

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

Mémoire de Magister

**Présenté à l'Université 20 Août 55, Skikda
Faculté des Sciences et Sciences de l'Ingéniorat
Département des Sciences Fondamentales
Spécialité : Physique
Option : Energétique**

**Présenté par :
TEGGAR Mohamed**

THEME

Etude des transferts de chaleur dans des nodules contenant un matériau à changement de phase (MCP) liquide-solide dans un fluide frigoporteur

**Soutenu le : 28 / 06 / 2007
Devant le jury :**

Président	M. F. Djazi	Professeur	Université 20 Août 55 - Skikda
Examineurs	M. D. Omeïri	Maître de Conférences	Université 20 Août 55 - Skikda
	M. N. Attaf	Maître de Conférences	Université Mentouri - Constantine
Rapporteur	M. E. Mezaache	Professeur	Université 20 Août 55 - Skikda

*A mes parents
Je dédie ce mémoire*

Avant propos

Apprendre le a, b, c...à réaliser le présent travail!

C'est tout un périple qui n'aurait lieu sans la bénédiction du tout puissant, Dieu
merci!

Dieu merci encore d'avoir nous réservé à chaque action un guidant ou un aidant !

Ils sont si nombreux,

À risque d'en oublier une personne, je redis merci à tous.

Que monsieur l'encadreur trouve ici mes sincères reconnaissances!

Merci à cette rigueur scientifique...

À cette ponctualité...

À ce souci de bien faire!

Que messieurs les membres du jury trouvent ici mes sincères reconnaissances
d'avoir accepté faire partie prenante de ce modeste travail.

Enfin, je tiens à associer à ces remerciements mes collègues.

Nomenclature

Latins

a	diffusivité thermique	[m ² /s]
c	chaleur spécifique adimensionnelle	
E	Fonction de Kirchhoff	
g	paramètre de géométrie	
h	coefficient de transfert convectif de chaleur	[W/m ² °C]
H^*	enthalpie adimensionnelle	
j	incrément temporel	
k	conductivité thermique	[W/m °C]
K^*	conductivité thermique adimensionnelle	
L_f	chaleur latente de fusion	[J/kg]
n	nombre total de nœuds	
r_o	Rayon ou longueur caractéristique	[m]
r^*	rayon adimensionnel	
r, x	coordonnées spatiales	[m]
s	position de l'interface	[m]
Ste	nombre de Stefan	
s	Temps	[s]
T	Température	[°C]
Bi	nombre de Biot	
V	volume adimensionnel	
w	Variance	

Greco

ΔR	distance inter nœuds	[m]
ΔT	degré de surfusion	[°C]
$\Delta \tau$	pas temporel adimensionnel	
ρ	masse volumique	[kg/m ³]
θ	température adimensionnelle	
θ_m	degré de surchauffement	
τ	temps adimensionnel	
τ_c	durée adimensionnelle de solidification complète	
ϖ	fraction liquide	

Sommaire

Introduction	7
Chapitre I : Changement de phase et contexte industriel du stockage du froid	9
1. Phénomène de changement de phase liquide-solide	10
1.1. Aspect phénoménologique des transformations liquide-solide	
1.2. Variance et règle des phases	
1.3. Corps pur	
1.4. Stabilité d'une phase	
1.5. Equilibre liquide-solide	
1.6. Cristallisation et surfusion	
1.7. Taux de surfusion	
1.8. Théorie de nucléation	
2. Contexte industriel	14
2.1. Pic de demande d'électricité et stockage du froid	
2.2. Etude de cas	15
2.3. L'intérêt national dans le stockage du froid	16
2.4. Stockage du froid par nodules encapsulés	17
2.5. Cuve de stockage du froid	
Chapitre II : Recherche bibliographique	19
1. Historique et formulation classique	20
2. Etude bibliographique	24
Chapitre III : Présentation du modèle physique	43
1. Concept de modélisation	44
2. Formulation enthalpique et l'équation de la chaleur	45
3. Position du problème	46
4. Modèle mathématique	47
5. Forme adimensionnelle du modèle	48
Chapitre IV : Etude numérique et validation du modèle	49
1. Approche numérique	
2. Méthode des volumes finis	50

3. Etude de stabilité	51
4. Enthalpie critique	
5. Durée de solidification complète	
6. Algorithme de calcul	53
7. Validation du code	
7.1. Comparaison avec le modèle de Levent (2005)	
7.2. Comparaison avec le modèle de Ismail (1999) et Ismail (2000)	
7.3. Comparaison avec les modèles de Chou (1971) et de Hill (1983)	
8. Limites du modèle	58
8.1. Le modèle et la fusion	59
8.2. Le modèle et la surfusion	
Chapitre V : Résultats et discussions	59
1. Etude de la solidification d'un <i>MCP</i> initialement à sa température de fusion	
1.1. Evolution du champ de température	
1.2. Champ d'enthalpie	64
1.3. Densité de flux de chaleur échangée à la surface	66
1.4. Evolution du front de solidification	67
1.5. Durée de solidification complète d'une sphère	69
2. Etude de la solidification d'un <i>MCP</i> initialement surfondu ($\Theta_m < 1$)	71
2.1. Evolution du champ de température	
2.2. Champ d'enthalpie	73
2.3. Densité de flux de chaleur échangée à la surface	75
2.4. Evolution du front de solidification	76
2.5. Durée de solidification complète d'une sphère	78
2.6. Retard cumulé au déclenchement de la cristallisation	79
3. Etude de la solidification de l'eau comme <i>MCP</i>	82
3.1 Le processus de cristallisation et la surfusion	
3.2 Les paramètres physiques constants dans l'étude	
3.3 Evolution du front de solidification	
3.4 Durée de solidification complète	85
Conclusion	86
Références bibliographiques	98
Annexe	93

Introduction

En constatant que le pic de demande en énergie électrique est principalement l'œuvre de la climatisation qui consomme trop d'énergie, beaucoup de pays ont investi dans **le stockage du froid par chaleur latente** qui s'effectue généralement dans des heures de basse tarification pour une utilisation différée. Ce choix a donné ses fruits dans plusieurs pays, hormis l'USA le pionnier du domaine depuis 1970 (Del Monaco, 1990), le Japon, la France, la Belgique (Adam, 2003), le Canada, l'Arabie Saoudite (Hasnain, 2000 ; Huraib, 1996), le Kuwait (Sebzali, 2006), et bien d'autres pays (Hasnain, 1998).

En effet, le présent travail se voulait consacré à l'étude de la solidification d'un matériau à changement de phase (*MCP*) contenu dans une capsule utilisée particulièrement dans le stockage du froid par chaleur latente. Dans ce sens, ce mémoire se présente comme étant une étude quantitative aussi bien que qualitative des transferts de chaleur des matériaux à changement de phase liquide-solide confinés dans des capsules de différentes géométries sphérique, cylindrique et rectangulaire dont la taille est de l'ordre du centimètre. Ces capsules sont le siège du stockage du froid correspondant à la solidification du *MCP*.

Une introduction aux phénomènes des changements de phase est présentée en guise de préambule suivie du contexte industriel. Ensuite l'étude bibliographique est présentée avec un historique des développements des études relatives à la solidification d'un *MCP*. La formulation enthalpique est à la base du modèle adopté dans cette étude. Or un modèle de solidification des *MCP* dans des capsules cylindrique et sphérique (Levent, 2005) est repris et développé pour être extensible aussi au cas de géométrie plane. Une validation du modèle dans sa nouvelle version est réalisée par comparaison à d'autres modèles disponibles dans la littérature, puis le présent modèle est utilisé pour l'étude des transferts de chaleur lors de la solidification à l'intérieur d'une capsule (sphérique, cylindrique ou plate) sujette à un flux thermique convectif à la surface. Ceci couvre, en fait, une grande variété des problèmes de la conduction instationnaire accompagnés par un changement de phase liquide-solide. En effet, le problème de changement de phase est fortement non linéaire vu la mobilité du front de changement de phase et la dépendance des propriétés thermophysiques de la température. Cependant, la formulation enthalpique, discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis (*MVF*), permet à vaincre cette difficulté avec une grande conformité entre les prédictions numériques et le phénomène physique.

Chapitre I :
Changement de phase et contexte industriel
du stockage du froid

1. Phénomène de changement de phase liquide-solide

Il est déjà connu que la matière existe en quatre états : solide, liquide, gaz ou plasma¹. Le passage d'un état à un autre est appelé changement de phase qui se traduit par des phénomènes physiques en général complexes. Le changement de phase est accompagné soit de dégagement soit d'absorption de la chaleur qui persiste tant que les deux phases coexistent.

Au cours de cette transition, le corps subit des modifications internes qui ont fait l'objet de très nombreuses études (Dumas, 1990).

Les chaleurs latentes mises en jeu sont souvent très importantes et jouent de ce fait un rôle déterminant dans les transferts de chaleur et de masse. Il suffit, en effet, de faibles variations de températures (autour de la température de changement de phase) pour libérer des quantités de chaleur considérables.

1.1 Aspect phénoménologique des transformations liquide-solide

A priori, nous allons rappeler les différentes lois qui régissent la transformation liquide-solide.

1.2 Variance et la règle des phases

Les lois d'équilibre de phases font intervenir uniquement les variables intensives ou locales du système, ces variables sont typiquement : la température, la pression ou les concentrations dans chaque phase. Signalons que d'autres variables, qui sont aussi nécessaires pour caractériser le système, n'interviennent pas pour définir les conditions d'équilibre. Ce sont les variables extensives ou globales tels que le volume, la masse, les quantités de chaleur produite, ...

La règle des phases permet de calculer la variance w qui est le nombre de variables intensives indépendantes (nécessaires et suffisantes) pour définir les conditions d'équilibre.

$$w = b - d + 2 - \varphi \quad (1.1)$$

Les grandeurs b , d , φ désignent respectivement le nombre de constituants, de réactions chimiques et de phase.

¹ Un gaz extrêmement chauffé

1.3. Le corps pur

Avec un corps pur, à l'équilibre liquide-solide, la formule (1) donne $w = 1$.

Les variables intensives à considérer sont seulement la température (T) et la pression (P), alors, une seule de ces variables est indépendante. Comme, en général, la pression est imposée (*i.e* : la pression atmosphérique), il en résulte que la valeur de la température d'équilibre est imposée par la nature du corps. Ainsi, tant que les deux phases sont en présence, la température restera rigoureusement constante (c'est la température de fusion T_f). Tout stockage ou déstockage du froid, donc, se fera à une température fixe.

1.4 Stabilité d'une phase

Une phase est dite stable dans des conditions de température et de pression données si le transfert de matière spontané vers une autre phase est impossible (Soulimando, 1990).

1.5 Equilibre liquide-solide

Les transitions liquide-solide, pour des corps purs, sont des transformations dans lesquelles les variations isobares de l'enthalpie en fonction de la température suivent l'allure représentée par la figure 1.1.

La phase solide est toujours stable à basse température car c'est celle qui possède les valeurs les plus faibles de l'enthalpie spécifique.

La chaleur latente de fusion L_f représente ainsi la quantité de chaleur qu'il faut fournir au corps pour le faire passer entièrement de l'état liquide à l'état solide, à température et pression constantes.

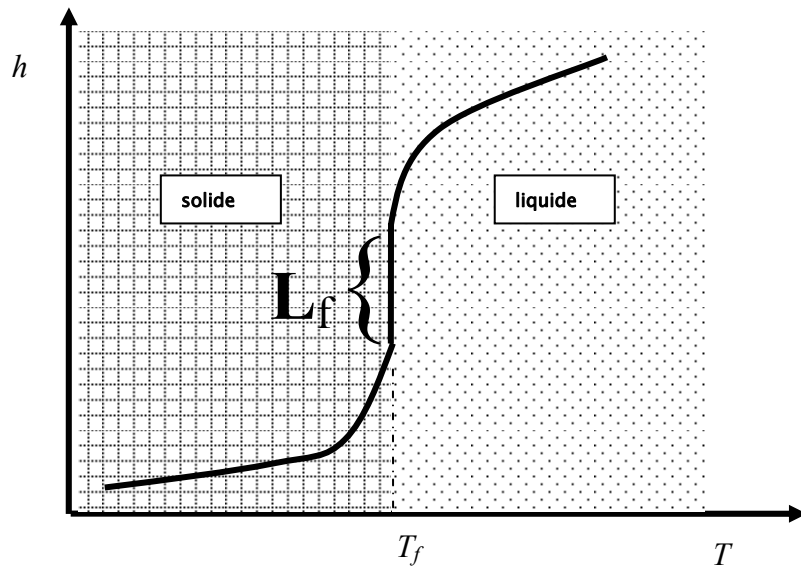


Figure 1. 1 : Enthalpie spécifique d'un corps pur

1.6 Cristallisation et surfusion

En effet, la fusion et la cristallisation ne sont pas deux phénomènes identiques. Au cours d'un réchauffement, on observe toujours l'équilibre liquide-solide. Par contre, lors d'un refroidissement du liquide, lorsque celui-ci atteint la température de fusion T_f , il ne se passe rien. Il est possible d'observer encore le liquide à des températures inférieures à T_f . C'est le phénomène de **surfusion**. Le liquide est dit, alors, **surfondu** ou métastable, cet état peut être maintenu longtemps (des heures ou des jours) et à des températures assez basses (Dumas, 1990).

La cristallisation du liquide surfondu, que l'on nomme aussi rupture de métastabilité est possible de deux manières : soit provoquée par des chocs, des vibrations mécaniques, des ultrasons ou un ensemencement, c'est-à-dire l'introduction d'un petit morceau de cristal préparé par ailleurs, soit spontanée lorsque le refroidissement est suffisant.

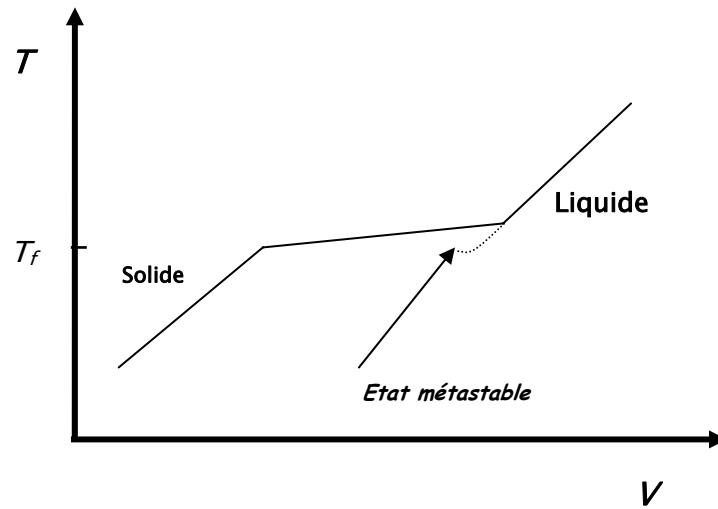


Figure 1.2 : Courbe d'équilibre liquide- solide

Toutefois, on peut imaginer que la rupture provoquée de la surfusion ne sera pas forcément facile à mettre en œuvre et que, en tout cas, elle entraîne une opération supplémentaire à gérer.

1.7 Taux de surfusion

Afin d'évaluer l'importance de la surfusion, on définit le degré de surfusion (ΔT) par :

$$\Delta T = T_f - T^* \quad (1.2)$$

Il représente, donc, le retard à la transition de phase (la différence des températures de fusion et du rupture de métastabilité). En fait, ce degré de surfusion dépend de nombreux paramètres : (1) le volume de l'échantillon : plus le volume est petit, plus le degré de surfusion est grand, (2) la vitesse de refroidissement, (3) le nombre de cycles de refroidissement-réchauffement : d'un cycle à l'autre, il peut y avoir une modification d'ensemble des résultats, (4) la pression : comme pour T_f , il faudrait de très fortes pressions pour détecter une influence notable sur le degré de surfusion.

Pour certains corps, ce n'est pas la phase cristalline habituelle qui apparaît mais une phase cristalline métastable aux propriétés cristallographiques et thermodynamiques différentes. En conséquence, la surfusion se présente comme un inconvénient majeur du stockage du froid.

1.8 Théorie de la nucléation

Les liquides sont constitués de molécules mobiles qui peuvent, au gré de fluctuations, s'assembler pour former des amas de courtes durées de vie dits agrégats fluctuants. On peut néanmoins montrer que, pour les liquides surfondus, ces amas cristallins ne peuvent ensemençer la cristallisation que s'ils ont une taille suffisante dépassant un rayon critique dont la valeur dépend de la température. Autrement dit, il y a une barrière d'énergie à franchir.

Le rayon critique ainsi que la barrière d'énergie à franchir diminue lorsque la température diminue. On comprend aisément que, à suffisamment basses températures, les fluctuations dans le liquide deviennent très efficaces en créant facilement des agrégats de taille surcritique. Le caractère erratique de la rupture de surfusion trouve son explication dans le caractère aléatoire de fluctuations dans le liquide. Ce phénomène de fluctuation, puis d'apparition au hasard d'un agrégat surcritique entraînant la cristallisation de tout échantillon est appelé **nucléation** (Okawa, 2006 ; Ruckenstein, 2005)

En réalité, nous devons envisager deux types de nucléations suivant qu'il y aura apparition de l'agrégat au sein du volume du liquide et, dans ce cas, il s'agira de nucléation *homogène* ou que l'agrégat se formera sur un substrat solide (paroi du récipient, impuretés insolubles ou particules appropriées) et, dans ce cas là, il s'agira de nucléation *hétérogène*.

Il est même possible de trouver des substrats particuliers (par exemple, sous forme de poudre) qui réduisent considérablement le degré de surfusion sans toutefois l'annuler complètement. Il s'agit des agents nucléants. Ainsi, pour l'eau, on peut réduire le degré de surfusion à quelques degrés kelvins pour des échantillons d'un volume supérieur au millimètre cube.

Ces agents nucléants, qui sont souvent des sels insolubles, des protéines ou encore des bactéries, sont assez chers et, même s'ils sont utilisés en faible quantité, leur choix relève souvent du domaine économique.

2. Contexte industriel

La présente étude s'inscrit en effet dans le cadre des applications industrielles de conditionnement d'air utilisant le stockage du froid qui a un rapport direct avec la production et la consommation d'énergie électrique. Donc une introduction à cet aspect industriel s'impose.

2.1 Pic de demande d'électricité et le stockage du froid par chaleur latente

Le pic de demande en énergie électrique laisse le fournisseur perplexe devant le dilemme de soit investir dans la levée de la barre de production, qui coûterait trop chère et aurait des rebonds sur la facture du client, soit importer de l'électricité du voisinage, une mesure qui n'est pas toujours possible.

Dans le but de remédier à ce problème de pic de demande, les fournisseurs d'électricité à l'*USA* avaient offert des prix concurrentiels pour les clients voulant déplacer leur consommation des heures de pointes aux heures creuses (Hasnain, 1998) une résolution qui a propulsé l'usage des installations du stockage du froid.

Donc, le stockage du froid se présente comme étant un moyen très performant pour résoudre le problème du pic de charge, en outre il est une solution stratégique pour le management de l'énergie dans les immeubles. Des telles installations permettent l'établissement d'un équilibre de consommation tout en déplaçant une partie de la demande des heures de pointe aux heures de faible demande, le premier bénéficiaire semble être le fournisseur.

Le fournisseur, donc n'aura plus ces ennuis des équipements qui travaillent sous conditions extrêmes et qui entraînent des problèmes techniques et économiques (maintenance, excès de consommation, ...). De plus, le client sera d'accord avec des factures moins lourdes.

Avec les systèmes conventionnels de conditionnement d'air et de réfrigération, le pic s'accroît davantage d'une année à l'autre, mais l'introduction de ce système de stockage du froid résout immédiatement le problème et encourage sa généralisation.

A propos, et en l'absence de cette technique dans notre pays, on a besoin de mettre en exergue cette efficacité prouvée un peu partout.

2.2 Etude de cas

Aux états unis d'Amérique, la fin des années 1970 a connu une demande accrue de l'énergie électrique, surtout durant la période estivale dont le besoin de climatisation a atteint 1.5 de la consommation ordinaire. Par conséquent des équipements sont immobilisés uniquement pour répondre à cette conjoncture et qui seront mis en arrêt le reste de l'année. Devant cette nouvelle donnée, les ingénieurs

ont commencé les premières expériences sur les *TES*². Ces installations de stockage de l'énergie devaient consommer moins d'énergie que les systèmes conventionnels et coûter moins chères.

Effectivement, les années 1980 ont connu une poussée des installations de stockage du froid sous forme de chaleur latente, les régions où on applique un différentiel considérable des prix du *KWh*, étaient les plus privilégiés par l'utilisation de ces nouvelles techniques. On comptait alors 100 installations en 1985, 200 en 1986, 400 en 1987 et entre 1500 et 2000 en 1995, ...

A *Chicago*, un système de stockage du froid a pu répondre au besoin des 2/3 de la demande conçue pour le conditionnement d'air (Saito, 2002).

L'Arabie Saoudite, le pays qui partage avec l'Algérie beaucoup de points communs dont le pic est de 17 000 MW (60 % uniquement pour le conditionnement d'air). Une étude a permis d'estimer la réduction de ce pic de 10 à 20% si on utilise Le *TES* dans les immeubles commerciaux seulement, sachant que le grand différentiel thermométrique entre le jour et la nuit favorise l'usage de ces installations.

Les conditions socio climato-économiques diffèrent d'un pays à l'autre et le stockage du froid par chaleur latente demeure la résolution économique et environnementale la meilleure.

2.3 L'intérêt national dans le stockage du froid

Avant 1986, le marché d'électricité en Algérie connaît une stagnation sur tous les plans (prix, production, charge, ...). Mais, depuis 1990, avec l'explosion démographique, l'extension des agglomérations, et notamment les réformes économiques engagés alors, la situation n'avait donc que subir des changements radicaux.

Selon un bilan publié en 2004 par le fournisseur d'électricité en Algérie (le groupe Sonelgaz), pour un nombre de clients évalué à 5 356 111, l'Algérie produit 30 885 millions de KWh et vent 25 909 million de kWh (Issad, 2004). Cette énergie n'est pas fournie avec des quantités constantes, faute de ne pas pouvoir la stocker, un fait d'état qui implique la réponse instantanée de la production à la demande qui varie d'une saison à l'autre, le jour diffère de la nuit, même les heures de la journée connaissent un différentiel souvent important.

² Thermal Energy Storage

En effet, la pointe maximale de la demande de la soirée du lundi 27 Juin 2005 a atteint 5096 MW (Bouterfa, 2005), ce qui est dû principalement à la canicule qu'a enduré le pays ces jours-là (en conséquence une forte utilisation des climatiseurs s'est imposée).

Devant cette nouvelle situation, le fournisseur a pensé d'élever sa barre de production qui était de 6000 MW en août 2006. Chose qui ne se passe pas sans alourdir la facture du client. Cependant le pic de demande n'a lieu que 10 jours sur 365 de 18h à 22h.

De plus, le fournisseur a opté pour une politique de sensibilisation des clients en vu de diminuer ce pic de demande alors que l'option du stockage du froid ne vise pas qu'à diminuer seulement le pic de demande mais aussi pour établir un équilibre en déplaçant une grande part de la consommation quotidienne des heures de forte demande aux heures creuses (de faible demande).

Nous signalons que stocker de l'énergie consiste à l'emmagasiner pendant une période où elle est abondante ou moins coûteuse pour l'utiliser pendant une période durant laquelle elle est rare ou plus chère.

2.4 Stockage du froid par nodules encapsulés

Le principe de ce type de stockage est d'utiliser un MCP confiné dans des récipients étanches de petites dimensions (quelques centimètres). Il suffit de les refroidir pour cristalliser leur contenu et de les mettre en contact avec la charge chaude pour le déstockage. Sur un plan industriel, les capsules sont souvent sphériques (figure 1.3), cylindriques ou plates remplissant une cuve qui peut être traversée par un fluide frigoporteur tel que l'eau glycolique (figure 1.4). Lorsqu'on fait traverser la cuve par un liquide suffisamment froid, le MCP à l'intérieur des nodules³ se cristallise, en stockant le froid par chaleur latente, plus tard la cuve est

³ capsules

parcourue par un fluide chaud (température supérieure à la température de fusion), le froid sera ainsi cédé au fluide à refroidir.

2.4.1 Nodules types

Ce sont des nodules qui ont un diamètre de 77 mm ou de 98 mm . Leurs enveloppes sont constituées de polyoléfine d'environ 1 mm d'épaisseur, résistant aux sollicitations mécaniques dans la cuve (écrasement, cycles thermiques, ...).

En sachant que la masse volumique de l'eau (1000 kg/m^3) est plus élevée que celle de la glace (917 kg/m^3), il y a augmentation de volume lors de la cristallisation. À cette raison, les nodules ne sont pas complètement remplis.

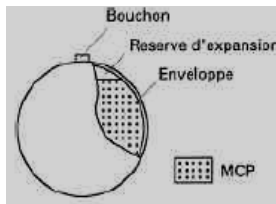


Figure 1.3 : Nodule type

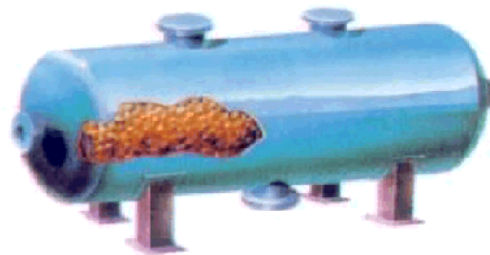


Figure 1.4 : modèle réduit de cuve⁴

2.5 Cuve de stockage du froid

Les cuves cylindriques et calorifugées, peuvent avoir des volumes différents allant de 2 à 100 m^3 , soit de diamètres de 1 à 3 m . Selon le cas, les cuves peuvent être horizontales ou verticales. L'entrée et la sortie du liquide se font à travers des grilles entre lesquels sont placés les nodules afin que le drainage soit uniforme dans la cuve. Ainsi, dans ce paragraphe, on a introduit le contexte industriel du présent travail.

⁴ <http://www.cristopia.com>

Chapitre II
Recherche bibliographique

Que ce soit dans la nature ou dans l'industrie le phénomène de changement de phase liquide-solide est omniprésent. Il est connu chez les thermiciens par le problème à front mobile. En effet, son étude est jalonnée par des travaux phares qu'aucune étude ne peut se faire sans en puiser.

1. Historique et formulation classique

Le problème à front mobile est connu sous le nom de *Stefan* à l'honneur de *Jožef Stefan (1835-1893)* qui étudiait la calotte polaire dans ses travaux publiés en six articles entre 1889 et 1891 (Ayasoufi, 2004).

Un siècle auparavant, le physicien et chimiste *Joseph Black (1728-1799)* qui, par une série d'expériences sur l'eau et la glace à l'université de Glasgow, entre 1758 et 1762, fut le premier à étudier le phénomène. Ses études démontrent que la chaleur sensible est incapable de décrire le changement d'état liquide-solide, et en conséquence, il avait introduit la notion de *chaleur latente*.

Par ailleurs, dans une publication (1822), intitulée : «*La théorie analytique de la chaleur*», le mathématicien français *Fourier* établit la théorie de la conduction thermique. En effet, l'idée d'incorporer analytiquement la chaleur latente dans l'équation de la conduction thermique est apparue pour la première fois en 1831 par le physicien *Gabriel Lamé (1795-1850)* et l'ingénieur mécanicien *Emile Clapeyron (1799-1864)* dans une étude qui présentait une continuité d'un travail entamé auparavant par *Fourier* sur le phénomène de la solidification. Vingt neuf ans plus tard *Franz Neumann (1798-1895)* a pu résoudre un problème similaire.

1.1 La formulation classique

En fait, les travaux de *Stefan*, *Lamé*, *Clapeyron* et *Neumann* sont à la base de toutes études ultérieures des changements de phase liquide-solide.

Dans son étude célèbre sur la calotte polaire, *Stefan* a proposé et résolu le problème suivant :

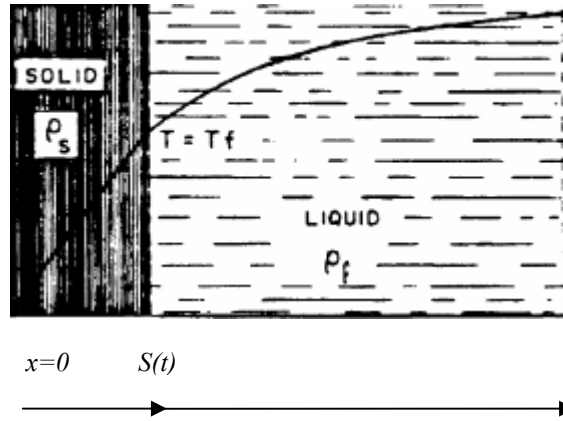


Figure 2.1 : Problème de Stefan

Considérons un demi plan ($x > 0$) constitué d'un MCP où le seul mode de transfert thermique adopté est la conduction. A l'instant ($t=0$) le matériau est à sa température de fusion T_f . La surface est maintenue à une température $T_s < T_f$ (les effets de changement de volume sont négligés). Ce genre de problèmes est appelé problème **monophasique** de Stefan (une phase unique qui est active). Dans le cas où T_i (initiale) $> T_f$, ce même problème recevra le nom de problème **biphasique** de Stefan (deux phases y sont en développement).

