وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــية العلـــوم
قسم الرياضيات

N^{0} : U.S/F.S/D.M/……/2023

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

استقرار بعض المسائل ذات المعادلات التفاضلية الكسرية الهجينة بوجود المؤثر p- لابلاس

Option : AFA

Par :
1-Bouchemel Bouchra
2-Dib Haoua

Encadré par : Kenef Esma MCB ENSET. AZZABA

Devant le jury :

Président :Benferdi Sabrina MCB U. SKIKDA
Examinateur: Karek Chafia MCB U. SKIKDA

Année: 2022/2023

ملخص

تمحورت دراستنا في هذه المذكرة حول موضوع من أبرز المواضيع التي تتميز بالحداثة، والذي أثار إهتمام العديد من الطلبة والباحثين في الرياضيات، و الذي يحمل عنوان: " استقرار بعض المسائل ذات المعادلات التفاضلية الكسرية الهجينة بوجود المؤثر $p-$ لابلاس.

تناول عملنا معالجة وجود ووحدانية الحل لبعض المسائل ذات المعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة، الهجينة بنوعيها الأول والثاني مع وجود المؤثر $p-$لابلاس، و ذلك باستعمال نظرية النقطة الصامدة لبناخ، بالاضافة الى دراسة استقرار الحل لهذه المسائل من نوع أولام هايرز، مع إرفاق الدراسة ببعض الأمثلة من أجل إثبات نجاعة النتائج المتحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية، وجود و وحدانية الحل، المؤثر $p-$لابلاس، الحساب الكسري، نظرية النقطة الصامدة.

Résumé

Notre étude a porté sur l'un des sujets les plus importants qui a attiré l'intérêt de nombreux étudiants et chercheurs en mathématiques, qui est intitulé "Stabilité de certains problèmes d'équations différentielles fractionnaires hybrides avec l'opérateur $p-$Laplacien".

Notre travail a porté sur l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes d'équations différentielles fractionnaires hybrides de premier et de second type avec la présence de l'opérateur$p-$Laplacian, en utilisant théorème de point fixe de Banach, ainsi que l'étude de la stabilité de la solution à ces problèmes du type Olam Hayers, avec l'attachement de quelques exemples à l'étude pour l'efficacité des résultats obtenus.

Mots-clés : Equations différentielle, Existence et l'unicité de la solution, Opérateur $p-$Laplacien, calculs fractionnaires, Théorème du point fixe.

Abstract

Our study focused on one of the most important topics that attracted interest from many mathematics students and researchers, which is entitled "Stability of certain problems of hybrid fractional differential equations with $p-$Laplacian operator".

Our work dealt with the existence and uniqueness of the solution of some problems of first and second-type hybrid fractional differential equations with the presence of the$p-$Laplacian operator, using Banach fixed point theorem, as well as studying the stability of the solution to these problems of the Olam Hayers type, with the attachment of some examples to the study for the effectiveness of the results obtained.

Keywords : Differential equations, Existence and uniqueness of solution, $p-$Laplacian operator, Fractional calculus, Fixed point theorem.

❖ شكر وعرفان

مصداقا لقوله:

"وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ "

نحمد الله أن وفقنا لهذا العمل

و عملا بقوله صلى الله عليه و سلم:

مَنْ لَمْ يَشكرِ القليلَ لَمْ يَشكرِ الكثيرَ ومَنْ لَمْ يَشكرِ الناسَ لَمْ يَشكرِ اللهَ" رواه أحمد والترمذي

نتقدم بجزيل الشكر و العرفان الجميل للأستاذ المشرف كاف أسماء نظير الجهد و النصح و المرافقة طيلة مدة إنجاز هذا البحث .

وإلى جميع أساتذتنا من ساهموا في تكويننا طيلة مشوارنا الدراسي و بالأخص أساتذة الرياضيات الجامعة 20 أوث 1955 فقد تعجز الكلمات عن شكركم و تأبى الأحرف أن تصاغ لتقديركم.

إلى كل من ساهم من بعيد أو من قريب في انجاز هذا العمل المتواضع.

❖ إهداء

"و آخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين "

الحمد لله ما تم جهد و لا ختم سعي إلا بفضله و ما تخطى العبد من عقبات و صعوبات إلا بتوفيقه و معونته، لطالما كان حلما انتظرته اليوم و بكل فخر تخرجت من "مرحلة الماستر" تخصص تحليل دالي تطبيقي، فالحمد لله على البدء و عند الختام.

