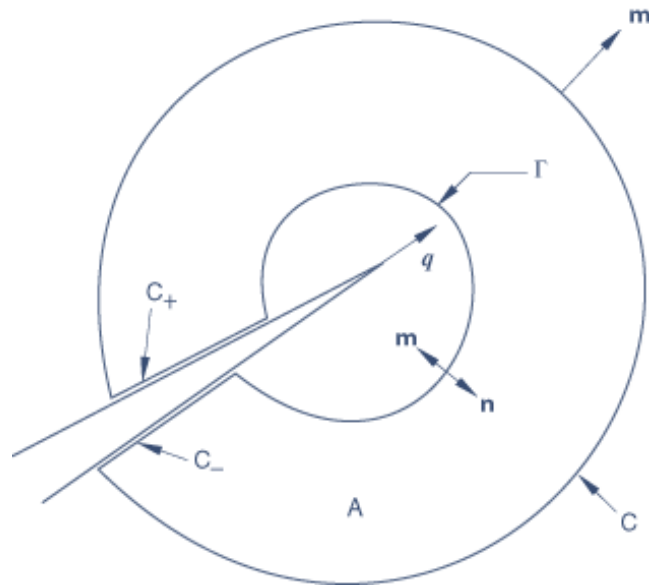


Figure 21 Contour du J-intégrale.

Les relations entrent « Intégrale J » et le facteur d'intensité de contrainte K, ainsi que le taux de restitution d'énergie G ont été également proposées :

- En cas de contraintes planes :

$$J = G = \frac{1-\nu^2}{E} K^2 \quad (39.a)$$

- En cas de déformations planes.

$$J = G = \frac{K^2}{E} \quad (39.b)$$

Le critère de Rice pour la propagation de fissure s'écrit comme suit:

$$J \geq J_c \quad (39.c)$$

Avec :  $J_c$  la valeur critique à la rupture.

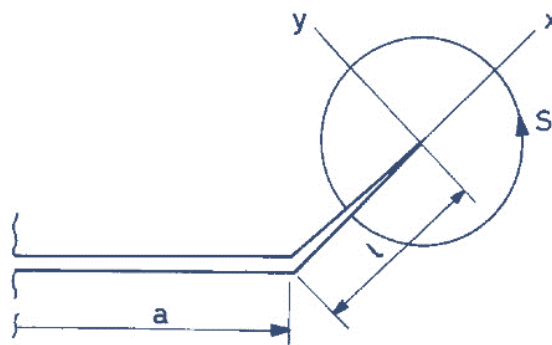


Figure 22 Contour pour le calcul de J Intégrale dans la présence d'un coude[112].

En vertu de l'hypothèse énoncée précédemment, G pour un coude ou une extension hors plan est déterminé à partir de J calculé par l'équation 38. Le contour est défini autour de la nouvelle extension avec des formes plutôt régulières tel qu'un cercle[112], ce dont le rayon est supérieur à zéro et est inférieur à la taille de l'extension.

### 3.2.2.2. La procédure dérivative de la rigidité

La SDP (stiffness derivative procedure) est une technique qui est utilisée avec les éléments finis pour déterminer les caractéristiques des fissures[113]. Supposons qu'une analyse par éléments finis ait été effectuée sur un corps élastique linéaire plan donné d'épaisseur unitaire contenant une fissure. Aucune précaution exceptionnelle n'a dû être prise en termes d'éléments spéciaux ou de raffinement extrême du maillage dans la région de l'extrémité de la fissure. Cette solution permet d'obtenir un vecteur de déplacements nodaux  $\{u\}$ . On peut exprimer l'énergie potentielle,  $E_p$ , de la solution par éléments finis comme suit :

$$E_p = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} \quad (40)$$

Où  $[K]$  est la matrice de rigidité,  $\{f\}$  est le vecteur de forces nodales. On peut différentier l'équation (40) en respectant la taille de l'expansion «  $L$  » pour obtenir le taux de restitution d'énergie :

$$\left. \frac{-\partial E_p}{\partial l} \right|_{charge} = \frac{-\partial \{u\}^T}{\partial l} [[K] \{u\} - \{f\}] - \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial l} \quad (41)$$

Où on peut noter que  $[K]$  est symétrique. Cependant, le vecteur entre crochets dans l'équation 41 est considéré nulle pour les solutions avec la méthode des éléments finis. Donc, pour l'état de déformation plane :

$$\left. \frac{-\partial E_p}{\partial l} \right|_{charge} = K_1^2 \frac{(1-\nu^2)}{E} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} + \{u\}^T \frac{\partial \{f\}}{\partial l} \quad (42)$$

La matrice  $\delta[K]/\delta l$  représente la variation de la matrice de rigidité principale par unité d'avancement de la fissure. On peut accommoder un incrément d'avancement de la fissure avec le maillage comme indiqué sur la Figure 23 en déplaçant de manière rigide tous les nœuds sur et dans un contour  $C_0$  autour de la pointe de la fissure d'une quantité infinitésimale  $\Delta l$  dans la direction  $x$ . Tous les autres nœuds restent dans leur position initiale. Ainsi, la matrice de rigidité principale maître  $[K]$ , qui ne dépend que des géométries des éléments individuels, des fonctions de déplacement et des propriétés des matériaux élastiques, reste inchangée dans les régions situées à l'intérieur de  $C_0$  et à l'extérieur de  $C_1$ . Les seules contributions au premier terme de l'équation (42) proviennent de la bande d'éléments entre les contours  $C_0$  et  $C_1$ .

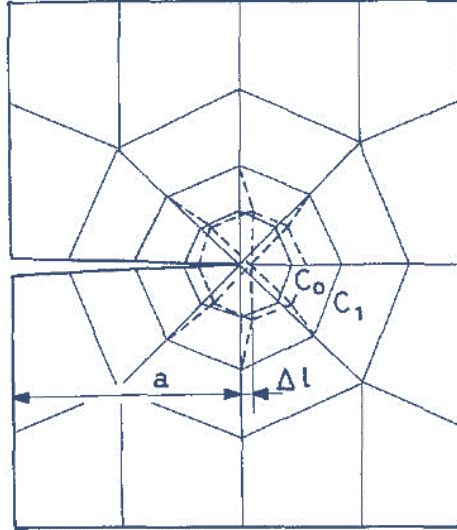


Figure 23 Modification des nouveaux nœuds pour le calcul par la procédure dérivative de rigidité[112].

La matrice de rigidité principale  $[K]$  est la somme de tous les éléments des matrices de rigidité des éléments.  $[K]$ . Par conséquent,

$$-\frac{1}{2}\{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} = -\frac{1}{2}\{u\}^T \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\partial [k_i^e]}{\partial l} \{u\} \quad (43)$$

### 3.2.2.3. La technique de la fermeture virtuelle de fissure

L'affirmation d'Irwin est, que si une fissure s'étend d'une petite quantité de  $\Delta a$ , l'énergie absorbée dans le processus est égale au travail nécessaire pour refermer la fissure à sa longueur initiale [3]. En utilisant un système de coordonnées polaires avec l'origine à la pointe de la fissure étendue, cette affirmation sous forme d'équation est :

$$G = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_y(\Delta a - r, 0) \bar{v}(r, \pi) dr + \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \tau_{xy}(\Delta a - r, 0) \bar{u}(r, \pi) dr \quad (44)$$

Où  $G$  est le taux de restitution d'énergie,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les contraintes près de la pointe de la fissure,  $u$  et  $v$  sont les déplacements relatifs de glissement et d'ouverture entre les points sur les faces de la fissure et  $\Delta a$  est l'extension de la fissure à sa pointe. Les premières et deuxièmes intégrales de l'équation 44 sont des expressions des taux de libération d'énergie pour les déformations de mode I et de mode II, respectivement. Ainsi, l'équation 44 peut être exprimée par les deux équations suivantes :

$$G_I = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma_y(\Delta a - r, 0) \bar{v}(r, \pi) dr$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta c \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \tau_{xy}(\Delta a - r, 0) \bar{u}(r, \pi) dr \quad (45)$$

Les déplacements de glissement et d'ouverture sont désignés respectivement par  $u_x$  et  $u_y$  ;  $u_y$  est représenté sur la figure 24a [114]. Notez que  $r$  est la coordonnée radiale émanant de la pointe de la fissure dont la longueur est  $a + \Delta a$ , comme le montre la figure 24b. Raju (1987) [115] a dérivé les équations VCCT en utilisant des expressions pour la traction en avant de la pointe de la fissure et pour les déplacements de la face de la fissure, qui dépendent du type d'élément. Ces

expressions ont été substituées dans l'intégrale de fermeture de fissure d'Irwin dans l'équation 44. Alors que Rybicki et Kanninen (1977) [116] ont suggéré de réaliser une analyse par éléments finis pour une fissure de longueur  $a+\Delta a$ , Raju (1987) [115] a suggéré de réaliser une analyse en utilisant une fissure de longueur  $a$ . L'équation pour le taux de libération d'énergie du mode I, en utilisant une formulation par éléments finis avec un élément à huit nœuds, est donnée par :

$$G_I = \frac{1}{2\Delta a} \sum_{m=1}^2 F_{ym} \Delta u_{ym'} \quad (46)$$

Dans l'équation 46, l'extension virtuelle de la fissure  $\Delta a$  est définie comme la longueur de l'élément en amont de la pointe de la fissure, comme le montre la figure 25. On peut noter que la longueur de l'élément en aval de la pointe de la fissure doit être identique pour cette formulation. Les forces  $F_{y1}$  et  $F_{y2}$ , sont les forces nodales dans la direction  $y$  aux nœuds 1 et 2, respectivement, comme le montre la figure 25 ;  $\Delta u_{y1}$  et  $\Delta u_{y2}$  sont les déplacements d'ouverture de la fissure aux nœuds 1 et 2, respectivement, également dans l'équation 46. Pour calculer  $G_{II}$ ,  $y$  est remplacé par  $x$ .

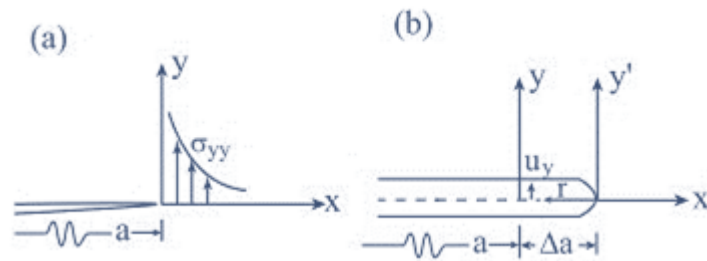


Figure 24 a) Fissure de longueur  $a$  b) Fissure de longueur  $a+da$ .

La VCCT a été étendue pour la première fois aux fissures d'interface entre deux milieux isotropes dissemblables par Sun et Jih (1987) [117]. Une étude bibliographique sur ce sujet a été présentée dans Banks-Sills et Farkash (2016) [114]. Une fois arrivé à la rupture, on peut noter que les taux de restitution d'énergie par l'extension de la fissure  $\Delta a$  est varié. Puisqu'il a été démontré à partir de certains travaux que  $G_I$  et  $G_{II}$  diffèrent quand la technique est employée entre deux milieux anisotropes distincts. Parmi les travaux qui ont mis en exergue ce problème on peut citer Raju et al. (1987) [115] qui ont étudié une fissure de bord le long d'une interface dans un stratifié composé de deux matériaux monocliniques dissemblables. Ils ont montré que les taux de libération d'énergie dépendent de  $\varepsilon$  et de  $\Delta a$  comme  $e^{\pm 2i\varepsilon \ln \Delta a}$ . Sun et Manoharan (1989)[98] ont présenté la même dépendance pour les fissures d'interface entre deux matériaux orthotropes. D'autres paires de matériaux anisotropes ont été considérées par Chow et Atluri (1995) [27] et Hemanth et al. (2005) [118].

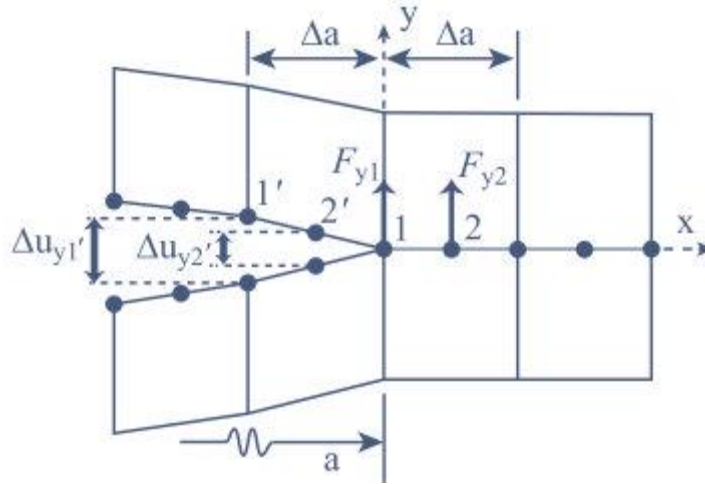


Figure 25 Les forces et les déplacements utilisés pour le calcul de G avec un élément à 8 nœuds.

### 3.2.2.4. Déplacement d'ouverture de la pointe de fissure (CTOD)

Dans l'élasticité linéaire de la mécanique de la rupture, le déplacement des points matériels dans la région autour de la pointe de la fissure peut être calculé. Avec la fissure le long de l'axe x, le déplacement  $u_y$  dans la direction y est connu comme une fonction de r (distance) et  $\theta$  (angle), à la fois pour une contrainte plane et une déformation plane. Le déplacement des points à la surface supérieure de la fissure résulte pour  $\theta = \pi$  et peut être exprimé dans la coordonnée x, en prenant :

$$r = a - x \quad (47)$$

Où  $a$  est la demi-longueur de la fissure. L'origine de ce système de coordonnées (x,y) est au centre de la fissure. L'ouverture de la fissure (déplacement) (COD)  $\delta$  est égale à deux fois ce déplacement. On peut facilement apprécier que l'ouverture à l'extrémité de la fissure (CTOD),  $\delta_t$ , est nulle [119] .

$$u_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( k + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \right] \quad (48)$$

Déplacement d'une fissure plane  $\theta=\pi$

$$u_y = \frac{(1+\nu)(\kappa+1)}{E} \frac{\sigma}{2} \sqrt{2a(a-x)} \quad (49)$$

Déplacement de l'ouverture de fissure (COD):

$$\delta(x) = 2u_y(x) = \frac{(1+\nu)(\kappa+1)}{E} \sigma \sqrt{2a(a-x)} \quad (50)$$

Déplacement de l'ouverture de fissure (CTOD) :

$$\delta_t = \delta(x = a) = 0 \quad (51)$$

Ce CTOD peut être utilisé dans un critère de croissance des fissures (Fig 1.14), lorsque la plasticité à l'extrémité de la fissure est prise en compte et que la longueur réelle de la fissure est remplacée par la longueur effective de la fissure.

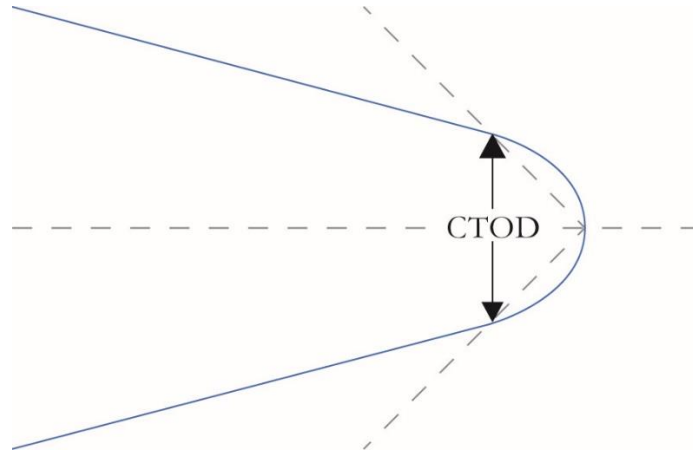


Figure 26 Définition du CTOD [120]

### 3.2.3. Propagation d'une fissure inclinée

Nous pouvons généraliser la fissure transversale angulaire de la figure 26 à toute fissure plane orientée à  $90^\circ - \beta$  de la contrainte normale appliquée. Pour une charge uni-axiale, les facteurs d'intensités de la contrainte pour le Mode I et le Mode II sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_I &= K_{I(0)} \cos^2 \beta \\ K_{II} &= K_{I(0)} \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \tag{52}$$

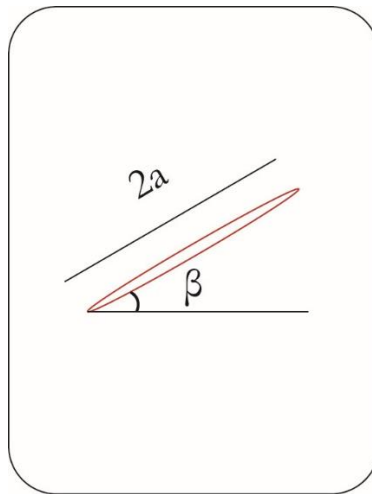


Figure 27 Fissure Inclinée avec un angle .

Où  $K$  est le facteur d'intensité de contrainte pour l'angle  $\beta=0$ . Le champ de contraintes à la pointe de la fissure (en coordonnées polaires) pour la partie Mode I du chargement est donné par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{53}$$

Ce champ singulier ne s'applique que lorsque  $r \rightarrow 0$ . Les champs de contrainte singuliers pour le mode II sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{5}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{54}$$

### 3.2.4. Branchement de fissures

Supposant que la fissure en question forme un coude infinitésimal à un angle  $\alpha$  par rapport au plan de la fissure, comme l'illustre la figure 2.52. Les facteurs d'intensité de contrainte locaux à l'extrémité de ce coude diffèrent des valeurs nominales  $K$  de la fissure principale. Si on définit un système de coordonnées x-y local à l'extrémité du coude et supposant que les équations 48 et 49 définissent les champs de contrainte locaux, les facteurs d'intensité de contrainte locaux du mode I et du mode II à l'extrémité sont obtenus en additionnant les contraintes normales et de cisaillement, respectivement, à  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 k_I(\alpha) &= \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = C_{11}K_I + C_{12}K_{II} \\
 k_{II}(\alpha) &= \tau_{xy} \sqrt{2\pi r} = C_{21}K_I + C_{22}K_{II}
 \end{aligned} \tag{55}$$

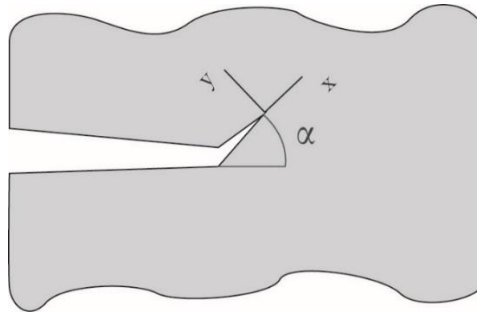


Figure 28 Branchement infinitésimal d'une fissure microscopique.

Où  $k_I$  et  $k_{II}$  sont les facteurs d'intensité de la contrainte locaux à l'extrémité du coude et  $K_I$  et  $K_{II}$  sont les facteurs d'intensité de la contrainte pour la fissure principale qui sont donnés par l'équation 52 pour la fissure inclinée. Les coefficients  $C_{ij}$  sont donnés par

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \\C_{12} &= -\frac{3}{4} \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] \\C_{21} &= \frac{1}{4} \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \right] \\C_{22} &= \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\end{aligned}\tag{56}$$

### 3.3. CONCLUSION

Dans la majorité des travaux en littérature la propagation de fissure est globalement prise comme une propagation rectiligne, droite ou dans le même sens de la trajectoire de fissure initiale. Alors que cela ne reflète pas toute la réalité de l'extension de la fissure. C'est ainsi que le branchement de fissure est un aspect de l'expansion de la fissure dans la façon la plus proche de sa description naturelle. Les approches analytiques et les méthodes numériques présentes des procédés divers pour bien cerner le problème.

Les différentes tels que présentés avant, ont de différentes approches pour contourner le problème et présenter les paramètres d'une fissure. Y en a qui sont adaptés spécialement pour les éléments finis tel que la procédure dérivative de rigidité ou elle nécessite les déplacements et les matrices de rigidité des éléments autour de la pointe de fissure. D'autres sont d'une approche analytique mais peuvent s'adapter avec les méthodes numériques tel que l'intégrale de J ou le déplacement à l'ouverture de la pointe de fissure et la technique de fermeture virtuelle de fissure. Ces deux dernières méthodes prennent en compte le problème de singularité à la pointe de fissure grâce aux déplacement dans la pointe causée par l'extension de fissure.

## **Chapitre IV : Elément Finis Mixte pour les Interfaces Fissurées.**

#### **4.1. INTRODUCTION**

Dans les chapitres précédents multiples méthodes numériques ont été présentés. Ces méthodes ont prouvé au cour du temps leur efficacité et leur développement est devenue impératifs pour poursuivre toutes nécessité des temps modernes. Ces grâce au hautes compétences des outils numériques actuelle que la modélisation de structures complexes est devenue possible, cette modélisation prend en compte toutes les caractères physiques tel que les propriétés mécaniques, élastiques, thermiques ...etc.