Ainsi, la formulation mathématique est écrite :

Pour la région solide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{pour } x < s(t) \text{ et } t > 0 \quad (2.1)$$

Pour la région liquide :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{pour } x > s(t) \quad (2.2)$$

α_s et α_l sont les diffusivités thermiques du matériau respectivement à l'état solide et liquide et $s(t)$ la position de l'interface.

La condition à la surface :

$$T(s(t), t) = T_s \quad (2.3)$$

La condition de Stefan ou le bilan énergétique à l'interface :

$$\rho L_f \frac{dX(t)}{dt} = -k_L \frac{\partial T}{\partial x}(X(t), t) + k_s \frac{\partial T}{\partial x}(X(t), t) \quad (2.4)$$

La condition initiale :

$$T(x,0) = T_f \quad x > 0 \text{ et } s(0) = 0 \quad (2.5)$$

Et la condition à la limite spatiale :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = T_s \quad (2.6)$$

Où T , t , et x sont respectivement la température, le temps et la coordonnée spatiale. L_f , ρ et k sont respectivement la chaleur latente de fusion, la masse volumique et la conductivité thermique.

Sous certaines hypothèses cette formulation classique pourrait avoir une solution exacte, qui servira, d'une part à la compréhension des phénomènes de changement de phase, et d'autre part à la validation des solutions approchées des problèmes plus compliqués.

Mais, les solutions analytiques ne sont possibles que sous des conditions restrictives :

- ✓ géométrie semi infinie
- ✓ température initiale constante.
- ✓ température imposée à la surface
- ✓ propriétés thermophysiques constantes dans chaque phase.

Cette formulation peut, encore, être appliquée à deux ou trois dimensions sans espérer encore une solution analytique, de même pour un problème monodimensionnel, en présence d'une source de chaleur, ou une température de fusion variable, qui génère une région pâteuse rendant la formulation inadéquate.

Heureusement, au début des années 1960, une méthode plus générale appelée la méthode **enthalpique** a été développée et adaptée aux problèmes impliquant une source de chaleur.

Si, cette méthode est, donc, un outil très utile. Mais les problèmes réels n'ont toujours de chance qu'avec des approches numériques.

La littérature rapporte que le premier chercheur ayant résolu numériquement le problème de solidification dans une capsule est Tao en 1967. Ses résultats ont servi comme référence pour beaucoup de travaux.

En 1970, Cho et Sunderland ont présenté un terme correctif ajouté à la solution des problèmes de solidification sphérique pour être appliquée à la géométrie plane,

leurs résultats étaient très satisfaisants surtout pour un nombre réduit de *Stefan*⁵. Les auteurs ont supposé une température à la surface variable avec le temps et un liquide initialement à sa température de fusion.

Pour les mêmes hypothèses de Tao, Shih et Chou (1971) ont résolu par une méthode analytique itérative un problème de solidification sphérique.

Pedrosso et Domoto (1973) ont utilisé la technique des perturbations pour un problème de solidification d'un liquide saturé avec une température constante à la surface.

En utilisant la même technique (perturbations), un problème de solidification sphérique que cylindrique d'un liquide saturé pour un grand nombre de *Stefan* a été résolu par Riely et ces collaborateurs (1974).

La même étude est reprise par Huang et Shih une année plus tard (1975) en utilisant la transformation de *Landau*⁶.

Date (1976) a montré le bon accord de la méthode enthalpique avec un schéma explicite et la méthode intégrale.

Dans une autre étude expérimentale et analytique des transferts thermiques associés au changement de phase liquide-solide, dans différents matériaux considérés comme susceptibles d'être utilisés dans le stockage d'énergie thermique, Hale et Viskanta (1980) ont déterminé le mouvement de l'interface solide-liquide pendant le refroidissement et la fusion, aussi bien par dessus que par dessous, dans une cellule rectangulaire. De plus, la durée de la solidification et de la fusion d'un *MCP* soumis à une température constante à la surface a été étudiée (Voller, 1981).

Les performances des échangeurs accumulateurs de chaleur utilisant des matériaux à changement de phase sont limitées par leur puissance à la décharge. L'objet d'une étude est de souligner l'influence de la cinétique de croissance cristalline et de la surfusion sur la puissance de décharge de ces accumulateurs (Sauzade, 1985). Le comportement d'une couche du *MCP* représentatif des sels hydriques est étudié en prenant en compte ou non la cinétique de croissance

⁵ Le rapport de la chaleur sensible à la chaleur latente

⁶ Elle fait apparaître un paramètre pour repérer la position de l'interface solide-liquide

cristalline. Le modèle présenté utilise la méthode enthalpique et conduit aux résultats classiques observés dans le cas de substances de grande pureté chimique. Il met en évidence les différences observées lorsqu'on utilise des produits techniques, où des mélanges, dans des conditions purement thermodynamiques. Les résultats sont comparés et analysés à l'aide des nombres sans dimension Ste , Bi , Fo et Sol (nombre de **solidification** qui gouverne la cinétique de croissance cristalline). Le modèle peut être adapté aux cristallisations induites après surfusion ; deux exemples de ce processus sont examinés.

La méthode enthalpique est appliquée, encore une fois, sur le phénomène de fusion par contact en remplacement à l'approche quasi stationnaire qui n'était pas commode dans le cas de la dépendance de la température de la surface au temps (Hiki, 1993).

2. Etude bibliographique

Dans une publication, Mohan (1975) a étudié la solidification et la fusion naturelle du sol en Alaska et a montré la possibilité de traiter des problèmes de changement de phase liquide-solide avec la méthode des éléments finis. Son code de calcul a été validé par comparaison à la solution exacte de *Neumann*.

Un modèle plus général peut être appliqué à des matériaux transparents, semi transparent ou opaque avec une source radiative interne est proposé (Chan, 1983). Ce modèle décompose le milieu étudié en trois couches : solide pur, liquide pure et une couche mixte de deux phases (région pâteuse), en sorte que le modèle classique (de *Stefan*) est considéré comme un cas particulier du modèle proposé : la couche mixte tend à disparaître en l'absence de la source thermique.

Une solution semi analytique est proposée pour la formulation adimensionnelle classique appliquée à un *MCP* confiné dans une sphère initialement à sa température de fusion T_f ; le refroidissement est assuré par un réfrigérant de température constante T_∞ (Hill, 1983). Il est supposé que les propriétés thermophysiques du matériau sont constantes et que le volume n'est pas affecté par le changement de

phase. Les résultats obtenus sont très satisfaisants en les comparant aux deux publications précédentes (Tao, 1967 ; Shih, 1977).

L'effet de la paroi ainsi que la source de chaleur sur la solidification et la fusion d'une plaque d'un matériau à changement de phase piégé entre deux parois semi infinies est étudié à travers une formulation classique adimensionnelle résolue par la méthode de collocation. Les auteurs ont conclu que tant que le flux de chaleur généré par la source interne n'est pas nul, la solidification ne sera jamais complète (Cheung, 1984). D'ailleurs, des expériences menées ont permis de déterminer le développement instantané de la forme géométrique du noyau solide en cours de fusion par contact à l'intérieur d'un tube cylindrique en cuivre et isotherme (Beer, 1984). En parallèle, les auteurs ont fourni une solution analytique approchée au modèle qui se base sur un bilan de forces de gravitation du noyau solide d'une part et de pression du liquide du dessous d'autre part. Cependant, la théorie avait négligé la variation de la densité du MCP à tel point qu'on supposait que le noyau solide resterait dans le centre au cours de la fusion, ce qui n'est pas le cas naturellement. L'étude a révélé que seul 10 à 15% du solide fond de l'interface supérieure.

Avec la même technique et une hypothèse de négliger la fusion du solide d'en haut, on a présenté une solution analytique approchée du problème de la fusion d'un MCP confiné dans une sphère isotherme (Bahrami, 1987).

Une extension de ce dernier travail était l'œuvre de Roy (1987) qui a présenté un modèle pour décrire la fusion à l'intérieur d'une sphère isotherme, une solution analytique, prévoyant le contrôle de la fraction fondue du MCP, est en accord avec l'expérience. Un exemple de problème à solution analytique est donné (Delauny, 1990). Il s'agit du problème de *Neumann* de la solidification d'un milieu semi-infini initialement à une température constante $T_i > T_f$ et dont la température de la surface est subitement portée à une certaine température inférieure à celle de fusion.

Dans le cas particulier où le liquide est initialement à la température de fusion ($T_i = T_f$), le front de solidification est formulé par :

$$s(t) = \left(\frac{2k_s T_f}{\rho_s L} \right)^{0.5} \sqrt{t} \quad (2.7)$$

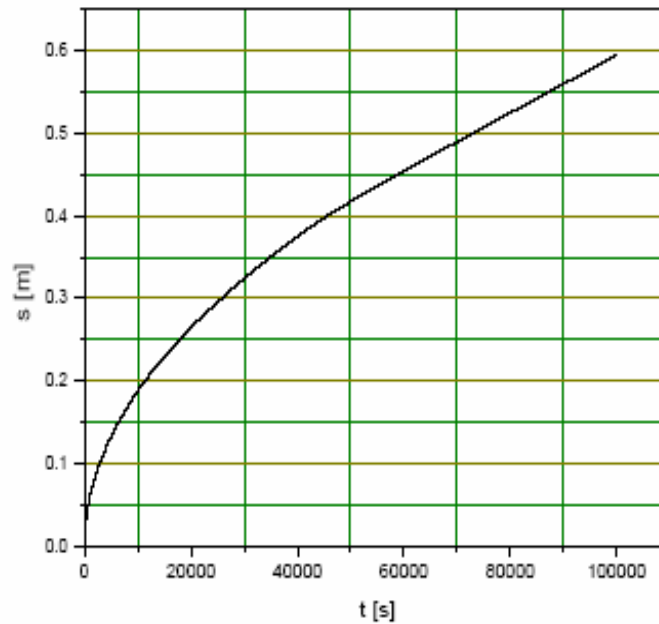


Figure 2.2 : Déplacement du front de solidification

Bénard (1990), en plus, a montré la possibilité de traiter les problèmes de changement de phase à l'aide des techniques du traitement du signal par une méthode appelée la méthode inverse. La convection naturelle dans la phase liquide peut apparaître dès lors que les gradients de températures créent des variations de densité dans le milieu, et donc les forces de volume permettent l'apparition d'un écoulement naturel. Une analyse de ce phénomène est présentée (Gobin, 1990).

Une étude d'un module de capsules a révélé que l'utilisation des MCP de différentes températures de fusion dans une batterie améliore davantage la performance de l'installation (Watanabe, 1993).

Par ailleurs dans une étude sur le plasma d'un arc de soudage, Nehad (1995) a utilisé la méthode enthalpique pour modéliser la conduction thermique associée au changement de phase dans le cas de la dépendance non linéaire de la conductivité thermique et la chaleur spécifique à la température. En utilisant un maillage fixe, il a étudié l'espace inter-nœuds et le pas temporel et ses effets sur la méthode, pour un pas temporel de $0,08$ s, il a pu avoir une stabilité des résultats et a signalé qu'au delà de ce pas, la tentative ne fait qu'augmenter le nombre d'itération inutilement.

A l'occasion du centenaire de Stefan, sa biographie et ces travaux accompagnés d'un historique des études antérieures des changements de phases solide-liquide font l'objet d'une publication de son compatriote Bolidar Sarler (1995).

D'ailleurs, des problèmes impliquant une variation alternée de la température d'une surface donnée autour du point de la fusion peuvent engendrer la présence de couches solide et liquide en alternance, un phénomène qui a attiré les chercheurs tels que Yu (1995). Pour formuler ce genre de problèmes dans une géométrie cylindrique où la surface extérieure est adiabatique alors que celle intérieure est exposée à un flux de coefficient d'échange h tantôt chauffant ($T_b > T_f$), tantôt réfrigérant ($T_b < T_f$). L'auteur a considéré une couche j de température T_j dans laquelle le seul mode de transfert thermique retenu est la conduction :

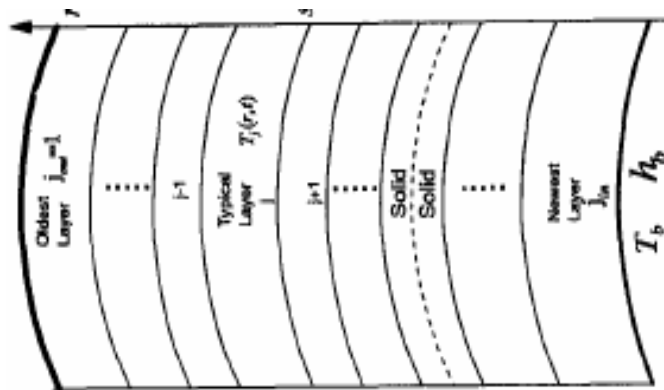


Figure 2.3 : Couches alternées solide et liquide (Yu, 1995)

La méthode enthalpique avec un schéma implicite des volumes finis est rendue transposable pour un phénomène de changement de phase à très haute température (aux environs de $500\text{ }^{\circ}\text{C}$) dans une sphère de 4 cm de diamètre, avec une petite différence sur la condition à la surface. Ce qui se traduit par un échange convecto-radiatif (Yagi, 1995).

La recrudescence des chercheurs sur le stockage du froid surtout celui utilisé dans le conditionnement d'air est à l'origine des études théoriques et expérimentales à l'image de celle menée par Bédécarrats et ses collaborateurs (1996) :

Une cuve verticale modèle réduit de celle industrielle, remplie de nodules sphériques, fait l'objet d'expériences en vue de déterminer les paramètres influant le processus de stockage et déstockage du froid (figure 2.4).

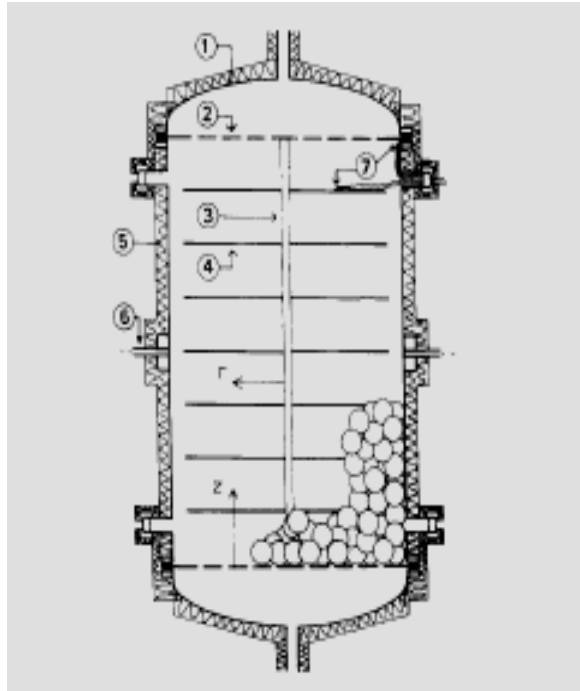


Figure 2.4: Cuve verticale de stockage du froid
(Bédécarrats, 1997)

- 1-couvercle amovible 2- diffuseur 3- axe vertical
4- barre horizontale 5- isolation 6- axe rotatif
7- thermocouple

Durant le processus du refroidissement continu avec une stabilisation programmée, et à l'aide de thermocouples placés sur différents niveaux comme il est montré dans la figure suivante, un suivi de l'évolution de la température permet de révéler des paliers indiquant le déclenchement et la fin de la cristallisation à une température encore inférieure à la température de solidification ($0^{\circ} C$ dans ce cas), bien qu'on a utilisé des agents nucléants, le degré de surfusion est évalué à $2.5^{\circ}C$.

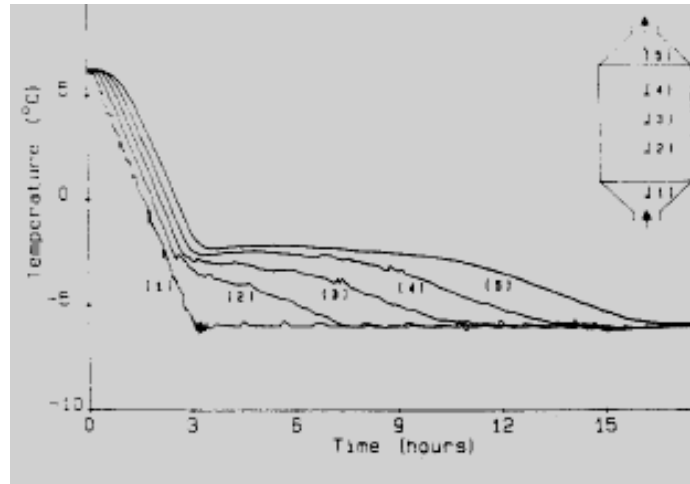


Figure 2.5 : Evolution de la température de différents niveaux de la cuve, (Bédécarrats, 1997)

Le choix du flux ascendant du fluide frigoporteur est expliqué par l'intérêt d'avoir un mode de convection direct autour des nodules (*i.e* la convection naturelle et forcée ont le même sens).

Il est évident que le paliers devient de plus en plus long dans le sens croissant des hauteurs, ce qui est expliqué par :

La solidification des premiers niveaux, accompagnée par une forte absorption des frigories, rend le processus d'autant plus lent aux niveaux les plus haut.

Une solution numérique d'un modèle général de changement de phase est donnée (Fikiin, 1996). Le modèle couvre une variété de problèmes de conduction instationnaire accompagnée de changement de phase. Le modèle mathématique est développé pour déterminer le champ de température ainsi que le champ d'enthalpie du MCP de différentes géométries, le déplacement du front de changement de phase liquide-solide fait partie également de la solution.

Une formulation enthalpique est proposée pour éliminer la non linéarité due au dépendance des propriétés thermophysiques à la température tout en faisant apparaître une relation liant l'enthalpie spécifique H à une fonction appelée la fonction de *Kirchhoff* E définie par :

$$E(t) = \int_{T_m}^T k(t) dT$$

Où k est la conductivité thermique du MCP.

Par un modèle simple de haute conformité avec le phénomène physique, une approche quasi monodimensionnelle et un schéma explicite des différences

finies, l'auteur a pu traiter un problème fortement non linéaire tout en passant d'une fonction discontinue de la chaleur spécifique à une fonction continue de l'enthalpie spécifique et d'une conductivité non linéaire à une fonction linéaire E.

La formulation enthalpique se présente comme étant une **méthode très recommandée** et fiable pour les problèmes thermiques.

Une autre méthode analytique basée sur le bilan thermique et les séries de Fourier dans chaque phase entre deux instants successifs est proposée pour la description du déplacement de l'interface liquide-solide et le calcul de la durée de solidification complète (Royon, 1997).

D'autres expériences sur la cristallisation des nodules isolés bien qu'en lot dans un bain statique ont permis de préciser la nature et l'importance de la surfusion et le caractère erratique des cristallisations (Bédécarrats, 1997). Le modèle, confirmé par les résultats expérimentaux, est basé sur l'équation de la chaleur et la théorie de la nucléation. En fait, les nodules sont considérés comme un puit d'énergie thermique.

La figure suivante montre un nodule, sujet d'étude, sur lequel on a monté des thermocouples permettant l'enregistrement des températures aux niveaux correspondants.

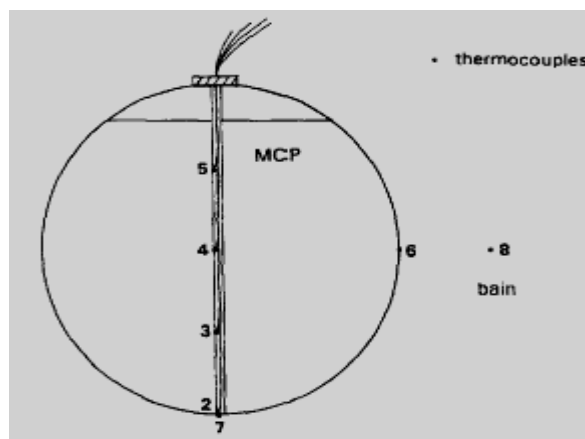


Figure 2.6 : Positions des thermocouples à l'intérieur et sur le nodule (Bédécarrats, 1997)

Pour un refroidissement continu à raison de $-4^{\circ} C$ par heure, les thermocouples donnent :

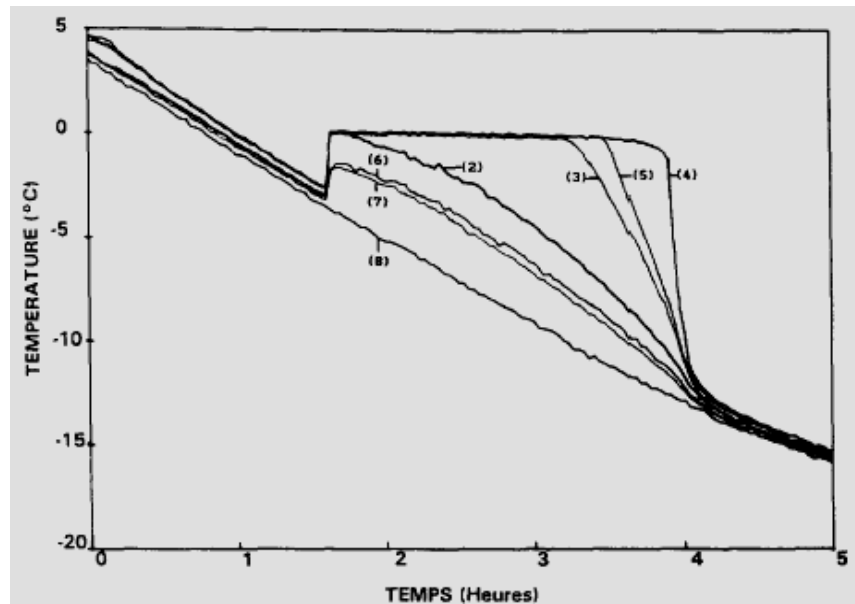


Figure 2.7 : Températures aux différentes positions du nodule lors d'un refroidissement continu (Bédécarrats, 1997)

La température du liquide est en baisse continue jusqu'au début de la cristallisation où elle remonte instantanément à la température de changement d'état (0°) pour rester constante. A la solidification de la dernière goutte, la température du nodule reprend l'allure décroissante pour aboutir à un équilibre thermique avec le bain. Le caractère erratique où stochastique de la cristallisation est illustré par :

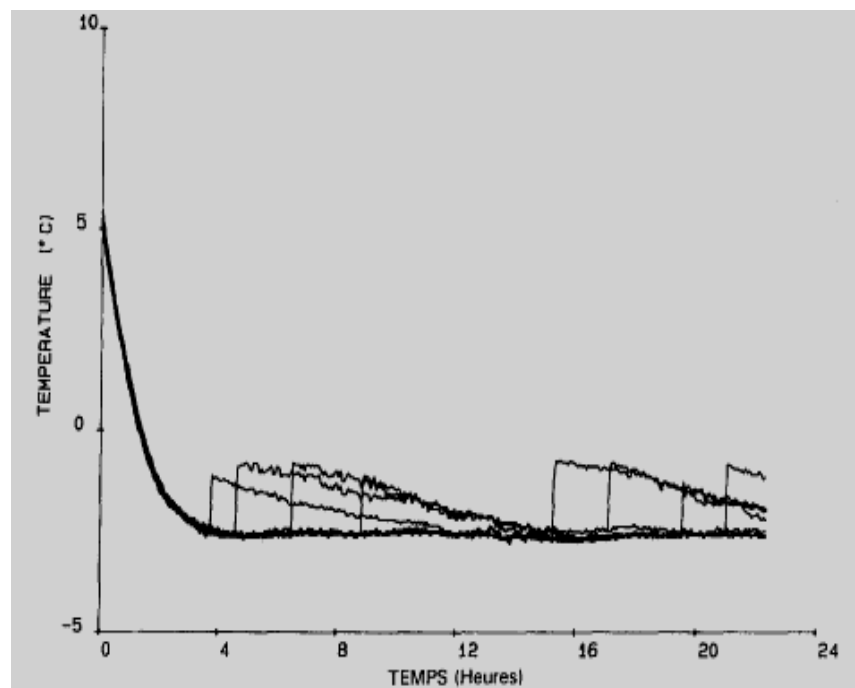


Figure 2.8: Températures externes de plusieurs nodules au cours d'un refroidissement (Bédécarrats, 1997)

Une autre manipulation, cette fois-ci un lot de nodules subit un refroidissement continu. Il est évident que le processus de cristallisation diffère d'un nodule à l'autre, bien qu'ils sont soumis aux mêmes conditions. On remarque que le premier nodule commence à cristalliser après 4 heures alors que le cinquième observera un retard de 8 heures, ce retard peut être expliqué par la chaleur dégagée par les premiers nodules qui commencent à se solidifier. Pour une géométrie plane, le stockage thermique et ces performances avec et sans ailettes intérieures est analysé (Costa, 1998).

L'auteur a présenté deux modèles : un modèle monodimensionnel qui tient compte de l'effet de la convection thermique dans la fraction liquide.

Et un autre modèle bidimensionnel qui ne considère que la conduction comme mode unique de transfert thermique. En terme de conclusion l'auteur a mis en évidence la performance thermique apportée par l'ajout des ailettes.

Pendant le processus de charge d'un système de stockage du froid, on a étudié la surfusion et la probabilité de nucléation de l'eau (Chen, 1998), les facteurs explorés sont le flux frigorifique, le diamètre de la capsule (cylindre) et la quantité des agents nucléants. Au terme de cette étude expérimentale, on a tiré les conclusions suivantes : la probabilité de nucléation est inversement proportionnelle à la température du réfrigérant et proportionnelle à la quantité des additifs nucléants. De plus, la température de nucléation augmente avec le volume de la capsule.

Dans le but d'étudier l'influence de la géométrie et les paramètres opérationnels sur un système de stockage du froid (Ismail, 1999), l'auteur a présenté un modèle décrivant le processus de solidification dans des capsules minces inclus dans une cuve calorifugée. Le modèle est une formulation classique de Stefan, il est validé expérimentalement et par comparaison à une solution exacte,

Pour la résolution du modèle, l'auteur a utilisé la méthode des différences finies avec un maillage fixe, les résultats peuvent se présenter comme :

La figure suivante rapporte le développement de la masse solidifiée au cours du temps. Il est évident qu'après un certain temps l'allure devient quasi linéaire.

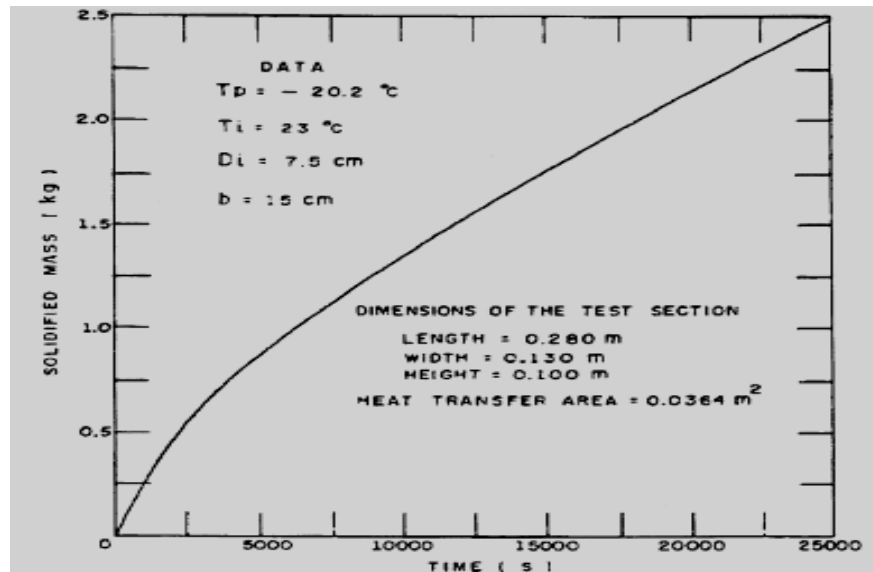


Figure 2.9 : Fraction solidifiée en fonction du temps (Ismail, 1999)

La figure 2.10 montre la variation de l'énergie stockée en fonction du temps et surtout l'importance de la chaleur latente qui domine les échanges :

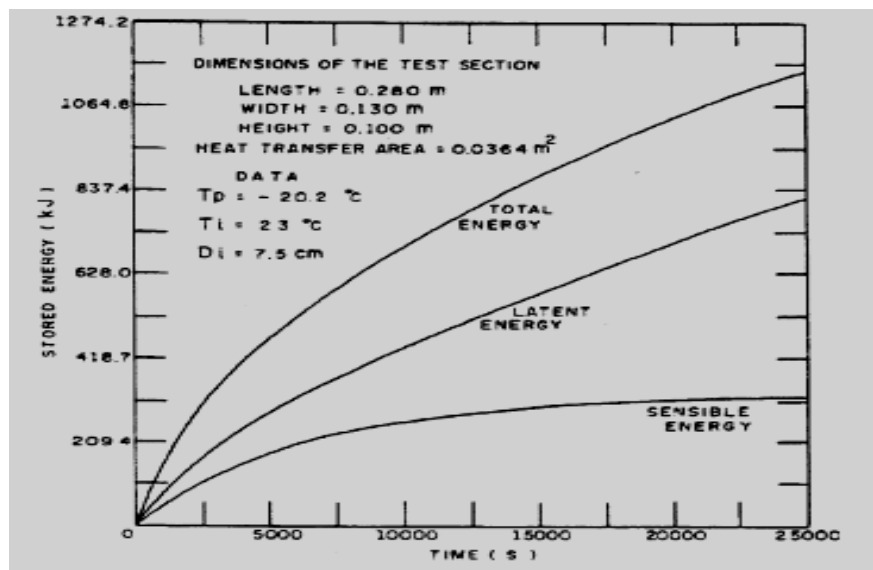


Figure 2.10 : Energie stockée en fonction du temps (Ismail, 1999)

L'effet de la température de la paroi sur la durée de la solidification complète pour différentes températures initiales est très important pour les dix premiers degrés au-dessous de la température de la fusion, puis cette importance commence à diminuer sensiblement.