أهدي تخرجي إلى :

ذلك الإنسان العظيم الذي لطالما تمنيت أن تقر عينه برؤيتي في يوم كهذا إلى من لا ينفصل قلبي عن قلبه، إلى الحاضر بروحه في قلبي لا يغيب ليتك هنا.

"إليك أبي"

إلى نور عيني و ضوء دربي إلى نبع العطف و الحنان، من كانت دعواتها و كلماتها لها أثر في دعمي للإستمرار.

"إليك أمي "

إلى أخواتي التي ساندوني عند ضعفي و ساقوني بالحب .

"نورة، نصيرة، يسرى، إكرام، وئام"

إلى سندي في الحياة إخوتي.

"بوبكر، رابح، نجم الدين "

إلى من كان مصدر الدعم لي.

"خطيبي أسامة "

إلى من كان لي أبا ثانيا إلى من ساندني و دعمني طيلة مشواري.

" خالي "

إلى براعم العائلة.

"سليمان،سجود"

إلى القريبين من القلب إلى رفاق الخطوة الأولى و الأخيرة إلى من كانو في سنوات العجاف سحب ممطرة.

"إليكم صديقاتي "

"بشرى بوشمال"

إهداء

أهدي هذا العمل المتواضع الى:
من قال الحق تعالى فيهما :
(وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا)
إلى من علمني أن الدنيا كفاح و ملاحها العلم والمعرفة
إلى " أبي و امي"
إلى سندي في الحياة إخوتي
"أحمد، محمد، عبد الفتاح وعبد الرؤوف"
إلى اللواتي ساندوتي عند ضعفي وانكساري أخواتي
"إيمان,سهام,سمية "
إلى من شجعني على إكمال دراستى
"خطيبي بلال"
إلى البراعيم الصغار "أحمد، أيوب، إياد، جابر، رقية، سليمان ،هند و لقمان "
إلى جميع افراد اسرتي
"أعمامي عماتي أخوالي وخلاتي "
إلى خالتي "فوزية " التي كانت بمتابة أمي
" الى روح جدي وجدتي رحمهما الله ".
إلى كل من اعطاني يد العون من قريب او من بعيد طيلت مشوراي الدراسي
"ديب حواء"

الفهرس

مقدمة

في ظل مانشهده من تطورات في فهم بنية الكون، نرى أن الرياضيات كانت و لا تزال تترك بصمتها وراء تلك التطورات، تفسرها بأفضل تفسير و تحللها بأمثل الطرق، بل و تحولها إلى نموذج بسيط بعيد عن أي تعقيدات من شأنها أن تجعل الصورة غير مبهمة لتلك البنى الكونية، وفق أحد الفروع الرياضياتية المناسبة، و لعل أحد أشهر هذه الفروع الحساب الكسري.

يعتبر الحساب التفاضلي الكسري فرع من فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة خواص المشتقات و التكاملات ذات الرتبة غير الصحيحة و خصوصا ذات الرتب الكسرية يتضمن هذا التخصص أساليب و طرق البحث عن وجود و دراسة خواص الحل للمعادلات التي تتضمن مشتقات كسرية و التي تسمى بالمعادلات التفاضليةالكسرية .

تظهر المعادلات التفاضلية الكسرية في العديد من مجالات البحث و في نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية و الكميائية، الميكانيكية، الكهربائية، البيولوجيا و في التحكم و معالجة الإشارة و الصور، و ظواهر تدفق الدم ... لمزيد من الإطلاع أنظر المراجع [18, 13, 12, 8].

حساب التفاضل و التكامل الكسريين أو كما يسمى الحساب التفاضلي الكسري، يعد موضوعا قديما بإجماع معظم الباحثين في تاريخ الرياضيات على أنه أنشأ أواخر القرن 17، فتعود بدايته إلى 30 سبتمبر 1695 برسالة بعتها ماركيز دو لوبيتال $(Marquis de L'Hpital)$ إلى غوتفريد ويلهوم لايبنيز $(G.w.Leibniz)$ يسأل عن ملاحظة تخص بحثه المتلعق بحساب المشتق من الرتبة n للدالة f المعرفة بـ $f(x)=x$، وكان السؤال "ماهي النتيجة إذا كان $n=\frac{1}{2}$ كان الجواب "السؤال يبدو متناقضا مع ذلك فهو يحتمل الصحة " .