Dans ce chapitre un élément finis mixte est développé et présenté qui traite les façades fissurés et discontinues. Quatre différents éléments finis mixtes sont déployés en commençant d'un élément parent nommé *Elément de Reissner* et couronnant avec l'élément finis mixtes RMQ7 *Reissner's Modified Quadrilatéral with 7 Nodes*.

Cet élément a été développé par Bouzred [121] pour traiter les problèmes d'interface tel que les problèmes de bi-matériaux, la délamination et les problèmes de singularité comme les fissures. il été ensuite repris par Bouziane [122] qui l'a adapté dans un système naturelle pour rendre le temps de calcule plus rapide.

#### **4.2. L'ELEMENT FINI MIXTE RMQ7**

Le RMQ-7 est un élément quadrilatéral qui possède sept nœuds et quatorze degrés de liberté. Les trois côtés de l'élément quadrilatéral sont compatibles avec l'élément classique. Dans chaque Dans chaque coin de l'élément quadrilatéral, il y a un nœud de déplacement. Alors que le quatrième côté, en plus des deux nœuds de déplacement (nœud 1, nœud 2), il y a un nœud médian (nœud 5), et également deux nœuds intermédiaires de contrainte situés au milieu entre les nœuds 1 et 5, et 5 et 2. Respectivement (nœuds 6 et 7), pour calculer les composantes de la contrainte le long de l'interface. L'interface. Les vecteurs continus de déplacement et de contrainte sont pris en considération à ce côté particulier, qui sera remplacé le long de l'interface. Côté particulier, qui sera remplacé avec l'interface. Dans le cas des structures fissurées, le nœud médian est lié au point de fissure. Les deux nœuds statiques Les deux nœuds statiques sur les deux côtés permettent de satisfaire les exigences essentielles comme la condition de bord libre sur les lèvres fissurées et la condition d'interface. Sur les lèvres fissurées et la condition de continuité dans l'interface. La formulation mixte de Reissner utilise les variables nodales de tous les déplacements et contraintes pour construire l'élément mixte d'interface. Construire l'élément mixte d'interface. Partout où l'élément Reissner est en excès, les variables nodales variables.

La formulation impose une forte continuité au niveau de l'interface. La contrainte  $\sigma_{11}$  apparaît avec les variables considérées dans la fonctionnelle de Reissner éliminée dans la formulation de l'élément de l'élément d'interface parce qu'elle n'apparaît pas avec les contraintes d'interface (en gardant juste la contrainte  $\sigma_{22}$  et le cisaillement). Juste la contrainte  $\sigma_{22}$  et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ ). L'avantage est d'avoir des éléments avec un nombre de degrés de liberté le plus faible possible. D'un autre côté D'autre part, l'utilisation de la fonction de Reissner formule les éléments avec un très grand nombre de degrés de liberté.

### 4.3. LES ETAPES DE CONSTRUCTION DE L'ELEMENT RMQ7

#### 4.3.1. La fonctionnelle de Reissner.

Dans le cas du principe variationnel de l'énergie complémentaire maximale, la fonctionnelle représentant cette énergie qui ne dépend que du champ de contraintes qui vérifie les équations d'équilibre et les conditions aux limites comme conditions essentielles. Si l'on veut établir un principe variationnel à partir de cette fonctionnelle sans les champs de contraintes statiquement admissibles. Il est alors nécessaire d'introduire ces conditions à travers les multiplicateurs de Lagrange.

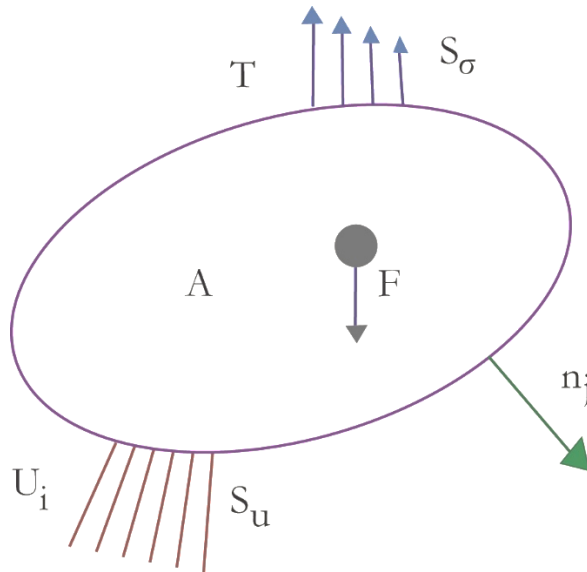
La fonctionnelle représentant l'énergie complémentaire pour des champs non statiquement admissibles s'écrit :

$$\Pi_{c(\sigma_{ij}, \lambda_i, \beta_j)} = -\frac{1}{2} \int_v S_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij} dv + \int_S \sigma_{ij} n_j u_i dS_u - \int_v \lambda_i (\sigma_{ij} + F_i) dv + \int_S \beta (\sigma_{ij} n_j - T_i) dS_\sigma \quad (57)$$

$\beta_i$  et  $\lambda_i$  Multiplicateurs de Lagrange qui prennent en compte les conditions aux limites et des conditions d'équilibre en introduisant la condition de stabilité.  $\delta \Pi_c = 0$

Les variations du premier ordre de  $\Pi_c$  s'écrivent :

$$\delta \Pi = \int_v (\lambda \varepsilon_{ij} - S_{ijkl} \sigma_{ij} - (\sigma_{ij,j} + F_i)) dv + \int_S (\bar{U} - \lambda_i) \delta \sigma_{ij} n_j dS_u + \int_S ((U_i - \beta_i) \delta \sigma_{ij} n_j + (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}) \delta \beta_i) dS_\sigma \quad (58)$$



**Figure 29 Conditions aux limites.**

F : Force de volume donnée.

$U_i$  : Déplacement imposé sur  $S_u$ .

$T_i$  : Traction imposé sur  $S_\sigma$ .

$S_{ijkl}$  : Les composantes de la matrice de souplesse.

Les variables  $\sigma_{ij}$ ,  $\lambda_i$ ,  $\beta_i$  sont considérés comme variables indépendantes. On obtient les équations de stabilité :

Sur  $S_u$

$$\lambda_i = U_i \quad (59)$$

Et sur  $S_\sigma$

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \quad (60)$$

Et

$$\beta_i = U_i \quad (61)$$

$$\varepsilon_{ij}(\lambda) = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (62)$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (63)$$

En prenant en compte les conditions des équations 60 et 61 ; et remplaçant  $\lambda_i \beta_i$  par leurs valeurs physiques dans  $\Pi_C$ . Nous obtiendrons la fonctionnelle mixte de Reissner :

$$R(\sigma_{ij}, U_i) = -\frac{1}{2} \int \left( (S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}) + U_i (\sigma_{ij,j} n_j + F_j) \right) dv + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{U}_i dS_u + \int_{S_\sigma} U_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) dS_\sigma \quad (64)$$

Ou encore en faisant une intégration par partie on obtient :

$$R(\sigma_{ij}, U_i) = \int_v \left( U_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \right) dv - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i U_i dS_\sigma - \int_{S_\sigma} T_i (U_i - \bar{U}_i) dS_\sigma \quad (65)$$

Les variables  $U_i \sigma_{ij}$  sont considérés indépendantes. La condition de stationnarité de R nous donne donc les équations de l'équilibre, les lois de comportement et les conditions aux limites comme tel :

$$U_i = \bar{U}_i \quad (66)$$

$$T_i = \bar{T}_i \quad (67)$$

La valeur de stabilité (stationnarité) de fonctionnelle reste scellé. Elle n'est ni maximum ni minimum, ceci apparaît en calculant la deuxième variation de R :

$$\delta^2 R(\sigma_{ij}, U_i) = -2 \int_v \left( (\delta \sigma_{ij})_j \delta U_i + \frac{1}{2} S_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} \right) dv + 2 \int_{S_\sigma} \delta (\sigma_{ij} n_j) \delta U_i dS_\sigma \quad (68)$$

On note que  $\delta^2 R$  ne garde pas un signe constant et par conséquent la valeur de stationnarité de R n'est ni un maximum ni un minimum.

Nous introduisons maintenant une notation matricielle pour écrire la fonctionnelle sous forme discrétisée. Dans le cas deux dimensionnel les équations locales d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ U \end{Bmatrix}^T = \langle \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, U_1, U_2 \rangle \quad (70)$$

[L<sub>1</sub>] : l'opérateur linéaire

$$[L_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Avec : [L<sub>2</sub>] = [L<sub>1</sub>]<sup>T</sup>

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 2S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & 2S_{26} \\ 2S_{16} & 2S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\{U_i\} = \{\bar{U}\} \quad (73)$$

Et

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

La fonctionnelle R devient :

$$R(\{\sigma\}, \{U\}) = \frac{h}{2} \int \begin{Bmatrix} u \\ \sigma \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & L_1 \\ L & -[S_1] \end{bmatrix} dA - h \int_{L_\sigma} \{\bar{T}\}^T \{U\} dL_\sigma - \int_A \{F\}^T \{U\} dA - h \int \{T\} (\{U\} - \{\bar{U}\}) dL_\sigma \quad (75)$$

### 4.3.2. L'élément mixte de Reissner

L'élément mixte de Reissner est un élément à quatre nœuds avec cinq degrés de liberté (deux déplacements et trois contraintes) par nœud (figure 30). Cet élément a été formulé en utilisant le principe variationnel de Reissner [123].

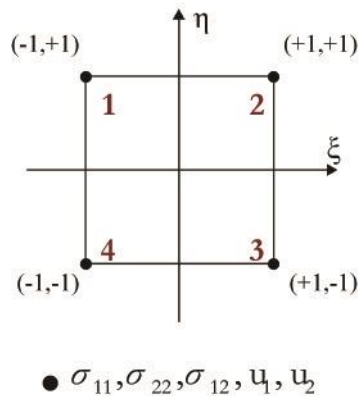


Figure 30 L'élément de Reissner.

En posant, Pour une surface  $A^e$  :

$$\{\varepsilon^e\} = [L_2]\{u^e\} \quad (76)$$

Avec

$$\{u^e\} = \{\bar{u}^e\} \quad (77)$$

La fonctionnelle de Reissner est :

$$R(\{\sigma\}, \{u\}) = \frac{e}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [L_2] \\ [L_1] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma \\ u \end{Bmatrix} dS - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}\}^t \{u\} dL_\sigma - e \int_A \{f\}^t \{u\} dS - e \int_{L_\sigma} \{T\}^t (\{u\} - \{\bar{u}\}) dL_u \quad (78)$$

Cela peut aussi s'écrire comme suite :

$$R(\{\sigma\}, \{u\}) = \frac{e}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} -[S] & [I] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} dA^e - e \int_{L_\sigma} \{\bar{T}^e\}^t \{u^e\} dL_\sigma - e \int_A \{f^e\}^t \{u^e\} dA^e \quad (79)$$

Où :

[I] : La matrice unitaire.

[S] : La matrice de flexibilité.

$A^e$  : La surface élémentaire.

$e$  : L'épaisseur.

$L_\sigma$  : La partie du contour où les forces  $\{T^e\}$  sont imposées.

$\{\sigma\}$  : le vecteur de contrainte de l'élément finis.

$\{\varepsilon\}$  : le vecteur déplacement de l'élément finis.

$\{u\}$  : le champ de déplacement.

$\{f^e\}$  : Le vecteur des forces volumiques.

Le champ de contrainte à tout point est exprimé :

$$\{\sigma\} = [M]\{\tau\} \quad (80)$$

Où :

[M] : La matrice des fonctions de forme

Avec

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\} \quad (81)$$

$$\{\tau\}^t = \{\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \sigma_{12}^1, \sigma_{11}^2, \sigma_{22}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{11}^3, \sigma_{22}^3, \sigma_{12}^3, \sigma_{11}^4, \sigma_{22}^4, \sigma_{12}^4\} \quad (82)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Les fonctions de formes de l'équation 83 sont données par [124]:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ M_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ M_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ M_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (84)$$

Le champ de déplacement est :

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (85)$$

Où :

[N] : La matrice des fonctions de forme de déplacement.

Avec

$$\{u\}^t = \{u_1, u_2\} \quad (86)$$

$$\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4\} \quad (87)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Les fonctions de formes de l'équation 88 sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (89)$$

La déformation est écrite comme :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \quad (90)$$

Avec [B] la matrice de déplacement-déformation. Et :

$$\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\} \quad (91)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (92)$$

Comme la matrice [N] dépend des variables ( $\xi, \eta$ ), la Jacobienne [J]<sup>-1</sup> utilisé pour inverser la transformation géométrique afin de pouvoir exprimer les dérivées concernant (x, y) en fonction de ( $\xi, \eta$ ).

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (93)$$

Si on prend en compte :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases} \quad (94)$$

Alors, la Jacobienne peut être calculé comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (95)$$

Quand la matrice Jacobienne n'est pas singulière, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (96)$$

Les déplacements nodaux dans les champs statiques et cinétiques sont :

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (97)$$

En remplaçant la dernière expression dans la fonctionnelle de Reissner, ça nous donne sa forme discrétiser :

$$R = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{F_\sigma^e\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (98)$$

Avec :

$[K_e]$  : La matrice de souplesse élémentaire. Elle est définie par :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}] & [K_{\sigma u}] \\ [K_{\sigma u}]^t & [0] \end{bmatrix} \quad (99)$$

Où :

$$[K_{\sigma\sigma}] = -e \int_{A^e} [M]^t [S] [M] dA^e \quad (100)$$

$$[K_{\sigma u}] = e \int_{A^e} [M] [B] dA^e \quad (101)$$

Le vecteur des forces élémentaire équivalent est composé de deux vecteur :  $\{F_\sigma^e\}$  le vecteur de contraintes, considéré nulle à cause d'absence de déformation initiale. Et  $\{F_u^e\}$  le vecteur déplacement et le vecteur de contraintes.

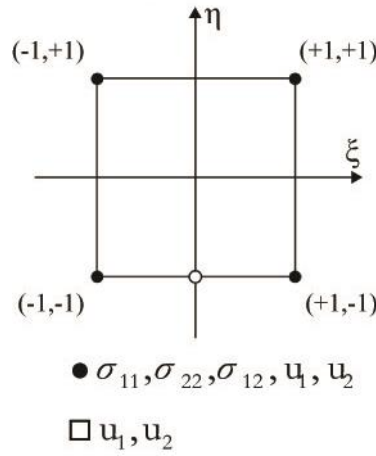
Les deux vecteurs sont écrits comme :

$$\begin{aligned} \{F_u^e\} &= e \int_{L_\sigma} [N] \{\bar{T}^e\} dL_\sigma \\ \{F_\sigma^e\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (102)$$

### 4.3.3. L'élément RMQ5

Le RMQ-5 est un élément mixte à cinq nœuds et 22 degrés de liberté (figure 5-2). Cet élément élément est réalisé en ajoutant le nœud de déplacement aux quatre nœuds des éléments de Rissners. Le côté inférieur du RMQ-5 lié à l'interface présente trois nœuds. Le nœud de déplacement nœud central est associé au fond de la fissure.

Le nombre et la position des nœuds de contrainte ne sont pas modifiés. Les éléments RMQ-5 et Reissner ont le même comportement statique. Le champ de contrainte est écrit avec les mêmes fonctions de forme fonctions  $M_i$ ,  $i = 1,4$ .



**Figure 31 l'élément RMQ5.**

Le champ de déplacement est écrit :

$$\{u\} = [N]\{q\} \tag{103}$$

Avec :

$$\{q\}^t = \{u_1^1, u_2^1, u_1^2, u_2^2, u_1^3, u_2^3, u_1^4, u_2^4, u_1^5, u_2^5\} \tag{104}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 \end{bmatrix} \tag{105}$$

Les fonctions de forme sont de :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \end{aligned} \tag{106}$$

La matrice qui lie les déformations et les déplacements [B] est définie par :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (107)$$

Dans le cas de l'élément RMQ5, la matrice Jacobienne est donnée comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (108)$$

Le champs statique est cinétique sont exprimés comme :

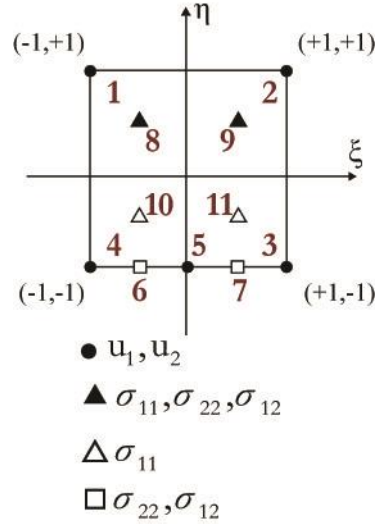
$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{\varepsilon\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\tau\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (109)$$

La matrice de souplesse élémentaire est calculée en utilisant les mêmes formules de l'élément de Reissner's expliqué au paravent avec les équations 99,100 et 101.

#### 4.3.4. La configuration de l'élément RMQ11

L'élément RMQ-11 est un élément à 11 nœuds et 22 degrés de liberté (figure 5-3). La technique de relocalisation permet d'éviter une continuité excessive à l'interface. Cette dernière est utilisée pour obtenir le RMQ-11 à partir de l'élément de référence RMQ-5 en relocalisant certaines variables à l'intérieur du RMQ-5 et en déplaçant des variables statiques. A l'intérieur du RMQ-5 et en déplaçant les inconnues nodales statiques des extrémités vers le côté lui-même.

Le nombre et la position des nœuds de contrainte ne sont pas modifiés. Les éléments RMQ-5 et RMQ-11 ont un comportement cinématique similaire. Le champ de déplacement est exprimé avec les mêmes fonctions de forme.



**Figure 32 L'élément RMQ11.**

L'approximation généraliser du champ de contrainte de l'élément RMQ11 est écrit :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} \{\zeta\} \quad (110)$$

Avec P est la base polynomiale de l'élément.

$$\{P(\xi, \eta)\} = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} \quad (111)$$

$\{\zeta\}$  Les variables généraliser.

Alors que :

$$\{\tau\} = [P_n] \{\zeta\} \quad (112)$$

Le champ de contrainte approximative en tenant compte des variables nodales  $\{\tau\}$  est :

$$\sigma(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_n]^{-1} \{\tau\} = [M] \{\tau\} \quad (113)$$

La contrainte  $\sigma_{11}$  dans l'élément est exprimé :

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{n11}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} = [M_{11}] \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^8 \\ \sigma_{11}^9 \\ \sigma_{11}^{10} \\ \sigma_{11}^{11} \end{Bmatrix} \quad (114)$$

Avec

$$[P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \\ 1 & -0,5 & -0,5 & +0,25 \\ 1 & +0,5 & -0,5 & -0,25 \end{bmatrix} \quad (115)$$

Et

$$[M_{11}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{n11}]^{-1} \quad (116)$$

Les fonctions de formes sont données :

$$\begin{aligned} M_{11}^8 &= \frac{1}{4}(1+2\xi)(1+2\eta) \\ M_{11}^9 &= \frac{1}{4}(1-2\xi)(1+2\eta) \\ M_{11}^{10} &= \frac{1}{4}(1-2\xi)(1-2\eta) \\ M_{11}^{11} &= \frac{1}{4}(1+2\xi)(1-2\eta) \end{aligned} \quad (117)$$

Les contraintes  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  réévalué par :

$$\sigma_{i2}(\xi, \eta) = \{P(\xi, \eta)\} [P_{ni2}]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix} = [M_{i2}] \begin{Bmatrix} \sigma_{i2}^6 \\ \sigma_{i2}^7 \\ \sigma_{i2}^8 \\ \sigma_{i2}^9 \end{Bmatrix}; i = 1, 2 \quad (118)$$

Avec

$$[P_{n11}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -1 & +0,5 \\ 1 & +0,5 & -1 & -0,5 \\ 1 & +0,5 & +0,5 & +0,25 \\ 1 & -0,5 & +0,5 & -0,25 \end{bmatrix} \quad (119)$$

Et

$$[M_{i2}] = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} [P_{ni2}]^{-1}; i = 1, 2 \quad (120)$$

Les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned} M_{i2}^6 &= \frac{1}{6}(1-2\xi)(1-2\eta) \\ M_{i2}^9 &= \frac{1}{6}(1+2\xi)(1-2\eta) \\ M_{i2}^8 &= \frac{1}{3}(1+2\xi)(1+\eta) \\ M_{i2}^9 &= \frac{1}{3}(1-2\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (121)$$

Le champ de contrainte :

$$\sigma(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [M] \{ \tau \} \quad (122)$$

Avec

$$[M] = \begin{bmatrix} \{M_{11}\} & \{0\} & \{0\} \\ \{0\} & \{M_{22}\} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} & \{M_{12}\} \end{bmatrix} \quad (123)$$

Et

$$\{ \tau \}^t = \{ \sigma_{11}^8, \sigma_{11}^9, \sigma_{11}^{10}, \sigma_{11}^{11}, \sigma_{22}^8, \sigma_{22}^9, \sigma_{22}^{10}, \sigma_{22}^{11}, \sigma_{12}^8, \sigma_{12}^9, \sigma_{12}^{10}, \sigma_{12}^{11} \} \quad (124)$$

La matrice de souplesse élémentaire reste semblable à celle de l'élément de Reissner montrer aux équations 99,100 et 101

Le calcul de la matrice élémentaire s'effectue par intégration numérique selon la méthode de Gauss. Le passage de l'intégration de l'élément naturel à celle de référence implique la transformation géométrique Jacobienne.