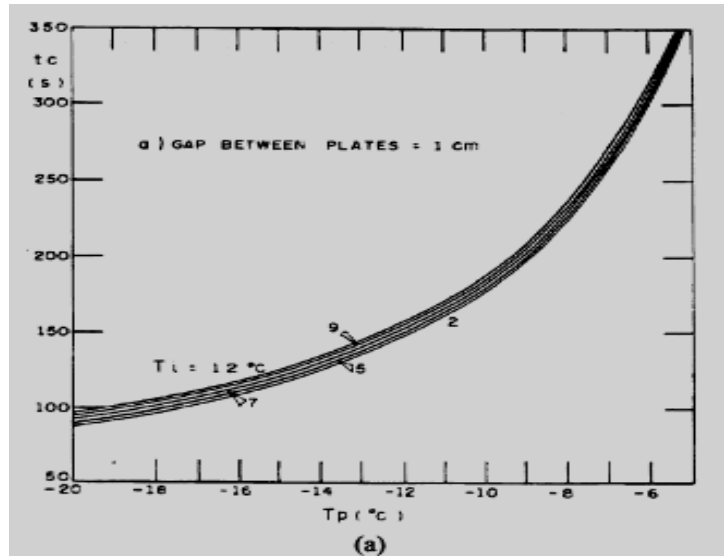


Figure 2.11 : Effet de la température de la paroi sur la durée de la solidification complète pour différentes températures initiales (Ismail, 1999)

L'effet de la diffusivité thermique du moule sur la forme du front de solidification fait l'objet d'une étude expérimentale (Tan, 1999). Les résultats sont illustrés par les deux photographies prises au cours du processus de cristallisation.

On a remarqué :

- La forme géométrique du front est parallèle à celle du moule cylindrique pour le cas du cuivre, due à la très bonne diffusivité de ce dernier (figure 2.12).

- Par contre pour un moule en acier de faible diffusivité thermique, le front de solidification est sous forme de 'U', dû à la lenteur du transfert thermique provoquant un gradient axial de température (figure 2.13).

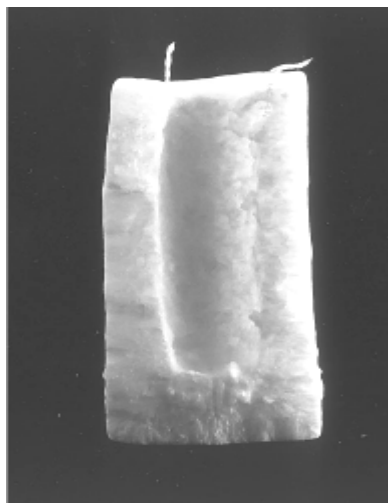


Figure 2.12 : Solidification dans un cylindre en cuivre (Tan, 1999)

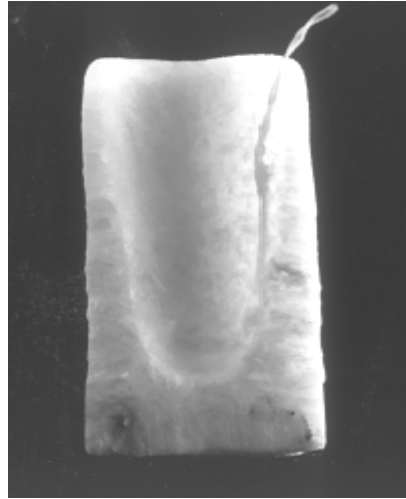


Figure 2.13 : Solidification dans un moule en acier (Tan, 1999)

Une autre contribution s'ajoute (Chen, 1999) pour mieux comprendre le phénomène de la nucléation, on a conclu à travers une série d'expériences que :

- ✓ plus que l'échantillon est grand plus grande est la température de nucléation.
- ✓ la température du frigoporteur et la probabilité de nucléation sont inversement proportionnelles.

D'autre part, Zuca (1999) a utilisé la méthode des perturbations pour résoudre le problème de solidification d'un *MCP* rectangulaire en présence de la convection thermique, une approche qui s'est avérée en bonne conformité avec les expériences menées par les mêmes auteurs.

L'agroalimentaire est un domaine dans lequel le refroidissement trouve ses applications, comme celui de la congélation des crèmes glacées, ou le plus fort tonnage des denrées congelées consommées est en France. Le contrôle de la taille moyenne des cristaux est formulé, grâce à un modèle de *Neumann*, l'auteur a montré que la taille moyenne des cristaux diminue avec l'augmentation de la vitesse de congélation d'une part et proportionnelle à la racine carrée de la distance à la surface de refroidissement d'autre part (Faydi, 2000).

Ismail (2000), dans une autre contribution, a présenté une étude numérique du problème de solidification d'un *MCP* dans une sphère et a étudié l'influence du rayon intérieur de la capsule, son épaisseur, ainsi que la température externe sur le processus de solidification. Son modèle, ne tient compte que de la phase solide. En fait, cette publication est riche en matière d'informations quantitatives, néanmoins,

on se contente à présent de présenter l'effet de la température du fluide loin de la surface de l'enveloppe ainsi que son épaisseur pour différents matériaux.

L'analyse de l'effet de l'épaisseur nous mène tout d'abord à introduire le rayon critique défini comme $r_c=k/h$ qui représente une valeur au delà de laquelle la taille de la sphère et le flux seront inversement proportionnels, contrairement au comportement subcritique.

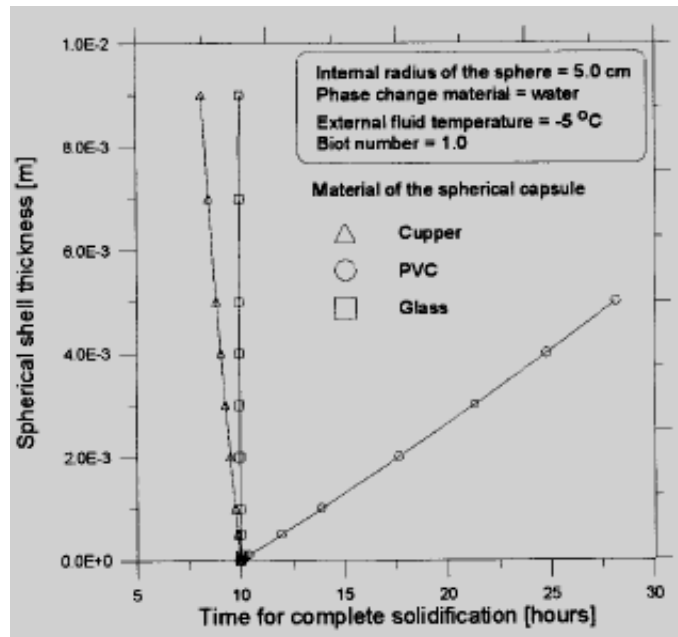


Figure 2.14 : effet de l'épaisseur de l'enveloppe sur la durée de solidification complète (Ismail, 2000)

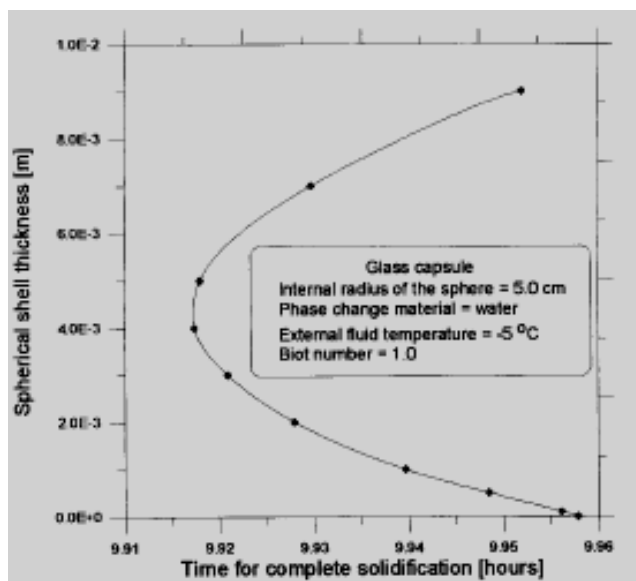


Figure 2.15 : Epaisseur d'une enveloppe en verre et la durée de solidification complète (Ismail, 2000)

La méthode intégrale est utilisée (Cadwell, 2000) pour résoudre le problème monophasique de Stefan dans une géométrie sphérique. En effet, cette méthode intégrale, qui a été appliquée dans les problèmes de changement de phase pour la première fois par *Goodman* en 1958, consiste à supposer des profils de températures dans des subdivisions du domaine. L'intégration de l'équation de la chaleur sur chaque sous-domaine donne un système d'équations numériquement traitable. L'auteur a conclu que l'application de la méthode intégrale à des problèmes biphasiques de Stefan est très difficile contrairement à la méthode enthalpique.

En outre, on a étudié expérimentalement l'effet de la température d'entrée et le nombre de Reynolds du fluide frigoporteur sur la durée de charge des capsules sphériques remplies d'un MCP (Choi, 2000). L'auteur a montré que plus que la température du fluide à l'entrée est basse plus que la durée de charge est courte. Le nombre de Reynolds s'est avéré inversement proportionnelle à la durée de solidification complète, comme il est indiqué par la figure ci-dessous:

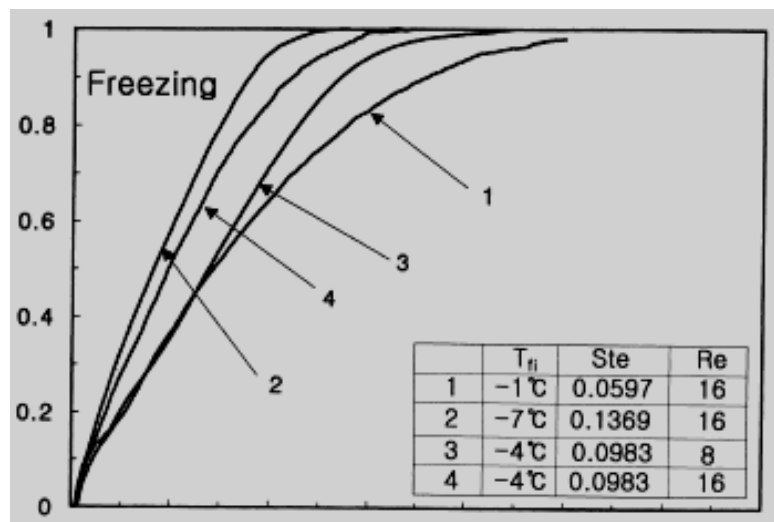


Figure 2.16 : Effet de température d'entrée et du nombre de Reynolds (Choi, 2000)

Les performances d'un système de stockage conçu pour le conditionnement d'air utilisant des capsules minces sont analysées théoriquement (Vakialtojjar, 2000), l'auteur a suggéré que l'épaisseur des capsules soit plus petite pour donner des températures de sortie les plus basses.

Une formulation enthalpique discrétisée par l'approche des volumes finis est appliquée à la solidification dans des capsules minces et cylindriques, validée par un

test expérimental (Zivkovic, 2001). L'expérience a confirmé la validité des hypothèses suivantes :

- ✓ La conduction le long de la capsule (direction d'écoulement) est négligeable.
- ✓ La résistance thermique des capsules peut être négligée à condition que l'épaisseur ne soit pas importante.

L'étude qualitative du phénomène de solidification se poursuit (Hozumi, 2002) pour montrer l'effet des bulles d'air qui accompagnent la cristallisation de l'eau. En fait, on a conclu que la probabilité de nucléation est plus grande dans le cas d'une surface libre exposée à l'atmosphère comparée à une surface couverte d'huile et ce, suppose l'auteur, est dû aux bulles d'air libérés lors de la cristallisation qui sont dans le cas d'une surface libre dégagée dans l'ambiance alors que dans le cas de la surface couverte ces bulles se trouvent piégées à l'interface eau-huile.

Cette étude a révélée que le mode inverse de convection conduira à la disparition de la couche limite autour de la surface de la sphère.

Une autre étude expérimentale menée a permis de déterminer l'efficacité des additifs sur la performance d'une unité de stockage du froid, des conclusions conséquentes en sont tirées (Bédécarrats, 2002): La surfusion n'a lieu que si le déstockage précédent est complet.

- ✓ Certains additifs perdent leur efficacité aux cours des cycles.
- ✓ Les additifs permettent de diminuer la surfusion mais pas l'annuler.
- ✓ La disparition de la surfusion permet d'obtenir une meilleure symétrie entre les phases de stockage et déstockage

Dans le cas des ondes de faible densité, il s'est avéré que seulement dans le cas de la présence d'une surface métallique en contact avec l'eau qu'il y en a un effet. Cela ouvre automatiquement une autre voie de recherche pour établir la relation entre la surface métallique et la nucléation.

Effectivement, un chemin pris par Okawa (2002) pour nous faire apprendre que l'oxydation de la surface métallique empêche l'eau surfondue de se solidifier.

Cependant, Cabeza (2002) a suggéré que la conductivité à l'intérieur du MCP peut être fortement améliorée en ajoutant des pièces métalliques de forte conductivité thermique tels que le cuivre ou des matrices composites de graphite.

Encore, une autre étude expérimentale, Eames (2002) nous aide à mieux comprendre le phénomène de solidification. Un nodule rempli d'eau à 80% est menu d'un manomètre enregistrant la pression à la surface libre de l'eau.

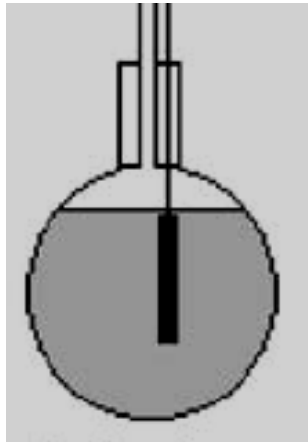


Figure 2.17 : Nodule sous test (Eames, 2002)

Les résultats (figure 2.18) révèlent une discontinuité dans la pression de l'air réservé à l'expansion de l'eau.

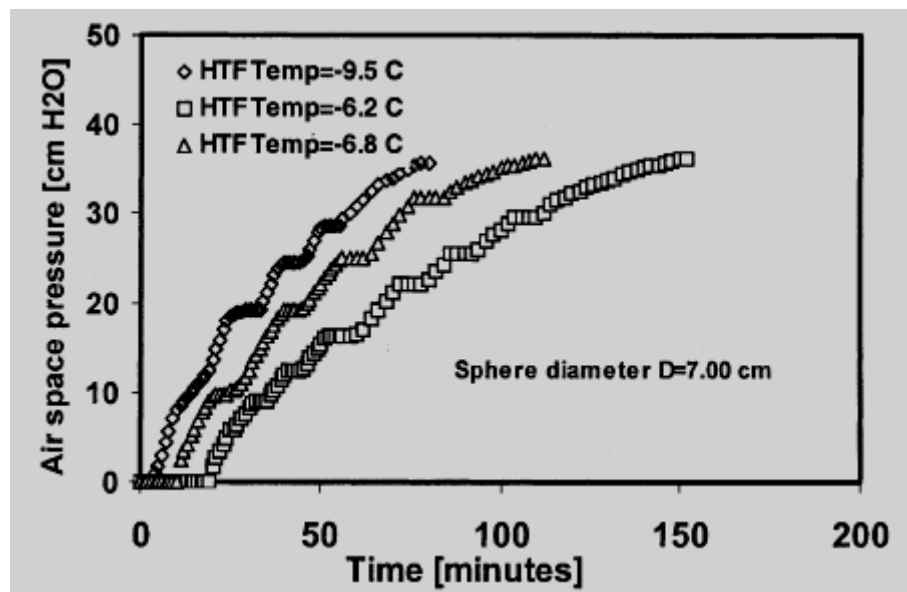


Figure 2.18 : Evolution de la pression de l'air d'expansion (Eames, 2002)

Cette discontinuité est expliquée par la formation d'une couche de glace qui sera aussitôt détruite sous l'effet de l'eau siégée et pressée par la poussée du front de

solidification. Ce phénomène se répète jusqu'à la solidification complète de l'échantillon.

Dans un des modèles les plus récents de la solidification sphérique, Wu (2002) a introduit la notion de la tension superficielle de *Gibbs Thomson* qui détermine la température. De plus, l'auteur a utilisé la transformation de *Landau* pour repérer la frontière mobile. Cette transformation fait apparaître un paramètre adimensionnel :

$$\eta = \frac{1-r}{1-s(t)} \quad (2.8)$$

Ainsi, il sera plus facile de contrôler la position de l'interface.

Ismail encore dans une autre contribution (2003) a étudié quelques paramètres influant la durée de la solidification complète d'un *MCP* dans une sphère. Il a fait conclure que cette durée est proportionnelle à la taille de la sphère (figure 2.19).

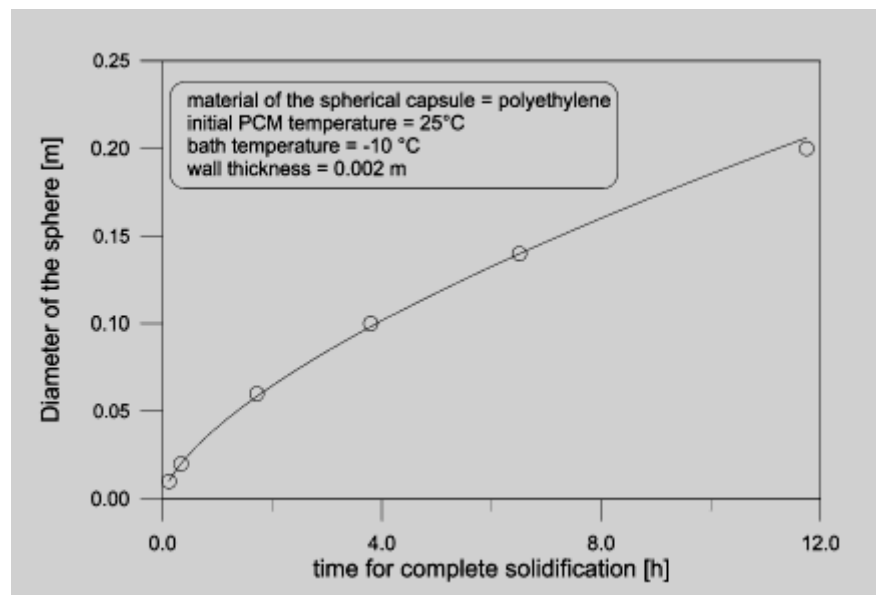


Figure 2.19 : Relation entre la durée de solidification complète et le diamètre de la capsule, (Ismail, 2003)

Cette étude a permis aussi de justifier le choix d'une enveloppe non métallique, car bien que la conductivité des métaux est très élevée, son utilisation comme enveloppe ne peut réduire la durée de solidification complète que par 30 minute environ.

Une méthode appelée *capacité thermique effective* (Lamberg, 2004) consiste à exprimer, lors du changement de phase, la capacité thermique du MCP en fonction du degré de surfusion ΔT :

$$C_{eff} = \frac{L}{\Delta T} + C_p \quad (2.9)$$

Ainsi la chaleur spécifique du MCP prendra trois expressions selon la valeur de la température :

$$C_p = \begin{cases} C_s, & T < T^* \\ C_{eff}, & T^* < T < T_f \\ C_l, & T > T_f \end{cases} \quad (2.10)$$

Où T^* est la température du début de nucléation. Cette méthode de capacité thermique est aussi puissante que la méthode enthalpique.

Avec la méthode intégrale, Roday (2004) a étudié la solidification d'une géométrie plane sous deux conditions initiales (liquide saturé et surfondu). L'influence du nombre de Biot a été discutée. En terme de conclusion, l'auteur a signalé que si le MCP a différentes conductivités thermiques pour les deux phases, les deux processus solidification et fusion auront différents comportements même sous des conditions similaires.

Levent (2005) dans un article a établi des corrélations de la durée de solidification sphérique ainsi que cylindrique d'un MCP en fonction des trois paramètres adimensionnels (nombre de Stefan, nombre de Biot et degré de surchauffement). L'auteur a utilisé la méthode enthalpique et les volumes finis où il a dû explorer des gammes de valeurs allant de : 0.01 à 0.5 pour le nombre de Stefan, 1 à 50 pour le nombre de Biot, et de 0.1 à 1 pour le paramètre de surchauffement. Pour aboutir à des corrélations donnant la durée de solidification complète sphérique et cylindrique en fonction de trois paramètres adimensionnels. Deux cas sont présentés :

a) Cas d'un MCP où les propriétés physiques des deux phases liquide et solides sont égales (conductivité thermique et chaleur massique)

- pour une capsule cylindrique

$$\tau_{total} = 0.6496729 \times (Ste)^{-0.9439889} \times (Bi)^{-0.294334} \times (\theta_m)^{-0.9548947}$$

- pour une capsule sphérique

$$\tau_{total} = 0.4527292 \times (Ste)^{-0.9355889} \times (Bi)^{-0.29858} \times (\theta_m)^{-0.9368348}$$

b) Cas de l'eau en tenant compte des propriétés physiques des deux phases

- pour une capsule cylindrique

$$\tau_{total} = 0.7192535 \times (Ste)^{-0.9107597} \times (Bi)^{-0.288035} \times (\theta_m)^{-1.010093}$$

- pour une capsule sphérique

$$\tau_{total} = 0.5012181 \times (Ste)^{-0.9070384} \times (Bi)^{-0.2864788} \times (\theta_m)^{-0.9843633}$$

Le modèle de Bédécarrats est utilisé pour modéliser le stockage d'énergie par chaleur latente dans des cuves cylindriques et verticaux, l'échange de chaleur par convection à la surface est mis en jeu par le biais d'une corrélation (Kousksou, 2005).

La méthode intégrale de Goodman a fait l'objet d'une étude (Mosally, 2005). L'auteur a prouvé la convergence de la méthode en supposant l'approximation linéaire de la température dans le volume de contrôle sachant que Goodman a utilisé l'approximation quadratique.

Par une approche théorique, l'auteur conclut qu'il est impossible d'obtenir une nucléation homogène pour les corps purs. Cette approche détermine les conditions d'apparition d'une autre phase (Charles, 2005), à savoir :

- la température de changement de phase
- l'existence d'une interface de deux différentes phases.

Une étude expérimentale et analytique est menée pour mettre en exergue l'effet thermique de la géométrie et ces dimensions (l'épaisseur, la longueur caractéristique) des capsules contenant des MCP (Wei, 2005). Le MCP est encapsulé dans quatre différentes capsules (sphérique, cylindrique, rectangulaire et tubulaire). Il est conclu que la sphère reste la géométrie optimale privilégiée pour les échanges thermiques, puis avec un degré de performance décroissant le cylindre, le rectangle, et la capsule tubulaire.

La solidification et la fusion des capsules plates avec une source thermique volumique sont examinées analytiquement par Latif (2006) en utilisant l'approximation quasi-stationnaire où deux exemples sont explorés :

- la solidification d'un matériau nucléaire
- la fusion de la glace

Les auteurs ont utilisé un modèle adimensionnel classique avec une température imposée à la surface, deux paramètres sont alors suffisants pour le contrôle du processus : le nombre de Stefan et le paramètre de source de chaleur.

Enfin, la performance thermique des capsules remplies des MCP peut être améliorée par l'insertion des bouts métalliques à l'intérieur (Hisham, 2006).

Chapitre III :
Présentation du modèle physique

1. Concept de modélisation

Tiré du grec, le mot *physique* signifie «nature» ce qui donne à cette discipline un immense domaine d'étude. Cette grande variété des phénomènes naturels pousse l'homme à les classer. Comme nos sens sont le moyen de reconnaissance de ces phénomènes, cette classification en est obéie. De ce fait, des grandes branches de la physique sont apparues telles que : l'optique, l'acoustique...et l'énergétique

Cette dernière branche s'occupe de la description de toutes sortes d'énergie qui peut être produite, détruite ou transporté sous différentes formes.

En effet, étudier un système c'est établir des formules mathématiques décrivant les interactions survenues sur celui-ci ou encore entre le système et son environnement (Isachenko, 1977). Cette étude a aussi connu des tendances où les précurseurs ont considéré deux approches totalement différentes l'une appelée statistique (microscopique) qui a ses propres principes et lois et l'autre phénoménologique qui ignore la structure microscopique du système étudié et le considère comme un milieu continu. Chacune des deux méthodes a ses avantages et ses inconvénients, certainement.

En fait, comme la présente étude fait partie de la deuxième approche, il est à noter que l'approche phénoménologique permet une description quantitative d'un processus tout en profitant des données expérimentales qui serviront comme référence de validation de l'exactitude de cette description.

En réalité, les propriétés caractéristiques d'un système sont d'une variabilité spatiotemporelle rendant toute étude délicate voire impossible sans le recours à des hypothèses et des considérations simplificatrices. Dans ce contexte est établie la physique mathématique qui considère un élément de volume, infiniment petit d'une vue macroscopique et suffisamment grand d'une vue microscopique pour qu'on puisse négliger les interactions moléculaires. Sous cette configuration la physique mathématique rend possible la négligence de la variation de quelques propriétés sur un tout petit laps de temps pour simplifier l'étude. Or la relation ainsi tirée est dite équation différentielle qui, intégrée sur tout le domaine spatial étudié et sur un intervalle de temps, deviendra une relation analytique entre les propriétés caractéristiques. Mais cette intégration analytique n'est pas toujours possible, le cas de la plupart des applications pratiques, le recours au traitement numérique est alors automatique.

2. Formulation enthalpique et équation de la chaleur

Avant de procéder à la formulation enthalpique, il est opportun de présenter une formulation classique mettant en exergue ce qui se passe physiquement. A cet effet, la publication d'Ismail (2000) concernant le problème de solidification d'un MCP dans une sphère est plutôt convenable :

Considérons une sphère remplie d'un MCP initialement à sa température de fusion T_f , à l'instant $t=0$ la surface extérieure est soumise à un flux convectif provoquant le refroidissement de la sphère tout en gardant une température ambiante constante T_∞ . L'équation de conduction et les conditions initiales et aux limites s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_s} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad \text{pour la région solide} \quad (3.1)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} = \rho L \frac{dr}{dt} \quad \text{à l'interface solide liquide} \quad (3.2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_\infty) \quad \text{à la surface externe} \quad (3.3)$$

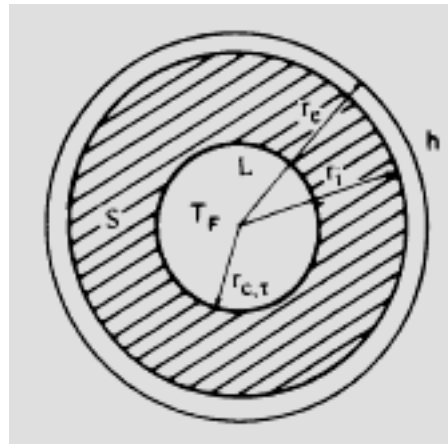


Figure 3.1: Nodule en cours de solidification

Les échanges thermiques à la partie solide sont régis par l'équation de conduction thermique instationnaire, à l'interface une partie du flux sert au changement de phase alors qu'à la surface il s'agit d'un échange convectif avec l'ambiance (en faisant abstraction à la paroi supposée d'épaisseur négligeable). Par ailleurs la méthode enthalpique est utilisée pour décrire la conduction thermique dans les matériaux à changement de phase, où la position de l'interface fait partie de la solution (Ayasoufi, 2004). Le principe de cette méthode consiste à définir une

fonction appelée **enthalpie** qui est l'énergie totale contenue dans le système sous forme de chaleur sensible et latente:

$$H = \rho \bar{h} \quad (3.4)$$

L'enthalpie massique \bar{h} est donnée par :

$$\bar{h} = \int_0^T c dT + \varpi . L_f \quad (3.5)$$

Le premier terme quantifie l'énergie sensible (avec c la chaleur spécifique), alors que le second terme représente la chaleur latente où ϖ est la fraction liquide (égale à 1 pour les liquides, et à 0 pour les solides)

2.1 L'équation de la chaleur

Pour établir l'équation d'énergie dans un matériau à changement de phase, il est supposé :

- i) la déformation du volume due à la variation de la température est négligeable
- ii) l'absence de toute sorte de source de chaleur

Elle est donnée par :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) = 0 \quad (3.6)$$

Soit :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) = 0 \quad (3.7)$$

3. Position du problème

Comme les capsules minces, cylindriques et notamment sphériques sont les plus répandues dans les systèmes de stockage du froid par chaleur latente. On considère une capsule de longueur caractéristique r_0 désignant l'épaisseur d'une capsule mince ou le rayon d'une capsule sphérique ou cylindrique. Ainsi les échanges thermiques sont unidirectionnels suivant la direction r_0 . La capsule est remplie d'un MCP à une température initiale ($T_i > T_f$). A l'instant $t=0$ la surface externe de la capsule est exposée à un fluide frigoporteur de température $T_\infty < T_f$. Cet écart de température induit automatiquement un flux convectif entre le fluide et le MCP. La solidification commence, donc, de la surface externe pour pousser excentriquement vers le centre.