في سنة 1819 أثبت لاكروا $(Lacroix)$ في كتابه الذي يتحدث عن المشتقة برتبة كسرية، أنه إذا $y=x^{\alpha}$ فإن:

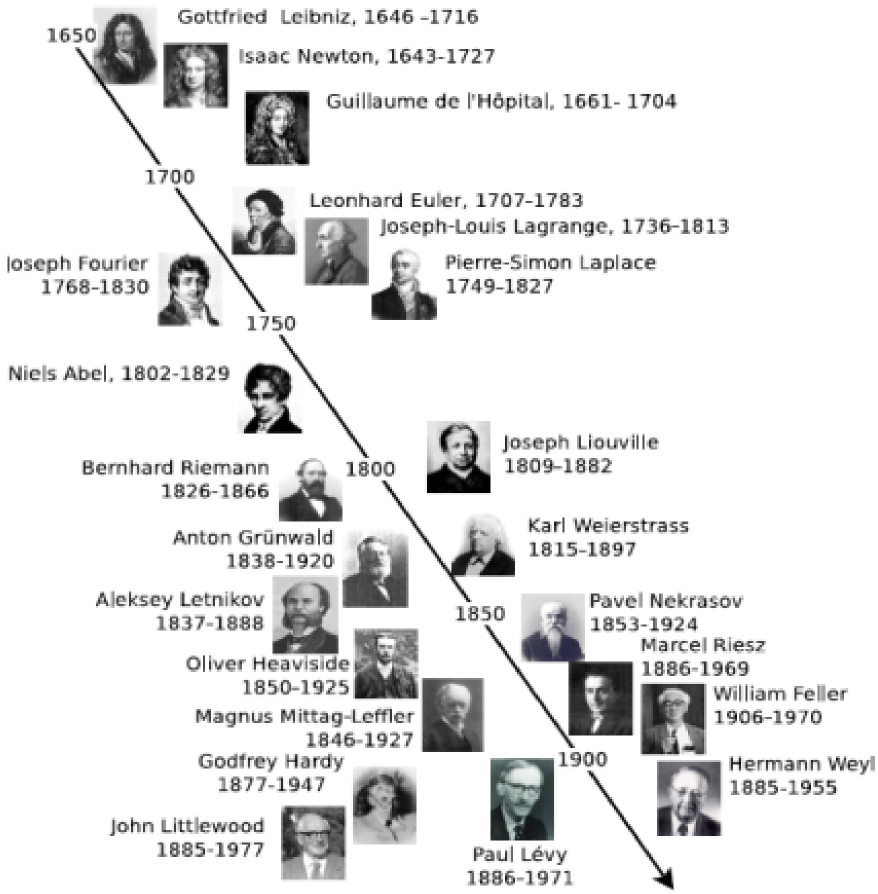
$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d^{\frac{1}{2}}x}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}x^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

على وجه الخصوص نتحصل على

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{d^{\frac{1}{2}}x}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

في سنة 1823 قدم آبال $(Abel)$ أول تطبيق للتفاضل و التكامل الكسري في مسائل الفيزياء، وفي اواخر القرن 19 قدم لوران $(Laurent)$ نظرية المؤثر المعمم $D^{\alpha}, \alpha\in R$ ، وطبق هايفيزيد $(Heaviside)$ المشتق الكسري في نظرية خطوط النقل، كما إستخدم دومون $(Dumont)$ المشتق الكسري في المرونة سنة 1963، عقد روس في 1974 $(Ross)$ مؤتمرا دوليا حول حساب التفاضل و التكامل الكسري و تطبيقاته، وسنة 1993 نشر كينيث أرو $(Kenneth Arrow)$ و ميللر روس $(Miller Ross)$ كتاب "مقدمة في حساب التفاضل و التكامل الكسري و المعادلات التفاضلية الكسرية".

يمكن إختصار تطور التفاضل و الحساب الكسري في الفترة الممتدة من 1650 إلى 1970 في الصورة التالية.



إنطلاقا من 1900 شهد هذا الموضوع تطور كبير حيث ظهر العديد من العلماءو الباحثين في هذا المجال من بينهم ريمان $(Rieman)$، كابوتو $(Caputo)$ ، كِلبس $(Kilbas)$، بن شهرة $(Benchohra)$ ....

تعد نظريات النقطة الصامدة من بين أهم الوسائل في الرياضيات التي يتم إستعمالها في معالجة وجود حلول لمسائل ذات المعادلات التفاضلية سواء كانت العادية، الكسرية،... الخ، من بين أشهر النظريات التي نعتمدها في إثبات وجود و وحدانية الحل لهذه المعادلات نظرية التقليص لبناخ و التي تعتمد على كون المؤثر مقلص.