Dans la configuration de référence, l'intégration s'écrit :

$$[K^e] = -e \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{-1}^{+1} [k^e(\xi, \eta)] \det(J(\xi, \eta)) d\eta \quad (125)$$

Nous avons utilisé la formule d'intégration à 4 points (2 points dans chaque direction (p = 2)).

On a :

$$[K^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [k^e(\xi_i, \eta_j)] \det(J(\xi_i, \eta_j)) \quad (126)$$

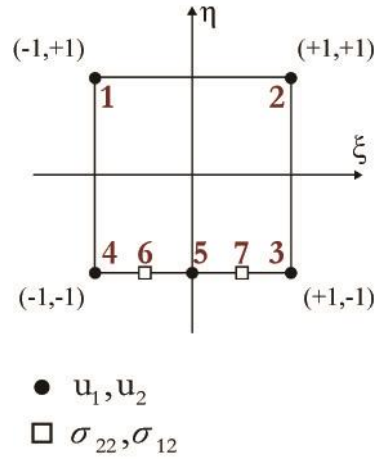
Où :

$\xi_i, \eta_j$  Les coordonnées des points d'intégration.

$w_i, w_j$  Les coefficients de Weight.

#### 4.3.5. La construction de l'élément RMQ7

La condensation statique a été utilisée pour obtenir l'élément RMQ-7 à partir de l'élément RMQ-11 en éliminant les variables internes du RMQ-11



**Figure 33 L'élément RMQ7.**

Les nœuds internes de l'élément RMQ-11 ne participent pas à l'assemblage de la matrice et compliquent l'opération de mise en place des données. La taille de la demi-bande passante a augmenté pendant l'assemblage, ce qui augmente le temps de calcul.

La condensation des variables internes sur le contour est liée au concept de réduction de la taille du système d'équations (l'élimination d'un certain nombre de degrés de liberté). En analyse structurelle, ce type de procédure est appelé analyse par sous-structures.

La forme discrétiser de la fonctionnelle de Reissner est :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t [K_e] \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (127)$$

L'opération de calcul de la condensation s'effectue en décomposant les degrés de liberté de la contrainte au niveau élémentaire en deux groupes :

$\{\tau_e\}$  Contraintes sur les contours de l'élément.

$\{\tau_i\}$  Contrainte à l'intérieur de l'élément.

La décomposition de la matrice élémentaire  $[K_e]$  relativement aux groupes de degrés de liberté  $\{q\}$ ,  $\{\tau_e\}$  et  $\{\tau_i\}$  est écrit :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]_i & [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & [K_{\sigma u}]_i \\ [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t & [K_{\sigma\sigma}]_c & [K_{\sigma u}]_c \\ [K_{\sigma u}]_i^t & [K_{\sigma u}]_c^t & [0] \end{bmatrix} \quad (128)$$

Les variables de contrainte  $\{\tau_i\}$  ne sont pas assemblées. Conséquemment, les équations ne font intervenir que les degrés de liberté  $\{q\}$ ,  $\{\tau_e\}$ .

Nous pouvons alors trouver une relation entre ces différents types de degrés de liberté en traduisant la condition de stationnarité de (R) concernant  $\{\tau_i\}$ .

$$\frac{\delta R}{\delta \tau_i} = 0 \quad (129)$$

Ce qui nous donne la relation :

$$[K_{\sigma\sigma}]_i \{\tau_i\} + [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} + [K_{\sigma u}]_i \{q\} = 0 \quad (130)$$

Donc :

$$\{\tau_i\} = -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} \{\tau_c\} - [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \{q\} \quad (131)$$

La matrice  $[K_{\sigma\sigma}]_i$  est toujours inversible parce qu'elle est un sous-bloc diagonal d'une matrice symétrique définie négative.

Depuis la relation 131, la matrice de transformation  $[\Gamma]$  des degrés de liberté est définie. Cette dernière démontre la matrice de souplesse réduite qui lie entre les variable  $\{q\}$ ,  $\{\tau_e\}$  comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \{\tau_i\} \\ \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \{\tau_c\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad (132)$$

Avec :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci} & -[K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_i \\ [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (133)$$

$[I]$  la matrice unitaire.

En substituant la relation 133 dans la fonctionnelle de Reissner à l'équation 127, on obtient la fonctionnelle de Reissner réduite  $R^*$  qui dépend uniquement des variables au contour  $\{q\}$ ,  $\{\tau_e\}$

$$R^* = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t [K_e]^* \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix} - \sum_{e=1}^N \begin{Bmatrix} \{\tau_c^e\} \\ \{q^e\} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_u^e\} \end{Bmatrix} \quad (134)$$

Avec la matrice de souplesse réduite qui devient :

$$[K_e]^* = [\Gamma]^t [K_e] [\Gamma] \quad (135)$$

Elle est écrite :

$$[K_e]^* = \begin{bmatrix} [K_{\sigma\sigma}]^* & [K_{\sigma u}]^* \\ [K_{u\sigma}]^* & [K_{uu}]^* \end{bmatrix} \quad (136)$$

Avec :

$$[K_{\sigma\sigma}]^* = [K_{\sigma\sigma}]_c - [K_{\sigma\sigma}]_{ci} [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma\sigma}]_{ci}^t \quad (137)$$

$$[K_{\sigma u}]^* = [K_{\sigma u}]_c - [K_{\sigma u}]_{ci} [K_{\sigma u}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_{ci}^t \quad (138)$$

$$[K_{\sigma u}]^* = [K_{\sigma u}]_i^{*t} \quad (139)$$

$$[K_{uu}]^* = -[K_{\sigma u}]_{ci} [K_{\sigma\sigma}]_i^{-1} [K_{\sigma u}]_{ci}^t \quad (140)$$

La matrice de rigidité réduite à un bloc semi-défini positif  $[K_{uu}]^*$ , contrairement à la forme non réduite où ce bloc est toujours nul. Où ce bloc est toujours nul. La condensation des variables internes est utilisée pour réduire le temps de calcul lors d'une analyse.

La construction pratique ne modifie pas le vecteur du second membre. La simplicité de la construction vient de l'hypothèse concernant les nœuds statiques sans charges. La technique de condensation statique nous permet de construire l'élément RMQ-7 avec seulement sept nœuds et deux degrés de liberté par nœud. (Les nœuds 6 et 7 sont en contrainte pure et le reste des nœuds sont en déplacement pur).

#### 4.4. CONCLUSION

L'élément finis mixte RMQ7 *Reissner's Modified Quadrilatéral with 7 nodes* est développé au cours de ce chapitre. Avec ces 7 nœuds, dont 5 sont des nœuds de déplacements et 2 autres sont des nœuds de contraintes, il présente une approche numérique qui permet de faire des différentes investigations pour les cas de structures comportant une discontinuité. C'est grâce à une de ces façades qui s'alignant aux bords de la discontinuité permet une meilleure approximation des formes de singularités. Cette élément finis mixte est issue d'une série de modifications mathématique de plusieurs éléments précédent qui remonte à un élément parent l'élément finis Reissner.

**Troisième partie :**  
*Applications Numériques*  
**Chapitre V : Analyse de fissure dans un  
matériau anisotrope avec RMQ7**

## **5.1. INTRODUCTION**

Cette partie est au cœur de la thèse. Elle porte sur la validation du modèle proposé et qui est construit autour de l'élément mixte RMQ7. L'application sera concentrée sur des matériaux anisotropes qui ont la propriété d'avoir des caractéristiques élastiques différentes dans toutes directions ce qui définit l'état le plus hasardeux du matériau et le proche dans son état naturel.

Beaucoup d'intérêts ont été porté à ce sujet, notamment les matériaux anisotropes fragiles avec le travail de Hakim & Karma [125] qui ont réussi à prédire le trajet d'une fissure, déterminé par l'énergie de fissuration et indépendamment du processus de rupture. Ainsi que d'autres travaux similaires sur les matériaux fragiles anisotropes [126,127]. Les cas des fissures dans les roches qui sont considérer avoir des propriétés anisotropes a été pris en considération notamment par C.S Chen & al [128] qui se sont penchés vers le développement d'une nouvelle méthode nommée SDBEM (Single-Domain Boundary Element Method) implémenté avec la fonction de Green et ont modélisé un cas de propagation de fissure dans un bi-matériaux rocheux avec le test brésilien, qui considère le chargement comme bi-axiale (mode I et mode II). Il faut aussi mentionner d'autres travaux sur les fissurations des roches, tel que Mikael Rinne [129] qui a conduit une investigation sur une fissuration dépendante du temps, ou celle de Kataoka & al. [130] qui pris en considération une fracture causée par la pression de la vapeur d'eau sur les roches.

D'autres travaux ont été consacrés aux approches numériques tel que Hattori & al. Avec l'EX-BEM [45,68], Rajach et Rao [131] avec une méthode hybride entre la méthode sans-maille et la méthode fractal des élément finis, Chong Xi Lu [132] avec la BEM, [133] avec la XFEM et une méthode analytique MERR (Maximum Energy Release Rate) ou bien dans la mécanique d'endommagement la méthode du point matérielle MPM qui consiste a discrétiser un objet en une collection de points matérielles et chaque point traque l'état de vélocité, de contrainte, de déformation et chaque propriété dépendantes de l'histoire du matériau, c'est ce qu'a fait Nairn & al. [134] pour le cas des matériaux anisotropes.

Dans ce qui suit on considère une plaque rectangulaire fissurée constituée d'un matériau orthotrope pour laquelle le taux de restitution d'énergie est calculé par la nouvelle approche proposée. L'application au cas anisotrope est obtenue en orientant la plaque orthotrope hors axes principaux en considérant différents angles. Les résultats obtenus sont bien évidemment différents et montre le comportement distinct pour chaque angle.

## **5.2. LA NATURE MECANIQUE DES MATERIAUX**

### **5.2.1. Introduction**

Les divers matériaux existant dans la planète se comportent différemment par rapport au nombreux points de vue (physique, chimique, optique, acoustique...), ces différents comportements sont dus aux différentes propriétés de chaque matériau qui peuvent être mesuré et donne une vision claire sur l'état physique du système.

La capacité d'un solide de changer de forme due à une force quelconque démontre son potentiel élastique. L'élasticité est déterminée par les propriétés mécaniques du matériau composant se solide qui est définie par des modules et coefficients différents, qui a leur tour exprime l'élongation et la viscosité du matériau.

Un matériau pourrait avoir différents comportements tout dépend de sa forme ou de ses propriétés mécaniques. Dans la nature il y a des matériaux qui possèdent des propriétés mécaniques identiques dans n'importe quelle orientation du matériau ou des différentes propriétés dans chaque direction observée ; on distingue donc par ce critère différentes nature mécanique des matériaux dont on peut définir trois types :

#### 5.2.1.1. Les matériaux isotropes

L'isotropie correspond à l'état homogène est indifférencié dans tout le volume occupé par le matériau ce qui est traduit en physique par des caractéristiques et des propriétés identiques dans n'importe quel point du matériau et pour n'importe quelle direction.

En général, le cas des matériaux isotropes est le plus récurrent dans la littérature, ces études sont les plus réputés car les paramètres qui définissent l'isotropie ne sont pas nombreux. Dans le cas de l'isotropie en mécanique, on distingue trois paramètres :

- E : Le module de Young (module d'élasticité).
- $\nu$  : Le coefficient de Poisson (coefficient de viscosité).
- G : Le module de cisaillement.

Dans l'équation contrainte-déformation nommé « loi de Hooke », la matrice de rigidité qui réunit les constants élastiques dans un plan est définie comme suit :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (141)$$

Sachant que :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (142)$$

#### 5.2.1.2. Les matériaux orthotropes :

Par rapport aux matériaux isotropes qui ont des caractéristiques similaires dans toutes directions, les matériaux orthotropes par contre ont deux directions majeures qui gouvernent sur le comportement de ce dernier. Pour être orthotropes ses deux directions doivent être perpendiculaire l'une à l'autre.

Dans la nature les matériaux orthotropes sont très fréquents notamment dans le bois et les végétaux. C'est ce qui donne au bois la qualité d'être très rigide et solide dans son sens vertical et avant la récente modernisation il a fourni à l'humanité des constructions, des abris et des moyens de transports tel que les bateaux pendant toute une époque de plusieurs générations.

Dans l'industrie les matériaux orthotropes sont fortement sollicités. Le caractère orthotrope confère au matériau la qualité d'être souple et dur à la fois, puisque l'une des deux directions peut avoir une forte résistance à la sollicitation imposée, tant dit que l'autre est plutôt moins résistante. Ce critère est notamment utilisé dans les matériaux composites pour faire face aux chocs extérieur (exemple : dans les coques des fusils et des avions).

Les paramètres mécaniques des matériaux orthotropes dépendent de ses deux directions orthogonales, ce qui laisse à distinguer :

- Deux modules de Young pour chaque direction  $E_{11}$   $E_{22}$ .
- Deux coefficients de viscosités dans le plan  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ .
- Un module de cisaillement  $G_{12}$ .

Et la matrice de rigidité s'exprime :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (143)$$

### 5.2.1.3. Les matériaux anisotropes :

L'état d'anisotropie des matériaux est complètement opposé de l'état d'isotropie. L'état d'anisotropie comme présentant des caractères mécaniques qui diffèrent d'une direction à un autre.

L'anisotropie est l'état le plus hasardeux d'un matériau et aussi le plus répondu. Comme les matériaux orthotropes, l'anisotropie est répandue dans le bois et les composites, c'est ainsi que l'orthotropie apparait comme un état particulier de l'anisotropie. Les cristaux, les polymères et les céramiques sont les matériaux qui illustre cette état hasardeuse avec ses caractéristiques élastiques distinguées [135–137].

Les paramètres élastiques des matériaux anisotropes dans un plan dépassent ceux de l'état orthotrope de 4 coefficients :

- Deux modules de Young pour chaque direction  $E_{11}$   $E_{22}$ .
- Deux coefficients de viscosités dans le plan  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$ .
- Un module de cisaillement  $G_{12}$ .
- Coefficient d'influence mutuelle du premier type  $\mu_{1,12}$ ,  $\mu_{2,12}$ .
- Coefficient d'influence mutuelle du second type  $\mu_{12,1}$ ,  $\mu_{12,2}$ .

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{\mu_{1,12}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{\mu_{2,12}}{G_{12}} \\ \frac{\mu_{12,1}}{E_{11}} & \frac{\mu_{12,2}}{E_{22}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (144)$$

### 5.3. L'ELASTICITE LINEAIRE ANISOTROPE DES MATERIAUX :

#### 5.3.1. Introduction

L'élasticité linéaire met en relation la déformation d'un solide et ses contraintes internes dues à une force extérieure. La relation contrainte – déformation est gouvernée par des lois spécifiques à chaque solide, et elle est nommée *Loi de Comportement*. Dans ce qui suit, la relation entre la déformation et la contrainte dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire anisotrope des matériaux est considérée; dans ce cas vingt-et-une constantes élastiques doivent être spécifiées si le matériau n'a aucune propriété de symétrie. Ce chiffre dans son application est notamment élevé, c'est pour cela que la prise en compte de la symétrie réduit le nombre des constantes élastiques. Le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement ainsi que des différents paramètres vont être présentés au long de ce chapitre. Dans le cas où le problème peut être traité dans un plan le nombre de ces constantes élastiques diminue conséquemment.

Afin d'étudier le comportement d'un milieu élastique continu, la théorie d'élasticité est généralement un modèle acceptable. Reste à présenter le concept de l'élasticité pour les corps anisotropes comme l'état de contrainte, la déformation, les lois de comportement et les états limites.

#### 5.3.2. Etat de contrainte

Le but de l'analyse des structures est de déterminer les contraintes et les déformations engendrées par des charges extérieures dans un milieu continu déformable. L'état de contrainte en un point quelconque dans le milieu continu, que ce soit statique ou dynamique, est représenté par trois vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre et passant par le point. Illustré par un volume infinitésimal autour du point, trois facettes parallèles aux plans normales aux coordonnées permettent de représenter les contraintes  $\sigma_{ij}$  dans ce point. Les contraintes normales aux trois facettes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  sont appelées *les contraintes normales*. Les contraintes restantes qui sont parallèles aux trois facettes  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  sont appelées les contraintes de cisaillement. Connaissant les composantes des contraintes dans un système de coordonnées on peut déterminer le vecteur contrainte  $\mathbf{t}$  en un point quelconque pour peu qu'on connaisse un vecteur normale unitaire  $\mathbf{n}$ . Ce vecteur contrainte est déterminé par la formule de Cauchy comme :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (145)$$

##### 5.3.2.1. Contraintes principales

Ils existent un système de coordonnées particulier où toutes les composantes des contraintes de cisaillements sont nulles. Ce système de coordonnées est appelé système de coordonnées

principal ou *axes principaux*. L'état des contraintes correspondant et est appelé *l'état principal* et les contraintes normales correspondantes sont les *contraintes principales*. Avec cette définition, les axes principaux et les contraintes principales peuvent être déterminés par la résolution au problème des valeurs propres (Eigenvalue) suivant :

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij})n_i = 0 \quad (146)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, et il est défini par  $\delta_{ij} = 1$  quand  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  quand  $i \neq j$ .

Les composantes de contraintes dans un milieu continu en équilibre doivent satisfaire l'équation d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (147)$$

$f_i$  désignes les forces qui agissent sur le volume du corps (gravité, champs magnétiques, force centrifuge... etc.) dans les directions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . L'équation du corps en mouvement diffère de l'équation de l'équilibre en ayant le terme d'inertie  $\rho \ddot{u}_i$  au second membre de l'équation,  $\rho$  est la densité et  $u_i$  est le déplacement dans la direction  $x_i$  est  $\ddot{u}_i$  est l'accélération dans la même direction.

### 5.3.3. Déformation

Les forces appliquées sur un solide causent sa déformation. Lorsqu'une position d'un point dans un corps continu est relativement altérée, ce corps est dit déformé et ce changement relative de la position du point est appelé une *déformation*. Tout corps, a un certain degré, est déformable. S'il existe un corps idéal non-déformable où la distance entre chaque pair de points dans ce corps reste invariante durant tout son histoire, ce corps est appelé *rigide*. Le mouvement d'un corps rigide est transcrit par une translation ou une rotation et un corps déformable va accumuler une transformation de sa forme en plus.

L'un des objectives de la théorie de l'élasticité est de déterminer la déformation du solide à partir d'une configuration de référence. Ils existent deux modes de description de la déformation d'un milieu continu, la Lagrangienne et l'Eulérienne. La description Lagrangienne utilise les coordonnées d'un point dans son état initial comme des variables indépendantes tandis que le cas des coordonnées Eulériens les variables indépendantes sont les coordonnées du point dans son état déformé. Soit les variables  $(a_1, a_2, a_3)$  qui représentent les coordonnées d'un point dans la configuration initiale d'un corps, et soit  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées du même point dans la configuration du corps après déformation. Le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  est défini par les composantes :

$$U_i = x_i - a_i \quad (148)$$

Les tenseurs de déformation Lagrangienne et Eulérienne sont définies par :

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right),$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$
(149)

Si les composantes de la déformation du premier ordre sont relativement petit les carrés du produit des dérivées sont donc infinitésimaux et peuvent être négligés. Cela dit, les tenseurs de déformation décrit par la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne peuvent être réduit au seul tenseur infinitésimal de déformation:

$$E_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$
(150)

Comme pour l'état de contraintes précédemment, les composants de déformation qui reflètent l'étirement ou le raccourcissement du corps  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  sont appelées les déformations normales. Et les composantes restantes qui représentent la *distorsion*. S'écrivant en notation indicelles  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

Les déformations principales et les axes principaux sont aussi déterminées par la résolution de l'équation aux valeurs propres suivantes :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_i = 0$$
(151)

### 5.3.4. lois de comportement

Dans un milieu continu l'état de contraintes est complètement déterminé par le tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$ , et l'état de déformation est déterminé par le tenseur de déformation  $\varepsilon_{ij}$ . Si un matériau se déforme après l'application d'une charge puis retourne à sa forme initiale durant le déchargement, ce matériau est appelé un *matériau élastique*. Si le matériau obéi a une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, la relation est communément nommée *la loi de Hook généralisée* et elle s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$
(152)

$C_{ijkl}$  sont les *Constantes élastiques* qui caractérisent le comportement élastique du solide. Vu que  $C_{ijkl}$  est un tenseur du quatrième ordre, donc il y a 81 constantes élastiques. En prenant en considération la symétrie de contraintes et des déformations et la symétrie du matériau lui-même va réduire le nombre de ces constantes élastiques.

## 5.4. LOI DE COMPORTEMENT TRIDIMENSIONNELLE

Comme cité dans la section précédente, si le matériau obéi à une relation linéaire entre les contraintes et les déformations, la loi de comportement qui les réunit est nommée la loi de Hooke généralisée. Le tenseur élastique  $C_{ijkl}$  peut varier d'un point à un autre dans le milieu continu. Si contrairement le tenseur  $C_{ijkl}$  est indépendant de la position du point, ce milieu est donc considéré comme *Elastiquement Homogène*. L'hypothèse d'homogénéité est retenue dans ce travail.