Des hypothèses supplémentaires s'ajoutent à ceux suscités au paragraphe 2.1 :

- L'enveloppe est supposée de faible épaisseur et d'un matériau de bonne conductivité thermique pour qu'on puisse négliger sa résistance thermique.
- La température du réfrigérant et le coefficient d'échange sont considérés constants.

Ainsi, le problème est complètement formulé.

4. Modèle mathématique

Le processus de solidification à l'intérieur du matériau est gouverné par l'équation donnée plus haut:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \text{div}(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) = 0 \quad (3.8)$$

Pour un écoulement unidirectionnel, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r^g} \frac{\partial}{\partial r} \left(K \cdot r^g \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.9)$$

Avec $g=0$ pour une capsule mince, $g=1$ pour une capsule cylindrique et $g=2$ pour une capsule sphérique.

Le champ de température est donné par:

$$T = \frac{H}{\rho_s c_s} + T_f \quad \text{pour la région solide } (H < 0) \quad (3.10)$$

$$T = T_f \quad \text{à l'interface } (0 \leq H \leq L_f) \quad (3.11)$$

$$T = \frac{\frac{H}{\rho_l} - L_f}{c_l} + T_f \quad \text{pour la région liquide } (H > L_f) \quad (3.12)$$

La condition initiale

$$\text{A } t = 0 \quad T = T_{in} \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (3.13)$$

Les conditions spatiales :

$$r=0 \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.14)$$

$$r=r_0 \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = h(T - T_\infty) \Big|_{r=r_0} \quad (3.15)$$

Où h est le coefficient de transfert convectif à la surface entre la capsule et le fluide frigoporteur. Signalons que selon le rapport h/k , la condition (3.15) peut représenter différentes conditions de surface : (i) h/k très grand correspond au cas d'une surface isotherme ; (ii) h/k très faible correspondant à la condition d'adiabaticité.

5. Forme adimensionnelle du modèle

Pour faciliter le traitement numérique, posons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$H^* = \frac{H}{c_s(T_{in} - T_\infty)} \quad \text{enthalpie adimensionnelle}$$

$$r^* = \frac{r}{r_o} \quad \text{rayon adimensionnel}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{in} - T_\infty} \quad \text{température adimensionnelle}$$

$$\tau = \frac{\alpha_s t}{r_o^2} \quad \text{nombre de Fourier}$$

$$Ste = \frac{c_s(T_{in} - T_\infty)}{L} \quad \text{nombre de Stefan (rapport entre les chaleurs sensible et latente)}$$

$$Bi = \frac{hr_o}{k_s} \quad \text{nombre de Biot}$$

$$K^* = \frac{k}{k_s} ; C^* = \frac{c}{c_s} \quad \text{conductivité et chaleur spécifique}$$

Ainsi, les équations adimensionnelles du modèle s'expriment par :

$$\frac{\partial H^*}{\partial \tau} = \frac{1}{r^{*g}} \frac{\partial}{\partial R} \left(K^* r^{*g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad g = 0,1,2 \quad (3.16)$$

$$\theta(r^*, 0) = 1 \quad (3.17)$$

$$K^* \frac{\partial \theta}{\partial r} = -Bi \cdot \theta_{r^*=1} \quad (3.18)$$

$$H^*(\theta) = \begin{cases} \theta - \theta_f \\ C^*(\theta - \theta_f) + \frac{1}{Ste} \end{cases} \quad \text{pour } \begin{cases} \theta < \theta_f \\ \theta > \theta_f \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\theta = \begin{cases} H^* + \theta_f \\ \theta_f \\ (H^* - 1/Ste)/C^* + \theta_f \end{cases} \quad \text{pour } \begin{cases} H^* < 0 \\ 0 \leq H^* \leq 1/Ste \\ H^* > 1/Ste \end{cases} \quad (3.20)$$

Chapitre IV :
Etude numérique et validation du modèle

1. Approche numérique

Le développement des méthodes numériques, qui est, en fait, une conséquence du progrès des machines de calcul, a rendu les problèmes pratiques traitables. Certainement, les solutions qu'elles offrent ne peuvent être qu'approchées mais cela ouvre une piste là où l'approche analytique gare. En outre, le traitement numérique peut être effectué avec des vitesses de plus en plus importantes, un prix de revient très bas et avec moins d'effort (Patankar, 1978). Encore, comparée à l'expérimental, la simulation numérique peut explorer même des conditions irréelles. Néanmoins, les résultats obtenus numériquement devront subir une validation soit en les comparant à des manipulations expérimentales soit à des solutions analytiques si elles existent. .

2. Méthode des volumes finis

Le théorème d'Ostrogradsky qui permet de changer l'intégrale de volume en intégrale de surface est à la base de la méthode des volumes finis dont la première étape consiste en la génération de maillage, dans notre cas le maillage spatial suivant une demi longueur caractéristique avec un espace inter nœud de ΔR .

Chaque nœud représente le centre de ce qu'on appelle volume de contrôle dont les faces de gauche et de droite sont notées respectivement w et e , les nœuds adjacents recevront les notations W et E .

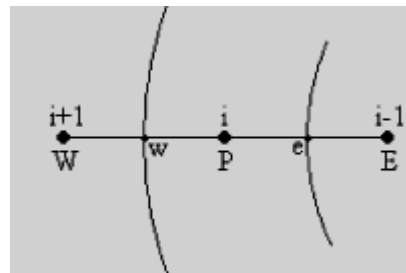


Figure 4.1 : i ème nœud

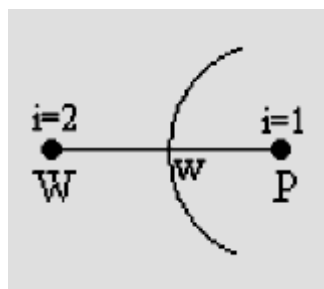


Figure 4.2 : premier nœud

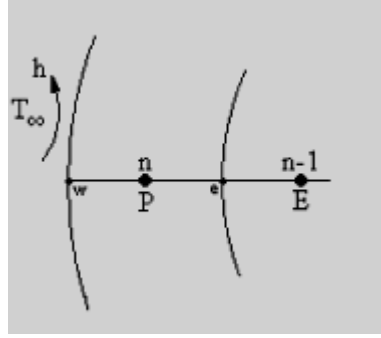


Figure 4.3 : dernier nœud

Pour le centre ($r^*=0$), ce n'est qu'un demi volume qui est pris en compte. A la surface qui est sujette d'un échange thermique convectif, c'est une face gauche (w) qui y coïncide.

Après avoir généré le maillage, procédons à la discrétisation où plutôt la transformation du modèle mathématique à des équations algébriques reliant les grandeurs physiques à chaque nœud sur des intervalles de temps adimensionnels $k\Delta\tau$ (k est un entier positif).

Le schéma explicite donne (cf. *Annexe*) :

$$H_P^{k+1} = H_P^k + \frac{(g+1)\Delta\tau}{(r_w^{*g+1} - R_e^{g+1})} \left[K_w^* r_w^{*g} \frac{\theta_w^k - \theta_P^k}{\Delta R} - K_e^* r_e^{*g} \frac{\theta_P^k - \theta_E^k}{\Delta R} \right] \quad (4.1)$$

Cet algorithme est applicable pour l'ensemble des nœuds intérieurs.

Pour le premier nœud (figure 4.2) qui correspond à un flux thermique nul du coté de $P=1$. On écrit alors :

$$H_1^{*k+1} = H_1^k + \frac{2.(g+1).\Delta\tau}{(\Delta R)^2} K_w^* (\theta_2^k - \theta_1^k) \quad (4.2)$$

Et pour le dernier nœud (figure 4.3), le terme flux de la face w est remplacé par la condition convective.

$$H_n^{*k+1} = H_n^{*k} + \frac{(g+1).\Delta\tau}{(r_w^{*g+1} - R_e^{g+1})} \times \left[-r_w^{*g} Bi \theta_s^k - K_e^* \frac{(\theta_n^k - \theta_{n-1}^k)}{\Delta R} \right] \quad (4.3)$$

$$H_n^{*k+1} = H_n^{*k} + \frac{(g+1).\Delta\tau}{(r_w^{*g+1} - r_e^{*g+1})} \times \left[-\frac{2Bi.K_n^*}{2K_n^* + Bi.\Delta R} r_w^{*g} \theta_n^k - K_e^* \frac{(\theta_n^k - \theta_{n-1}^k)}{\Delta R} \right] \quad (4.4)$$

Ainsi l'algorithme est **universel**, il est applicable pour les trois géométries de base (sphère, cylindre et rectangle) correspondant respectivement à : $g = 0, 1, 2$

3. Etude de stabilité

L'usage du schéma explicite est accompagné des oscillations des valeurs des variables indépendantes estimées dans chaque nœud, l'origine de cette instabilité est le fait qu'on estime une valeur moyenne de la conductivité aux interfaces des volumes de contrôle. Ces oscillations peuvent être amorties par l'augmentation du nombre des nœuds.

Avant de procéder à la validation du code, une étude de cette instabilité est impérative. Pour que les résultats soient stables, il faut que les coefficients de θ^k ne sont pas négatifs, si on prend le premier nœud comme exemple :

$$H_1^{*k+1} = H_1^{*k} + \frac{3 \cdot \Delta \tau}{(\Delta R)^2} (K_1^* + K_2^*) (\theta_2^k - \theta_1^k) \quad (4.5)$$

En remplaçant l'expression de l'enthalpie :

$$H_1^{*k+1} = C^* (\theta_1^k - \theta_f) + \frac{1}{Ste} + \frac{3 \cdot \Delta \tau}{(\Delta R)^2} (K_1^* + K_2^*) (\theta_2^k - \theta_1^k) \quad (4.6)$$

Le coefficient soumis à la condition de stabilité est tiré :

$$C^* - \frac{3 \cdot \Delta \tau}{(\Delta R)^2} (K_1 + K_2) \geq 0 \quad (4.7)$$

On aura :

$$\Delta \tau \leq \frac{C^* (\Delta R)^2}{3(K_1 + K_2)} \quad (4.8)$$

4. Enthalpie critique

Par définition l'énergie totale contenue dans un volume fini est :

$$H_i^* V_{e_i} = \left[(\theta_i - \theta_f) V_s + \left(C^* (\theta_i - \theta_f) + \frac{1}{Ste} \right) V_l \right] \quad (4.9)$$

Où V_{e_i}, V_s, V_l sont respectivement le volume adimensionnel du volume fini, le volume de la fraction solide et celle liquide.

Pour un volume de contrôle subissant un changement de phase $\theta_i = \theta_f$

$$H_i V_{e_i} = \left(C^* (\theta_i - \theta_f) + \frac{1}{Ste} \right) V_l \quad (4.10)$$

D'où :

$$H_i^* = \left(C^* (\theta_i - \theta_f) + \frac{1}{Ste} \right) \cdot \frac{V_i}{V_{e_i}} \quad (4.11)$$

À l'instant où le front de solidification atteint le nœud i , l'enthalpie volumique adimensionnelle s'exprime par :

$$H_c^* = \frac{1}{8Ste} \frac{r_w^{*3} + 3r_w^{*2} r_e^* + 3r_w^* r_e^{*2} - 7r_e^{*3}}{r_w^{*3} - r_e^{*3}} \quad \text{cas d'une sphère}$$

$$H_c^* = \frac{1}{4Ste} \frac{r_w^{*2} + 2r_w^* r_e^* - 3r_e^{*2}}{r_w^{*2} - r_e^{*2}} \quad \text{cas d'un cylindre}$$

$$H_c^* = \frac{1}{2Ste} \quad \text{capsule rectangulaire}$$

Ces expressions serviront de critère pour contrôler l'évolution du front de solidification.

5. Durée de solidification complète

Si on suppose que H^* varie linéairement avec τ , on pourra par interpolation définir l'instant où le nœud i change d'état du liquide au solide. Pour éclaircir davantage, effectuons un zoom sur la fonction $H^*(\tau)$, plus précisément entre deux instants successifs $k\delta\tau$ et $(k+1)\delta\tau$.

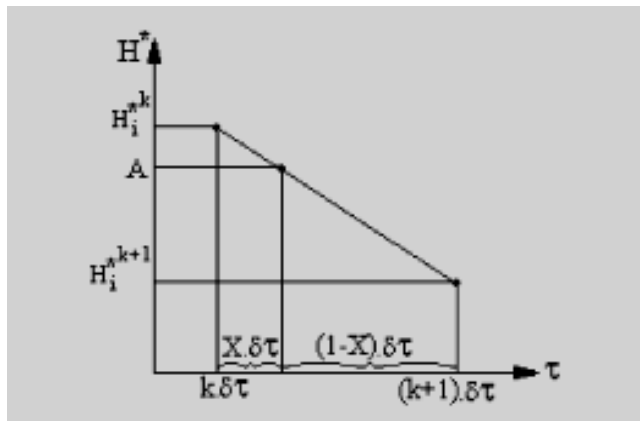


Figure 4.4 : Enthalpie d'un nœud i entre deux instants successifs

Le temps adimensionnel nécessaire pour que le nœud se solidifie est évalué par :

$$\tau_i = \left(k + \frac{A - H_i^{*,k+1}}{H_i^{*,k} - H_i^{*,k+1}} \right) \delta\tau \quad (4.12)$$

Avec H_c l'enthalpie adimensionnelle correspondant à l'instant du changement de phase du nœud considéré, τ_c représente la durée de solidification complète du MCP.

6. Algorithme de calcul

La méthode de calcul se résume par :

- a) Le calcul du champ de l'enthalpie pour chaque pas temporel
- b) Détermination de la position du front de solidification
- c) Le calcul de la durée de solidification complète

7. Validation du modèle

Pour s'assurer de la validation du présent modèle, il est, à priori propice de le faire comparer à d'autres modèles disponibles dans la littérature:

7.1 Comparaison avec le modèle de Levent (2005)

Comme il est signalé auparavant, le présent modèle n'est qu'une **extension** de celui de Levent (2005), or une reproduction de ses résultats montre la très bonne fidélité par rapport au modèle original.

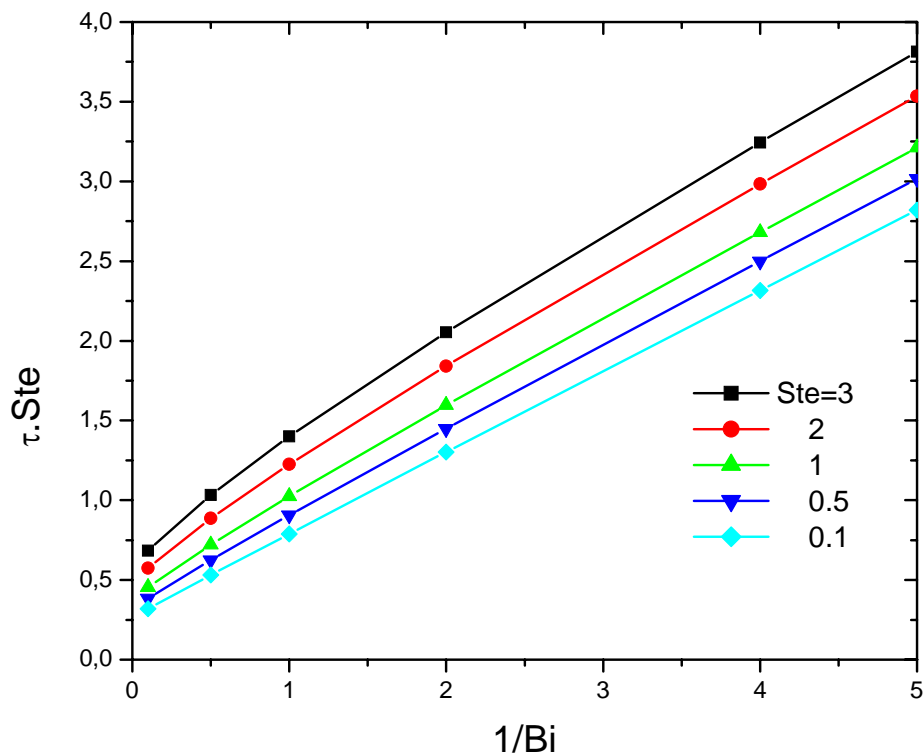


Figure 4.5 : Reproduction des résultats de Levent, cylindre

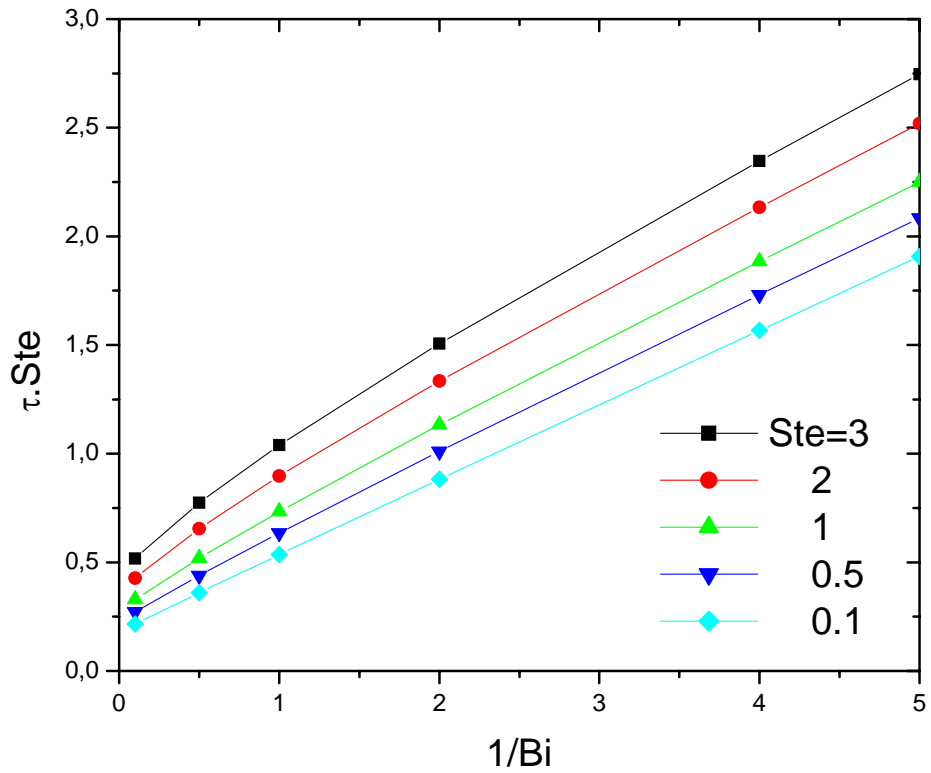


Figure 4.6 : Reproduction des résultats de Levent, sphère

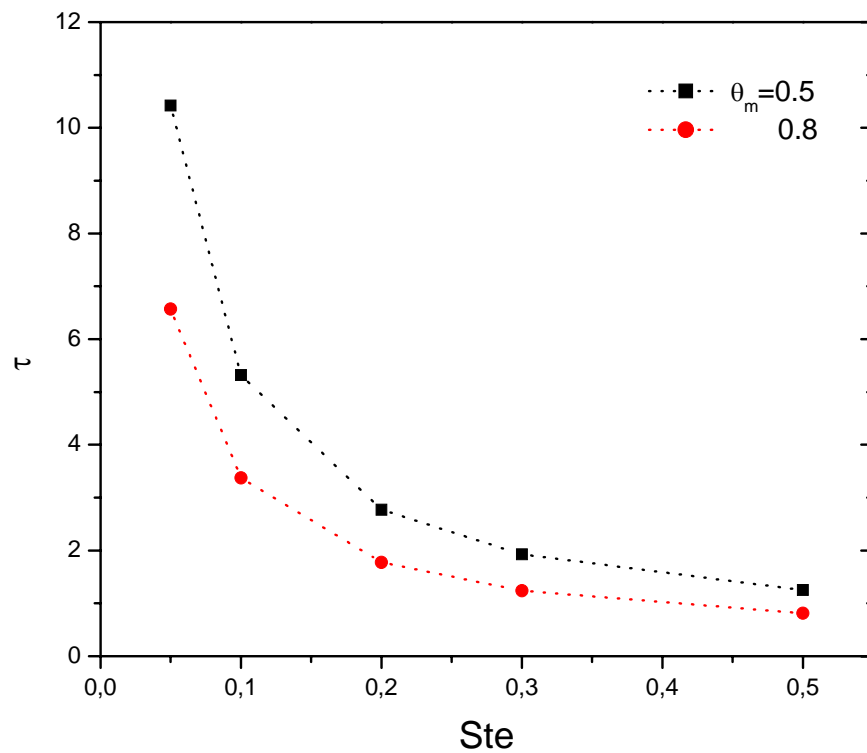


Figure 4.7 : Reproduction des résultats de Levent, effet du nombre de Stefan sur la durée de solidification

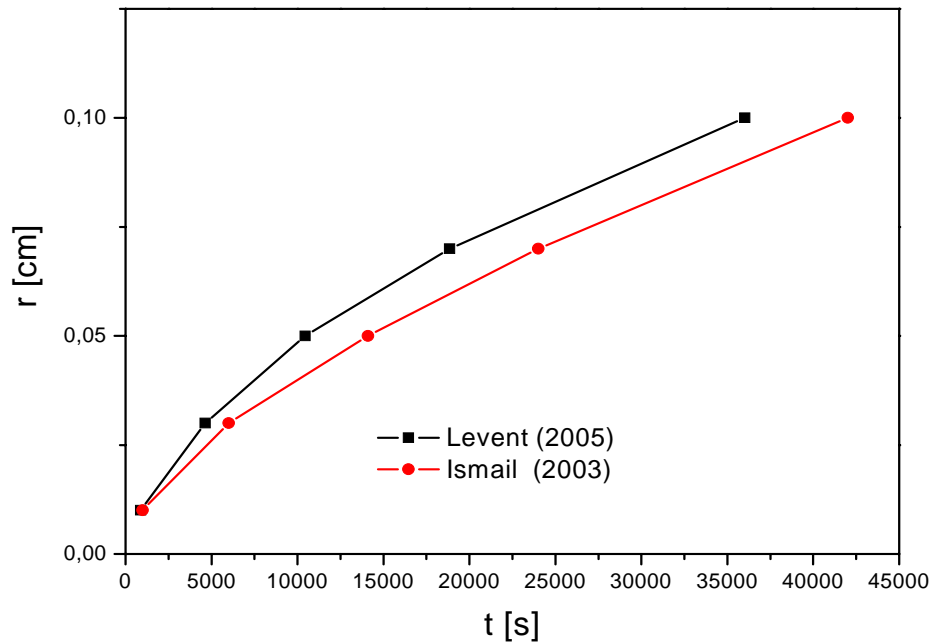


Figure 4.8 : Reproduction des résultats de Levent par rapport au modèle d'Ismail (2002)

Alors que la figure suivante mis en exergue les oscillations qui dérivent du choix d'un maillage non raffiné, on en a déjà évoqué dans la section de l'étude de la stabilité, à l'issu une recommandation sur la distance inter nœuds qui a couronné cette étude:

$$\Delta\tau \leq \frac{C^* (\Delta R)^2}{3(K_1 + K_2)} \quad (4.13)$$

En effet Levent a suggéré l'utilisation de *41 noeuds* pour amortir ses oscillations sans toutefois l'éliminer complètement comme il est mis en évidence par la figure suivante.

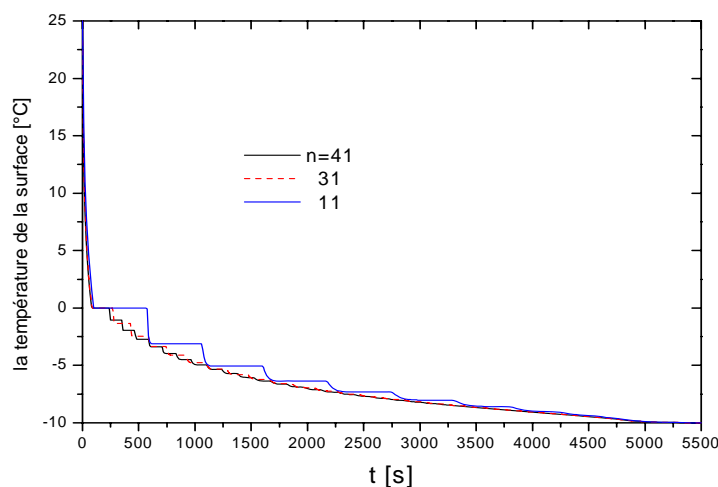


Figure 4.9 : Reproduction des résultats de Levent, effet du nombre des noeuds sur la température de la surface

7.2 Comparaison avec le modèle de Ismail (1999) et (2000)

De plus, une validation du modèle actuel pour le cas d'une géométrie plane ($g=0$) est d'autre part impérative. A cet effet une très bonne conformité est révélée en le comparant avec une solution exacte (celle de Duhamel) et le modèle de Ismail (2000) tel que présenté par les deux figures suivantes :

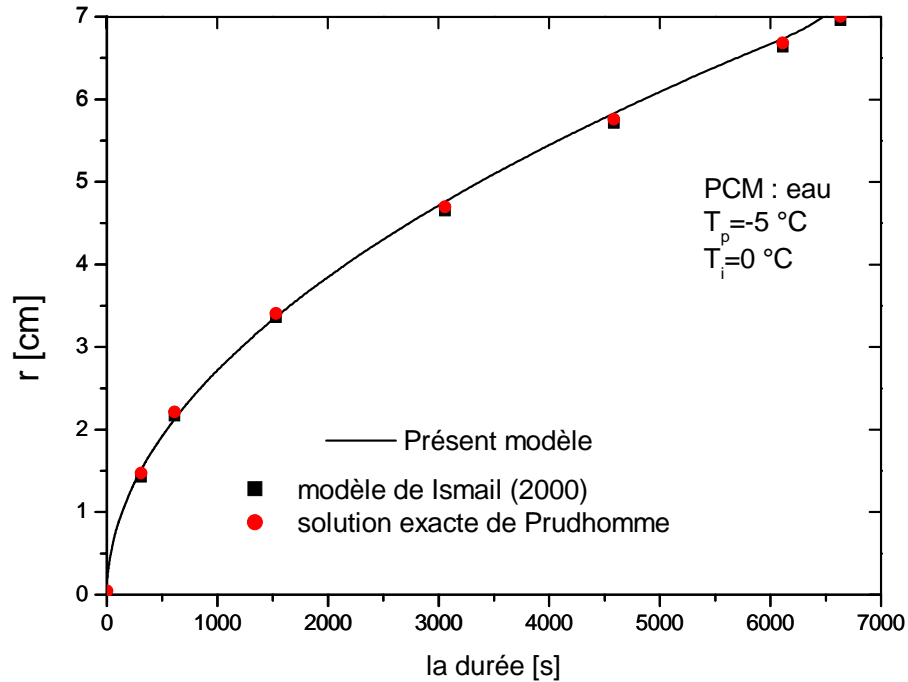


Figure 4.10 : Comparaison du présent modèle et ceux de Ismail (2000) et la solution exacte de Prudhomme

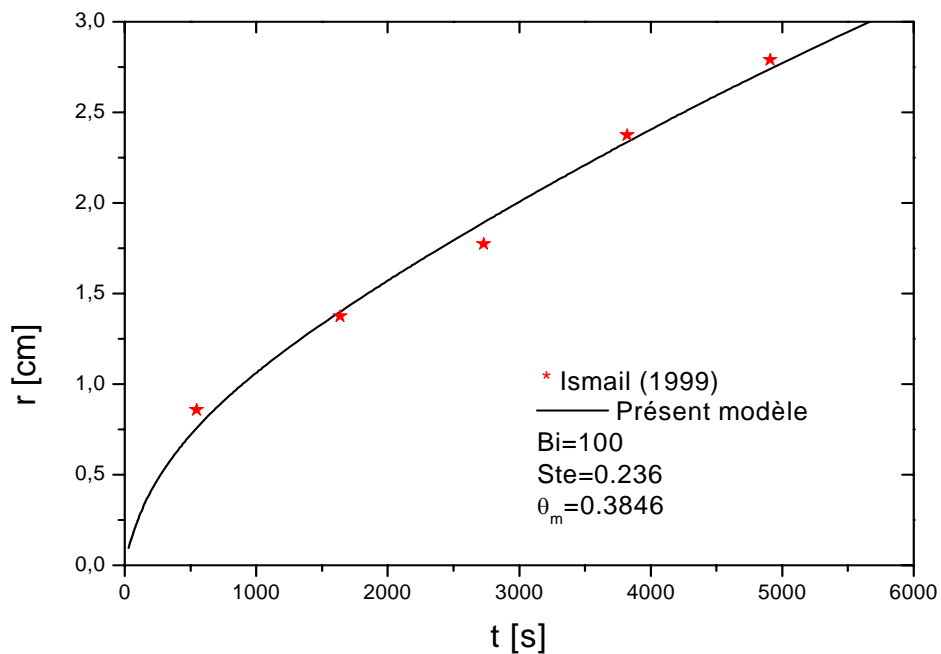


Figure 4.11 : Comparaison avec le modèle de Ismail (1999)

7.3 Comparaison avec les modèles de Chou (1971) et Hill (1983)

Une autre comparaison aux résultats obtenus par Hill (1983) et Chou (1971) s'ajoute. Nous constatons une très bonne concordance avec une légère différence à la fin du processus de cristallisation. Il est notablement remarqué la position mitoyenne du présent modèle.