للمعادلات التفاضلية الكسرية عدة أنواع من بينها المتذبذبة، المختلطة، الهجينة بالإضافة إلى أنواع أخرى أنظر المراجع التالية: $[27, 26, 25, 24, 20, 19, 15, 14, 11, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$.

سنهتم في مذكرتنا بمعالجة وجود و وحدانية الحل باستعمال نظرية النقطة الصامدة لبناخ كذلك دراسة استقرار الحل لبعض المسائل ذات المعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة، الهجينة بوجود المؤثر $p-$لابلاس حيث نظمت هذه المذكرة وفق ثلاثة فصول:

الفصل الاول: قدمنا فيه بعض المفاهيم الأساسية حول الفضاءات التابعية، بعض التعاريف، النظريات والخواص المتعلقة بالحساب التفاضلي الكسري على غرار التكامل الكسري لريمان ليوفيل، الإشتقاق الكسري بمفهومي ريمان ليوفيل و كابوتو و كذلك قدمنا تذكير بنص نظرية النقطة الصامدة لبناخ، و

بعض المفاهيم حول الاستقرار بمفهوم اولام هايرز .

الفصل الثاني: قمنا بدراسة وجود و وحدانية و استقرار الحل للمسألة ذات المعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة، الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $P-$ لابلاس التالية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(\dfrac{\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))}{f(t,x(t))}\right) = g\left(t, x(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(\dfrac{\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)\right), \quad t \in J = [0,1] \\ \phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(0))) = \varphi f\left(0, x(0)\right), \quad \varphi \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t)) = 0, \end{cases}$$

بحيث:

- $0 < \alpha, \beta < 1$،
- حيت f و g دوال معطاة،

الفصل الثالث: درسنا وجود و وحدانية و استقرار الحل للمسألة ذات المعادلات التفاضلية الكسرية المختلطة، الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس التالية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left[\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))) - f(t,x(t))\right] = g(t, x(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\,\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))) - f(t,x(t)) \\ \phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(0)) = \varphi + f(0, x(0))), \quad \varphi \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t)) = 0 \end{cases}$$

بحيث:

- $t \in J = [0,1]$ ،
- $0 < \alpha, \beta < 1$
- حيت f و g دوال معطاة،

و قد دعمنا كل دراسة بمثال توضيحي.

الفصل 1

مفاهيم أساسية

سنقدم في هذا الفصل بعض الترميزات الأساسية، التعاريف أو المفاهيم، النظريات، التوطئات وبعض النتائج في التحليل الدالي والحساب التفاضل الكسري ونظرية النقطة الصامدة لبناخ للمزيد من الاطلاع أكثر أنظر المراجع [8 9 10 14 15 16 17 21 22 23].

ليكن $J=[a,b]$ مع $-\infty<a<b<+\infty$ مجال منته من $\mathbb{R}$ حيث: $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

1.1 بعض المفاهيم حول الفضاءات التابعية

ليكن $C(J,R)=C(J)$ وهو فضاء بناخ للتوابع المستمرة من J نحو $\mathbb{R}$ بالنسبة للنظيم.

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{C(J)}=\sup_{x\in J}|f(x)|,$$
$$=\max_{x\in J}|f(x)|,\quad f\in C(J)$$

نرمز كذلك بـ $C^n(J,\mathbb{R})$ لفضاء التوابع القابلة للاشتقاق n مرة والمشتقة من الدرجة n مستمرة والمزود بالنظيم

$$\|u\|_{C^n(J)}=\sum_{k=0}^{n}\|u^k\|_{C(J)},\quad n\in\mathbb{N}.$$

ليكن $L_p(J,\mathbb{R})=L_p(J)$ مع $1\le p\le\infty$ وهو فضاء التوابع القيوسة بمفهوم لوبيغ والتي تحقق $\int_a^b|f(t)|^pdt<+\infty$ والمزود بالنظيم

$$\|f\|_{L_p(J)}=\left(\int_a^b|f(t)|^pdt\right)^{\frac{1}{p}},\ 1\le p<\infty,$$

و

$$\|f\|_{L_\infty(J)}=ess\sup_{t\in J}|f(t)|\quad=\inf\{M>0,\ |f(t)|<M,\ p.p\ surJ\}.$$

نرمز بـ $AC(J)=AC(J)$ لفضاء التوابع f التي تحقق:

$$f\in AC(J)\Leftrightarrow f(x)=c+\int_a^x\varphi(t)dt,\quad \varphi\in L_1(J),\quad c\in\mathbb{R},$$

ومن أجل $n\in\mathbb{N}$ نعرف $AC^n(J)$ بـ

$$AC^n(J)=\{f,f:J\to\mathbb{R},\quad f^{(k)}\in C(J),\ k=0,1,...(n-1),\quad f^{(n-1)}\in AC(J)\}.$$

2.1 النقطة الصامدة لبناخ

ليكن $(E,\|\cdot\|_E)$ فضاء بناخ و A مؤثر معرف من E نحو E.