Puisque le tenseur  $C_{ijkl}$  est du quatrième ordre, donc il y a  $3^4 = 81$  constantes élastiques. Dans la mesure où les composantes des contraintes sont élastiques, un changement des indices  $i$  et  $j$  ne va pas altérer la loi de Hooke généraliser :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (153)$$

Cette équation réduit le nombre des constantes élastiques à  $3 \times 3 \times 6 = 54$ . De plus, la symétrie du tenseur de déformation, qui peut être observée depuis sa description Lagrangienne ou bien Eulérienne, va réduire le nombre  $6 \times 6 = 36$  :

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (154)$$

Une autre restriction est encore possible si on considère que les matériaux élastiques. L'énergie de déformation du matériau peut être calculée comme tel :

$$W = \int_{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (155)$$

En considérant que le matériau est élastique, l'énergie est indépendante du cycle chargement-déchargement. Mathématiquement, la différentielle de l'équation précédente est :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (156)$$

En connaissant la relation contrainte-déformation, on obtient :

$$dW = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} \quad (157)$$

Le tenseur des constantes élastiques est donc lié à l'énergie de déformation. La différentielle partielle donne :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (158)$$

En faisant les mêmes étapes pour la relation contraintes-déformations en prenant compte  $\sigma_{kl}$  et  $\varepsilon_{ij}$  avec  $C_{klij}$  tenseur des constantes élastiques, on arrive à conclure :

$$C_{klij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \quad (159)$$

La multiplication des  $\varepsilon_{ij}$  et  $\varepsilon_{kl}$  est interchangeable, on peut conclure une nouvelle symétrie pour le tenseur élastique :

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (160)$$

La symétrie due au tenseur des déformations, la symétrie due au tenseur contraintes et celle due au tenseur d'élastique, il est plausible de dire que le nombre des constantes élastiques pour l'état élastique anisotrope le plus général est de  $(6^2 - 6)/2 + 6 = 21$ .

Afin d'éviter d'écrire la double notation des indices des composantes des tenseurs des contraintes et déformations, ainsi que les quatre indices du tenseur des constantes élastiques, une notation contractée appelée *Notation de Voigt* est introduite :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_1; \sigma_{22} = \sigma_2; \sigma_{33} = \sigma_3; \sigma_{23} = \sigma_4; \sigma_{31} = \sigma_5; \sigma_{12} = \sigma_6; \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_1; \varepsilon_{22} = \varepsilon_2; \varepsilon_{33} = \varepsilon_3; \varepsilon_{23} = \varepsilon_4; \varepsilon_{31} = \varepsilon_5; \varepsilon_{12} = \varepsilon_6;\end{aligned}\quad (161)$$

Ainsi la loi de Hooke généralisée peut être réécrite :

$$\begin{aligned}\sigma_p = C_{pq} \varepsilon_q; \\ C_{pq} = C_{qp}; \\ p, q = 1, 2, \dots, 6\end{aligned}\quad (162)$$

Ou en notation matricielle :

$$\begin{aligned}\sigma = C \varepsilon; \\ C = C^T\end{aligned}\quad (163)$$

## 5.5. ETUDE D'UNE PLAQUE ANISTROPE FISSUREE SOUS TRACTION

Une plaque munie d'une fissure centrale soumise à traction est analysée en premier lieu. En raison de la symétrie de la géométrie et de la charge, seule la moitié de la plaque est modélisée (voir Figure 34). La dimension de la plaque dans le demi-modèle est de 1 mm x 2 mm avec une longueur de fissure de  $a = 0,3$  mm, et une tension de  $\sigma = 1,0$  Pa est appliquée au bord supérieur et les déplacements le long de l'axe y sont fixés au bord inférieur. La géométrie, le chargement et les conditions aux limites sont illustrés à la figure 34. Le matériau considéré est un type de composite graphite-époxy qui possède les propriétés suivantes :  $E_1 = 144,8$  GPa,  $E_2 = 11,7$  GPa,  $\nu_{12} = 0,21$  et  $G_{12} = 9,66$  GPa. Le matériau est orienté par rapport à l'axe horizontal avec un angle  $\theta$  qui varie entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ .

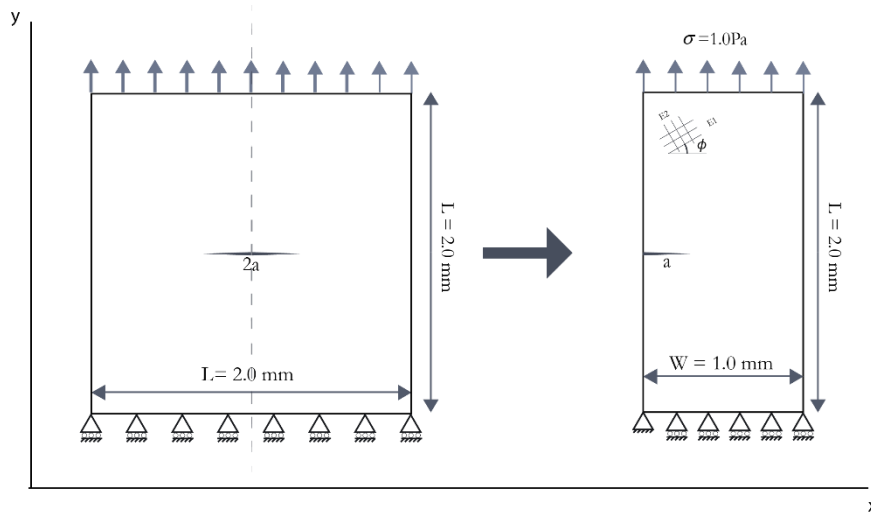


Figure 34 Plaque rectangulaire sous tension fissurée au milieu.

Pour traiter cette problématique Chen & al 2011 [138] ont présenté une solution en utilisant une fois l'élément fini lissée basée sur les bords (edge-based smoothed finite element method ES-FEM) proposé par Liu & al. 2009 [139] et la forme singulière du même élément ( Singular edge-based smoothed finite element method Sin-ESFEM) proposé par Chen & al. 2010 [140] deuxième fois. Dans la méthode ES-FEM, les domaines de lissage des déformations et l'intégration de la forme faible sont basés sur des domaines associés aux bords des éléments. Le domaine de lissage d'une arête est créé en reliant deux points d'extrémité du bord à deux centroïdes de deux éléments adjacents qui peuvent être des éléments triangulaires,

quadrilatéraux ou généralement polygonaux, comme le montrent les figures 35 et 36. Les résultats numériques utilisant des éléments triangulaires ont démontré que l'ES-FEM donne une solution très précise et est même plus précise que la FEM standard utilisant des éléments quadrilatéraux pour les analyses statiques 2D et les analyses de vibrations libres et forcées de problèmes de mécanique des solides.

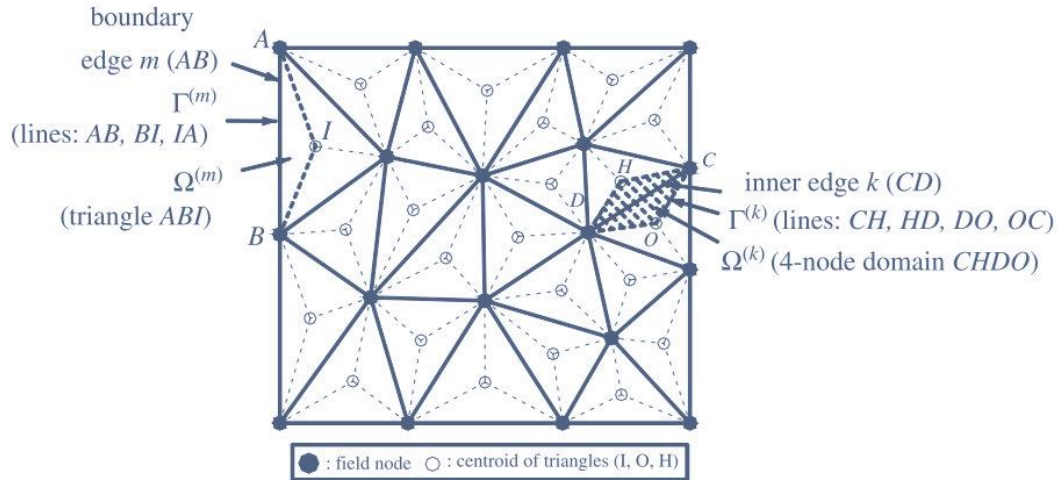


Figure 35 Les éléments triangulaires et les domaines de lissage associés aux bords dans l'ES-FEM [138].

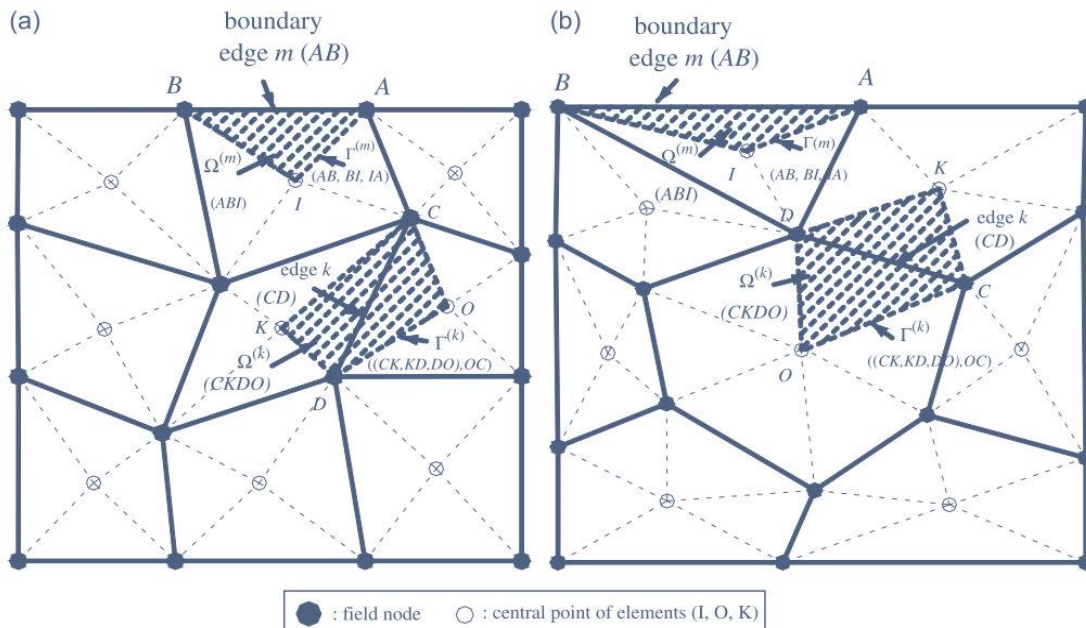


Figure 36 : Discretisation du domaine et domaines de lissage associés aux bords dans l'ES-FEM [138]. (a) Éléments quadrilatéraux et (b) éléments polygonaux à  $n$  côtés.

Dans la méthode ES-FEM, cependant, la singularité de la contrainte peut être créée par une simple méthode d'interpolation de points avec des fonctions de base supplémentaires de polynômes d'ordre fractionnaire appropriés. La figure 37 montre un modèle ES-FEM pour un problème de fracture avec une fissure d'ouverture horizontale. Dans le présent modèle ES-FEM singulier, nous avons ajouté un nœud sur chaque bord des éléments triangulaires connectés au nœud à l'extrémité de la fissure, comme le montre la figure 38.a. L'emplacement du nœud ajouté

se situe à un quart de la longueur du bord, comme le montre la figure 38b. Sur la base de ce paramètre, le champ de déplacement, par exemple la composante  $u$ , à n'importe quel point d'intérêt sur un bord d'un élément peut être créé à l'aide de la méthode suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= c_0 + c_1 r_1 + c_2 \sqrt{r_1} \\ u_2 &= c_0 + c_1 r_2 + c_2 \sqrt{r_2} \end{aligned} \quad (164)$$

$$u_3 = c_0 + c_1 r_3 + c_2 \sqrt{r_3}$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 + 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} & -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} & \frac{2r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (165)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 + 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} & -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}} & \frac{2r}{l} - \sqrt{\frac{r}{l}} \end{bmatrix} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] \quad (166)$$

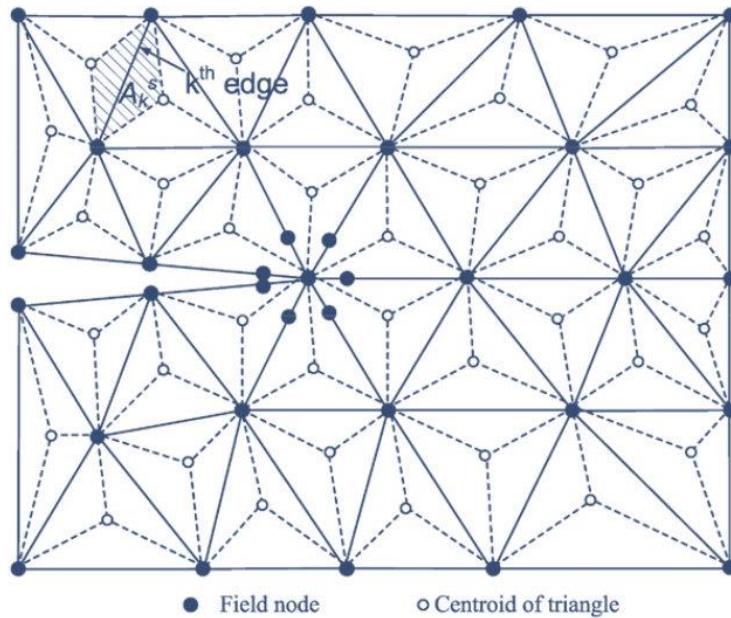


Figure 37 Un modèle ES-FEM : maillage d'éléments triangulaires (lignes pleines), domaines de lissage quadrilatéraux (lignes pointillées) pour un problème de fracture avec une fissure ouverte [138].

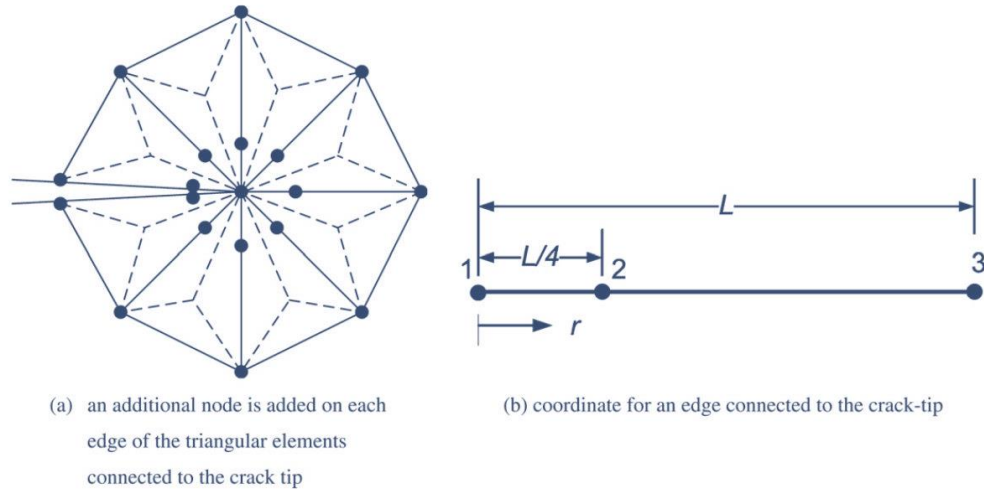


Figure 38 Disposition des nœuds près de la pointe de la fissure [138].

### 5.5.1. Les constantes élastiques pour un nouveau système de coordonnées

Pour un corps donné, les constantes élastiques qui sont connues dans un certain système seront différentes dans un autre système. Si l'on considère un corps dans un système de coordonnées cartésiennes local  $(x,y)$  avec ses constantes élastiques connues ou définies, un système de coordonnées cartésiennes différent  $(x',y')$  ces constantes élastiques auront des valeurs différentes.

En général, la constante élastique principale est donnée pour un milieu orthotrope dans le système de coordonnées principal et peut être recalculée pour un autre système de coordonnées. Par exemple, la relation bidimensionnelle contrainte-déformation pour un milieu orthotrope dans le système de coordonnées principales est présentée dans l'équation 143 aussi écrite comme :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (167)$$

Notez que les indices 1, 2 et 3 désignent les composantes correspondant à la tension dans les deux axes principaux et au cisaillement dans le plan, respectivement. Les contraintes pour le système de coordonnées  $(x,y)$  et les contraintes pour le système de coordonnées  $(x',y')$  sont liées par la matrice de transformation  $[T]$  [141] telle que :

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\} \quad (168)$$

où la matrice de transformation  $[T]$  est donnée :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi^2 & \sin \varphi^2 & -2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \sin \varphi^2 & \cos \varphi^2 & 2 \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos \varphi^2 - \sin \varphi^2 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Il est maintenant possible d'avoir la relation entre les deux matrices de comportement des deux systèmes de coordonnées, telle que :

$$[S'] = [T]^{-1} [S] [T] \quad (170)$$

De plus, la relation contrainte-déformation du même corps dans un système de coordonnées orienté selon un angle  $\varphi$  est considérée comme anisotrope et définie comme :

$$\{\varepsilon'\} = [S'] \{\sigma'\} \quad (171)$$

Où :

$$[S'] = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{13} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E'_1} & -\frac{\nu'_{21}}{E'_2} & \frac{\eta'_1}{G'_{12}} \\ -\frac{\nu'_{12}}{E'_1} & \frac{1}{E'_2} & \frac{\eta'_2}{G'_{12}} \\ \frac{\eta'_1}{G'_{12}} & \frac{\eta'_2}{G'_{12}} & \frac{1}{G'_{12}} \end{bmatrix} \quad (172)$$

C'est une fois que le tenseur de souplesse  $[S']$  est obtenue et que toutes ses valeurs sont connues, qu'il est possible de l'utiliser dans la relation de contrainte-déformation. Mais avant de procéder à modéliser le cas dont Chen & al. [140] ont représenté (figure 34), deux autres méthodes ont été sollicitées pour répondre à l'exigence du problème.

La première méthode est de Lekhnitskii 1968 [142], elle est la plus réputée pour la détermination des constantes élastiques dans les nouveaux systèmes de coordonnées. Et la seconde est celle de Voyiadjis et Kattan 2005 [143] qui présente la mécanique des matériaux composites. Ces deux méthodes ont été utilisées dans l'exemple en cours et la différence des résultats a suggéré l'utilisation de la technique expliquée ci-dessous.

Le tableau 3 montre les résultats obtenus du même matériau pour chaque constante élastique pour un étendu d'angles allant de  $-90$  à  $90$ . Les figures 39 à 45 représentent la comparaison des trois méthodes côte à côte pour chaque constante élastique.

Table 3 Constantes élastiques des nouveaux systèmes de coordonnées par trois méthodes (E ,G = [GPa]).