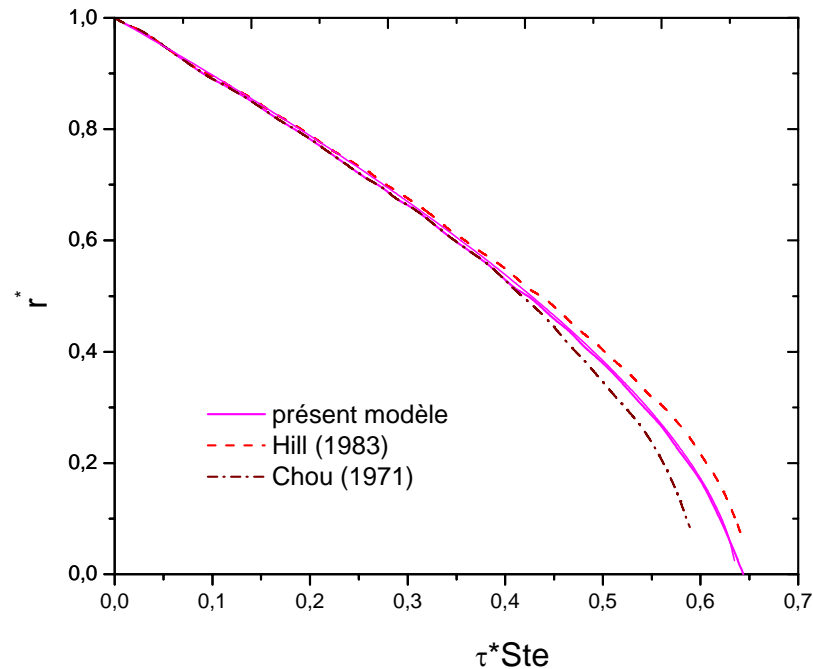


Figure 4.12 : Comparaison avec d'autres modèles

8. Limites du modèle

8.1 Le modèle et la fusion

Le présent modèle est conçu principalement pour décrire le phénomène de solidification d'un MCP, néanmoins il est également applicable pour le phénomène de fusion par conduction du haut ou latéral contrairement à la fusion par contact direct du bas faisant intervenir le phénomène de la poussée d'Archimède qui ressort du cadre de cette étude.

8.2 Le modèle et la surfusion

Au cours d'un réchauffement, on observe dans tous les cas l'équilibre liquide-solide. Par contre, lors d'un refroidissement du liquide, lorsque celui-ci atteint la température de fusion T_f il ne se passe rien en pratique. Il est possible d'observer encore le liquide à des températures inférieures à T_f . Le liquide est dit, alors, surfondu ou métastable.

Des intenses études expérimentales ont, en fait, pris le relais pour élucider le caractère stochastique de la surfusion qui reste toujours au-delà d'une description mathématique fine, hormis celle de Bédécarrats (1997) qui se base sur une fonction probabilistique propre loin d'être généralisée.

Or, le modèle utilisé dans cette étude s'en passe du phénomène de la surfusion et suppose que le processus de cristallisation du liquide se déclenche dès qu'on franchit le seuil de la température de fusion.

Chapitre V :
Résultats et discussions

Après avoir validé le modèle, il est donc permis de l'utiliser pour l'étude d'une capsule sphérique ou cylindrique de rayon r^* , (ou encore rectangulaire d'épaisseur $2r^*$ suivant la direction du flux thermique, longueur et largeur suffisamment grandes pour qu'on puisse supposer le problème unidirectionnel).

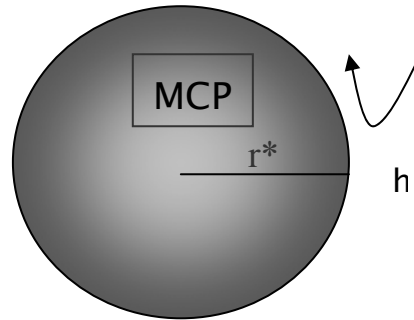


Figure 5.1 : Capsule sphérique / cylindrique

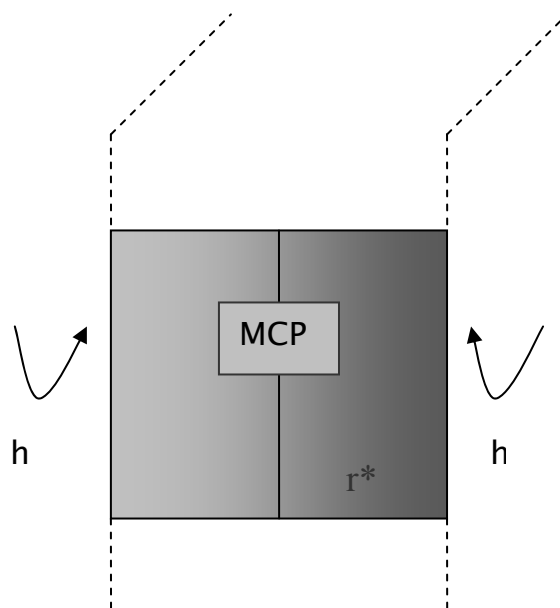


Figure 5.2 : Capsule rectangulaire

La capsule est remplie d'un *MCP* à une température initiale ($T_i \geq T_f$). A l'instant $t=0$ la surface externe de la capsule est exposée à un fluide frigopporteur de température ($T_\infty < T_f$). La différence de température engendre, automatiquement, un flux thermique convectif entre le fluide et le *MCP*. La solidification du *MCP* commence, donc, de la surface externe pour pousser concentriquement vers le centre.

Il est supposé:

- ✓ la déformation du volume due à la variation de la température est négligeable
- ✓ L'enveloppe est supposée de très faible épaisseur et d'un matériau de très bonne conductivité thermique pour qu'on puisse négliger sa résistance thermique (Zivkovic, 2001).
- ✓ Les effets de sous-refroidissement sont négligés : le processus de changement de phase est immédiatement déclenché dès que le *MCP* franchit sa température de fusion.

La présente étude thermique portera sur deux volets :

- Etude adimensionnelle générale
- Etude dimensionnelle d'un nodule sphérique habituellement rencontré dans les installations de stockage du froid pour le conditionnement d'air.

1. Etude de la solidification d'un *MCP* initialement à sa température de fusion

Afin d'examiner de près le processus de solidification on fait abstraction, dans un premier temps, de la phase pré-solidification qui précède naturellement le déclenchement de la cristallisation du *PCM*.

1.1 Evolution du champ de température

Les figures suivantes montrent l'évolution de la température adimensionnelle au cours du temps de quatre positions du centre de la capsule à la surface. Il est clair que le centre garde sa température de fusion ($\theta = 1$) puis subit un changement brusque qui correspond au changement de phase liquide-solide pour ensuite converger exponentiellement vers la température du fluide réfrigérant ($\theta = 0$), idem pour les autres points de la capsule si on fait exception de ceux de la surface qui quittent aussitôt le niveau ($\theta = 1$).

En outre, il est remarquable la grande analogie des deux profils, avec un déphasage temporel, du champ de température des capsules sphérique et cylindrique avec une légère traîne au milieu du profil pour la capsule plane.

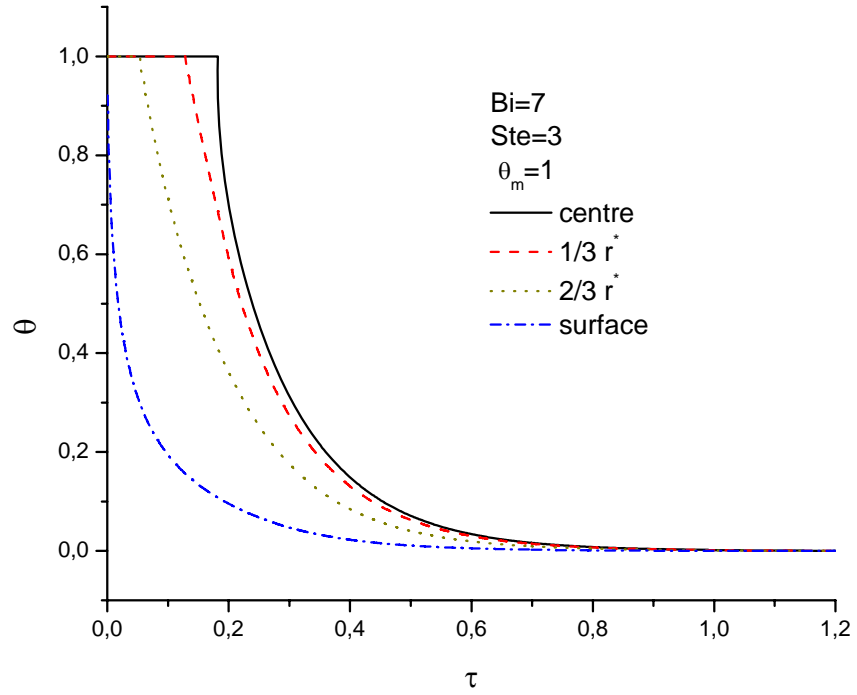


Figure 5.3 : Champ de températures, capsule sphérique

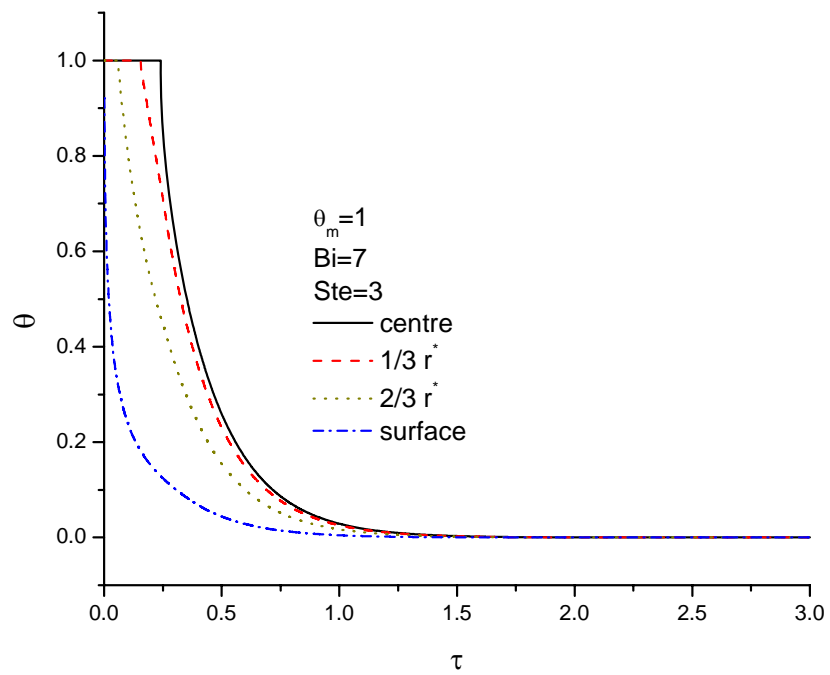


Figure 5.4 : Champ des températures, capsule cylindrique

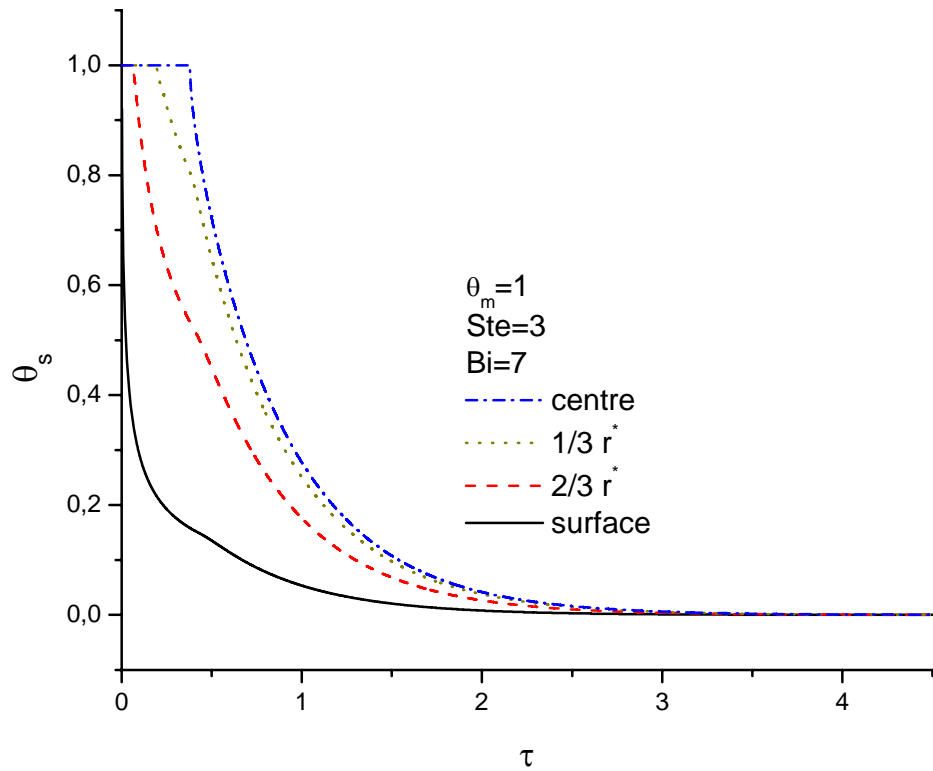


Figure 5.5 : Champ de températures, capsule plane

La distribution radiale de θ dans une sphère à différents intervalles de τ est présenté dans la figure suivante :

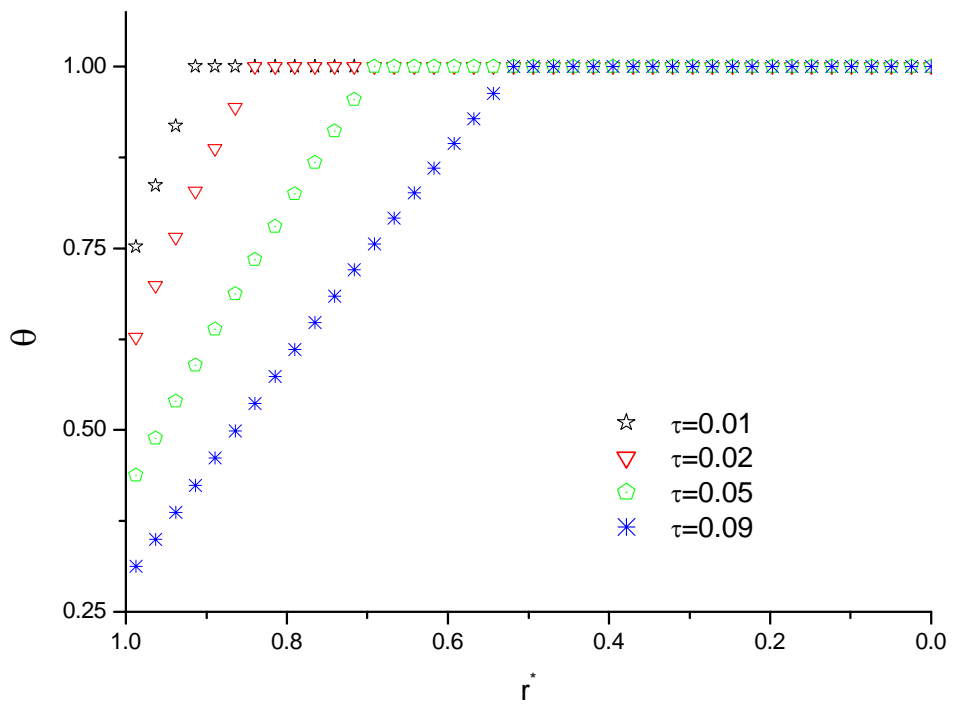


Figure 5.6 : distribution radiale de θ dans une sphère

la solidification du *PCM* varie avec le temps à partir de la surface vers le centre, le matériau qui est encore liquide reste toujours à sa température initiale ($\Theta=1$) alors que la fraction déjà solidifiée du matériau subit une baisse continue.

1.2 Champ d'enthalpie

Chaque point du *MCP* est à un niveau thermique constant avant de voir ce niveau baisser instantanément (changement adiabatique) correspondant à une décharge thermique en faveur d'un changement de phase liquide solide suivi d'une baisse sensible jusqu'au niveau thermique le plus bas qui peut occuper le *MCP* sous ces conditions.

Il est attendu la traîne au milieu des courbes accompagnant la capsule plane en tenant compte de la dépendance température-enthalpie.

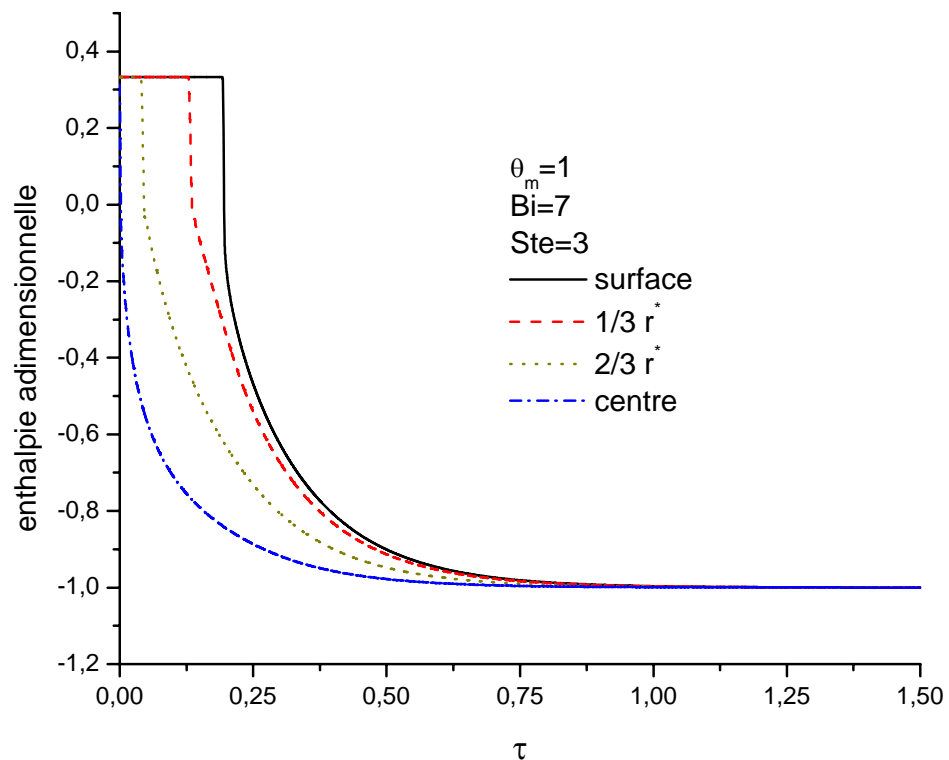


Figure 5.7 : Champ d'enthalpie, capsule sphérique

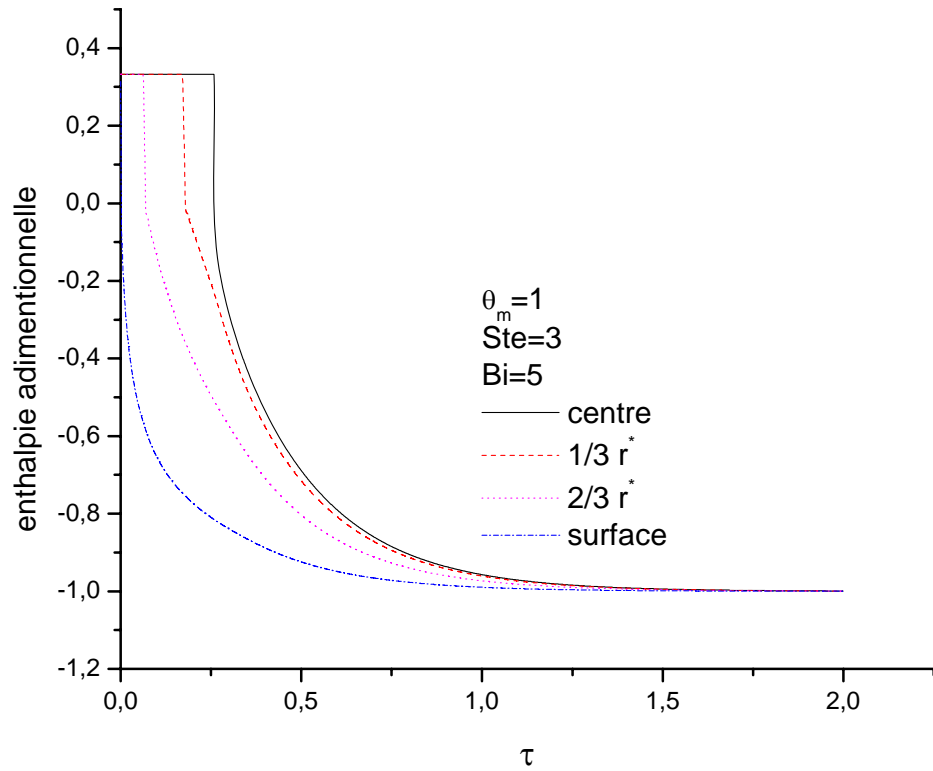


Figure 5.8 : Champ d'enthalpie, capsule cylindrique

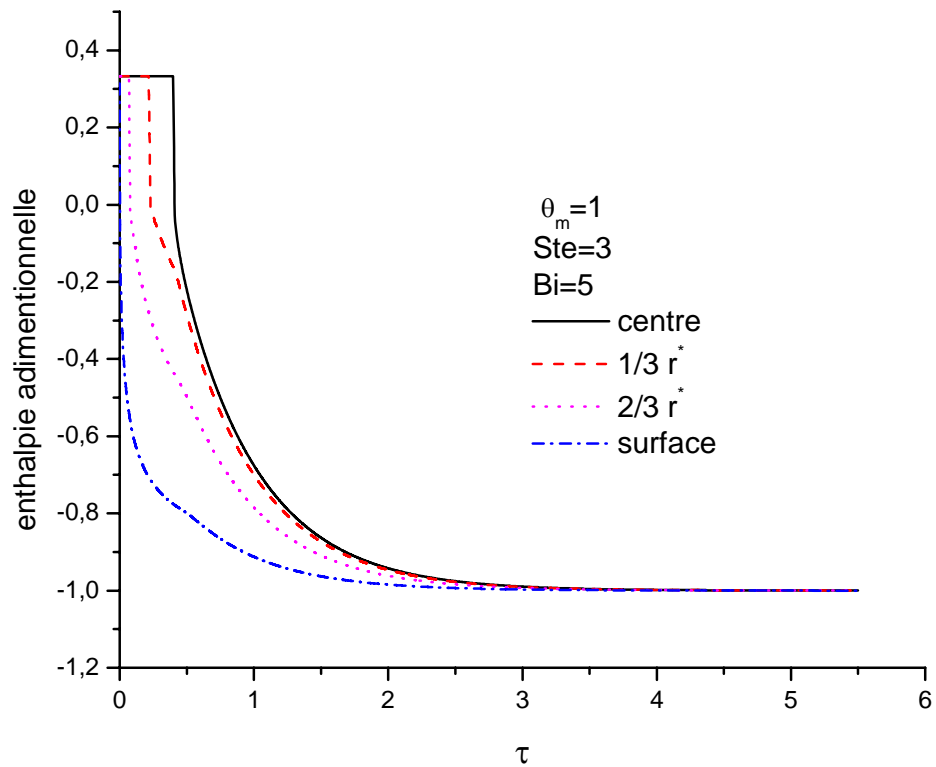


Figure 5.9 : Champ enthalpie, capsule plane

La figure suivante illustre l'évolution de l'enthalpie du MCP à la surface par rapport à sa valeur critique. A cette valeur-ci le MCP commence à subir le changement de phase et devient solide. Ce processus est instantané puis un échange de chaleur sensible s'étend sur une plage de temps $\tau=0.25-1$ qui est traduit par la décharge du contenu thermique de la glace pour se mettre en équilibre avec le fluide réfrigérant.

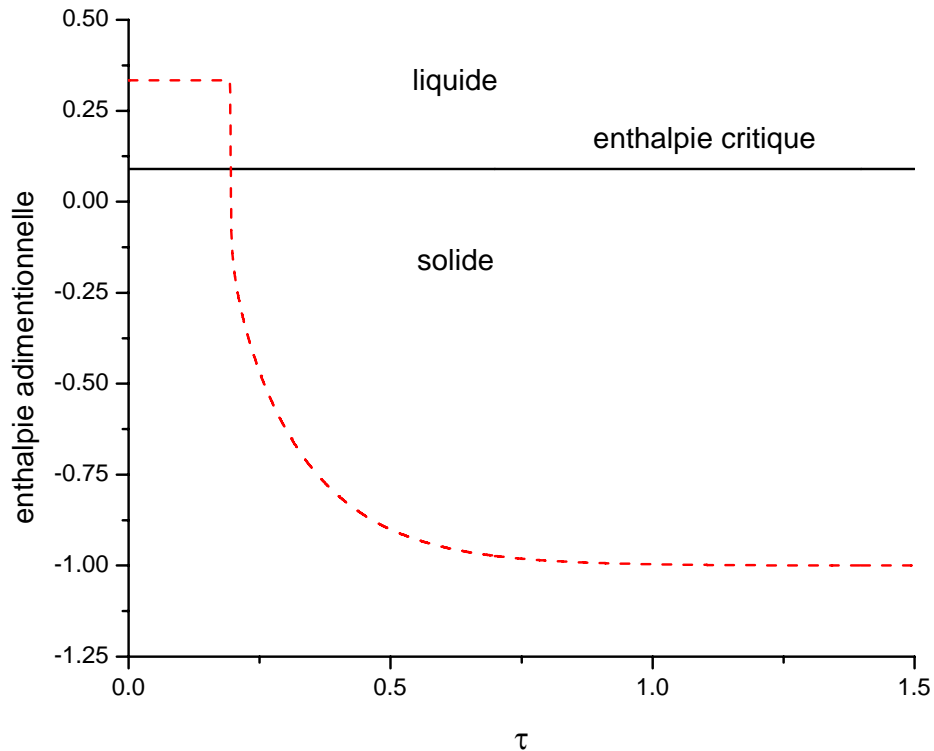


Figure 5.10 : Enthalpie à la surface

1.3 Densité de flux de chaleur échangée à la surface

La densité du flux thermique est mis en exergue par la figure suivante relative à la capsule sphérique. Elles montrent que l'échange thermique est sensible au nombre de Stefan, contrairement au nombre de Biot: une grande valeur est synonyme de longue durée de décharge, alors qu'un petit nombre correspond à une durée écourtée.

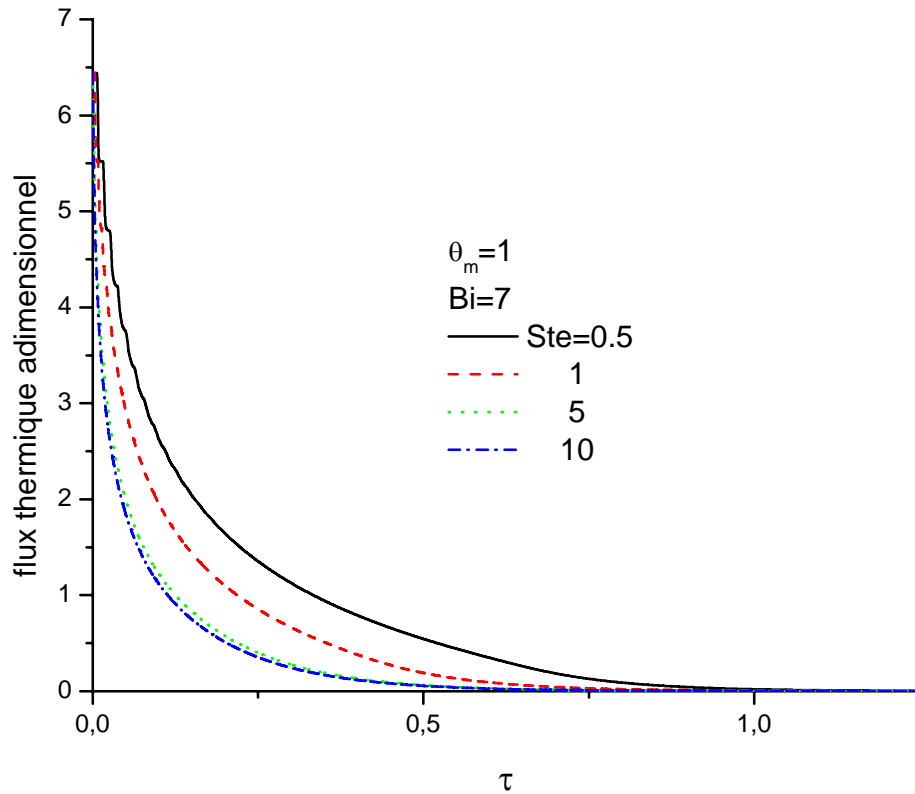


Figure 5.11 : Flux thermique échangé à la surface pour une capsule sphérique

1.4 Evolution du front de solidification

Entre autre, l'évolution du front de solidification revêt d'une importance capitale aussi bien pour les physiciens que pour les industriels, or le contrôle du processus de solidification passe obligatoirement par le contrôle du front de changement de phase.

De la première approximation les courbes du front de solidification sont des paraboles, le profil typique, pour les capsules sphérique et cylindrique, et des lignes quasi droites pour la capsule plane.