تعريف 1.2.1

نقول عن المؤثر A أنه تقليص أو مقلص إذا وجد ثابت $0<k<1$ يحقق:

$$\|Ax-Ay\|_E \leq k\|x-y\|_E, \quad \forall x,y\in E.$$

تعريف 2.2.1

نقول عن $x\in E$ أنها نقطة صامدة أو ثابتة لـ A إذا كانت تحقق المعادلة $Ax=x$.

نظرية 1.2.1: (التقليص لبناخ أو نظرية النقطة الصامدة لبناخ)

إذا كان المؤثر A مقلص على E فإن A يقبل نقطة صامدة وحيدة على E أي $\exists ! x\in E, Ax=x$.

3.1 المؤثر $p-$ لابلاس

تعريف 1.3.1

المؤثر $p-$ لابلاس والذي نرمز له بـ ϕ_p معرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ كمايلي

$$\phi_p(u)=\begin{cases} |u|^{p-2}u, & u\neq 0,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

بحيث $p>1$.

توطئة 1.3.1

المؤثر $p-$ لابلاس هوميومورفيزم أي أنه مستمر ويقبل تطبيق عكسي مستمر ومعرف بـ:

$$(\phi_p)^{-1}(u)=\begin{cases} \phi_q(u), & u\neq 0,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

حيث: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ مع $q>0$.

توطئة 2.3.1

ليكن ϕ_p المؤثر $p-$ لابلاس.

1. إذا كان $1 < p \leq 2$، $xy > 0$، $|y|, |x| > m > 0,$ فإن:

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)m^{p-2}|x-y|,$$

2. إذا كان $p > 2$ ، $|x|, |y| \leq M$ فإن:

$$|\phi_p(x) - \phi_p(y)| \leq (p-1)M^{p-2}|x-y|,$$

حيث M و m ثابتين حقيقيين موجبين تماما.

4.1 التكامل والاشتقاق الكسري

تعريف 1.4.1

نعرف التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ لتابع f معرف على J بـ

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة غاما لأولر المعرفة بـ

$$\Gamma(\alpha) = \int_a^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0.$$

خاصية: لدينا :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

تعريف 2.4.1

المشتقة الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة $\alpha > 0$ لتابع f المعرفة بـ

$$\begin{aligned}({}^R D_{a^+}^{a} f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a,\end{aligned}$$

حيث $n = [\alpha] + 1$ مع $[\alpha]$ هو الجزء الصحيح لـ α.

- في حالة $\alpha = n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$({}^R D_{a^+}^{n} f)(t) = f^{(n)}(t),$$

حيث $f^{(n)}$ هي المشتقة العادية لـ f.

تعريف 3.4.1

المشتقة الكسرية لكابوتو من الرتبة $\alpha > 0$ لتابع f معرفة بـ

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = \left({}^R D_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]\right)(t), \quad t > a,$$

حيث $n = [\alpha] + 1$ مع $[\alpha]$ هو الجزء الصحيح لـ α.

- في حالة $\alpha = n \in \mathbb{N}$ لدينا

$$({}^C D_{0^+}^{n} f)(t) = f^{(n)}(t).$$

نظرية 1.4.1

ليكن $\alpha > 0$

إذا كان $f \in AC^n(J)$ لدينا

1. إذا كان $\alpha \notin \mathbb{N}$ مع $n = [\alpha] + 1$ فإن:

$$\begin{aligned}({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \\ &= (I^{n-\alpha} D^n f)(t), \quad t > 0\end{aligned}$$

حيث $D^n = \left(\frac{d}{dt}\right)^n$.

2. إذا كان $\alpha \in \mathbb{N}$ فإن:

$$({}^R D_{a^+}^{n} f)(t) = ({}^C D_{a^+}^{n} f)(t) = f^{(n)}(t).$$

توطئة 1.4.1

ليكن $\alpha > 0$

- إذا كان $f \in L_1(J)$ و $f_{n-\alpha} \in AC^n(J)$ فإن:

$$(I_{a^+}^{\alpha}\, {}^R D_{a^+}^{\alpha} f)(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},$$

حيث :

$$f_{n-\alpha}(x) = (I_{\alpha+}^{n-\alpha} f)(x),$$

• إذا كان $f \in AC^n(J)$ أو $f \in C^n(J)$ إذن:

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,$$

حيث $n = [\alpha] + 1$ من أجل $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ من أجل $\alpha \in \mathbb{N}$.