Angle (°)	Voyiadgis							Lakhnitskii							Matrice de transformation							
	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	ν <sub>12</sub>	G	η <sub>1</sub>	η <sub>2</sub>	ν <sub>21</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	ν <sub>12</sub>	G	η <sub>1</sub>	η <sub>2</sub>	ν <sub>21</sub>	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	ν <sub>12</sub>	G	η <sub>1</sub>	η <sub>2</sub>	ν <sub>21</sub>	
-90	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,21	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,21	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,00	0,21
-75	12,39	78,84	0,02	9,86	-0,28	0,29	0,15	12,39	78,84	0,02	9,86	-0,22	-1,69	0,15	12,39	78,84	0,02	9,86	0,11	0,84	0,84	0,15
-60	14,84	35,60	0,04	10,27	-0,82	0,85	0,09	14,84	35,60	0,04	10,27	-0,48	-1,27	0,11	14,84	35,60	0,04	10,27	0,24	0,64	0,64	0,11
-45	20,73	20,73	0,05	10,50	0,41	0,41	0,05	20,73	20,73	0,07	10,50	-0,81	-0,81	0,07	20,73	20,73	0,07	10,50	0,41	0,41	0,41	0,07
-30	35,60	14,84	0,07	10,27	0,85	-0,82	0,03	35,60	14,84	0,11	10,27	-1,27	-0,48	0,04	35,60	14,84	0,11	10,27	0,64	0,24	0,24	0,04
-15	78,84	12,39	0,11	9,86	0,29	-0,28	0,02	78,84	12,39	0,15	9,86	-1,69	-0,22	0,02	78,84	12,39	0,15	9,86	0,84	0,11	0,11	0,02
0	144,80	11,70	0,21	9,66	0,00	0,00	0,02	144,80	11,70	0,21	9,66	0,00	0,00	0,02	144,80	11,70	0,21	9,66	0,00	0,00	0,00	0,02
15	78,84	12,39	0,11	9,86	-0,29	0,28	0,02	78,84	12,39	0,15	9,86	1,69	0,22	0,02	78,84	12,39	0,15	9,86	-0,84	-0,11	-0,11	0,02
30	35,60	14,84	0,07	10,27	-0,85	0,82	0,03	35,60	14,84	0,11	10,27	1,27	0,48	0,04	35,60	14,84	0,11	10,27	-0,64	-0,24	-0,24	0,04
45	20,73	20,73	0,05	10,50	-0,41	-0,41	0,05	20,73	20,73	0,07	10,50	0,81	0,81	0,07	20,73	20,73	0,07	10,50	-0,41	-0,41	-0,41	0,07
60	14,84	35,60	0,04	10,27	0,82	-0,85	0,09	14,84	35,60	0,04	10,27	0,48	1,27	0,11	14,84	35,60	0,04	10,27	-0,24	-0,64	-0,64	0,11
75	12,39	78,84	0,02	9,86	0,28	-0,29	0,15	12,39	78,84	0,02	9,86	0,22	1,69	0,15	12,39	78,84	0,02	9,86	-0,11	-0,84	-0,84	0,15
90	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,21	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,21	11,70	144,80	0,02	9,66	0,00	0,00	0,00	0,21

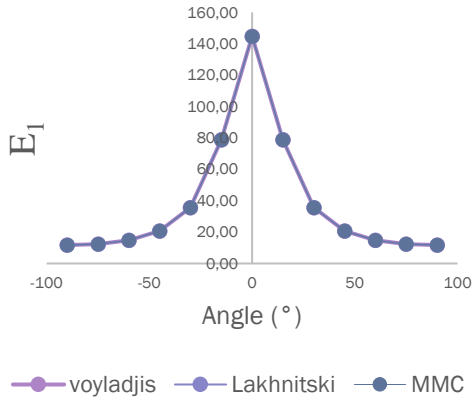


Figure 39 Valeurs du premier module de Young dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

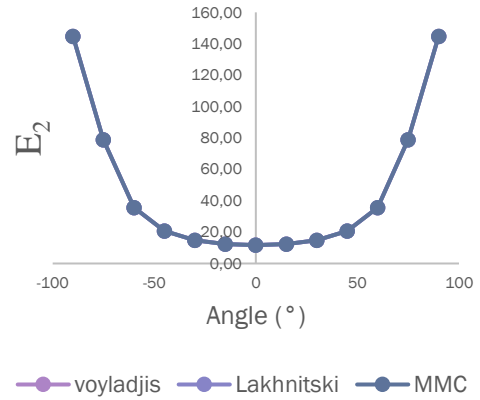


Figure 40 Valeurs du deuxième module de Young dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

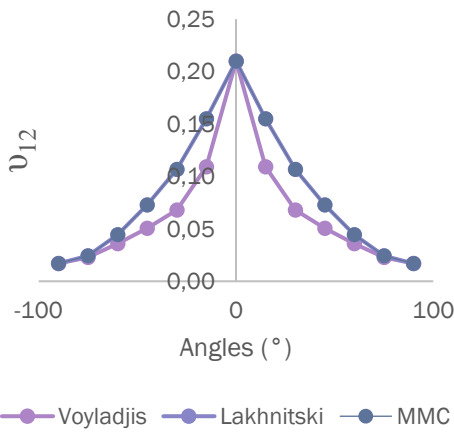


Figure 41 Valeurs du premier coefficient de Poisson dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

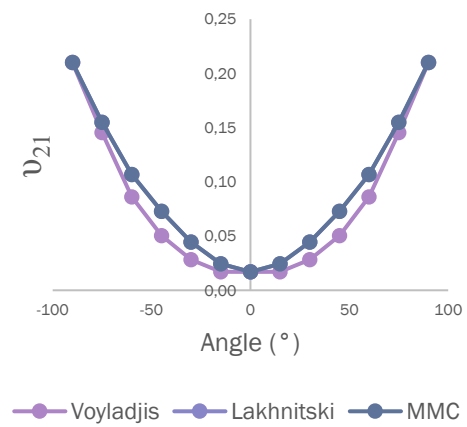


Figure 42 Valeurs du deuxième coefficient de Poisson dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

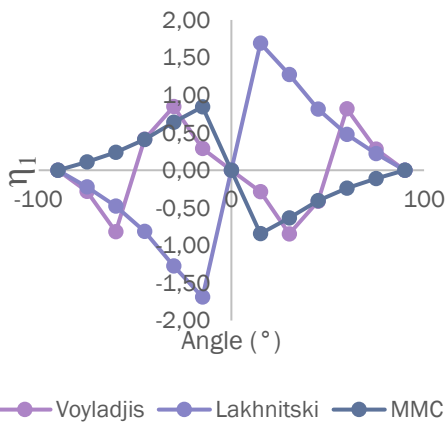


Figure 43 Valeurs du premier coefficient d'influence mutuelle dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

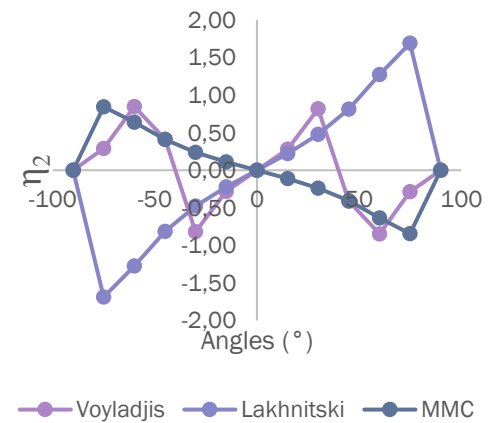


Figure 44 Valeurs du deuxième coefficient d'influence mutuelle dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

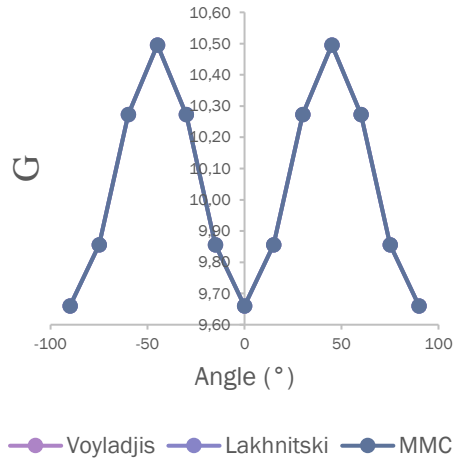


Figure 45 Valeurs du module de cisaillement dans les nouveaux systèmes de coordonnées avec trois méthodes.

Chacune des matrices de souplesse obtenue par ses trois méthodes a été utilisée pour avoir les résultats des taux de restitution d'énergie et ont été comparées avec les résultats analytiques. La méthode proposée par Lakhnitskii [142] comme montré par les figures 39-45 les constantes élastiques dans chaque nouveau système de coordonnées sont identiques aux deux autres méthodes, sauf pour coefficients d'influences mutuelles là où elle a exhibé des valeurs plus grandes. Avec ses valeurs, le calcul des taux de restitutions d'énergie a abouti à des résultats satisfaisants mais pas assez proches des résultats analytiques, la plage d'erreurs a été noté d'être entre 10% et 1%. Par contre, la méthode allouée à Voyladjis et Kattan [143] a fournis des modules de Young similaires aux autres méthodes, des coefficients de Poisson différents et des coefficients d'influences mutuelles différents et pas assez cohérents. Les résultats obtenus par cette méthode n'ont pas été raisonnables et n'ont montré aucune stabilité globale.

Par ce même raisonnement, la technique expliquée auparavant pour obtenir le tenseur de souplesse a été adopté dans ce qui suit. Cette méthode a permis d'obtenir des résultats réguliers et proches aux résultats analytiques.

## 5.5.2. Taux de restitution d'énergie :

### 5.5.2.1. Procédure dérivative de la rigidité SDP

La SDP (*stiffness derivative procedure*) présenté déjà dans le chapitre 3, elle considère le taux de restitution d'énergie comme étant la dérivée de l'énergie potentielle entre deux configurations  $M_0$  avant l'extension de la fissure et  $M_1$  après l'extension de la fissure (figure 46), comme suit :

$$\pi = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{F\} \quad (173)$$

Avec :

$\pi$  : L'énergie potentielle d'un corps contenant une fissure.

F : Force due au chargement externe agissant aux frontières du corps.

Sachant que les forces volumes sont absentes et que la force F ne dépend pas de la longueur de fissure, on peut définir le taux de restitution d'énergie par :

$$G = -\frac{\partial \pi}{\partial l} = \frac{1}{2} u^T \frac{\partial K}{\partial l} u \quad (174)$$

Ou bien comme est indiqué par Bouziane & al. [144] :

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{f=1}^{nf} \{v\}_f^T \left[ \frac{\delta K_f}{\delta a} \right] \{v\}_f \quad (175)$$

Où :

a : Taille initiale de la fissure.

$\delta a$  : Extension de fissure.

nf : Nombre totale des éléments considérés par l'extension  $\delta a$ .

$\{v\}_f$  : vecteur vertical contenant les valeurs nodales de l'élément concerné par la perturbation.

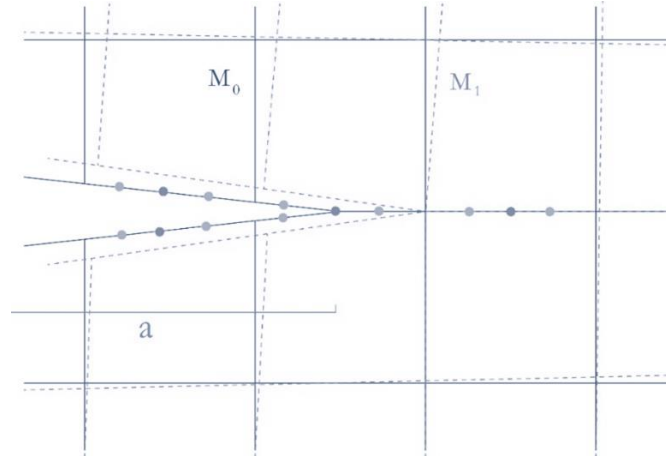


Figure 46 Les deux configurations  $M_0$  (a) et  $M_1$  (a+da) pour le calcul de G par la procédure dérivative de rigidité.

### 5.5.2.2. Technique de la fermeture virtuelle de la fissure CCI

Expliqué précédemment dans le chapitre 3, elle permet d'évaluer le taux de libération d'énergie avec la technique de l'intégrale de fermeture de fissure [99,116,145] qui, pour un matériau homogène, considère que l'énergie de déformation libérée pour une petite extension de fissure est égale à l'énergie essentielle pour fermer la fissure.

L'application des équations 46 peut être exécutée en calculant les contraintes pour la fermeture de la fissure et en calculant les déplacements correspondants, qui pourraient être exprimés par:

$$G_I = \frac{1}{2\Delta l} \int_0^{\Delta l} \sigma_y^{(1)} \Delta v^{(2)} dx \quad (176)$$

$$G_{II} = \frac{1}{2\Delta l} \int_0^{\Delta l} \tau_{xy}^{(1)} \Delta u^{(2)} dx \quad (177)$$

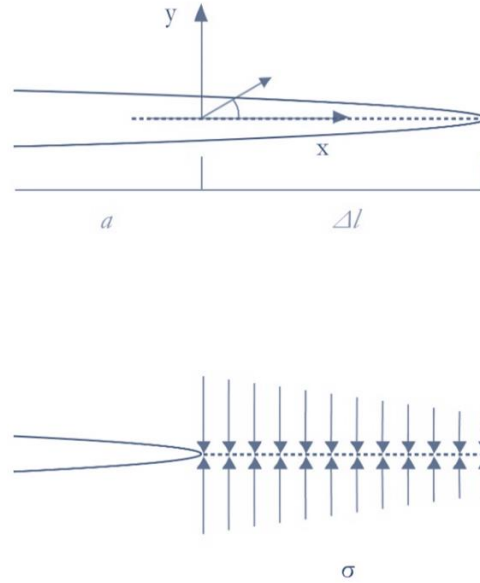


Figure 47 Les deux configurations pour la technique de fermeture de fissure[99].

En considérant l'implémentation des deux équations 176 et 177 dans l'élément fini RMQ7 proposé, il est obligatoire de définir les nœuds qui serviront à obtenir la valeur du taux de restitution d'énergie. Tout d'abord, il y a des forces qui sont appliquées sur les nœuds (1, 2, 3 et 4) qui représentent la première étape de la technique d'intégrale de fermeture de fissure et sont déterminées par l'équation (11), puis la deuxième étape consiste à déterminer le déplacement sur les nœuds (5, 6, 7 et 8) (figure 48) comme :

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{56} &= u_5 - u_6 \\
 \Delta u_{78} &= u_7 - u_8 \\
 \Delta v_{56} &= v_5 - v_6 \\
 \Delta v_{78} &= v_7 - v_8
 \end{aligned}
 \tag{178}$$

La définition des forces et du déplacement permettra d'évaluer le taux de libération d'énergie pour les modes I et II comme suit :

$$\begin{aligned}
 G_I &= \frac{1}{2\Delta l} (F_{y1}\Delta v_{56} + F_{y3}\Delta v_{78}) \\
 G_{II} &= \frac{1}{2\Delta l} (F_{x1}\Delta u_{56} + F_{x3}\Delta u_{78})
 \end{aligned}
 \tag{179}$$

La sommation des deux valeurs de l'équation 179 donne le taux de restitution d'énergie total :

$$G = G_I + G_{II} \tag{180}$$

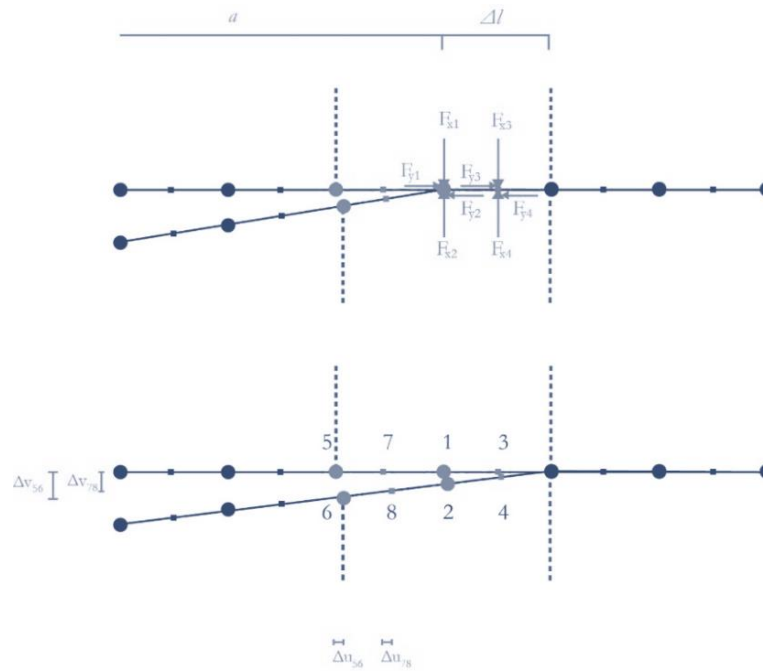


Figure 48 Les deux configurations de la technique intégrale de fermeture de fissure se sont produites dans le RMQ7.

### 5.5.3. Résultats comparatifs

Pour obtenir les taux de restitution d'énergie avec l'élément mixte RMQ7 les deux méthodes CCI et SDP ont été utilisé, ainsi que la technique pour définir la matrice de souplesse dans les nouveaux systèmes de coordonnées fournie avec la matrice de transformation. Les résultats pour le cas d'une plaque fissuré au centre sous charge de traction sont présentés dans le tableau 4 et les graphiques sont présentés dans la figure 49

Table 4 Les taux de restitution d'énergie  $G$  ( $10^{-1} \text{ J/m}^2$ ) par différentes méthodes.

Angle (°)	FEM	ES-FEM	Singulière		RMQ7		Analytique
			FEM	ES-FEM	SDP	CCI	
-90	4,1599	4,2818	4,3331	4,3418	4,3033	4,296	<b>4,3505</b>
-60	6,3409	6,7759	7,0221	7,0269	6,8659	6,966	<b>7,0432</b>
-30	10,682	11,432	11,744	11,72	11,5916	11,604	<b>11,827</b>
0	13,228	13,783	14,194	14,148	14,7764	14,197	<b>14,251</b>
15	12,451	13,11	13,514	13,441	13,5575	13,355	<b>13,568</b>
30	10,682	11,432	11,744	11,72	11,4859	11,604	<b>11,827</b>
45	8,4684	9,1359	9,419	9,4102	9,1907	9,288	<b>9,4331</b>
60	6,3409	6,7759	7,0221	7,0269	6,8454	6,966	<b>7,0432</b>
90	4,1599	4,2818	4,3331	4,3418	4,3033	4,296	<b>4,3505</b>

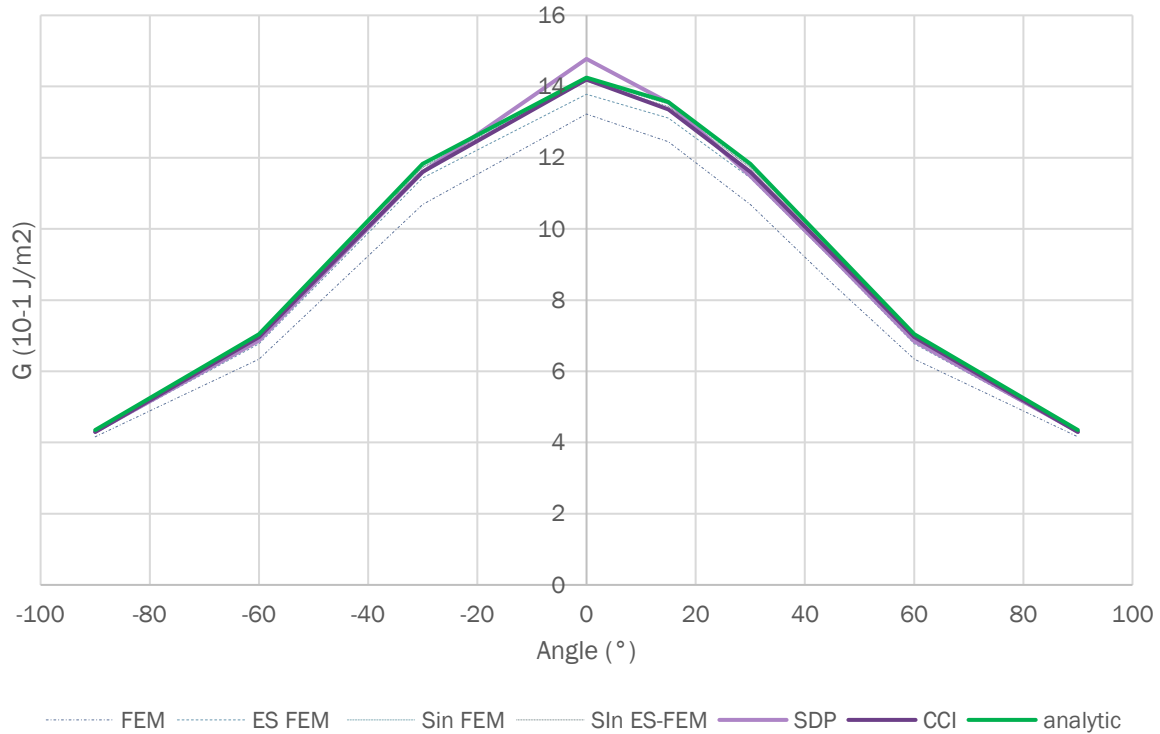


Figure 49 Taux de restitutions d'énergies des différentes méthodes.

## 5.6. CONCLUSION

L'anisotropie représente l'état hasardeux le plus absolu d'un matériau, ce qui enduit que son étude dans l'ingénierie et tantôt représentant des matériaux tel qu'ils sont disposés en nature et tantôt la plus stimulante en terme de difficulté mathématique. L'étude de la fissure au sein d'un matériau qui présente des propriétés d'anisotropie implique la prise en compte de nombreux coefficients et facteurs supplémentaires à ceux de l'isotropie. Pour chaque axes d'un système cartésien, est définie un module de Young et un module de cisaillement bien définie par rapport à ces axes ; et de la sorte un coefficient de Poisson qui caractérise la relation entre une déformation (contraction ou allongement) d'un sens et un autre et des paramètres d'influences mutuelle entre les contraintes de cisaillement dans un plans et la déformation principale dans l'axe perpendiculaire à ce plan, et vice versa.

Dans le cas étudié au présent chapitre, l'anisotropie est obtenue en orientant un matériau hors de ses axes principaux. Une formule a été développé pour définir les nouveaux paramètres pour chaque orientation, ainsi cela a pu résoudre le cas d'une plaque fissuré comportant le même matériau.

Des méthodes de calculs du taux de restitution d'énergie pour des structures fissurées ont été implémentées avec l'élément fini mixte RMQ7 et les résultats obtenus pour une plaque fissurée montre l'efficacité de l'élément et la performance des méthodes qui lui sont associées et ce en comparaison avec les résultats analytiques et numériques fournis par les différentes recherches.

# **Chapitre VI : Analyse d'un branchement dans un matériau orthotrope avec RMQ7**

## 6.1. INTRODUCTION

Vu sa propension d'occurrence dans le cas des matériaux non-isotrope, le branchement qui se caractérise par une propagation de la fissure dans une direction différente de la direction initiale est analysé dans ce chapitre. On considère pour cette analyse les matériaux orthotropes Une implémentation additionnelle à une technique de calcul utilisée dans le chapitre précédent permettant de prendre en compte le branchement a été introduite.

## 6.2. PROBLEMATIQUE

La propagation d'une fissure dans un seul sens ou un sens prédéfinie n'est qu'un cas idéal qui facilite les calculs d'investigation de cette extension. Il est donc fondamental de prendre en considération la déviation d'une fissure par rapport à son trajet initial.