A partir de $Bi=5$ ces courbes deviennent peu sensibles au nombre de Biot pour toutes les capsules.

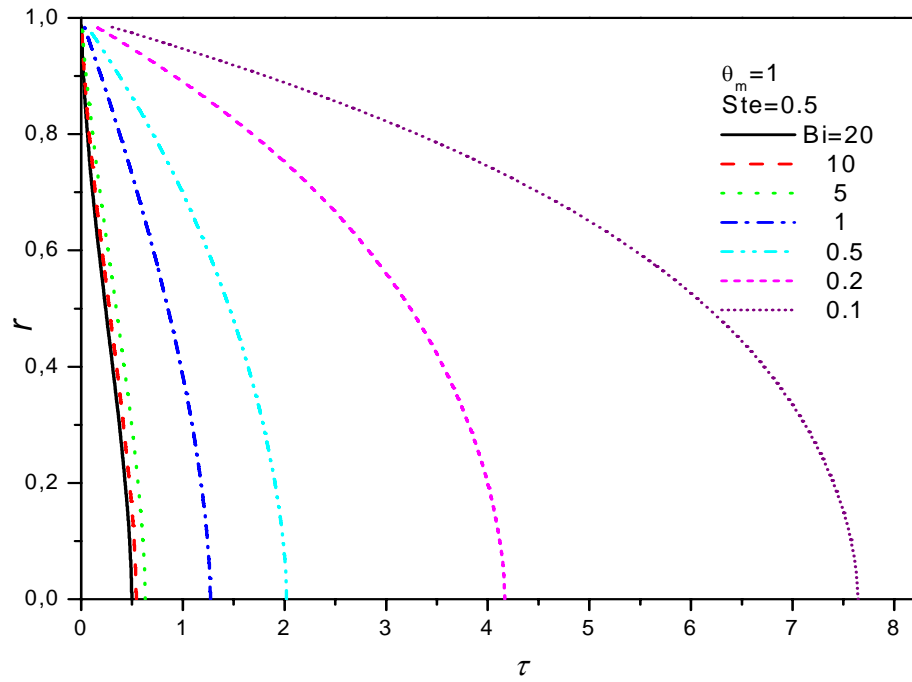


Figure 5.12 : Evolution du front de solidification pour une capsule sphérique

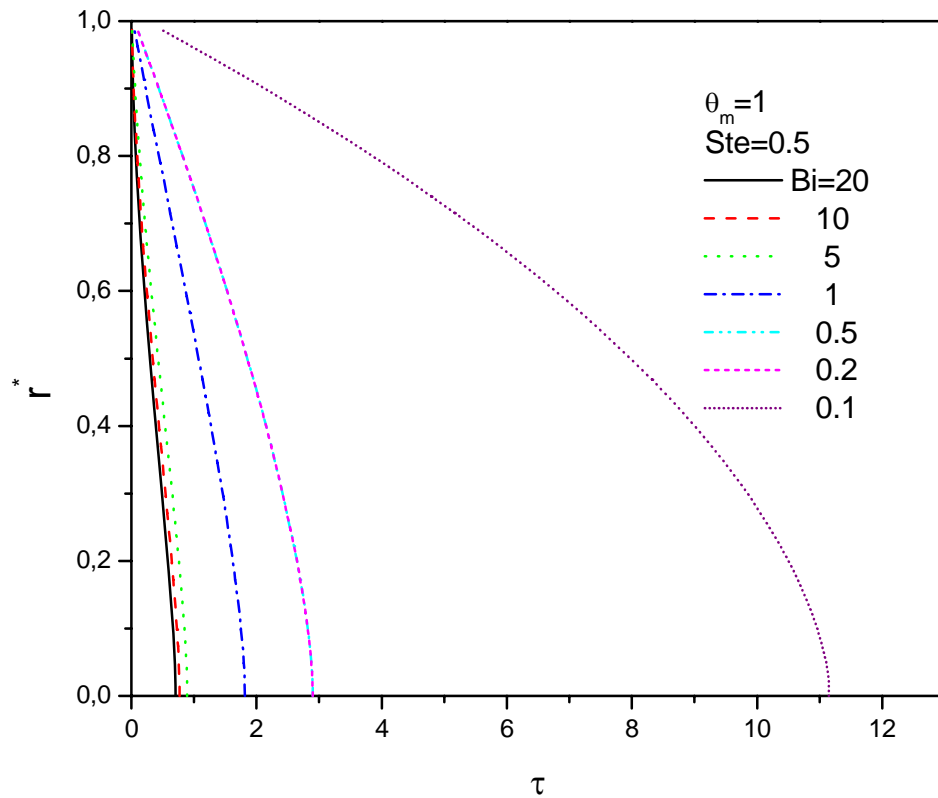


Figure 5.13 : Evolution du front de solidification pour une capsule cylindrique

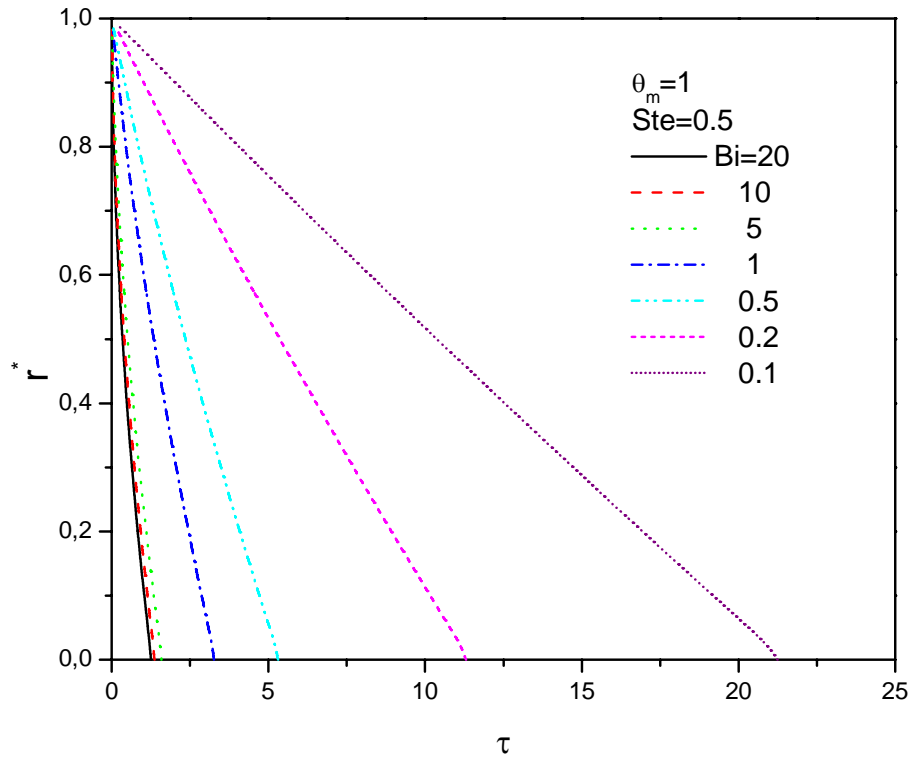


Figure 5.14 : Evolution du front de solidification, capsule plate

1.5 Durée de solidification complète d'une sphère

Pour étudier l'effet des nombres de Biot et de Stefan sur la durée observée par une solidification complète d'une capsule sphérique, examinons les deux figures ci-dessous : Pour des valeurs du nombre de Biot inférieur à 1, on assiste à une descente verticale de la durée que prend une solidification complète de la capsule. Dans cette plage, il y a une hyper-dépendance entre les deux paramètres. Ensuite, la durée converge rapidement et asymptotiquement. A partir de Biot=7, la durée de solidification complète devient inaffectée et demeure quasi constante. Par ailleurs, le même comportement est constaté vis-à-vis du nombre de Stefan, avec certainement une différence dans les ordres de grandeur : $Ste < 0.05$: une descente verticale correspondant à la très forte sensibilité de la durée de solidification complète au nombre de Stefan ; $0.05 < Ste < 0.4$: allure convergente ; $Ste > 0.4$: allure constante

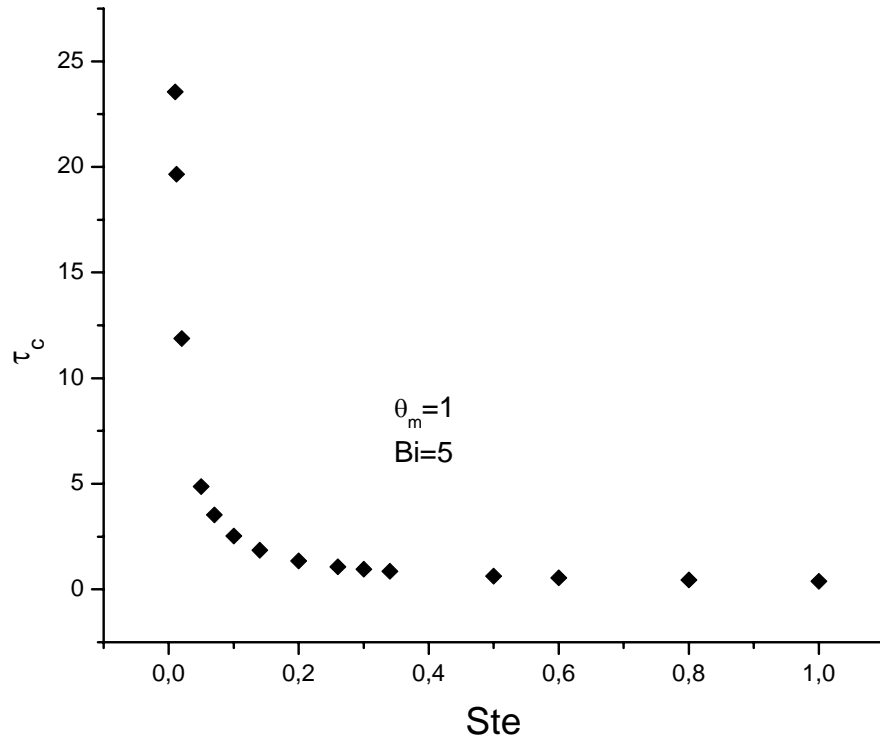


Fig. 5.15 : Effet du nombre de Ste sur la durée de solidification complète pour sphère

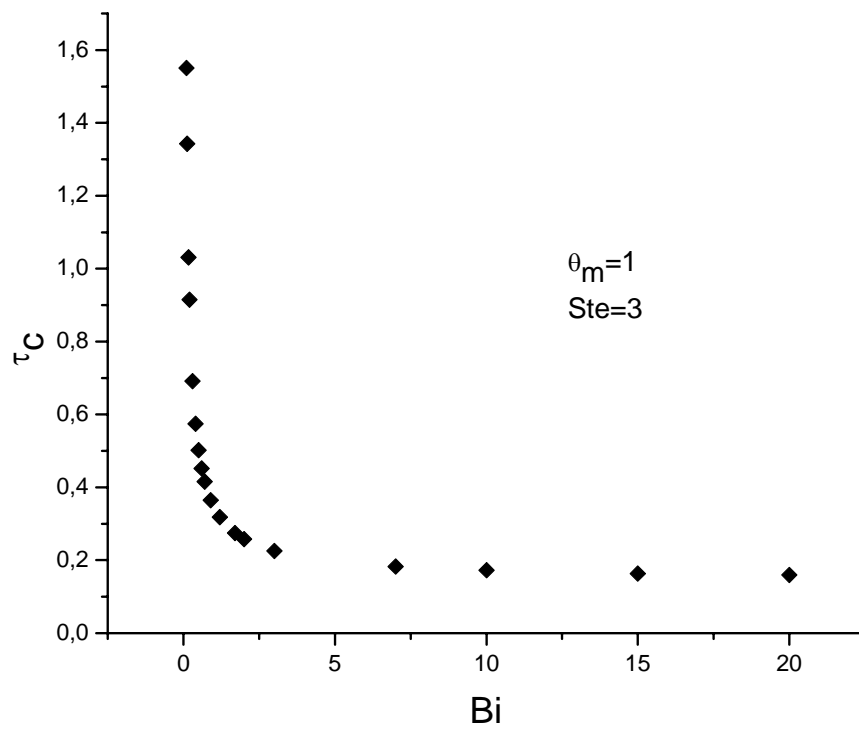


Fig. 5.16: Effet du nombre de Biot sur la durée de solidification complète, sphère

2. Etude de la solidification d'un MCP initialement surfondu ($\Theta_m < 1$)

2.1 Evolution du champ de température

Dans ce qui précède et par mesure de simplification on a fait abstraction d'une phase très importante accompagnant le matériau surfondu et précédant l'instant où la solidification commence à avoir lieu.

Dans cette section, on prend en considération cette phase bien illustré par les trois figures suivantes, cela correspond naturellement à l'échange de la chaleur sensible qui fait passer le MCP de l'état initiale considéré à un état de près à se solidifier où le matériau n'a besoin que de la chaleur latente ni plus ni moins pour devenir solide. Toutefois, il est observé un palier qui est de plus en plus long qu'on s'éloigne de la surface. Ce palier est, en fait, l'indicateur du changement de phase. Ainsi la courbe se traduit par :

- une phase d'échange de la chaleur sensible ramenant le MCP de sa température initiale à sa température de fusion ($\theta_m = 0.7$). Signalons qu'il s'agit ici d'un problème de conduction thermique pure. Ensuite le maintien de cette température jusqu'à ce que le MCP devienne solide. Enfin la dernière phase qui assure l'équilibre thermique entre le solide aussitôt formé et son ambiance par échange de la chaleur sensible (relaxation).

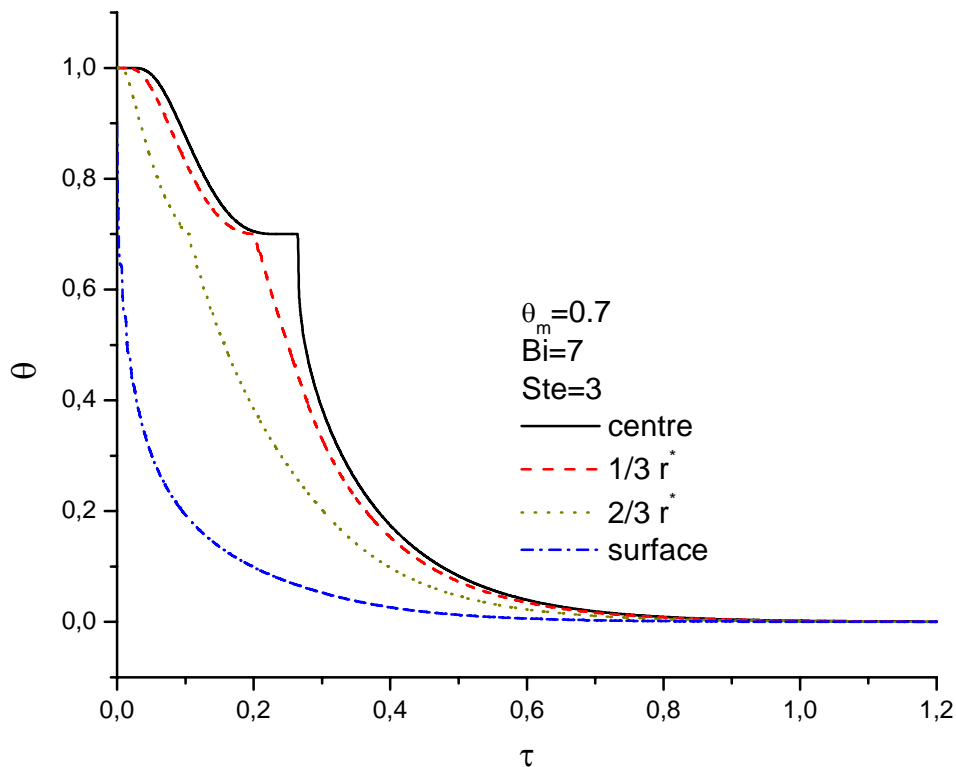


Figure 5.17 : Champ de température pour une capsule sphérique

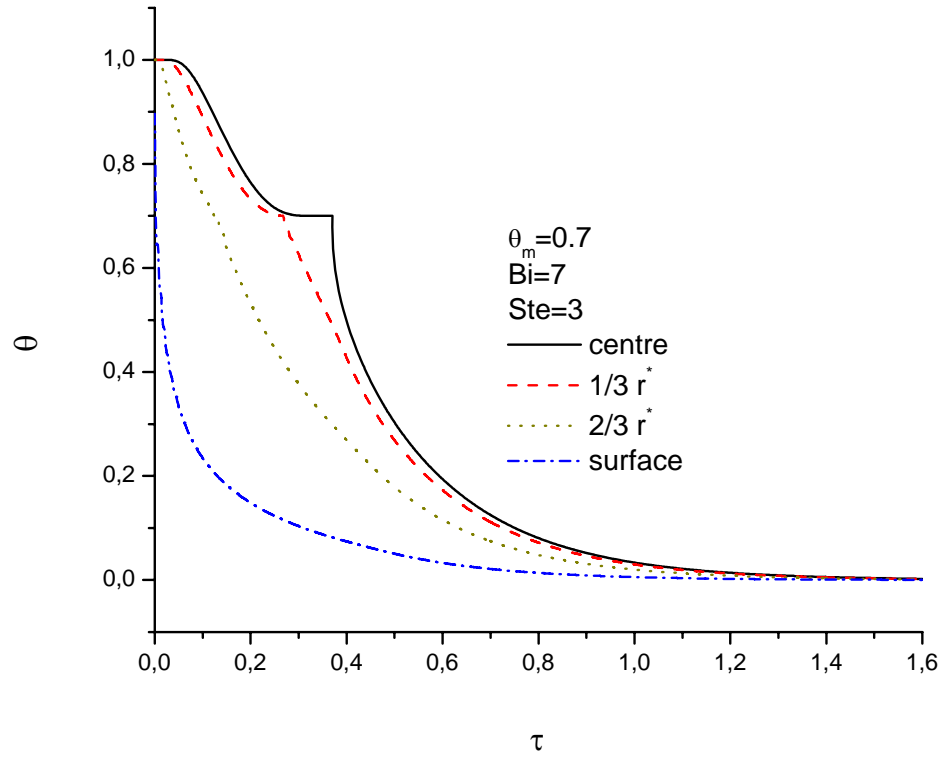


Figure 5.18 : Champ de température pour capsule cylindrique

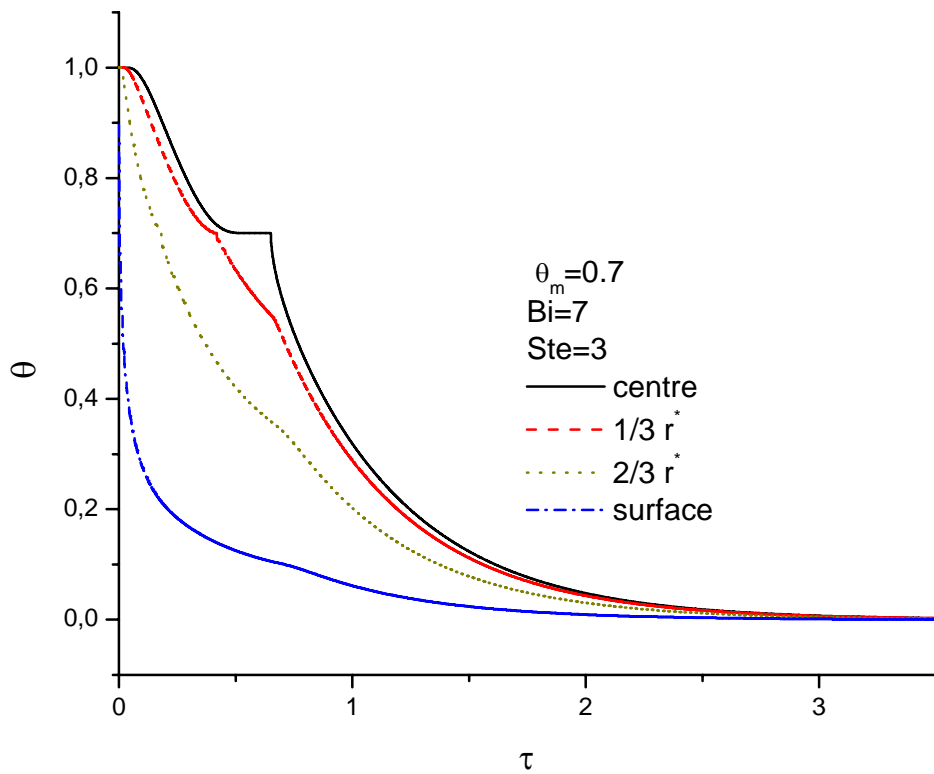


Figure 5.19 : Champ de température pour une capsule plate

2.2 Champ d'enthalpie

Comme il est signalé auparavant, le même profil est attendu pour le champ de l'enthalpie avec la mise en évidence de la chute instantanée de l'enthalpie en faveur d'un changement de phase liquide solide qui sépare les deux phases d'échange thermique sensible (liquide pur et solide pur) qui peuvent être assimilées à un simple problème de conduction

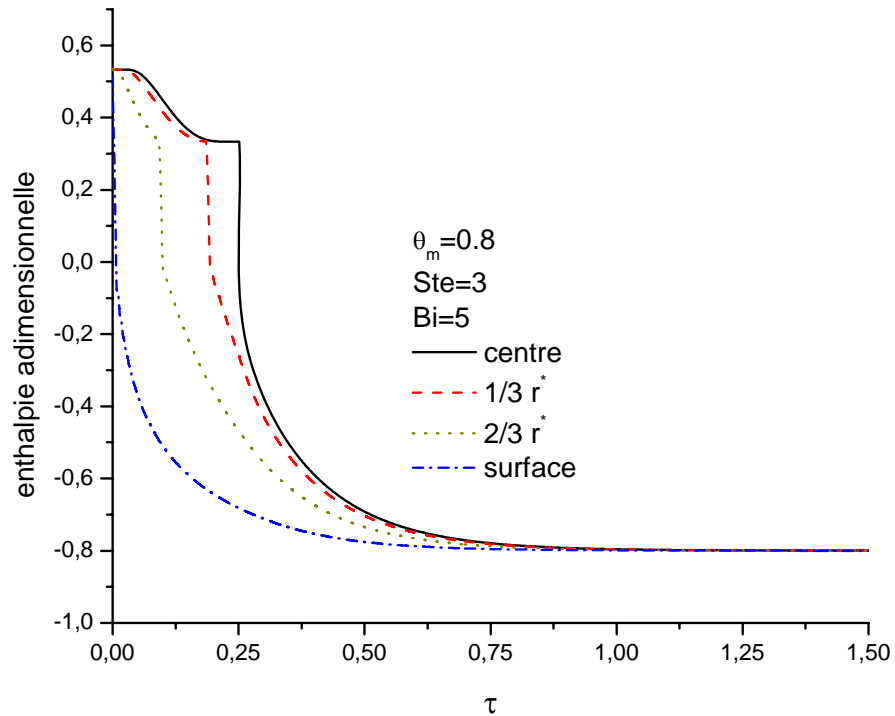


Figure 5.20 : Champ d'enthalpie pour capsule sphérique

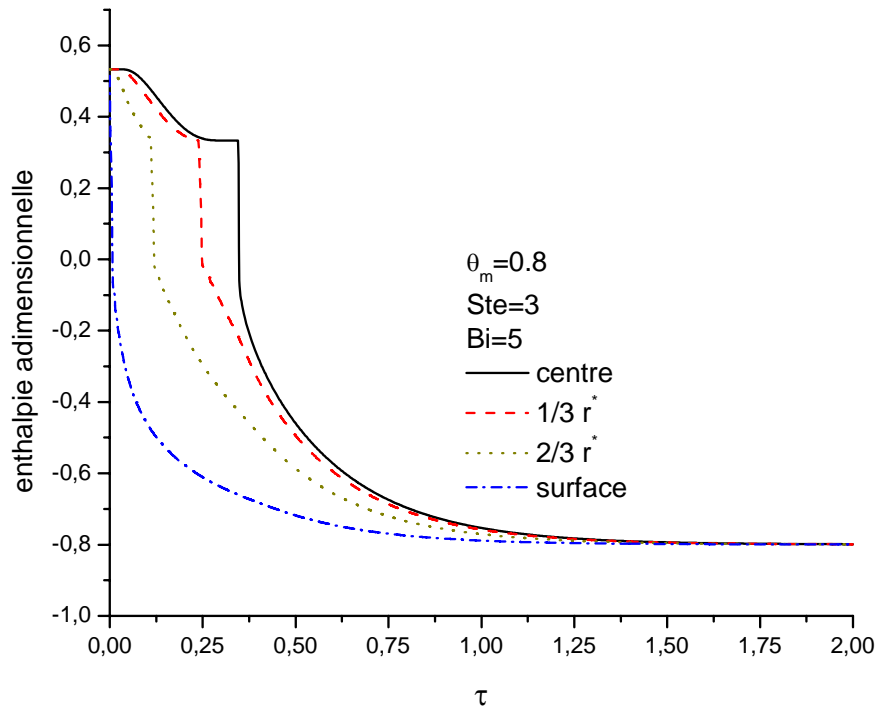


Figure 5.21 : Champ d'enthalpie pour une capsule cylindrique

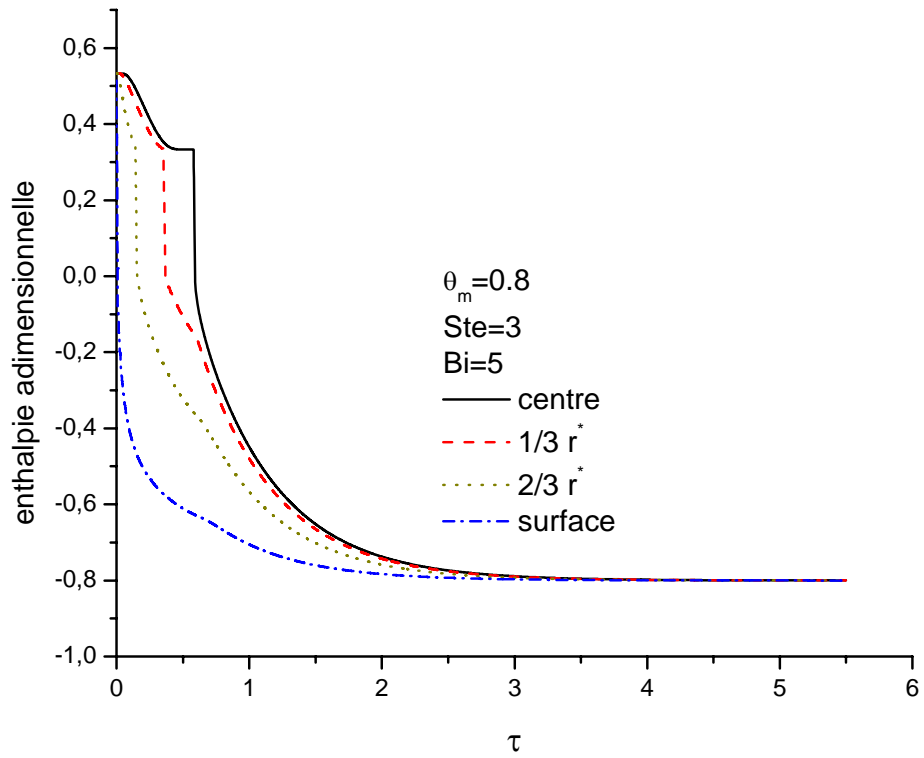


Figure 5.22 : Champ d'enthalpie pour une capsule plane

2.3 Densité de flux de chaleur échangée à la surface

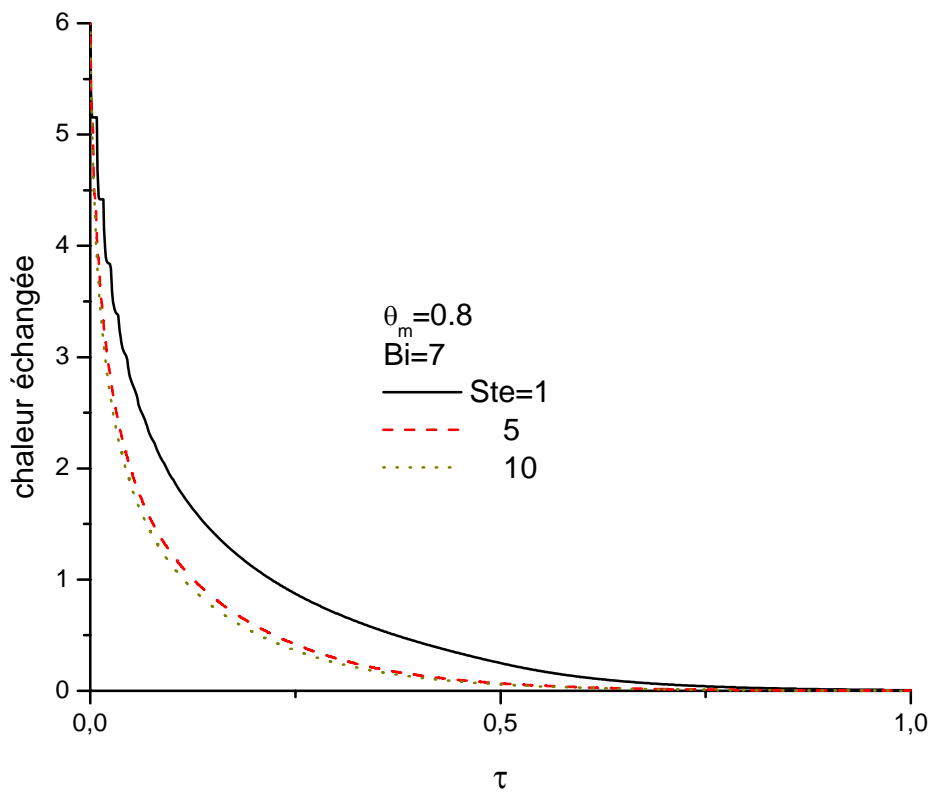


Figure 5.23 : Flux de chaleur à la surface

2.4 Evolution du front de solidification

Au même titre à ce qu'on a remarqué dans la section du matériau initialement à sa température de fusion, l'évolution du front de solidification au cours du temps garde la même allure parabolique pour la capsule sphérique, néanmoins, avec un retard au déclenchement du processus de solidification qui nécessitera, plus tard, un intérêt particulier