• إذا كان $f \in L_{\infty}(J)$ أو $f \in C(J)$ لدينا:

$$({}^{C}D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t),$$

• في حالة $0 < \alpha < 1$ و $f \in AC(J)$ أو $f \in C(J)$ فإن

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{R}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t) - kt^{\alpha-1},$$

$$(I_{a+}^{\alpha}\, {}^{C}D_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t) - f(a),$$

حيث $k = \dfrac{C_0}{\Gamma(\alpha)}$ مع $C_0 \in \mathbb{R}$.

توطئة 2.4.1

من أجل $\alpha > 0$ إذا كان $f \in AC^n(J)$ أو $f \in C^n(J)$ فإن:

1. حل المعادلة $^{R}D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0$ يعطى بـ:

$$u(t) = k_1 t^{\alpha-1} + k_2 t^{\alpha-2} + \cdots + k_n t^{\alpha-n},$$

2. حل المعادلة $^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = 0$ يعطى بـ:

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{\alpha-1},$$

حيث: k_i , $c_j \in \mathbb{R}$ من أجل $i = 1, \cdots, n$ و $j = 0, 1, \cdots, n-1$ ، $t \in J$ ، $n = [\alpha] + 1$.

5.1 استقرار أولام هايرز (Ulam-Hyers)

لتكن المعادلة التفاضلية الكسرية التالية:

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} u(t) = f\left(t, u(t), {}^{C}D_{0+}^{\alpha} u(t)\right), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad t \in [0;1] \qquad (1.1)$$

تعريف 1.5.1

نقول أن المعادلة (1.1) أنها مستقرة حسب أولام- هايرز إذا وجد $C_f > 0$ من أجل $\varepsilon > 0$ ومن أجل كل $y \in C(J)$ حل للمتراجحة:

$$\left| {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) - f\left(t, y(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t)\right) \right| \leq \varepsilon, \quad t \in J \qquad (2.1)$$

فإنه يوجد $u \in C(J)$ حل للمعادلة (1.1) تحقق

$$|y(t) - u(t)| \leq C_f \varepsilon, \quad t \in J.$$

ملاحظة 1.5.1: الدالة $y \in C(J)$ حل للمتراجحة (2.1) إذا وفقط إذا وجدت دالة $\Psi \in C(J)$ (Ψ تتعلق بـ y) بحيث:

1. من أجل $t \in J$ لدينا:
$$|\Psi(t)| \leq \varepsilon.$$

2. من أجل $t \in J$ لدينا:
$$ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t) = f\left(t, y(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} y(t)\right) + \Psi(t).$$

الفصل 2

دراسة وجود و وحدانية واستقرار حلول المسألة ذات المعادلات التفاضلية الكسرية الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $p-$ لابلاس

1.2 مقدمة

في هذا الفصل سنقدم جزئين، الجزء الأول نعالج فيه وجود ووحدانية الحل لمسألة ذات المعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $p-$ لابلاس، أما في الجزء الثاني من هذا الفصل فسنتطرق فيه لدراسة استقرار حل هذه المسألة ثم نختمه بمثال نوضح فيه النتائج المتحصل عليها.

لتكن المسألة ذات المعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $p-$ لابلاس:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\left(\dfrac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)=g\left(t,x(t),\,{}^{C}D_{0+}^{\alpha}\left(\dfrac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)\right), \quad t\in J=[0,1] & (1.2)\\ \phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(0)))=\varphi f\left(0,x(0)\right), \quad \varphi\in\mathbb{R} & (2.2)\\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t))=0, & (3.2)\end{cases}$$

بحيث:

- $0<\alpha,\beta<1$،
- ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}$ هو المشتق الكسري لكابوتو من الرتبة α،
- ${}^{R}D_{0+}^{\beta}$ هو المشتق الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة β ،
- ϕ_p هو المؤثر $p-$ لابلاس،
- $g:J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ، $f:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\backslash\{0\}$ دالتين غير خطيتين ومستمرتين.