Le travail qui suit porte sur le cas d'une plaque d'un matériau orthotrope de dimension  $2L \times 2W = 8\text{mm} \times 4\text{mm}$ , qui présente une discontinuité de longueur  $a = 1\text{mm}$  au deux côtés. Le matériau constituant la plaque a les caractéristiques mécaniques suivantes :  $E_1 = 570\text{MPa}$ ,  $E_2 = 16300\text{MPa}$ ,  $G = 680\text{MPa}$  et  $\nu_{12} = 0.0178$ . Le branchement (ou l'extension hors plan) des fissures est analysé suivant les orientations suivantes :  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $105^\circ$  par rapport au trajet de la fissure principale. L'étude est menée sous l'hypothèse de l'état plan de contrainte. Les résultats pour un problème similaire dans le cas d'un matériau isotrope sont rapportés dans le travail de Bouziane & al (2014) [144].

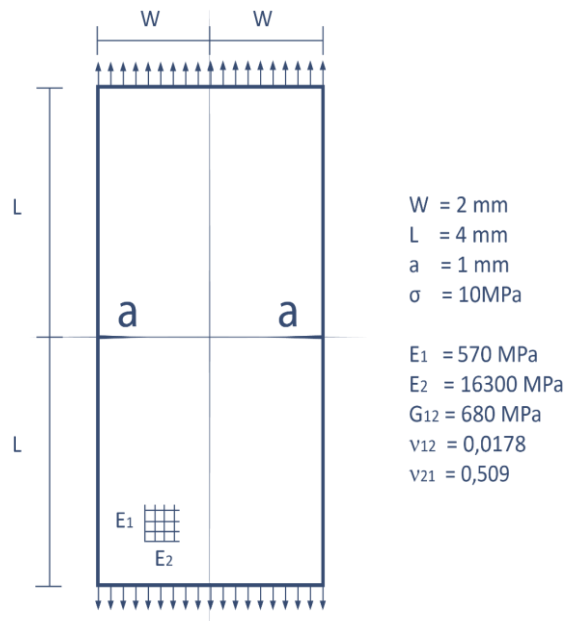


Figure 50 Plaque orthotrope fissuré sur les bords.

Cette problématique a été proposé et étudié par Maïti dans deux travaux séparés. Le premier en 1986 [146] en proposant une méthode analytique pour le calcul du taux de restitution de l'énergie pour une fissure coudée dans un matériau orthotrope. En mettant la chargement autour de la pointe de fissure par [3] :

$$p = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (c_{11}K_I + c_{12}K_{II}) \quad (181)$$

$$q = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{21}(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} (c_{21}K_I + c_{22}K_{II}) \quad (182)$$

Avec  $K_I$  et  $K_{II}$  les facteurs d'intensité de contraintes autour de la pointe de fissure,  $\theta$  l'angle de cou dage de la fissure;  $f_{11}(\theta)$  et  $f_{12}(\theta)$  ( $c_{11}$  et  $c_{12}$ ) sont les contraintes principales local dans un système de coordonnées polaires obtenu par des essais expérimentaux Figure 52 ;  $\sigma_\theta$  et  $f_{22}(\theta)$  et  $f_{21}(\theta)$  ( $c_{22}$  et  $c_{21}$ ) sont des contraintes de cisaillement les coordonnées polaires  $\tau_\theta$ .

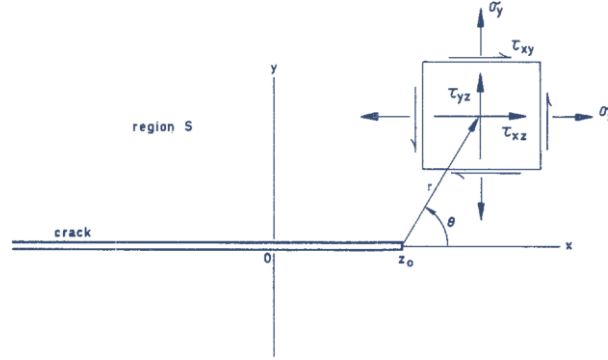


Figure 51 Etat de contraintes autour de la pointe de fissure dans les coordonnées cartésiennes.

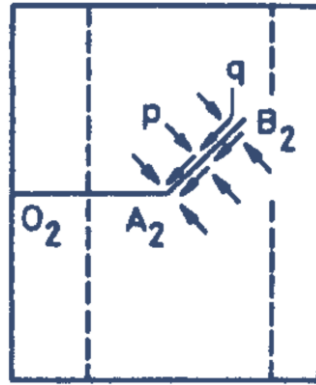


Figure 52 état de contraintes autour de la pointe de fissure dans les coordonnées polaires[146].

En utilisant l'approche de la fonction de Green [147] et en traitant le coude comme une fissure semi-infinie [13], on obtient les facteurs d'intensité de contrainte  $k_I$  et  $k_{II}$  à l'extrémité  $B_2$  :

$$k_I = \int_0^l p \sqrt{\frac{2}{\pi(l-s)}} ds = c_{11}K_I + c_{12}K_{II} \quad (183)$$

$$k_{II} = \int_0^l q \sqrt{\frac{2}{\pi(l-s)}} ds = c_{21}K_I + c_{22}K_{II} \quad (184)$$

Dans le cas d'un chargement en mode I pur, c'est-à-dire  $K_{II} = 0$ , et des matériaux isotropes, la solution des équations 183 et 184 s'est avérée [13] très précise jusqu'à  $\theta = 90^\circ$ .

Le taux de libération de l'énergie de déformation pour une extension dans le plan du coude est est donné [3] par :

$$G = -\frac{k_I}{2} a_{22} \operatorname{Im} \left[ \frac{k_I (\mu_1 + \mu_2) + k_{II}}{\mu_1 \mu_2} \right] + \frac{k_{II}}{2} a_{11} \operatorname{Im} \left[ k_{II} (\mu_1 + \mu_2) + k_I \mu_1 \mu_2 \right] \quad (185)$$

Où,  $\mu_1, \mu_2$  sont les coefficients de conformité issue de la fonction de Airy (équation 187) pour l'équation de contrainte-déformation (équation 186).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{26} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (186)$$

$$c_{11}\mu^4 - 2c_{16}\mu^3 + (2c_{12} + c_{66})\mu^2 - 2c_{26}\mu + c_{22} = 0 \quad (187)$$

Dans le deuxième travail, Maïti a traité ce même problème précisément par des méthodes numériques dans un travail publié en 1990 [23]. Il a utilisé la méthode des éléments finis en prenant un élément finit triangulaire avec lequel il implémenta trois différentes méthodes séparément et compara leurs résultats.

En premier lieux la technique SDP (*Stiffness Derivative Procedur*) discutée auparavant, a permis d'obtenir les taux de restitution d'énergie en deux temps. Les éléments directs autour de la pointe de fissure forme une rangé qui en encerclant cette pointe forme un anneau (un cercle) figure 53.

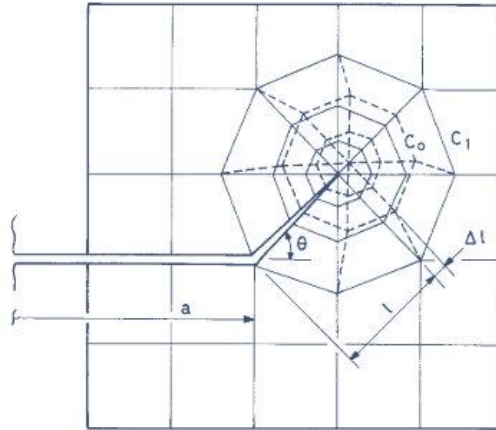


Figure 53 Les deux configurations du SDP à deux anneaux [112].

Pour la deuxième technique implémentée à l'élément fini, c'est la méthode de l'intégrale J qui a aidé à obtenir les taux de restitution d'énergie en respectant différent taux de «  $r/a$  » (Avec  $r$  le rayon et  $a$  la taille de la fissure). La plaque est étudiée en considérant quatre valeurs différentes par rapport «  $r/a$  » permettent la comparaison des résultats.

La troisième technique utilisée est la *procédure intégrale de fermeture de fissure*. En plus de la formule classique (équation 188) présentée auparavant pour les éléments finis, Maiti 1990 [23] ajoute une formule pour un élément de singularité (figure 54, équation 189).

$$G = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2b} [H_n u_{n-2} + H_{n+1} u_{n-1}] + \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2b} [V_n v_{n-2} + V_{n+1} v_{n-1}] \quad (188)$$

$$G = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2b} [H_{n+1} + (1,5\pi - 4)H_n] u_{n-2} + \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{2b} [V_{n+1} + (1,5\pi - 4)V_n] v_{n-2} \quad (189)$$

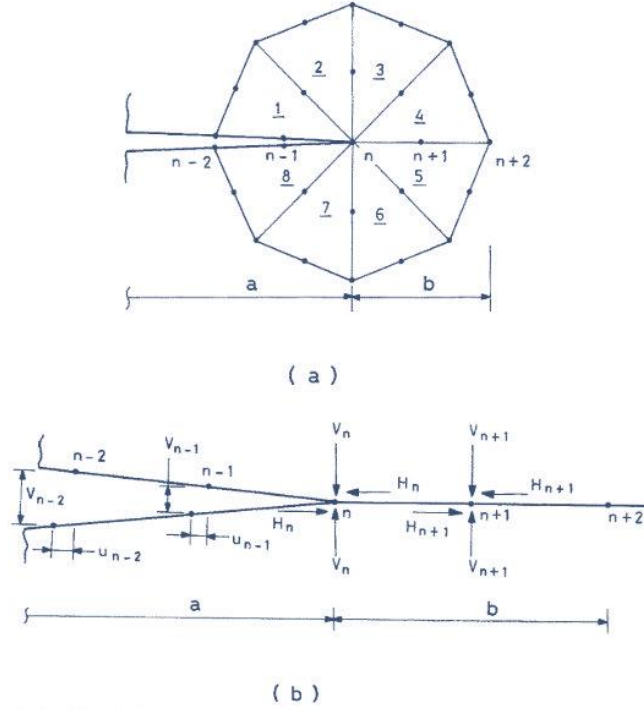


Figure 54 (a) disposition des éléments autour de la singularité, (b) force et déplacements pour calculé CCI pour une fissure plane[112].

### 6.2.1 Taux de restitution d'énergie pour le branchement

Avec les mêmes techniques élaborées dans le chapitre précédent, seule la technique CCI est implémentée pour prendre en compte le branchement. On suppose  $\theta$  l'angle de coudage (kinking) créé entre le chemin de la fissure initiale et le nouveau chemin de propagation. Dundurs [148–150] a proposé l'équation 190 reliant les facteurs d'intensité de contrainte sans branchement et avec branchement dans un bi-matériaux (avec  $\alpha$  et  $\beta$  des paramètres du bi-matériaux). En prenant en compte que ce genre de problèmes, les conditions du bi-matériaux sont écartées, ainsi la formule sera allégée et s'écrit comme définie par Leblond [97,151] et Rice [13] dans l'équation 191 et l'équation 192.

$$K_I^* \equiv F_{I,I}(\varphi; \alpha, \beta) K_I + F_{I,II}(\varphi; \alpha, \beta) K_{II} \quad (190)$$

$$K_{II}^* \equiv F_{II,I}(\varphi; \alpha, \beta) K_I + F_{II,II}(\varphi; \alpha, \beta) K_{II}$$

$$K_I^* \equiv F_{I,I}(\varphi) K_I + F_{I,II}(\varphi) K_{II} = C_{11} K_I + C_{12} K_{II} \quad (191)$$

$$K_{II}^* \equiv F_{II,I}(\varphi) K_I + F_{II,II}(\varphi) K_{II} = C_{21} K_I + C_{22} K_{II}$$

## Chapitre VI : Analyse d'un branchement dans un matériau orthotrope avec RMQ7.

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\
C_{12} &= -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\
C_{21} &= \frac{3}{4} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\
C_{22} &= \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{192}$$

Les paramètres  $C_{ij}$  et  $F_{ij}(\varphi)$  demandent de l'angle de l'extension de fissure avec  $i,j = 1,2$ .

C'est les mêmes paramètres qu'on utilise pour évaluer les taux de restitution d'énergie  $G_I$  et  $G_{II}$  de l'équation 45 pour obtenir le taux de restitution d'énergie total de la fissure. Comme suit :

$$G_I^* = C_{11}G_I + C_{12}G_{II} \tag{193}$$

$$G_{II}^* = C_{21}G_I + C_{22}G_{II}$$

$$G = G_I + G_{II} \tag{194}$$

Ainsi, en adaptant la technique avec l'élément finis mixte RMQ7 les nœuds impliqués dans le calculs du taux de restitution d'énergie sont représentés dans la figure 55. De ce fait, les taux de restitution d'énergie  $G_I$  et  $G_{II}$  sont :

$$\begin{aligned}
G_I &= \frac{1}{2\Delta l} (F_{y1}\Delta v_{56} + F_{y3}\Delta v_{78}) \\
G_{II} &= \frac{1}{2\Delta l} (F_{x1}\Delta u_{56} + F_{x3}\Delta u_{78})
\end{aligned} \tag{195}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Delta u_{56} &= u_5 - u_6 \\
\Delta u_{78} &= u_7 - u_8 \\
\Delta v_{56} &= v_5 - v_6 \\
\Delta v_{78} &= v_7 - v_8
\end{aligned} \tag{196}$$

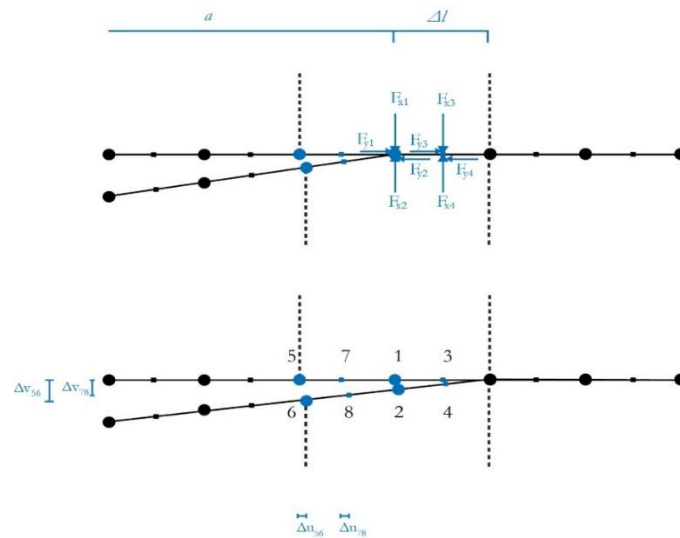


Figure 55 Forces et déplacement impliqué pour le calcul du taux de restitution d'énergie avec RMQ7.

### **6.2.2 Résultats comparatifs**

Les résultats des deux méthodes CCI et SDP implémentées avec l'élément mixte RMQ7 sont comparés avec les résultats des méthodes proposées par Maïti[23] et la méthode analytique. Tous les résultats sont inclus dans le tableau 5 et représentés par les graphiques des figures 56 et 57.

Les valeurs de G données par les méthodes étudié par Maïti [112] ont globalement montré une précision satisfaisante. Les résultats de la méthodes SDP du 3ème anneau sont légèrement mieux que ceux du 2ème anneau avec des marges d'erreurs variant entre 13,58% et 2,18% pour le premier et entre 19,9% et 5,22% pour l'autre. La méthode de l'intégrale J a de son côté fournis de bons avec les résultats notamment pour le plus large contour dont le rapport  $r/a = 0,00874$  avec une marge d'erreur comprise entre 7,95% et 0,64% ; ce qui montre que plus le rapport  $r/a$  et grand plus les résultats sont précis. Pour la méthode CCI c'est l'équation 189 qui fournit des résultats meilleurs que les autres méthodes avec une marge d'erreur comprise entre 9,9% et 1,28%.

Les taux de restitution d'énergie obtenus par les deux techniques implémentées avec l'élément fini mixte RMQ7 ont une excellente précision et sont très proches des résultats analytiques. La technique dite procédure dérivative de souplesse « SDP » a une marge de 5,32% à 1,80% ; la technique de fermeture de fissure CCI a aussi prouvé son efficacité avec une marge variant entre 0,08% et 0,02% avec une stabilité une exactitude remarquable.

**Table 5** Comparaison entre les taux de restitution d'énergie [Nm/m<sup>2</sup>] obtenus par les méthodes numériques et analytique

Angle (°)	SDP		J-integral méthode « r/a »				CCI				RMQ7		Analytique
	2ème anneau	3ème anneau	0,0257	0,00426	0,00591	0,00874	Avec élément de singularité	Sans élément de singularité	Equation 188	Equation 189	SDP	CCI	
<b>30</b>	108,9	112,4	122,35	122,15	120	119,3	110,65	122,63	113,58	119,56	118,3841	114,92	<b>114,9</b>
<b>45</b>	75,41	81,42	83,08	84,9	85,7	87,33	86,28	96,24	82,46	87,5	96,6602	94,19	<b>94,14</b>
<b>60</b>	63,5	64,4	68,22	68,22	67,08	66,71	64,82	74,67	64,65	68,00	68,3491	67,18	<b>67,14</b>
<b>75</b>	31,77	33,13	33,02	33,65	33,86	34,4	33,16	39,61	31,71	33,67	35,3801	37,39	<b>37,37</b>
<b>90</b>	12,24	12,28	12,68	12,74	12,60	12,63	11,95	16,6	12,07	12,71	12,9312	12,67	<b>12,66</b>

Chapitre VI : Analyse d'un branchement dans un matériau orthotrope avec RMQ7.

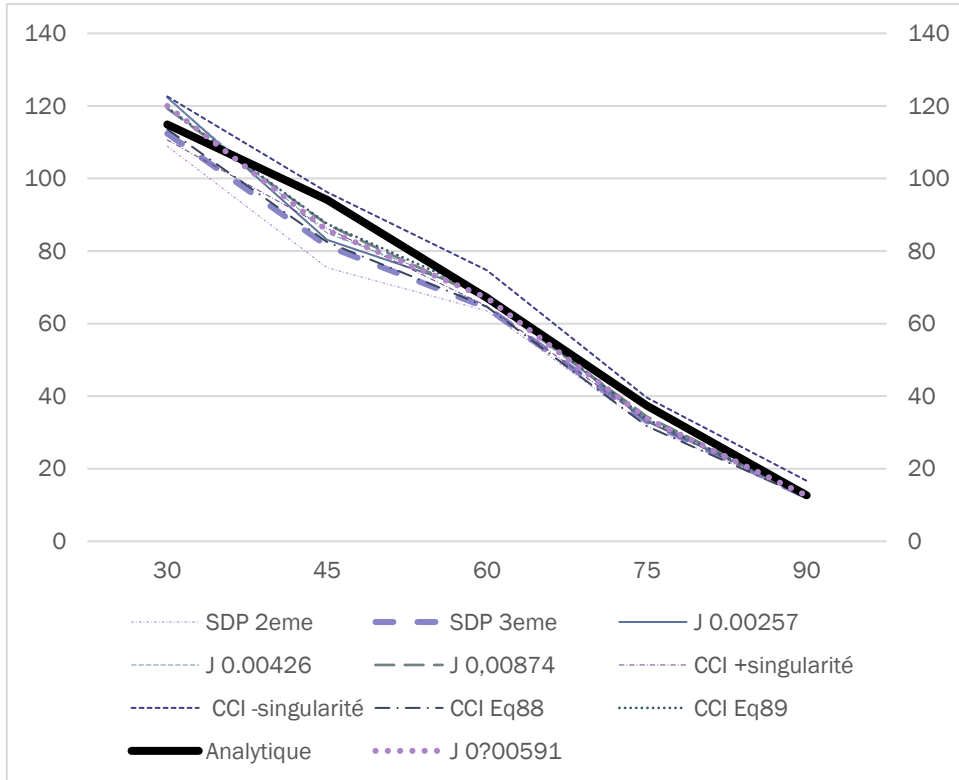


Figure 56 Les taux de restitution d'énergie d'après les méthodes proposés par Maiti[112].