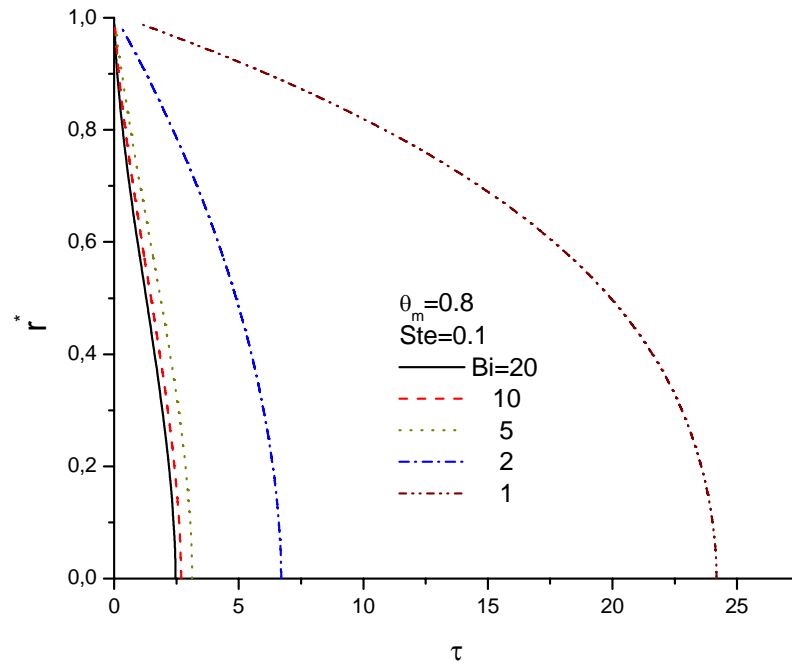


Figure 5.24 : Evolution du front de solidification, sphère

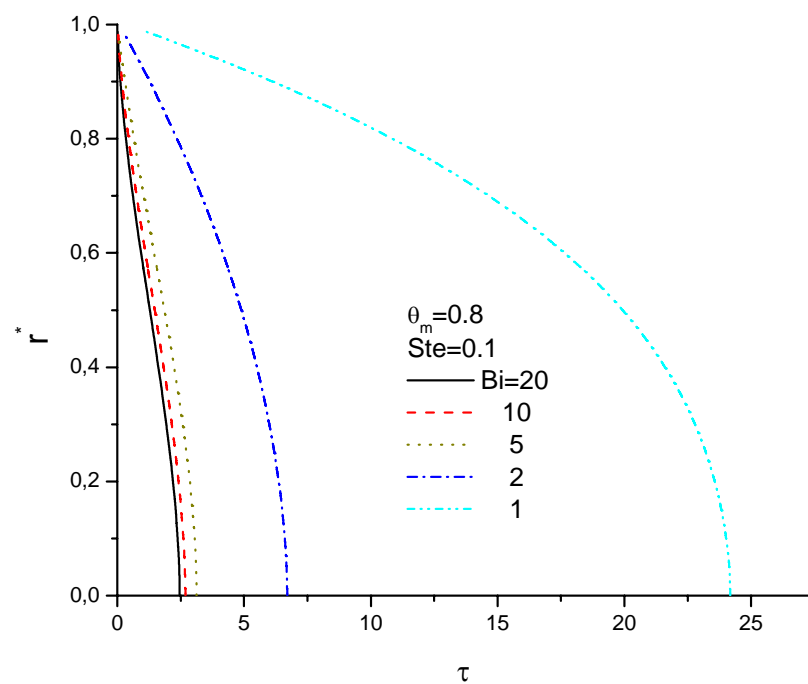


Figure 5.25 : Evolution du front de solidification, cylindre

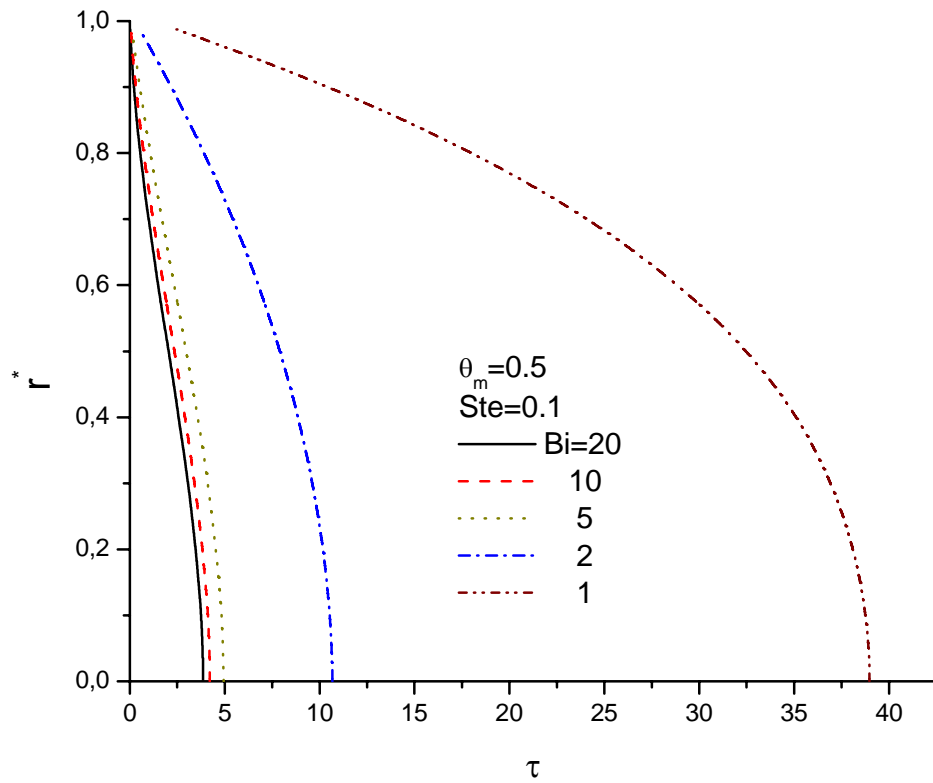


Figure 5.26 : Evolution du front de solidification, plat

2.5 Durée de solidification complète d'une sphère

L'examen de la dépendance de la durée de solidification complète d'une capsule sphérique au degré de surchauffement montre la proportionnalité inverse : plus que le degré de surchauffement est faible plus que la durée est longue.

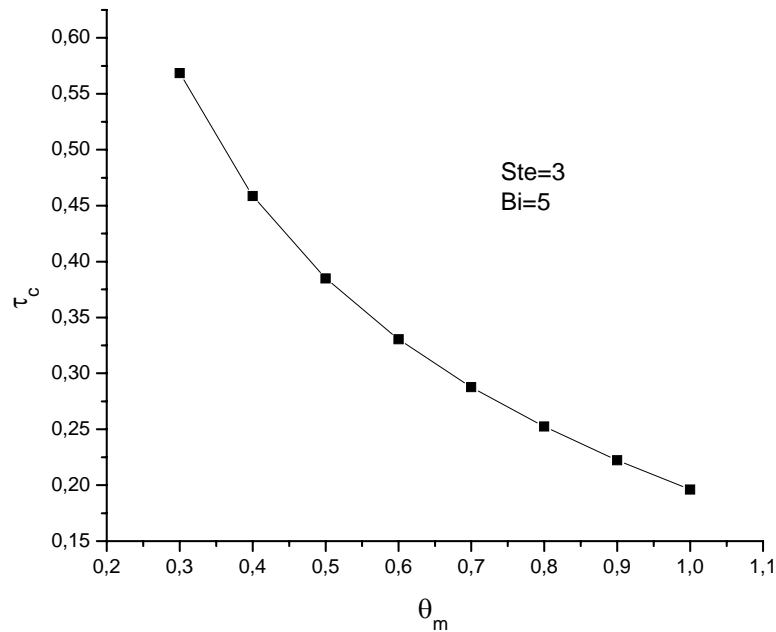


Figure 5.27 : Durée de solidification complète dans une sphère

2.6 Retard cumulé au déclenchement de la cristallisation

2.6.1 Effet du nombre de Stefan

Le retard à la solidification devient sensible au nombre de Stefan s'il franchit le seuil $Ste < 0.4$ pour s'amplifier progressivement jusqu'à $Ste = 0.1$ avant d'aller au prohibitif pour des valeurs de $Ste < 0.1$.

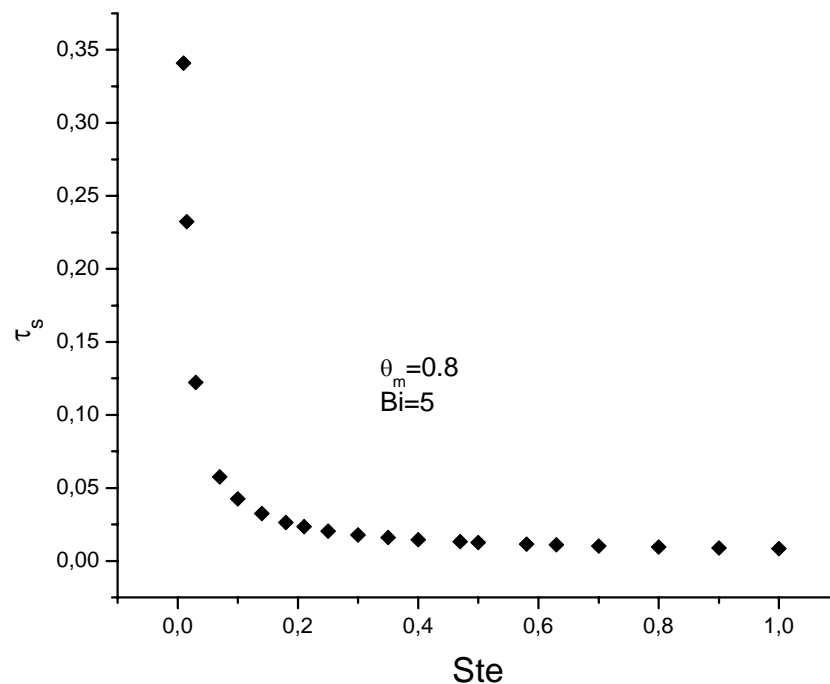


Figure 5.28 : Retard à la solidification dans une sphère, effet du nombre de Stefan

2.6.2 Effet du nombre de Biot

Idem pour l'effet du nombre de Biot sur le retard à la solidification, il en est tiré trois zones distinctes :

$Bi > 3$: le retard n'est guère affecté

$0.2 < Bi < 3$: proportionnalité inverse avec le retard

$Bi < 0.2$: hyper dépendance

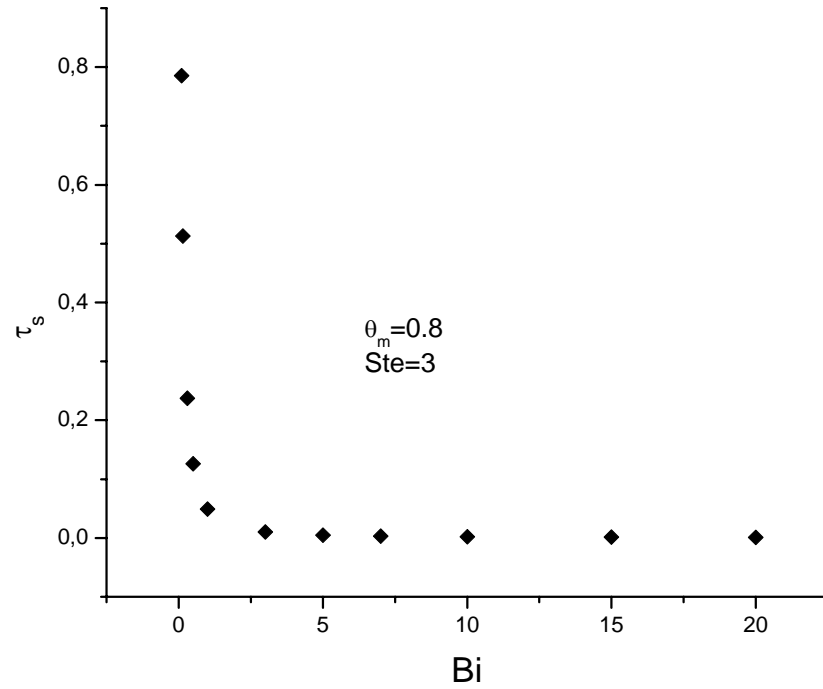


Figure 5.39 : Retard à la solidification dans une sphère, effet du nombre de Biot

2.6.3 Effet du degré de surchauffement

Ce qui est remarqué à la section relative à la durée de solidification complète et l'effet du degré de surchauffement est repris : la notable proportionnalité inverse du retard à la cristallisation et le degré de surchauffement.

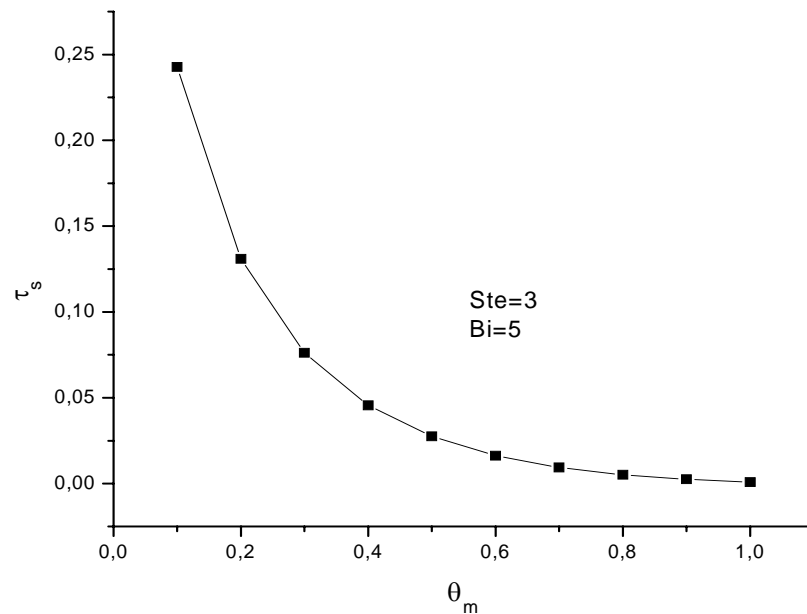


Figure 5.30 : Retard à la solidification dans une sphère, effet du nombre du degré de surchauffement

3. Etude de la solidification de l'eau comme MCP

Pour plus de particularité et afin de répondre aux objectifs de cette étude, prenons le cas du nodule type : une sphère de 77 mm de diamètre analogue à celle rencontrée dans les systèmes de réfrigération et de conditionnement d'air, remplie d'eau. Autour de la surface du nodule circule un fluide frigoporteur, le coefficient d'échange thermique est considéré constant.

Vu sa disponibilité en abondance, son coût très bas et surtout sa chaleur latente élevée l'eau est comptée parmi les matériaux à changement de phase les plus utilisés bien qu'il présente le problème de la surfusion, un fléau qui est amorti généralement par l'ajout des agents nucléants pour anticiper davantage le déclenchement du processus de la cristallisation.

Pour la majorité des matériaux, l'état solide est plus dense que l'état liquide. L'eau en fait l'exception de la règle par le fait que la glace est moins dense que l'eau : un état de fait remarqué par la flotte de la glace dans l'eau ou encore la cassure des conduites d'eau en hiver dans les pays qui observent des chutes importantes du thermomètre à cette saison.

3.1 Le processus de cristallisation et la surfusion

La plupart des solides sont cristallins de particules arrangées sous formes de mailles répétitifs. De ce fait la formation d'une telle maille demande la pénétration des atomes et molécules qui prend généralement du temps ou encore un supplément d'énergie extraite ce qui explique l'état métastable dite surfusion qui est le maintien de l'état liquide même à des températures inférieures à celle de la fusion. La surfusion qui accompagne la cristallisation est rarement observée lors du processus de la fusion ou l'état liquide ne demande pas de structures pour se former (Akyurt, 2002).

3.2 Les paramètres physiques constants dans l'étude

Dans le tableau ci-dessous sont présentés les paramètres retenus inchangés dans la présente étude (Akyurt, 2002).

masse volumique de la glace	$\rho = 917 \text{ kg/m}^3$
conductivité thermique de la glace	$K_s = 2.22 \text{ W/m.k}$
chaleur spécifique de la glace	$C_s = 2010 \text{ J/kg.}^\circ\text{C}$
chaleur latente de fusion de l'eau	$L = 333600 \text{ J/kg}$
température de fusion de l'eau	$T_f = 0^\circ$

3.2.1 Les paramètres pronominaux

Lors de la simulation, les valeurs nominales sont la température initiale de l'eau $T_i = 25^\circ\text{C}$, la température du réfrigérant $T_a = -10^\circ\text{C}$ et le coefficient d'échange thermique à la surface $h = 130 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. L'étude numérique est réalisée en simulant l'effet de chaque paramètre du système sur l'évolution du front liquide-solide et la durée d'une solidification complète.

3.3 Evolution du front de solidification

3.3.1 Effet du coefficient d'échange thermique

La figure qui suit montre l'effet du coefficient d'échange thermique sur l'évolution du front de solidification. Du coup, on constate que le profil est quasi linéaire tant que le front de solidification est loin du centre. Une fois qu'on s'approche du centre il a une tendance d'accélération où la courbe devient recourbée. Il est conclu qu'on a intérêt à augmenter le coefficient d'échange thermique pour réduire la durée du processus de solidification.

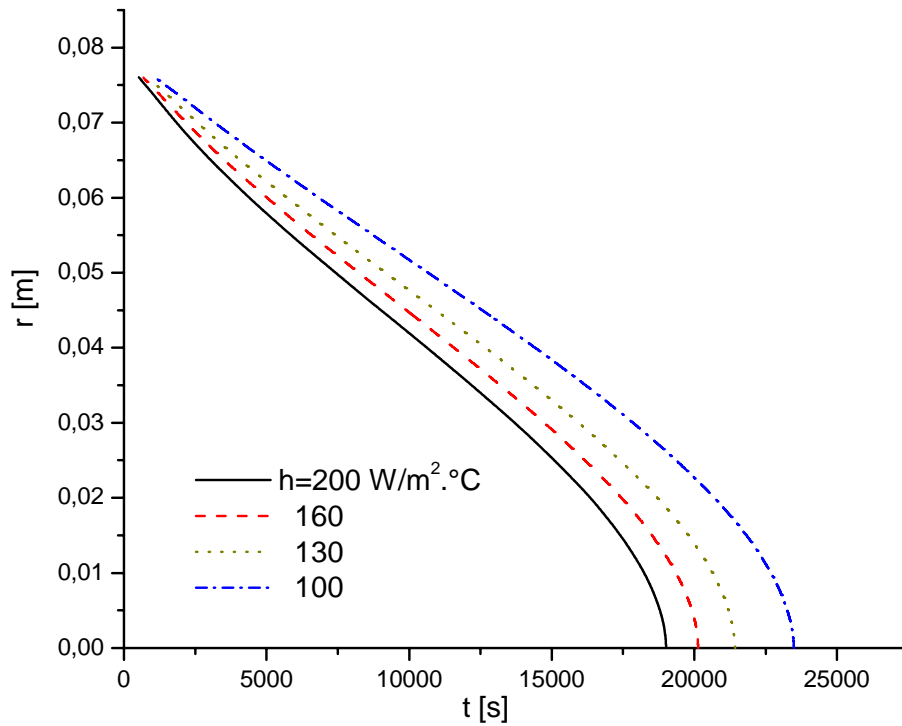


Figure 5.31 : Front de solidification, effet du coefficient d'échange h

3.3.2 Effet de la température initiale

Pour étudier l'effet de la température initiale sur l'évolution du front de solidification, on a simulé une gamme allant de 0°C à 20°C en gardant les autres paramètres figés aux valeurs nominales. Le graphe issu de cette simulation rend compte de l'effet peu important de la température initiale: les courbes sont juxtaposées.

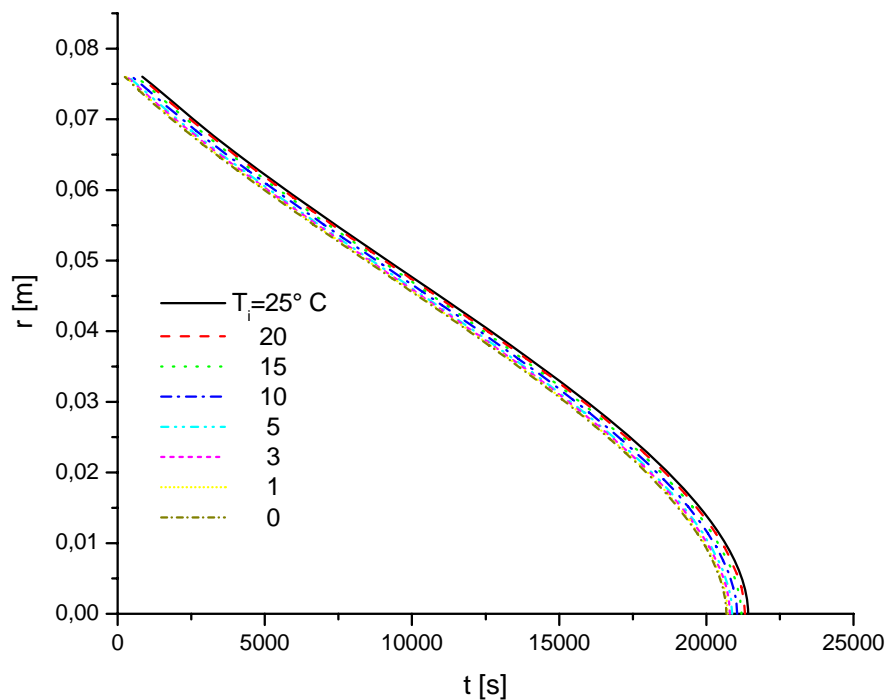


Figure 5.32 : Front de solidification, effet de la température initiale

3.3.3 Effet de la température du réfrigérant

On procède de même pour l'étude de l'effet de la température du réfrigérant qui assure l'apport des frigorifiques nécessaires à la solidification de l'eau. Pour une plage s'étalant de -2°C à -20°C , on a rapporté les résultats de la simulation dans la figure ci-dessous. Il est évident que l'effet de ce paramètre s'accroît pour les températures au-dessous de -10°C , bien qu'il est au détriment de la capacité frigorifique de l'installation.

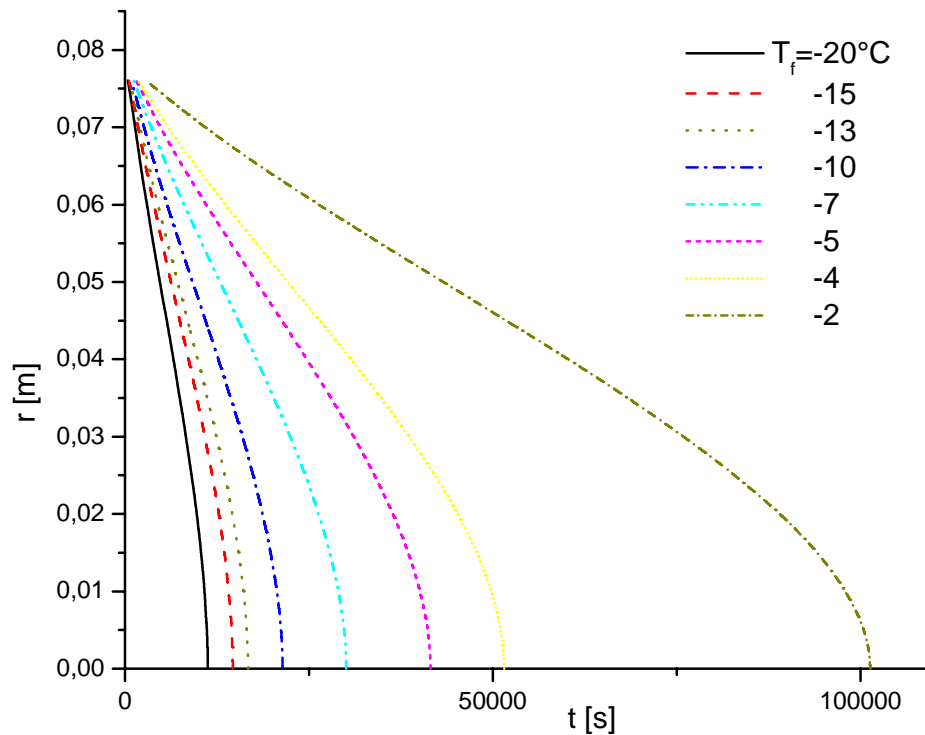


Figure 5.33 : Front de solidification, effet de la température du réfrigérant

3.4 Durée de solidification complète

Les graphes sus-présentés concernant l'évolution du front liquide-solide rapportent son évolution temporelle. Néanmoins la durée d'une solidification complète semble avoir un intérêt industriel et économique incontournable, d'où émane le souci d'une étude quantitative couronnée par des chiffres pratiques pour l'ingénierie.

3.4.1 Effet du coefficient d'échange thermique

Le premier facteur proposé est le coefficient d'échange thermique. Signalons que ce paramètre est loin d'être constant, il est, en fait, en variation continue dépendant de plusieurs paramètres : la vitesse de l'écoulement du fluide ; la nature du

fluide lui-même et ses propriétés. De plus, on devrait parler d'un coefficient d'échange local.

Vu la complexité de cumul des deux études extra et intra-capsule, plusieurs chercheurs ont pris le relais de ces études à part comme on a vu dans l'étude bibliographique (Bareiss, 1984 ; Gobin, 1990). Cependant, le coefficient moyen sur toute la surface de la capsule est un choix unanime dans la littérature de l'intra capsule à raison de simplification. Or pour des coefficients allant de 100 à 200 $W/m^2\text{°C}$, il s'est avéré que la durée de solidification complète d'un nodule sphérique est inversement proportionnelle au coefficient d'échange thermique.

Toutefois pour $h=200 W/m^2\text{°C}$ un nodule type ($\text{Ø}77 mm$) rempli d'eau initialement à 25°C prend 5 heures 17 minutes pour se solidifier complètement ; alors que pour $h=130 W/m^2\text{°C}$, cette durée s'accroît à 5 heures 57 minutes, soit une différence de 51 minutes environ.

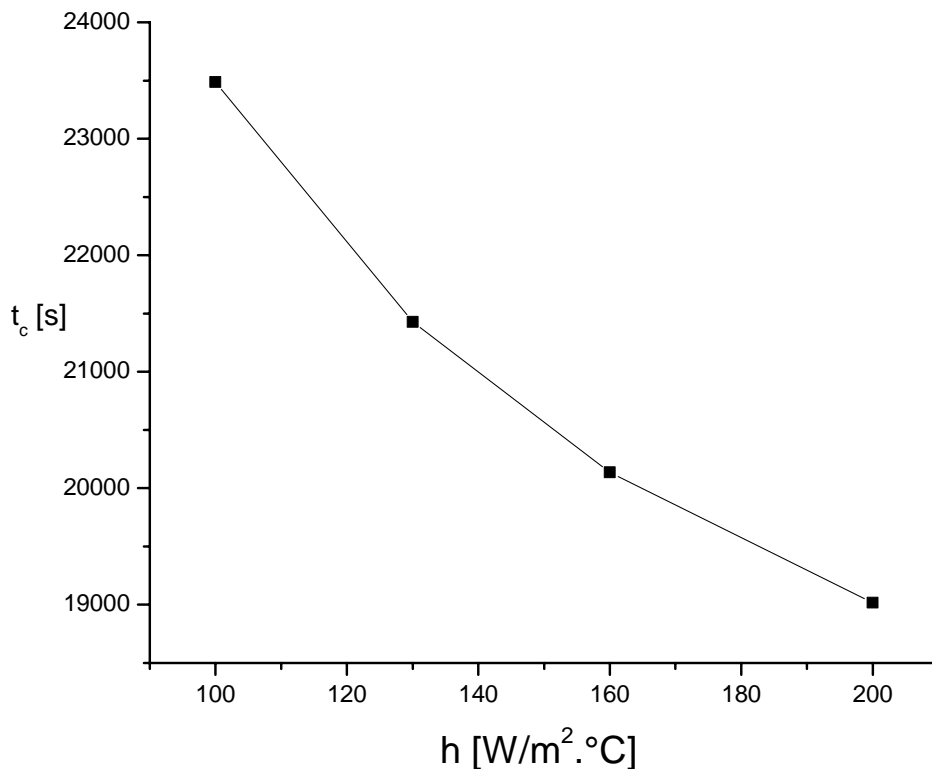


Figure 5.34 : Durée de solidification complète, effet du coefficient d'échange

3.4.2 Effet de La température initiale

Des figures rapportant la dépendance entre la durée de solidification et la température initiale de l'eau contenue dans le nodule, on constate que plus que l'eau

est à une température proche de sa température de fusion plus que la durée de solidification complète est petite.