2.2 دراسة وجود ووحدانية حلول المسألة ذات المعادلة التفاضلية الكسرية الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $p-$ لابلاس

تعريف 1.2.2

نقول عن الدالة x من $C(J)$ إنها حل للمسألة $(1.2)-(3.2)$ إذا و فقط حققت المعادلة :

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\left(\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)=g\left(t,x(t),\,{}^{C}D_{0+}^{\alpha}\left(\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)\right)$$

والشرطين الابتدائيين:

$$\lim_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t))=0,$$

و

$$\phi_p\left({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(0))\right)=\varphi f(0,x(0)).$$

توطئة 1.2.2

إذا كان $0<\alpha,\beta<1$ و $h:J\to\mathbb{R}$ دالة مستمرة فإن الدالة x تكون حل للمعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الأول بوجود المؤثر $p-$ لابلاس.

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\left(\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}\right)=h(t), \quad (4.2)$$

وتحقق الشرطين الابتدائيين

$$\phi_p\left({}^{R}D_{0+}^{\beta}x(0)\right)=\varphi(f\,(0,x(0))\,,$$

و

$$\lim_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t))=0,$$

إذا وفقط إذا كان x حل للمعادلة التكاملية ذات الرتبة الكسرية

$$x(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\left[\phi_q\left(\varphi f(s,x(s))+\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s(s-r)^{\alpha-1}h(r)dr\right)\right]ds, \quad (5.2)$$

من أجل $t\in J$.

برهان

لدينا x حل للمعادلة $(4,2)$. بإدخال التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة α على طرفي المعادلة $(4,2)$ وحسب التوطئتين 1.4.1 و2.4.1 نجد أن:

$$\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}x(t))}{f(t,x(t))}=C_0+I_{0+}^{\alpha}h(t),$$

ومنه

$$\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}x(t))}{f(t,x(t))}=C_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

من الشرط $(2,2)$

$$C_0=\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(0))}{f(0,x(0))}=\varphi,$$

بتعويض قيمة C_0 نجد:

$$\frac{\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}(x(t)))}{f(t,x(t))}=\varphi+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

ومنه

$$\phi_p({}^{R}D_{0+}^{\beta}x(t))=\varphi f(t,x(t))+\frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

بتطبيق ϕ_p^{-1} على طرفي المعادلة السابقة وحسب التوطئة 1.3.1 تحصل على :

$$ {}^{R}D_{0^+}^{\beta}\, x(t) = \phi_q \left[\varphi f(t,x(t)) + \frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right], $$

بإدخال التكامل الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة β وحسب التوطئتين 1.4.1 و 2.4.1 نجد:

$$ x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q \left[\varphi f(s,x(s)) + \frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr \right] ds + K t^{\beta-1}. $$

من الشرط (3.2) نجد:

$$ K = \lim_{t\to 0} t^{1-\beta} x(t) = 0 $$

بالتعويض نجد:

$$ x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q \left[\varphi f(s,x(s)) + \frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} h(r) dr \right] ds $$

من الواضح أن المسألة ذات المعادلات التفاضلية المختلطة الهجينة $(4.2) - (2.2) - (3.2)$ تحقق المعادلة التكاملية (5.2).
الإستلزام العكسي يستنتج بالحساب المباشر و التوطئة 1.4.1.

سنبين فيمايلي وجود حل وحيد للمسألة $(1.2) - (3.2)$ باستعمال نظرية بناخ للنقطة الثابتة تحت شروط معينة يخضع لها التابعين g و f.
لتكن الشروط التالية:

(H_1) يوجد ثابتان $M_g, M_f \in \mathbb{R}^+$:

$$ \begin{aligned} |g(t,x,y)| &\le M_g, \quad \forall (t,x,y) \in J \times \mathbb{R}^2, \\ |f(t,x)| &\le M_f, \quad \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}, \end{aligned} $$

(H_2) توجد الثوابت $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ و $K_3 \in (0,1)$ بحيث:

$$ \begin{aligned} |f(t,x) - f(t,\overline{x})| &\le K_1 |x - \overline{x}|, \quad \forall (t,x,\overline{x}) \in J \times \mathbb{R}^2, \\ |g(t,x,y) - g(t,\overline{x},\overline{y})| &\le K_2 |x - \overline{x}| + K_3 |y - \overline{y}|, \quad \forall (t,x,\overline{x},y,\overline{y}) \in J \times \mathbb{R}. \end{aligned} $$

نظرية 1.2.2

ليكن $1 < p \le 2$. نفرض أن الدوال $J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ و $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ مستمرة وتحقق الشرطين (H_1) و (H_2) إذا كان:

$$ \eta = \frac{(q-1)}{\Gamma(\beta+1)} M^{q-2} \left[K_1 |\varphi| + \frac{M_g K_1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{M_f K_2}{(1-K_3)\Gamma(\alpha+1)} \right] < 1, \tag{6.2} $$

حيث:

$$ M = |\varphi| M_f + \frac{M_f M_g}{\Gamma(\alpha+1)}, $$

و

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

فإن المسألة $(1.2)-(3.2)$ تقبل حلا وحيدا معرف على المجال J.