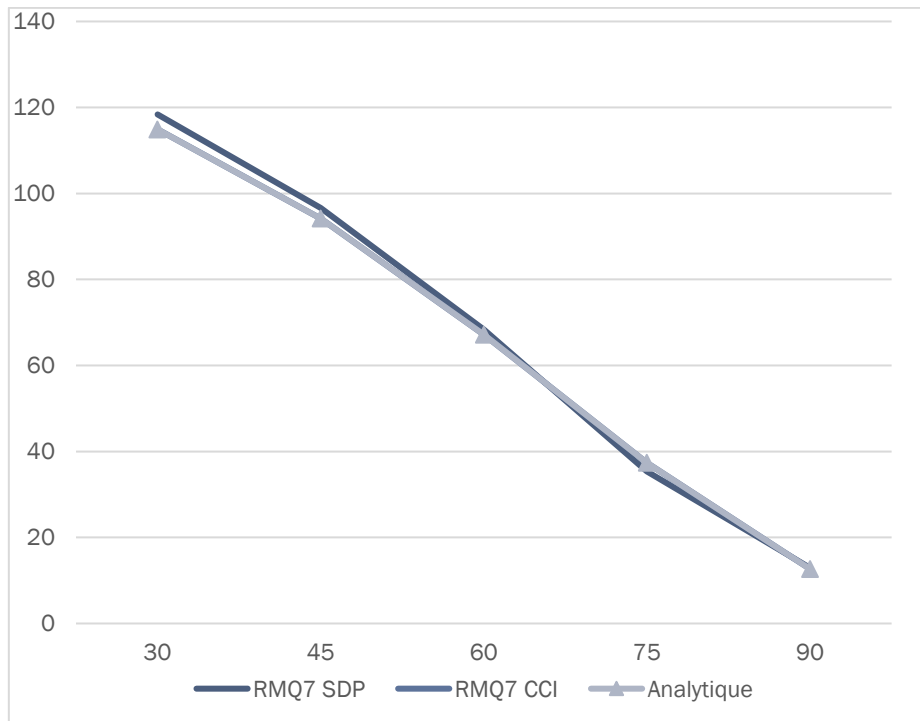


Figure 57 Les taux de restitution d'énergie par RMQ7 avec les méthodes SDP et CCI .

### **6.3. CONCLUSION**

L'extension hors-plan de la fissure impose de prendre en considération son angle de branchement, cet angle implique quant à lui d'imposer les équations mathématiques de calcul des paramètres de fissure afin de bien englober le problème. Les différentes techniques implémentées avec l'élément fini mixte RMQ7 discutées dans le chapitre précédent ont été adaptées pour le calcul du taux de restitution d'énergie d'une fissure qui se propage avec coudage. Un exemple traité dans la littérature avec différentes techniques numérique et analytiques. Les résultats obtenus sont en parfaite concordance avec les résultats analytiques, ce qui montre l'efficacité de l'élément RMQ7 ainsi que le modèle construit autour de lui.

# **Conclusion générale**

## **PERSPECTIVE GLOBALE**

L'importance de suivre les dommages d'une structure réside dans la prévention de leurs conséquences catastrophiques et irréversibles, tels que des dégâts matériels permanents ou des pertes humaines. La présence de fissures dans les éléments structuraux peut endommager l'ensemble de la structure, d'où la grande importance de la mécanique de la rupture. Ces études nécessitent des paramètres pour suivre l'état de la fissure, tels que le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte.

Les différentes méthodes de calcul de ces paramètres permettent de choisir différents procédés en fonction des besoins (complexité du problème, temps de calcul, précision des résultats, etc.). Les implémentations permettent à une même méthode de résoudre diverses difficultés, telles que différentes formes de fissures, différents matériaux, ou pour faciliter le calcul ou gagner du temps de réponse.

Dans cette recherche, le matériau étudié est dit anisotrope, car il possède des caractéristiques mécaniques différentes dans chaque direction. Le type de fissure traité est une fissure coudée, qui change sa direction de propagation. Pour cela, des modifications et des implémentations ont été ajoutées à un élément fini mixte nommé RMQ7, qui est le dernier élément de la série d'éléments provenant de l'élément parent de Reissner. Cet élément a été initialement développé par le Pr. Bouzard en 1992 et a fait ses preuves dans différentes études précédentes à celle-ci.

L'objectif de cette recherche était de trouver le taux de restitution d'énergie dans le matériau anisotrope et les fissures coudées dans le même matériau. La technique CCI implémentée à l'élément a permis d'obtenir des résultats plus adéquats et précis dans le cas de fissuration des corps anisotropes. Au cours de l'étude pour le cas des fissures coudées, une dernière implémentation a permis d'obtenir des résultats très proches des résultats analytiques.

## **DISCUSSIONS**

Au cours de ces recherches, l'élément fini mixte RMQ7 a été implémenté afin d'évaluer le taux de restitution d'énergie dans le cas des fissures coudées dans un matériau anisotrope sous le premier mode de rupture. Cette étude examine le cas des entailles simples sans angles d'ouverture de fissure, qui peut modifier la forme de la singularité autour de la pointe de cette fissure.

L'élément RMQ7 est un élément fini mixte avec des implémentations analytiques. Cela apporte l'agilité de la méthode des éléments finis et l'exactitude des calculs analytiques. La méthode des éléments finis nécessite une modélisation très fine autour de la pointe de la fissure, ce qui conduit à un nombre d'inconnues considérables ainsi qu'à une complexité temporelle et de calcul. Avec le RMQ7, cette utilisation est évitée grâce à la répartition différente des nœuds de contraintes et de déplacements qui gèrent mieux l'effet de la singularité. La simplicité apportée dans les différents calculs de l'élément a rendu l'implémentation plus facile, qui consistait en des multiplications matricielles basiques.

L'implémentation des techniques de calcul du taux de restitution d'énergie CCI (Virtual Crack Closure-Integral Technique) où la disposition des nœuds de contraintes et de déplacements au long des lèvres de la fissure en utilisant l'élément RMQ7 a permis à cette technique d'avoir des taux de restitution d'énergie plus précis et plus fiable. Aussi, la technique SDP (Stiffness Derivative Procedure) a montré d'excellents résultats comparés aux résultats des calculs analytiques et à ceux d'autres techniques, notamment la méthode des éléments finis. La

modélisation a été établi avec le programme MATLAB, le code a été modifié et enrichi pour simuler les nouvelles techniques associées à l'élément RMQ7 générant ainsi un nouveau modèle pour le traitement des différents problématiques liées à la mécanique de la rupture.

Afin de calculer correctement le taux de restitution d'énergie du matériau anisotrope, un matériau orthotrope a été choisi comme référence. En effet, le matériau orthotrope est considéré comme un cas spécial du matériau anisotrope avec un système de coordonnées bien défini. Pour un système de coordonnées différent, le matériau ne sera plus considéré comme orthotrope mais purement anisotrope. Une matrice de transformation est établie pour calculer les nouveaux paramètres mécaniques dans un nouveau système de coordonnées. Les résultats sont ensuite comparés à d'autres méthodes ultérieures issues de la littérature. La simplicité de calcul de cette méthode, qui exige un simple calcul matriciel, a prouvé son utilité dans le calcul du taux de restitution d'énergie par rapport à d'autres méthodes.

Compte tenu des résultats intéressants et attrayants des techniques CCI et SDP dans le cadre de cette étude, le cas de la fissure coudée a été pris en compte. La technique CCI a nécessité une nouvelle implémentation qui prend en compte l'angle de branchement et les coordonnées exactes de l'inclinaison. Les résultats obtenus ont montré une grande précision pour les deux techniques. Ces résultats ont été comparés à ceux des calculs analytiques d'un côté, et à de différentes techniques utilisant à un élément finis triangulaire d'un autre côté.

## **CONCLUSION**

Les conclusions principales de ce travail sont les suivantes :

- La disposition des nœuds de déplacements et de contraintes autour de la fissure dans l'élément RMQ7 lui confère une bonne gestion de la singularité.
- L'analyse des paramètres de fissure d'un matériau anisotrope est particulière en raison non seulement des paramètres mécaniques spécifiques du matériau, mais également de la technique de calcul de ces paramètres.
- Les deux techniques implémentées dans l'élément RMQ7 ont démontré leur efficacité, car les résultats obtenus pour deux cas différents ont montré une précision remarquable comparée aux résultats analytiques et à d'autres méthodes issues de la littérature.
- La méthode de calcul CCI démontre une fiabilité accrue par ses résultats qui ont un taux d'erreur faible et stable dans plusieurs cas de figures présentés dans ces travaux.
- La technique de calcul des paramètres mécaniques anisotropes à partir d'un matériau orthotrope orienté selon un angle connu a prouvé sa performance dans le calcul du taux de restitution d'énergie.
- Le calcul des taux de restitution d'énergie dans le cas d'une fissure inclinée avec la méthode CCI a donné des résultats presque similaires aux résultats analytiques, un peu meilleurs que ceux obtenus par la méthode SDP et de loin supérieurs à ceux obtenus par la méthode des éléments finis classique.

## **RECOMMANDATIONS POUR LES TRAVAUX FUTURE**

- Le RMQ7 peut être étendue pour calculer la plasticité autour la pointe de fissure.
- Des études visant à entourer les problèmes de fissures pour le mode II seront envisageable avec l'élément RMQ7.
- L'étude des problèmes sans la singularité est aussi possible avec l'élément RMQ7 tel que la flexion, chargement dynamiques ou les sollicitations thermodynamiques.

- L'élément peut être enrichi par plusieurs techniques, dont ceux présentées dans cette thèse, pour calculer les deux paramètres de fissuration: le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contraintes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Griffith, A.A. (1920). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. By, Philos Trans R Soc L. A221, 221, pp. 163–98.
- [2] Irwin, G.R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate". J. Applied Mechanics, 24,(1957) 361–364., (24), pp. 361–4.
- [3] Sih, G.C., Paris, P.C., Irwin, G.R. (1965). On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, (6), Doi: <https://doi.org/10.1007/BF00186854>.
- [4] Bowie, O.L., Freese, C.E. (1972). Central crack in plane orthotropic rectangular sheet, Int. J. Fract. Mech., 8(1), pp. 49–57, Doi: 10.1007/BF00185197.
- [5] Liu, C.D. (1986). Analytical solution for orthotropic composite plate containing a mode I crack along principle axis, Int. J. Fract., 76(1), pp. 21–38, Doi: 10.1007/BF00034028.
- [6] Buczek, M.B., Herakovich, C.T. (1985). A Normal Stress Criterion for Crack Extension Direction in Orthotropic Composite Materials, J. Compos. Mater., 19(6), pp. 544–53, Doi: 10.1177/002199838501900606.
- [7] Snyder, M.D., Cruse, T.A. (1975). Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, Int. J. Fract., 11(2), pp. 315–28, Doi: 10.1007/BF00038898.
- [8] Walsh, J.B., Brace, W.F. (1964). A fracture criterion for brittle anisotropic rock, J. Geophys. Res., 69(16), pp. 3449, Doi: 10.1029/JZ069i016p03449.
- [9] Hoek, E. (1964). Fracture of anisotropic rock, J. South African Inst. Min. Metall., 64(10), pp. 501–18.
- [10] Hussain, M., Pu, S., Underwood, J. (1974). Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II. National Symposium on Fracture Mechanics, vol. 53, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959, ASTM International, pp. 2-2–27.
- [11] Yau, J.F., Wang, S.S., Corten, H.T. (1980). A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, J. Appl. Mech., 47(2), pp. 335, Doi: 10.1115/1.3153665.
- [12] Slowik, V., Kishen, J.M.C., Saouma, V.E. (1998). Mixed mode fracture of cementitious bimaterial interfaces; Part I: Experimental results, Eng. Fract. Mech., 60(1), pp. 83–94, Doi: 10.1016/S0013-7944(97)00094-5.
- [13] Cotterell, B., Rice, J.R. (1980). Slightly curved or kinked cracks, Int. J. Fract., 16(2), pp. 155–69.
- [14] Karihaloo, B.L. (1982). On crack kinking and curving, Mech. Mater., 1(3), pp. 189–201, Doi: 10.1016/0167-6636(82)90012-6.
- [15] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., Liggett, J.A. (1981). Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method, Int. J. Numer. Methods Eng., 17(3), pp. 387–404, Doi: 10.1002/nme.1620170308.
- [16] Bilby, B.A., Cardew, G.E. (1975). The crack with a kinked tip, Int. J. Fract., 11(4), pp. 708–12, Doi: 10.1007/BF00116380.

- [17] Hayashi, K., Nemat-Nasser, S. (1981). Energy release rate and crack kinking, *Int. J. Solids Struct.*, 17(1), pp. 107–14, Doi: 10.1016/0020-7683(81)90050-0.
- [18] Nemat-nasser, S.I.A. (1996). HOOP STRESS INTENSITY FACTOR AND CRACK-KINKING IN ANISOTROPIC BRITTLE SOLIDS, 33(14), pp. 2023–37.
- [19] Azhdari, A., Nemat-Nasser, S. (1996). Energy-release rate and crack kinking in anisotropic brittle solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 44(6), pp. 929–51, Doi: 10.1016/0022-5096(96)00012-9.
- [20] Wu, C.H. (1978). Elasticity problems of a slender Z-crack, *J. Elast.*, 8(2), pp. 183–205, Doi: 10.1007/BF00052482.
- [21] Liou, J.Y., Sung, J.C. (2005). Analysis of Z-branch from a pre-existing slipping crack in an anisotropic solid, *Comput. Struct.*, 84(1–2), pp. 61–9, Doi: 10.1016/j.compstruc.2005.08.002.
- [22] Chu, S.J., Hong, C.S. (1990). Application of the  $J_k$  integral to mixed mode crack problems for anisotropic composite laminates, *Eng. Fract. Mech.*, 35(6), pp. 1093–103, Doi: 10.1016/0013-7944(90)90137-6.
- [23] Maiti, S.K. (1990). Finite element computation of the strain energy release rate for kinking of a crack, *Int. J. Fract.*, 43(3), pp. 161–74, Doi: 10.1007/BF00018339.
- [24] Heppler, G., Hansen, J.S. (1981). Mixed mode fracture analysis of rectilinear anisotropic plates by high order finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 17(3), pp. 445–64, Doi: 10.1002/nme.1620170311.
- [25] Blacker, T.D., Stephenson, M.B. (1991). Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32(4), pp. 811–47, Doi: 10.1002/nme.1620320410.
- [26] Byskov, E. (1984). The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements, *Int. J. Fract.*, 26(4), pp. 329–37, Doi: 10.1007/BF00962965.
- [27] Chow, W.T., Atluri, S.N. (1995). Finite element calculation of stress intensity factors for interfacial crack using virtual crack closure integral, *Comput. Mech.*, 16(6), pp. 417–25, Doi: 10.1007/BF00370563.
- [28] Krueger, R., Krueger, R. (2002). *The Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications*, ..
- [29] Millán, J.S., Armendáriz, I., García-Martínez, J., González, R. (2015). Strategies for static failure analysis on aerospace structures, *Handb. Mater. Fail. Anal. with Case Stud. from Aerosp. Automot. Ind.*, , pp. 3–28, Doi: 10.1016/B978-0-12-800950-5.00001-6.
- [30] Palani, G.S., Dattaguru, B., Iyer, N.R. (2008). A generalized technique for fracture analysis of 2-D crack problems employing singular finite elements, *SDHM Struct. Durab. Heal. Monit.*, 4(2), pp. 77–93, Doi: 10.3970/sdhm.2008.004.077.
- [31] Okada, H., Kamibeppu, T. (2005). A virtual crack closure-integral method (VCCM) for three-dimensional crack problems using linear tetrahedral finite elements, *C. - Comput. Model. Eng. Sci.*, 10(3), pp. 229–38, Doi: 10.3970/cmcs.2005.010.229.
- [32] Xie, D., Waas, A.M., Shahwan, K.W., Schroeder, J.A., Boeman, R.G. (2005). Fracture criterion for kinking cracks in a tri-material adhesively bonded joint under mixed mode

- loading, *Eng. Fract. Mech.*, 72(16), pp. 2487–504, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2005.03.008.
- [33] Ghorashi, S.S., Valizadeh, N., Mohammadi, S. (2012). Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks, (September 2011), pp. 1069–101, Doi: 10.1002/nme.
- [34] SHOJAEE, S., ASGHARZADEH, M., HAERI, A. (2014). Crack Analysis in Orthotropic Media Using Combination of Isogeometric Analysis and Extended Finite Element, *Int. J. Appl. Mech.*, 06(06), pp. 1450068, Doi: 10.1142/S1758825114500689.
- [35] Habib, S.H., Belaidi, I., Khatir, S., Wahab, M.A. (2017). Numerical Simulation of cracked orthotropic materials using extended isogeometric analysis, *J. Phys. Conf. Ser.*, 842(1), pp. 012061, Doi: 10.1088/1742-6596/842/1/012061.
- [36] Ghorashi, S.S., Valizadeh, N., Mohammadi, S., Rabczuk, T. (2015). T-spline based XIGA for fracture analysis of orthotropic media, *Comput. Struct.*, 147, pp. 138–46, Doi: 10.1016/j.compstruc.2014.09.017.
- [37] Gu, J., Yu, T., Lich, L. Van., Tanaka, S., Qiu, L., Bui, T.Q. (2019). Adaptive orthotropic XIGA for fracture analysis of composites, *Compos. Part B Eng.*, 176(August), pp. 107259, Doi: 10.1016/j.compositesb.2019.107259.
- [38] Asadpoure, A., Mohammadi, S. (2007). Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method, (August 2006), pp. 2150–72, Doi: 10.1002/nme.
- [39] Gao, Y., Liu, Z., Zeng, Q., Wang, T., Zhuang, Z., Hwang, K.C. (2017). Theoretical and numerical prediction of crack path in the material with anisotropic fracture toughness, *Eng. Fract. Mech.*, 180, pp. 330–47, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.06.013.
- [40] Asadpoure, A., Mohammadi, S. (2007). Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 69(10), pp. 2150–72, Doi: 10.1002/nme.1839.
- [41] Dimitri, R., Fantuzzi, N., Li, Y., Tornabene, F. (2017). Numerical computation of the crack development and SIF in composite materials with XFEM and SFEM, *Compos. Struct.*, 160, pp. 468–90, Doi: 10.1016/j.compstruct.2016.10.067.
- [42] Wang, X.L., Shi, F., Liu, H., Wu, H.A. (2016). Numerical simulation of hydraulic fracturing in orthotropic formation based on the extended finite element method, *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 33, pp. 56–69, Doi: 10.1016/j.jngse.2016.05.001.
- [43] Aliabadi, M.H. (1997). Boundary Element Formulations in Fracture Mechanics, *Appl. Mech. Rev.*, 50(2), pp. 83, Doi: 10.1115/1.3101690.
- [44] Chen, C.-S., Pan, E., Amadei, B. (1998). Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 35(2), pp. 195–218, Doi: 10.1016/S0148-9062(97)00330-6.
- [45] Hattori, G., Alatawi, I.A., Trevelyan, J. (2017). An extended boundary element method formulation for the direct calculation of the stress intensity factors in fully anisotropic materials, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 109(7), pp. 965–81, Doi: 10.1002/nme.5311.
- [46] Sollero, P., Aliabadi, M.H. (1993). Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method, *Int. J. Fract.*, 64(4), pp. 269–84, Doi:

10.1007/BF00017845.

- [47] Simpson, R.N., Bordas, S.P.A., Trevelyan, J., Rabczuk, T. (2012). A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 209–212, pp. 87–100, Doi: 10.1016/j.cma.2011.08.008.
- [48] Geraci, G., Aliabadi, M.H. (2017). Micromechanical boundary element modelling of transgranular and intergranular cohesive cracking in polycrystalline materials, *Eng. Fract. Mech.*, 176, pp. 351–74, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.03.016.
- [49] Lei, J., Yun, L., Zhang, C. (2017). An interaction integral and a modified crack closure integral for evaluating piezoelectric crack-tip fracture parameters in BEM, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 79(August 2016), pp. 88–97, Doi: 10.1016/j.enganabound.2017.04.001.
- [50] Choupani, N. (2008). Interfacial mixed-mode fracture characterization of adhesively bonded joints, *Int. J. Adhes. Adhes.*, 28(6), pp. 267–82, Doi: 10.1016/j.ijadhadh.2007.08.002.
- [51] Cahill, L.M.A., Natarajan, S., Bordas, S.P.A., O’Higgins, R.M., McCarthy, C.T. (2014). An experimental/numerical investigation into the main driving force for crack propagation in uni-directional fibre-reinforced composite laminae, *Compos. Struct.*, 107(1), pp. 119–30, Doi: 10.1016/j.compstruct.2013.05.039.
- [52] S. A. Fawaz. (1998). Application of the virtual crack closure technique to calculate stress intensity factors for through cracks with an elliptical crack front s., *eng. Fract. Mech.*, 59(3), pp. 327–42.
- [53] Moutou Pitti, R., Dubois, F., Pop, O. (2011). A proposed mixed-mode fracture specimen for wood under creep loadings, *Int. J. Fract.*, 167(2), pp. 195–209, Doi: 10.1007/s10704-010-9544-z.
- [54] Walter, R., Olesen, J.F. (2008). Cohesive mixed mode fracture modelling and experiments, *Eng. Fract. Mech.*, 75(18), pp. 5163–76, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2008.08.009.
- [55] Červenka, J., Kishen, J.C., Saouma, V.E. (1998). Mixed mode fracture of cementitious bimaterial interfaces; Part II: numerical simulation, *Eng. Fract. ...*, 60(1), pp. 95–107.
- [56] Penado, F.E. (2018). Fracture parameter determination for the orthotropic interface crack with friction, *Eng. Fract. Mech.*, 204(November), pp. 542–56, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.10.038.
- [57] Spagnoli, A., Carpinteri, A., Vantadori, S. (2013). On a kinked crack model to describe the influence of material microstructure on fatigue crack growth, *Frat. Ed Integrita Strutt.*, 7(25), pp. 94–101, Doi: 10.3221/IGF-ESIS.25.14.
- [58] Javanmardi, M.R., Maheri, M.R. (2019). Extended finite element method and anisotropic damage plasticity for modelling crack propagation in concrete, *Finite Elem. Anal. Des.*, 165(August), pp. 1–20, Doi: 10.1016/j.finel.2019.07.004.
- [59] Meric de Bellefon, G., van Duysen, J.C. (2018). Finite element analysis of the influence of elastic anisotropy on stress intensification at stress corrosion cracking initiation sites in fcc alloys, *J. Nucl. Mater.*, 503, pp. 22–9, Doi: 10.1016/j.jnucmat.2018.01.050.
- [60] Wang, Y., Wang, Z., Zheng, Y. (2019). Analysis of Fatigue Crack Propagation of an Orthotropic Bridge Deck Based on the Extended Finite Element Method, *Adv. Civ. Eng.*,

2019, pp. 1–14, Doi: 10.1155/2019/6319821.