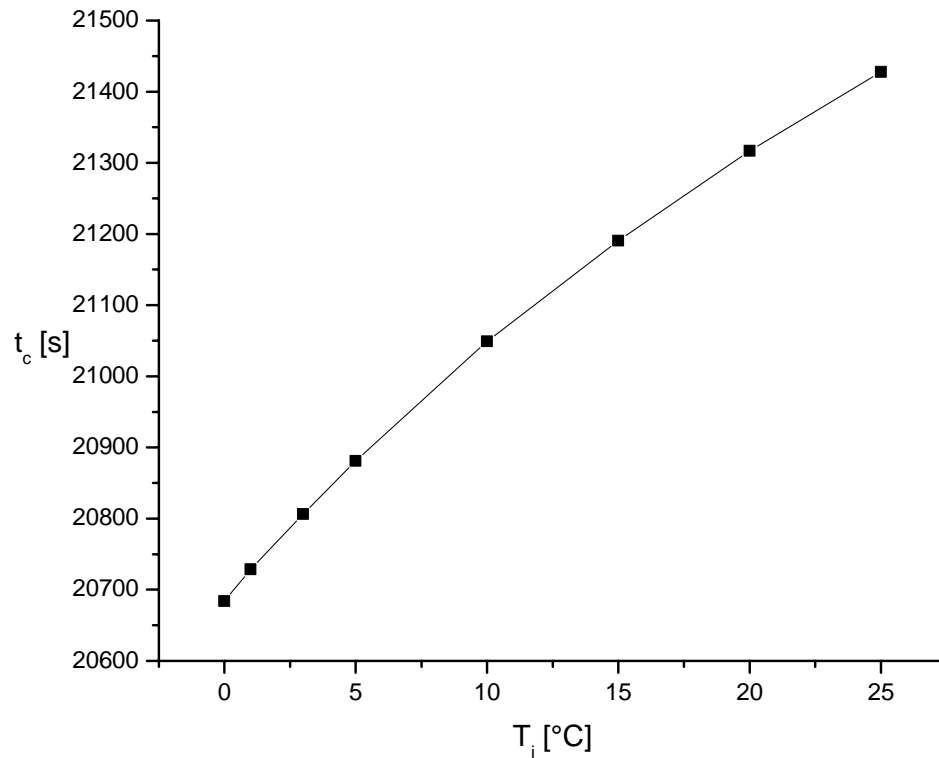


Figure 5.35 : Durée de solidification complète, effet de la température initiale

3.4.3 Effet de la température du réfrigérant

Il est déjà noté que la température du réfrigérant influence fortement le processus de solidification, la figure ci-dessous vient pour réaffirmer ce propos. On peut en suggérer que pour un réfrigérant de température au-dessus de -7°C , la durée de solidification complète d'un nodule sphérique va au prohibitif. Alors qu'au dessous de la barre de -13°C , un double inconvénient en découle :

- sans grande diminution de la durée de solidification complète.
- le recours à un supplément d'énergie pour l'installation

Par conséquent, dans la pratique c'est cette fourchette -7 à -13°C qui mérite l'attention. Or, il faut 8 h 21 min pour qu'un nodule type se solidifie complètement avec un fluide sous température de -7°C , cette durée est réduite à 5 h 57 min pour une température de -10°C et à 4 h 39 min pour -13°C .

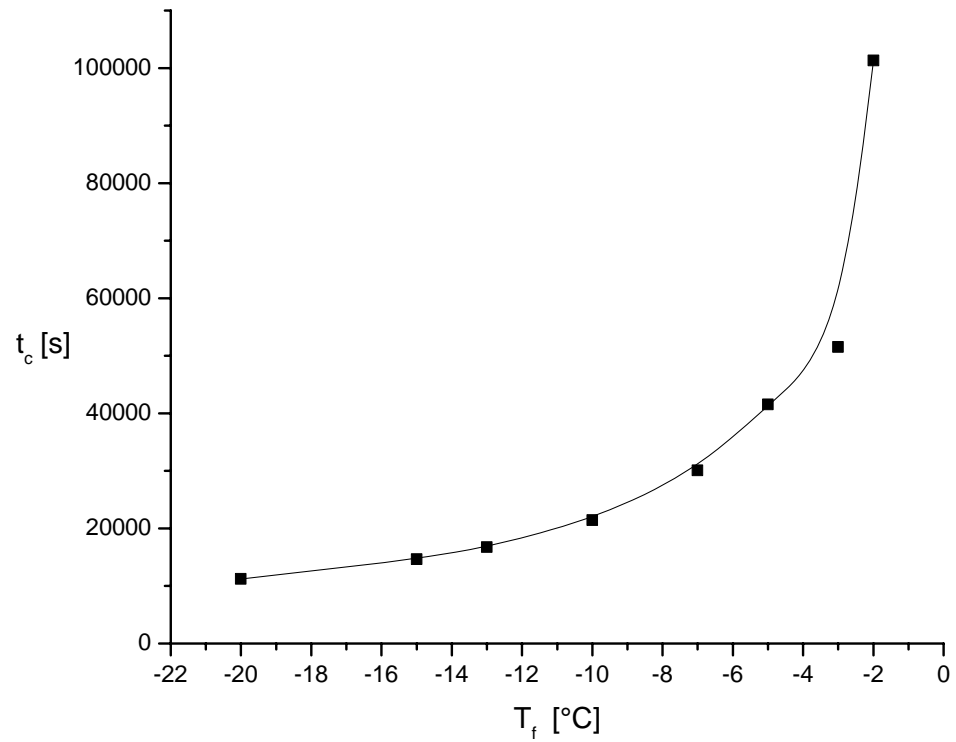


Figure 5.36 : Durée de solidification complète, effet de la température du réfrigérant

Ainsi on arrive au bout de cette étude, que conclut on alors?

Conclusion

La modélisation de solidification d'un matériau à changement de phase dans des capsules de différentes géométries (sphérique, cylindrique et plate) est menée à bien afin d'étudier le processus de solidification : l'effet des nombres adimensionnels et encore l'influence des paramètres opérationnel en prenant le cas d'un nodule analogue à celui rencontré souvent dans les systèmes de stockage du froid.

Bien que le modèle ignore le phénomène de surfusion et qui ne peut pas prédire le rétrécissement du front de solidification radiale à la limite du centre observé expérimentalement dans d'autres travaux, néanmoins, il reste le plus fiable à l'issue des comparaisons de validation.

D'un point de vue fondamental que pratique, cette étude aide à mieux comprendre le phénomène de solidification. Elle servira comme contribution pour la conception des installations de stockage du froid où d'un ordre plus général pour tous les systèmes utilisant un matériau à changement de phase liquide-solide encapsulé.

La simplicité et la fiabilité de la méthode enthalpique avec l'approche des volumes finis présente en contre partie des oscillations d'origine numérique pour un maillage inapproprié d'une part et pour des nombres réduits de Stefan d'autre part.

Un nombre élevé de Biot semble accélérer le processus de cristallisation et diminuer la durée relative à un cycle complet de solidification. Idem pour le nombre de Stefan.

Alors que sur le plan pratique, il s'est avéré que plus que la température du réfrigérant est basse plus que la durée d'une solidification complète est courte. Par contre la température initiale du MCP est d'un effet insignifiant sur la durée de solidification complète.

Toutefois ce domaine à la fois intéressant et captivant laisse encore une horizon si vaste pour des travaux expérimentaux, analytiques, numériques et des applications nouvelles des matériaux à changement de phase qui bien qu'ils sont omniprésents, on croit encore qu'ils aient bien d'autres terrains à gagner :

Par le fait que le phénomène de surfusion et le caractère erratique échappent encore d'une description mathématique fine!

Les solutions analytiques, peu soient elles, restent réservées uniquement à des configurations simples qui ne peuvent pas être projetées à des cas pratiques.

Les simulations numériques auront à diminuer les hypothèses simplificatrices...

References

- Akyurt M., G. Zaki, B. Habeebullah**, "*Freezing phenomena in ice–water systems* ", Energy Conversion & Management 43, pp. 1773-1789, 2002
- Ayasoufi A.**, "*Numerical simulation of heat conduction with melting and/or freezing by space time conservation element and solution element method* ", thèse doctorale, Université de Toledo, 2004
- Bahrami P., T. Wang**, "*Analysis of gravity and conduction driven melting in a sphere*", Transactions of the ASME, 109, pp. 809-809, 1987
- Bareiss M., H. Beer**, "*Influence of natural convection on the melting process in a vertical cylindrical enclosure* ", Int. J. Heat and Mass Transfer 27, pp. 739-746, 1984
- Bédécarrats J. P., F. Strub, B. Falcon and J. P. Dumas**, "*Phase change thermal energy storage using spherical capsules performance of a test plan*", International Journal of Refrigeration, 19, pp. 187-196, 1996
- Bédécarrats J., T. Kousksou, J. P Dumas, A. Mimet**, "*Effet de la surfusion sur un stockage par chaleur latente* ", in FIER, Tétouan, Maroc, 2002
- Bédécarrats J., J. Dumas**, "*Etude de la cristallisation de nodules contenant un matériau à changement de phase en vue du stockage par chaleur latente* ", Int. J. Heat and Mass Transfer 40, pp.149-157, 1997
- Beer H., M. Bareiss**, "*An analytical solution of the heat transfer process during melting of unfixed solid phase change material inside a horizontal tube*", Int. J. Heat and Mass Transfer , 27, pp.739-746, 1984
- Bénard C.**, "*Problèmes inverses dans les processus à changement de phase*", in 4° GUT, pp. 443-474, Pont à Mousson, 1992
- Bolidar Sarler**, "*Stefan's work on solid-liquid phase changes*", Engineering Analysis with Boundary Elements, 16, pp. 83-92, 1995
- Bouterfa N.**, "*Une année placée sous le signe de la rupture* ", Noor, 2, 2005
- Chan S., D. Cho, G. Kocamustafaogllari**, "*Melting and solidification with internal radiative transfer* ", Int. J. Heat and Mass Transfer, 26, pp.621-633, 1983
- Cheung F., T. Chawla, P. Pederson**, "*the effect of heat generation and wall interaction on freezing and melting in a finite slab* ", Int. J. Heat and Mass Transfer, 27, pp. 29-37, 1984

- Costa M., D. Buddhi, A. Oliva**, "Numerical simulation of a latent heat thermal energy storage system with enhanced heat conduction ", *Energy Conversion & Management*, 39, pp. 319-330, 1998
- Del Monaco J. L.**, "Installation and assessment of cool storage unitary rooftop unit", *IEEE, Transactions on power systems*, 5, pp. 34-39, 1990
- Delaunay D.**, "Transfert de chaleur par conduction associée à un changement de phase", in 4° GUT, pp. 326-372, Pont à Mousson, 1992
- Caldwell J., C. Chan**, "Spherical solidification by the enthalpy method and the heat balance integral method ", *Applied Mathematical Modeling* 24, pp. 45-53, 2000
- Charles C., R. Viskanta**, "On the hypothesis of internal phase change", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 32, pp. 1267-1272, 2005
- Chen S., Wang P., L. Tzong**, "An experimental investigation of nucleation probability of supercooled water inside cylindrical capsules ", *Experimental Thermal and Fluid Science* 18, pp. 299-306, 1999
- Chen S., T. Lee**, "A study of supercooling phenomenon and freezing probability of water inside horizontal cylinders ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 41, pp. 169-183, 1998
- Cho K., S. H. Choi**, " Thermal characteristics of paraffin in a spherical capsule during freezing and melting processes ", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 43, pp. 3183-3196, 2000
- Dumas J. P.**, "Le stockage du froid par chaleur latente ", *Technique de l'ingénieur, traité génie énergétique*, BE 9 775, pp.1-22, 1995
- Gobin D.**, "Convection naturelle et changement de phase solide liquide", in 4° GUT, pp. 374-428, Pont à Mousson, 1992
- Faydi et al.** "Etude expérimentale et théorique du transfert de chaleur et de la taille moyenne des cristaux de glace lors de la congélation de crème glacées", *Congrès français de thermique*, pp. 59-64, 2000
- Fikiin A.**, "Generalized numerical modelling of unsteady heat transfer during cooling and freezing using an improved enthalpy method and quasi-one-dimensional formulation ", *Int. J. Refrigeration*, 19, pp. 132-140, 1996
- Eames I., K. Adref**, "Freezing and melting of water in spherical enclosures of the type used in thermal (ice) storage systems ", *Applied Thermal Engineering*, 22, pp. 733-745, 2002

- Hasnain S. M.**, "*Review on sustainable thermal energy storage technologies, Part II cool thermal storage, materials and technique*", Energy Conversion & Management, 39, pp.1139-1153, 1998
- Hale N., R. Viskanta**, "*Solid-liquid phase change heat transfer and interface motion in materials cooled or heated from above or below*", Int. J. Heat and Mass Transfer, 23(3), pp. 283-292, 1980
- Hasnain S. M, N. Alabbadi**, "*Need for thermal storage air conditioning in Saudi Arabia*", Applied Energy, 65, pp.153-164, 2000
- Hisham E., I. Alatiqi, M. Sahali, K. Al-Hajirie**, "*Heat transfer enhancement in energy storage in spherical capsules filled with paraffin wax and metal beads*", Energy Conversion & Management, 47, pp. 211-228, 2006
- Hiki Hong, A. Saito**, "*Numerical method for direct contact melting in transient process*", Int. J. Heat and Mass Transfer 36(8), pp. 2093-2103, 1993
- Hill M., A. Kucera**, "*Freezing a saturated liquid inside a sphere*", Int. J. Heat and Mass Transfer 26(11), pp.1631-1637, 1983
- Hozumi T., A. Saito, S. Okawa, T. Matsumura**, "*Effect of bubble nuclei on freezing of supercooled water*", Int. J. of Refrigeration, 25, pp. 243-249, 2002
- Ho C., R. Viskanta**, "*Heat transfer during inward melting in a horizontal tube*", Int. J. Heat and Mass Transfer 27(5), pp.705-716, 1984
- Huraib F.S., S.M. Hasnain, S.E. Awaji**, "*Lessons learned from solar energy projects in Saudi Arabia*", WREC, pp.1144-1147, 1996
- Issad H.**, "*Bilan 2004*", Echo de Sonelgaz, 2005
- Isachenko V.**, "Heat transfer", Mir, 1977
- Ismail K., J. R. Henríquez, T.M. Da Silva**, "*A parametric study on ice formation inside a spherical capsule*", Int. J. of Thermal Sciences, 42, pp. 881–887, 2003
- Ismail K., J. R. Henriquez**, "*Numerical and experimental study of spherical capsules packed bed latent heat storage system*", Applied Thermal Engineering, 22, pp. 1705-1716, 2002
- Ismail K., J. R. Henriquez**, "*Solidification of pcm inside a spherical capsule*", Energy Conversion & Management, 41, pp. 173-187, 2000

- Ismail K., J. R. Henriquez**, "A numerical and experimental study on a parallel plate ice bank", Applied Thermal Engineering, 19, pp. 163-193, 1999
- Kousksou T., J. Bédécarrats, J. Dumas, A. Mimet**, "Dynamic modelling of the storage of an encapsulated ice tank ", Applied Thermal Engineering, 25, pp. 534-548, 2005
- Lamberg L., R. Lehtiniemi, A. Henell**, "Numerical and experimental investigation of melting and freezing processes in phase change material storage", Int. J. of Thermal Sciences, 43, pp. 277-287, 2004
- Latif M., J. S. Gaye**, "Analysis of solidification and melting of PCM with energy generation", Applied Thermal Engineering, 26, pp. 568-575, 2006
- Levent B., I. Zazfer**, "Total solidification time of a liquid phase change material enclosed in cylindrical/spherical containers ", Applied Thermal Engineering, 25, pp. 1488-1502, 2005
- Mohan A., A. Asce**, "Heat transfer in soil water ice systems ", J. geotechnical engineering division, pp.97-111, 1975
- Mosally F., A. Wood, A. Al-Fhaid**, "On the convergence of the heat balance integral method", Applied Mathematical Modelling, 29, pp. 903-912, 2005
- Nehad K.**, "Enthalpy technique for solution of Stefan problems ", Int. Communications in Heat Mass Transfer, 22, pp. 779-790, 1995
- Okawa S.**, "Nucleation of supercooled water on solid surfaces", International Journal of Refrigeration 29, 134-141, 2006
- Okawa S., A. Saito , H. Suto**, "The experimental study on freezing of supercooled water using metallic surface", International Journal of Refrigeration 25, 514-520, 2002
- Okawa S., A. Saito, Ryuta M.**, "The solidification phenomenon of the supercooled water containing solid particles ", International Journal of Refrigeration, 24, pp.108-117, 2001
- Patankar S.**, "Numerical heat transfer and fluid flow ", Taylor and Francis, 1978
- Roday P.**, "Mathematical Analysis Of One-Dimensional Melting-Freezing In Finite Slabs Subjected To Convective Boundary Conditions Using The Heat Balance Integral Technique", thesis: Master of science, University of Cincinnati-India, 2004
- Roy S., S. Sengupta**, "The melting process within spherical enclosures", Transactions of ASME, 109, pp. 460-462, 1987
- Royon L., G. Guiffant, P. Flaud**, "Investigation of heat transfer in polymeric phase change material for low level heat storage ", Energy Conversion & Management, 38 (6), pp. 517-524, 1997

- Ruckenstein E., Y. S. Djikaev**, "*Recent developments in the kinetic theory of nucleation*", Advances in Colloid and Interface Science, 118, pp. 51-72, 2005
- Sebzali M., P. Rubini**, "*Analysis of ice cool thermal storage for a clinic building in Kuwait*", Energy Conversion & Management, 47, pp. 3417-3434, 2006
- Saito A.**, "*Recent advances in research on cold thermal energy storage*", Int. J. of Refrigeration, 25, pp.177-189, 2002
- Soulimando R., L. Schuffeneker, J. Jaubert**, "*Propriétés thermodynamiques du corps pur*", Techniques de l'ingénieur, traité sciences fondamentales, AF 4 050, pp.1-28, 1995
- Sauzade J., J. Guion**, "*Mono-dimensional model analysis of solidification phenomena with subcooling using the enthalpy method*", Int. J. Heat and Mass Transfer, 28(10), pp.1859-1868, 1985
- Tan F., K. Leong**, "*Conjugate solidification inside a thick mold*", Journal of Materials Processing Technology, 89-90, pp. 159-164, 1999
- Vakialtojjar S., W. Saman**, "*Analysis and modeling of a phase change storage system for air conditioning applications*", Applied Thermal Engineering, 21, pp. 341-349, 2001
- Viskanta R., C. J. Ho**, "*Inward solid-liquid phase-change heat transfer in a rectangular cavity with conducting vertical walls*", Int. J. Heat and Mass Transfer, 27, pp.1055-1065, 1984
- Watanabe T., K. Hisasi, K. Atsushi**, "*Enhancement of charging and discharging rates in a latent heat storage system by use of PCM with different melting temperatures*", 13, pp.57-66, 1993
- Webb B. W., R. Viskanta**, "*Natural-convection-dominated melting heat transfer in an inclined rectangular enclosure*", Int. J. Heat and Mass Transfer, 29 (2), pp.183-192,1986
- Wei J., K. Yasuo, H. Satoshi, T. Hiromi**, "*Study on a PCM heat storage system for rapid heat supply*", Applied Thermal Engineering, 25, pp. 2903-2920, 2005
- Wu T., H. Liaw, Y. Chen**, "*Thermal effect of surface tension on the inward solidification of spheres*", Int. J. Heat and Mass Transfer, 45, pp. 2055-2065, 2002
- Yagi J., T. Akiyama**, "*Storage of thermal energy for effective use of waste heat from industries*", Journal of Materials Processing Technology, 48, pp. 793-804, 1995
- Yu X., D. J. Nelson, B. Vick**, "*Phase change with multiple fronts in cylindrical systems using the boundary element*", Engineering Analysis with Boundary Elements 16, pp. 161-170, 1995
- Zuca S., P. M. Pavel, M. Constantinescu**, "*Study of one dimensional solidification with free convection in an infinite plate geometry*", Energy Conversion & Management, 40, pp. 261-271, 1999
- Zivkovic B., I. Fujii**, "*An analysis of isothermal phase change PCM within rectangular and cylindrical container*", Solar Energy, 70 (1), pp. 51-61, 2001

Annexe

De l'équation de la chaleur, on a :

$$\frac{\partial H^*}{\partial \tau} = \frac{1}{r^{*g}} \frac{\partial}{\partial r} \left(K^* r^{*g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (a1)$$

Multiplions les deux membres par r^{*g} et intégrons sur un volume de contrôle de centre P entre les deux instants (adimensionnés) successifs $k\Delta\tau$ et $(k+1)\Delta\tau$

$$\int_k^{k+1} \int_{R_e}^{R_w} r^{*g} \frac{\partial H^*}{\partial \tau} dr d\tau = \int_k^{k+1} \int_{R_e}^{R_w} \frac{\partial}{\partial r} \left(K^* r^{*g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr d\tau \quad (a2)$$

D'un nœud à l'autre, on suppose une variation linéaire⁷ de la température. Il en résulte :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \left[\frac{r_w^{*g+1} - r_e^{*g+1}}{g+1} \cdot \frac{\partial H}{\partial \tau} \right] d\tau &= \int_k^{k+1} \left[\left(K^* r^{*g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{R_w} - \left(K r^{*g} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{R_e} \right] d\tau \\ &= \int_k^{k+1} \left[K_w^* r_w^{*g} \frac{\theta_w - \theta_P}{\Delta R} - K_e^* r_e^{*g} \frac{\theta_P - \theta_E}{\Delta R} \right] d\tau \end{aligned} \quad (a3)$$

La conductivité aux faces w et e est obtenue en supposant que la conductivité est constante dans chaque volume de contrôle, or la méthode des conductances, basée sur la conservation du flux thermique, nous permettra de les déduire en fonction de celles des deux volumes de contrôle.

Pour la capsule rectangulaire on tire :

$$K_e^* = \frac{2K_P^* K_E^*}{K_P^* + K_E^*} ; \quad K_w^* = \frac{2K_W^* K_P^*}{K_W^* + K_P^*} \quad (a4)$$

Pour la capsule cylindrique, on tire :

$$K_e^* = \frac{K_P^* \cdot K_E^* \cdot \ln\left(\frac{i-1}{i-2}\right)}{K_E^* \cdot \ln\left(\frac{i-1}{i-1.5}\right) + K_P^* \cdot \ln\left(\frac{i-1.5}{i-2}\right)} \quad (a5)$$

⁷ Il est toute fois possible de supposer un autre profil

$$K_w^* = \frac{K_w^* \cdot K_p^* \cdot \ln\left(\frac{i}{i-1}\right)}{K_p^* \cdot \ln\left(\frac{i-1}{i-0.5}\right) + K_w^* \cdot \ln\left(\frac{i-0.5}{i-1}\right)} \quad (\text{a6})$$

Et pour la capsule sphérique :

$$K_e^* = \frac{(i-1.5)K_E^*K_P^*}{0.5(i-1)K_P^* + 0.5(i-2)K_E^*} \quad (\text{a7})$$

$$K_w^* = \frac{(i-0.5)K_E^*K_P^*}{0.5iK_W^* + 0.5(i-1)K_P^*} \quad (\text{a8})$$

On intègre sur τ , en supposant qu'à chaque instant $k\Delta\tau$ (adimensionnel) l'enthalpie du centre prévaut sur tout le volume de contrôle considéré, ainsi pour le membre gauche de l'équation :

$$\int_k^{k+1} \left[\frac{r_w^{*g+1} - r_e^{*g+1}}{g+1} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial \tau} \right] d\tau = \frac{r_w^{*g+1} - r_e^{*g+1}}{g+1} \cdot (r_P^{*k+1} - r_P^{*k}) \quad (\text{a9})$$

Pour le membre droit, les flux thermiques peuvent être évalués avec les températures prises par les nœuds à l'instant $k\Delta\tau$ ou à $(k+1)\Delta\tau$ où encore à une température moyenne des deux.

Les trois cas sont exprimés par :

$$\int_k^{k+1} \theta_p d\tau = [\beta\theta_p^{k+1} + (1-\beta)\theta_p^k] \Delta\tau \quad (\text{a10})$$

Suivant les valeurs de β on aura les schémas temporels :

- $\beta=1$: un schéma dit implicite, les θ sont évaluées aux nouveaux temps $(k+1)\Delta\tau$, ce schéma est inconditionnellement stable.
- $\beta=0.5$: le schéma de Crank Nickolson est inconditionnellement stable.
- le dernier cas, retenu pour notre étude est ($\beta=0$) qui est un schéma explicite dans lequel les flux aux interfaces sont évalués avec les valeurs de θ au temps $k\Delta\tau$. Ce schéma nécessite une étude de stabilité. Le choix de ce schéma est justifié par la simplicité de programmation.

$$H_P^{k+1} = H_P^k + \frac{(g+1)\Delta\tau}{(r_w^{*g+1} - r_e^{*g+1})} \left[K_w^* r_w^{*g} \frac{\theta_w^k - \theta_P^k}{\Delta R} - K_e r_e^{*g} \frac{\theta_P^k - \theta_E^k}{\Delta R} \right] \quad (\text{a11})$$

مختصر

في عدد من الدول المتطورة أخذ نظام تخزين البرودة بعدا هاما لما له علاقة بخفض ذروة الطلب على الطاقة الكهربائية.

يستعمل هذا النظام مواد تتميز بحرارة لاطية معتبرة تساعد على تخزين البرودة بتغيير حالتها من السائلة إلى الصلبة. هذه الدراسة تعتمد على تطبيق وتعميم نموذج الانتقال الحراري على طور التجمد الداخلي.

لحل النموذج الرياضي اعتمدنا طريقة الحجم المنتهية.

و بعد اختباره و مقارنته ببعض الدراسات التجريبية و الرقمية

المتوفرة، هذا النموذج أعتمد لدراسة تأثير بعض الأرقام المميزة (بيو، ستيفان و حالة التسخين) على طور التجمد.

أخيرا تطرقنا إلى دراسة تجمد الماء في كبسولة نموذجية كتلك التي

تستعمل في أنظمة تخزين البرودة المرافقة لمكيفات الهواء.

مفاتيح : التجمد، تخزين البرودة ، الطريقة الأنثالبية، الحجم المنتهية.

Abstract

In many countries, in order to take advantage of the off-peak electrical cost, latent cool storage system for air conditioning is largely used.

This system includes phase change materials (PCM) contained in small capsules.

Solidification of PCM inside these capsules is formulated using a conduction model for spherical and cylindrical capsules, generalized here to be applicable even for plate container.

This model is validated by comparison with available models then used for a numerical study on the heat transfer during the process of solidification inside a capsule subject to convective boundary condition.

An enthalpy method, with finite control volume approach, makes it easy with high degree of correspondence between the real physical phenomenon and its mathematical formalization.

The effect of dimensionless numbers (Stefan number, Biot number and superheat parameter) on the unsteady-state temperature and enthalpy fields as well as the space time evolution of the phase change front is investigated.

Furthermore, a typical capsule (spherical $\varnothing 77\text{mm}$) is studied as a practical case where operational parameters affecting the solidification process are also investigated.

Key-words: PCM, solidification, cool storage, Stefan number, enthalpy method, finite volume.

Résumé

Le stockage du froid par chaleur latente a pris de l'ampleur dans beaucoup de pays pour profiter des tarifs de nuit proposés par le fournisseur en énergie électrique.

Dans un tel système, on utilise la transformation liquide-solide des matériaux à changement de phase (MCP) encapsulés dans des sphères appelés nodules.

Dans le présent travail, la solidification de ces MCP est mathématiquement formulée en se basant sur un modèle de conduction concernant les capsules cylindrique et sphérique, ce modèle est développé pour être extensible au cas de géométrie plane.

Une validation du modèle dans sa nouvelle version est réalisée par comparaison à d'autres modèles disponibles dans la littérature. Puis ce modèle-ci est utilisé pour une étude des transferts de chaleur lors de la solidification à l'intérieur d'une capsule (sphérique, cylindrique ou plate) sujette à un flux thermique convectif à la surface.

La formulation enthalpique, discrétisée à l'aide de la méthode des volumes finis (MVF), permet à vaincre cette difficulté avec une grande conformité entre les prédictions numériques et le phénomène physique.

D'abord, c'est une étude adimensionnelle qui est présentée pour plus de généralité suivie d'une étude dimensionnelle relative à un nodule type (sphérique $\varnothing 77$ mm) analogue à celui souvent rencontré dans les systèmes de stockage du froid.

L'étude adimensionnelle porte sur l'effet du nombre de Stefan, du nombre de Biot et du paramètre de surchauffement sur le champ de température, de l'enthalpie et l'évolution spatio-temporelle du front de solidification.

Enfin, on présente une analyse de l'influence des paramètres opérationnels sur le processus de solidification d'un nodule type rempli d'eau.

Mots clés : MCP, solidification, stockage du froid, chaleur latente, nombre de Stefan, méthode enthalpique, volumes finis.