- [61] Ben Amara, M., Pluvillage, G., Capelle, J., Azari, Z. (2015). Crack Tip Opening Angle as a Fracture Resistance Parameter to Describe Ductile Crack Extension and Arrest in Steel Pipes under Service Pressure, *Phys. Mesomech.*, 18(4), pp. 355–69, Doi: 10.1134/s1029959915040086.
- [62] Toribio, J., González, B., Matos, J.C. (2015). Crack tip fields and mixed mode fracture behaviour of progressively drawn pearlitic steel, *Frat. Ed Integrita Strutt.*, 9(33), pp. 221–8, Doi: 10.3221/IGF-ESIS.33.28.
- [63] Ayatollahi, M.R., Mirsayar, M.M. (2011). Kinking angles for interface cracks, *Procedia Eng.*, 10, pp. 325–9, Doi: 10.1016/j.proeng.2011.04.056.
- [64] Martin, E., Leguillon, D., Lacroix, C. (2001). A revisited criterion for crack deflection at an interface in a brittle bimaterial, *Compos. Sci. Technol.*, 61(12), pp. 1671–9, Doi: 10.1016/S0266-3538(01)00067-7.
- [65] Bouida, N., Bouchikhi, A.S., Megueni, A., Gouasmi, S. (2018). A Finite Element Analysis for Evaluation of J-Integral in Plates Made of Functionally Graded Materials with a Semicircular Notch, *J. Fail. Anal. Prev.*, 18(6), pp. 1573–86, Doi: 10.1007/s11668-018-0558-6.
- [66] Ovid’Ko, I.A., Sheinerman, A.G. (2015). Toughening due to crack deflection in ceramic- and metal-graphene nanocomposites, *Rev. Adv. Mater. Sci.*, 43(1–2), pp. 52–60.
- [67] Hu, K., Chen, Z. (2016). Boundary effect on crack kinking in a piezoelectric strip with a central crack, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 81(July), pp. 11–24, Doi: 10.1016/j.tafmec.2015.11.007.
- [68] Hattori, G., Rojas-Díaz, R., Sáez, A., Sukumar, N., García-Sánchez, F. (2012). New anisotropic crack-tip enrichment functions for the extended finite element method, *Comput. Mech.*, 50(5), pp. 591–601, Doi: 10.1007/s00466-012-0691-0.
- [69] Larijani, N., Brouzoulis, J., Schilke, M., Ekh, M. (2014). The effect of anisotropy on crack propagation in pearlitic rail steel, *Wear*, , pp. 1–12, Doi: 10.1016/j.wear.2013.11.034.
- [70] Leitner, T., Hohenwarter, A., Pippan, R. (2019). Anisotropy in fracture and fatigue resistance of pearlitic steels and its effect on the crack path, *Int. J. Fatigue*, 124(December 2018), pp. 528–36, Doi: 10.1016/j.ijfatigue.2019.02.048.
- [71] Mart??nez, J.C., Vanegas Useche, L.V., Wahab, M.A. (2017). Numerical prediction of fretting fatigue crack trajectory in a railway axle using XFEM, *Int. J. Fatigue*, 100, pp. 32–49, Doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.03.009.
- [72] Larijani, N., Brouzoulis, J., Schilke, M., Ekh, M. (2014). The effect of anisotropy on crack propagation in pearlitic rail steel, *Wear*, 314(1–2), pp. 57–68, Doi: 10.1016/j.wear.2013.11.034.
- [73] Bechtle, S., Fett, T., Rizzi, G., Habelitz, S., Schneider, G.A. (2010). Mixed-mode stress intensity factors for kink cracks with finite kink length loaded in tension and bending: Application to dentin and enamel, *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 3(4), pp. 303–12, Doi: 10.1016/j.jmbbm.2009.12.004.
- [74] Khan, A.A., Vincent, J.F.V. (1993). Anisotropy in the fracture properties of apple flesh

- as investigated by crack-opening tests, *J. Mater. Sci.*, 28(1), pp. 45–51, Doi: 10.1007/BF00349031.
- [75] Inglis, C.E. (1913). Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Spring Meet. Fifty-Fourth Sess. Inst. Nav. Archit.*, , pp. 219–41.
- [76] Anderson, T.L., Anderson, T.L. (2005). *Fracture Mechanics*, vol. 13, CRC Press.
- [77] Westergaard, H.M. (1939). Bearing Pressures and Cracks: Bearing Pressures Through a Slightly Waved Surface or Through a Nearly Flat Part of a Cylinder, and Related Problems of Cracks, *J. Appl. Mech.*, 6(2), pp. a49–53, Doi: 10.1115/1.4008919.
- [78] Williams, M.L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech.*, 24(1), pp. 109–14.
- [79] Sautter, G. (2017). Introduction à la méthode des éléments fini, *L’Atlantique Au Fleuve Congo*, 2, , pp. 1093–103, Doi: 10.1515/9783111584225-toc.
- [80] Kutuk, M.A., Atmaca, N., Guzelbey, I.H. (2007). Explicit formulation of SIF using neural networks for opening mode of fracture, *Eng. Struct.*, 29(9), pp. 2080–6, Doi: 10.1016/j.engstruct.2006.11.008.
- [81] Li, Y., Barbič, J. (2014). Stable orthotropic materials, *SCA 2014 - Proc. ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. Comput. Animat.*, , pp. 41–6, Doi: 10.2312/sca.20141121.
- [82] Kotoul, M., Ševeček, O., Profant, T. (2010). Analysis of multiple cracks in thin coating on orthotropic substrate under mechanical and residual stresses, *Eng. Fract. Mech.*, 77(2), pp. 229–48, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2009.07.010.
- [83] Dong, L., Atluri, S.N. (2013). Fracture & Fatigue Analyses : SGBEM-FEM or XFEM ? Part 2 : 3D Solids, 90(5), pp. 379–413.
- [84] Chen, X., Liu, Y. (2014). Finite element modeling and simulation with ANSYS workbench, .
- [85] Jakobsen, J., Andreasen, J.H., Bozhevolnaya, E. (2008). Crack kinking of a delamination at an inclined core junction interface in a sandwich beam, *Eng. Fract. Mech.*, 75(16), pp. 4759–73, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2008.06.034.
- [86] Yu, H., Wu, L., Guo, L., He, Q., Du, S. (2010). Interaction integral method for the interfacial fracture problems of two nonhomogeneous materials, *Mech. Mater.*, 42(4), pp. 435–50, Doi: 10.1016/j.mechmat.2010.01.001.
- [87] Gao, Y., Liu, Z., Zeng, Q., Wang, T., Zhuang, Z., Hwang, K. (2017). Theoretical and numerical prediction of crack path in the material with anisotropic fracture toughness, *Eng. Fract. Mech.*, 180, pp. 330–47, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.06.013.
- [88] Kumar, S., Singh, I. V., Mishra, B.K., Rabczuk, T. (2015). Modeling and simulation of kinked cracks by virtual node XFEM, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 283, pp. 1425–66, Doi: 10.1016/j.cma.2014.10.019.
- [89] Lei, J., Wang, Y.S., Gross, D. (2008). Numerical simulation of crack deflection and penetration at an interface in a bi-material under dynamic loading by time-domain boundary element method, *Int. J. Fract.*, 149(1), pp. 11–30, Doi: 10.1007/s10704-008-9215-5.

- [90] Matsumto, T., Tanaka, M., Obara, R. (2000). Computation of stress intensity factors of interface cracks based on interaction energy release rates and BEM sensitivity analysis, *Eng. Fract. Mech.*, 65, pp. 683–702, Doi: 10.1016/S0013-7944(00)00005-9.
- [91] Belytschko, T., Black, T. (1999). Elastic crack growth in ...pdf, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45(July 1998), pp. 601–20.
- [92] Dong, L., Atluri, S.N. (2013). Fracture & Fatigue Analyses: SGBEM-FEM or XFEM? Part 1: 2D Structures, *Comput. Model. Eng. Sci.*, 90(2), pp. 91–146, Doi: 10.3970/cmcs.2013.090.091.
- [93] Muthu, N., Maiti, S.K., Falzon, B.G., Yan, W. (2016). Crack propagation in non-homogenous materials: Evaluation of mixed-mode SIFs, T-stress and kinking angle using a variant of EFG Method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 72, pp. 11–26, Doi: 10.1016/j.enganabound.2016.07.017.
- [94] Mohammed, I., Liechti, K.M. (2000). Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners, *J. Mech. Phys. Solids*, 48(4), pp. 735–64, Doi: 10.1016/S0022-5096(99)00052-6.
- [95] Georgiou, I., Hadavinia, H., Ivankovic, A., Kinloch, A.J., Tropsa, V., Williams, J.G. (2003). Cohesive zone models and the plastically deforming peel test, *J. Adhes.*, 79(3), pp. 239–65, Doi: 10.1080/00218460309555.
- [96] Kuruppu, M.K.Y.O.M. (2014). Estimation of Fracture Toughness of Anisotropic Rocks by Semi-Circular Bend ( SCB ) Tests Under Water Vapor Pressure, , Doi: 10.1007/s00603-014-0665-y.
- [97] Leblond, J.B., Frelat, J. (2001). Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 20(6), pp. 937–51, Doi: 10.1016/S0997-7538(01)01173-1.
- [98] Manoharan, M.G., Sun, C.T. (1990). Strain energy release rates of an interfacial crack between two anisotropic solids under uniform axial strain, *Compos. Sci. Technol.*, 39(2), pp. 99–116, Doi: 10.1016/0266-3538(90)90049-B.
- [99] Zeng, W., Liu, G.R., Jiang, C., Dong, X.W., Chen, H.D., Bao, Y., Jiang, Y. (2016). An effective fracture analysis method based on the virtual crack closure-integral technique implemented in CS-FEM, *Appl. Math. Model.*, 40(5–6), pp. 3783–800, Doi: 10.1016/j.apm.2015.11.001.
- [100] Sukumar, N., Dolbow, J.E., Moës, N. (2015). Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination, *Int. J. Fract.*, 196(1–2), pp. 189–206, Doi: 10.1007/s10704-015-0064-8.
- [101] Geraci, G., Aliabadi, M.H. (2018). Micromechanical modelling of cohesive thermoelastic cracking in orthotropic polycrystalline materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 339, pp. 567–90, Doi: 10.1016/j.cma.2018.05.011.
- [102] Tafreshi, A. (2017). An analytical expression for the  $J_2$  -integral of an interfacial crack in orthotropic bimaterials, , Doi: 10.1111/ffe.12587.
- [103] Kamali Yazdi, A., Shoostari, A., Fazelipour, M. (2016). Introducing new cracked finite elements and a method for SIF calculation of cracks, *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 44(3), pp. 176–88, Doi: 10.1080/15397734.2015.1045071.

- [104] Theotokoglou, E.E., Turlomousis, I.I. (2010). Crack kinking in sandwich structures under three-point bending, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 53(2), pp. 158–64, Doi: 10.1016/j.tafmec.2010.03.006.
- [105] Zhuang, L., Talreja, R., Varna, J. (2018). Transverse crack formation in unidirectional composites by linking of fibre/matrix debond cracks, *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, 107(February), pp. 294–303, Doi: 10.1016/j.compositesa.2018.01.013.
- [106] Choi, H.J. (2001). The problem for bonded half-planes containing a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone, *Int. J. Solids Struct.*, 38(36–37), pp. 6559–88, Doi: 10.1016/S0020-7683(01)00090-7.
- [107] Chen, L., Li, B., de Borst, R. (2020). Adaptive isogeometric analysis for phase-field modeling of anisotropic brittle fracture, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 121(20), pp. 4630–48, Doi: 10.1002/nme.6457.
- [108] Li, B., Maurini, C. (2019). Crack kinking in a variational phase-field model of brittle fracture with strongly anisotropic surface energy, *J. Mech. Phys. Solids*, 125, pp. 502–22, Doi: 10.1016/j.jmps.2019.01.010.
- [109] Monfared, M.M., Ayatollahi, M. (2016). Multiple crack problems in nonhomogeneous orthotropic planes under mixed mode loading conditions, *Eng. Fract. Mech.*, 155, pp. 1–17, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2015.11.016.
- [110] J.R.Rice. (1968). “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks,” *J. Appl. Mech.*, 35(2), pp. 379.
- [111] Kudari, S.K., Maiti, B., Ray, K.K. (2007). The effect of specimen geometry on plastic zone size: A study using the J integral, *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 42(3), pp. 125–36, Doi: 10.1243/03093247JSA252.
- [112] Maiti, S.K. (1990). Finite element computation of the strain energy release rate for kinking of a crack, *Int. J. Fract.*, 43(0), pp. 161–74.
- [113] Parks, D.M. (1974). A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, *Int. J. Fract.*, 10(4), pp. 487–502, Doi: 10.1007/BF00155252.
- [114] Banks-Sills, L., Farkash, E. (2016). A note on the Virtual Crack Closure Technique for a bimaterial interface crack, *Int. J. Fract.*, 201(2), pp. 171–80, Doi: 10.1007/s10704-016-0120-z.
- [115] Raju, I.S. (1987). Calculation of strain-energy release rates with higher order and singular finite elements, *Eng. Fract. Mech.*, 28(3), pp. 251–74, Doi: 10.1016/0013-7944(87)90220-7.
- [116] Rybicki, E.F., Kanninen, M.F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Eng. Fract. Mech.*, 9(4), pp. 931–8, Doi: 10.1016/0013-7944(77)90013-3.
- [117] Sun, C.T., Jih, C.J. (1987). On strain energy release rates for interfacial cracks in bimaterial media, *Eng. Fract. Mech.*, 28(1), pp. 13–20, Doi: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
- [118] Hemanth, D., Shivakumar Aradhya, K.S., Rama Murthy, T.S., Govinda Raju, N. (2005). Strain energy release rates for an interface crack in orthotropic media - A finite element

- investigation, *Eng. Fract. Mech.*, 72(5), pp. 759–72, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2004.06.002.
- [119] Sutton, M.A., Deng, X., Ma, F., Newman, J.C., James, M. (2000). Development and application of a crack tip opening displacement-based mixed mode fracture criterion, *Int. J. Solids Struct.*, 37(26), pp. 3591–618, Doi: 10.1016/S0020-7683(99)00055-4.
- [120] Wood, H.A., M, R.E. jr. (1979). *USAF Damage Tolerant Design Handbook: Guidelines for the analysis and Design of Damage Tolerant Aircraft Structures*, .
- [121] Bouzerd, H. (1992). *Elément fini mixte pour interface cohérente ou fissurée*. Université de Claude Bernard, Lyon I, France, 1992.
- [122] Bouziane, S., Bouzerd, H., Guenfoud, M. (2009). Mixed finite element for modelling interfaces, *Eur. J. Comput. Mech.*, 18(2), pp. 155–75, Doi: 10.3166/ejcm.18.155-175.
- [123] Reissner, E. (1950). On a Variational Theorem in Elasticity, *J. Math. Phys.*, 29(1–4), pp. 90–5, Doi: 10.1002/sapm195029190.
- [124] Gouri, D., Gilbert, T. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*, .
- [125] Hakim, V., Karma, A. (2005). Crack Path Prediction in Anisotropic Brittle Materials, 235501(December), pp. 1–4, Doi: 10.1103/PhysRevLett.95.235501.
- [126] Li, B., Peco, C., Millán, D., Arias, I., Arroyo, M. (2014). Phase-field modeling and simulation of fracture in brittle materials with strongly anisotropic surface energy, , Doi: 10.1002/nme.
- [127] Mandal, T.K., Nguyen, V.P., Wu, J.Y. (2020). A length scale insensitive anisotropic phase field fracture model for hyperelastic composites, *Int. J. Mech. Sci.*, 188(April), Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105941.
- [128] Chen, C.S., Tu, C.H., Yang, C.C. (2010). Analysis of crack propagation path on the anisotropic bi-material rock, *Math. Probl. Eng.*, 2010, Doi: 10.1155/2010/947818.
- [129] Rinne, M. (2008). *Fracture Mechanics and Subcritical Crack Growth Approach To Model Time-Dependent Failure in Brittle Rock*, .
- [130] Kataoka, M., Obara, Y., Kuruppu, M. (2015). Estimation of Fracture Toughness of Anisotropic Rocks by Semi-Circular Bend (SCB) Tests Under Water Vapor Pressure, *Rock Mech. Rock Eng.*, 48(4), pp. 1353–67, Doi: 10.1007/s00603-014-0665-y.
- [131] Rajesh, K.N., Rao, B.N. (2010). Two-dimensional analysis of anisotropic crack problems using coupled meshless and fractal finite element method, *Int. J. Fract.*, 164(2), pp. 285–318, Doi: 10.1007/s10704-010-9496-3.
- [132] Liu, C.X. (2013). Boundary element method for crack analysis in two-dimension anisotropic solid, *Appl. Mech. Mater.*, 423–426, pp. 1627–31, Doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.423-426.1627.
- [133] Gao, Y., Liu, Z., Zeng, Q., Wang, T., Zhuang, Z., Hwang, K. (2017). Theoretical and numerical prediction of crack path in the material with anisotropic fracture toughness, *Eng. Fract. Mech.*, 180, pp. 330–47, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2017.06.013.
- [134] Nairn, J.A., Hammerquist, C.C., Aimene, Y.E. (2017). Numerical implementation of anisotropic damage mechanics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 112(12), pp. 1848–68, Doi: 10.1002/nme.5585.

- [135] Mishra, R.K., Shaji, A., Thomas, S. (2017). Processing, rheology, barrier properties, and theoretical study of microfibrillar and nanofibrillar in situ composites, vol. 10, Elsevier Ltd.
- [136] A. M. Donald. (2006). Liquid crystalline polymers, Cambridge University Press, 2006.
- [137] Baranger, E. (2017). Modeling mechanical behavior of ceramic matrix composites, vol. 5, Elsevier Ltd.
- [138] Chen, L., Liu, G.R., Jiang, Y., Zeng, K., Zhang, J. (2011). A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for crack analyses in anisotropic media, *Eng. Fract. Mech.*, 78(1), pp. 85–109, Doi: 10.1016/j.engfracmech.2010.09.018.
- [139] Liu, G.R., Nguyen-Thoi, T., Lam, K.Y. (2009). An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids, *J. Sound Vib.*, 320(4–5), pp. 1100–30, Doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.027.
- [140] Chen, L., Liu, G.R., Nourbakhsh-Nia, N., Zeng, K. (2010). A singular edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for bimaterial interface cracks, *Comput. Mech.*, 45(2–3), pp. 109–25, Doi: 10.1007/s00466-009-0422-3.
- [141] Hwu, C. (2010). Anisotropic Elastic Plates, vol. 01, Boston, MA, Springer US.
- [142] Lekhnitskii, S.G. (1968). Anisotropic plates, Gordon and Breach,.
- [143] Voyiadjis, G.Z., Kattan, P.I. (2005). Mechanics of composite materials with MATLAB, vol. 1.
- [144] Salah, B., Hamoudi, B., Nouredine, B., Mohamed, G. (2014). Energy release rate for kinking crack using mixed finite element, *Struct. Eng. Mech.*, 50(5), pp. 665–77, Doi: 10.12989/sem.2014.50.5.665.
- [145] Xie, D., Waas, A.M., Shahwan, K.W., Schroeder, J.A., Boeman, R.G. (2004). Computation of energy release rates for kinking cracks based on virtual crack closure technique, *C. - Comput. Model. Eng. Sci.*, 6(6), pp. 515–24.
- [146] Maiti, S.K. (1986). An approximate method for calculation of strain energy release rate associated with kinking of a mode I crack located initially in an orthotropic direction, *Int. J. Fract.*, 32(2), pp. 33–6, Doi: 10.1007/BF00019791.
- [147] Cartwright, D.J., Rooke, D.P. (1975). Evaluation of stress intensity factors, *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 10(4), pp. 217–24, Doi: 10.1243/03093247V104217.
- [148] Dundurs, J., Mura, T. (1964). Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion, *J. Mech. Phys. Solids*, 12(3), pp. 177–89, Doi: 10.1016/0022-5096(64)90017-1.
- [149] Dundurs, J. (1967). Composite Under Plane Deformation \* S uppose, *J. Compos. Mater.*, 1(3), pp. 310–22.
- [150] Dundurs, J. (1969). Elastic Interaction of Dislocations with Inhomogeneities, *J. Appl. Mech-T. ASME*, 36, pp. 650–2.
- [151] Leblond, J.B. (1989). Crack paths in plane situations—I. General form of the expansion of the stress intensity factors, *Int. J. Solids Struct.*, 25(11), pp. 1311–25, Doi: 10.1016/0020-7683(89)90094-2.