برهان

نعرف المؤثر $G:C(J)\to C(J)$ كما يلي:

$$G(x(t))=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[\varphi f(s,x(s))+\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr\right]ds,$$

حيث:

$$\sigma_x(r)=g\left(r,x(r),\,{}^CD^{\alpha}_{0^+}\left(\frac{\phi_p({}^RD^{\beta}_{0^+}x(r))}{f(r,x(r))}\right)\right),$$

واضحا أن النقطة الثابتة لـ G هي حل للمسألة $(1.2)-(3.2)$.
سنبين الآن وجود نقطة ثابتة لـ G وذلك عن طريق إثبات أن G مقلص.
لتكن $x,y\in C(J)$ عندئذ من أجل كل $t\in J$ يكون:

$$\begin{aligned}|G(x(t))-G(y(t))|\leq{}&\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\Bigg|\phi_q\left[\varphi f(s,x(s))+\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\right.\\&\left.\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr\right]\\&-\phi_q\left[\varphi f(s,y(s))+\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_y(r)dr\right]\Bigg|ds,\end{aligned}$$

من الشرط (H_1) نجد:

$$\begin{aligned}\left|\varphi f(s,x(s))+\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr\right|&\leq|\varphi||f(s,x(s))|+\frac{|f(s,x(s))|}{\Gamma(\alpha)}\\&\quad\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}|\sigma_x(r)|dr\\&\leq|\varphi|M_f+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}M_g dr\\&\leq|\varphi|M_f+\frac{M_gM_f}{\Gamma(\alpha+1)}=M,\end{aligned}$$

حسب التوطئة 2.3.1 لدينا:

$$\begin{aligned}
|(Gx)(t)-(Gy)(t)| \le{}& \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\Bigg[\Bigg|\varphi(f(s,x(s))-f(s,y(s)))+\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\\
&\int_0^s (s-r)\sigma_x(r)dr-\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_y(r)dr\Bigg|\Bigg]\,ds,\\
\le{}& \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)\Bigg[|\varphi||f(s,x(s))-f(s,y(s))|+\Bigg|\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\\
&\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr-\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_y(r)dr\Bigg|\Bigg]\,ds,\\
\le{}& \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\Bigg[|\varphi||f(s,x(s))-f(s,y(s))|+\Bigg|\frac{f(s,x(s))}{\Gamma(\alpha)}\\
&\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr-\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r)dr+\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^s (s-r)\sigma_x(r)dr-\frac{f(s,y(s))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_y(r)dr\Bigg|\Bigg]\,ds,\\
&\le \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\big[|\varphi|\,|f(s,x(s))-f(s,y(s))|\\
&+\frac{|f(s,x(s))-f(s,y(s))|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}|\sigma_x(r)|\,dr\\
&+\frac{|f(s,y(s))|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)|dr\Bigg]\,ds,
\end{aligned}$$

من الشروط (H_1) و (H_2) نجد:

$$\begin{aligned}
&\le \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\Bigg[|\varphi|K_1|x(s)-y(s))|+K_1\frac{|x(s)-y(s)|M_g}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)|dr\Bigg]\,ds,
\end{aligned}\tag{7.2}$$

من الشرط $(H_2$ نستنتج:

$$\begin{aligned}
|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)| &\le |g(r,x(r),\sigma_x(r))-g(r,y(r),\sigma_y(r))|\\
&\le K_2|x(r)-y(r)|+K_3|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)|,
\end{aligned}$$

ومنه

$$(1-K_3)|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)|\le K_2|x(r)-y(r)|,$$

إذن

$$|\sigma_x(r)-\sigma_y(r)|\le \frac{K_2}{(1-K_3)}|x(r)-y(r)|,\tag{8.2}$$

بتعويض $(8,2)$ في $(7,2)$ نجد:

$$|G(x(t))-G(y(t))| \le \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left[|\varphi|K_1|x(s)-y(s)|+\frac{M_gK_1|(x(s)-y(s))|}{\Gamma(\alpha+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{M_f}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\frac{K_2}{(1-K_3)}|x(r)-y(r)|dr\right]ds,$$
$$\le \frac{(q-1)M^{q-2}}{(\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left[K_1|\varphi|\|x-y\|_\infty+\frac{M_gK_1}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty\right.$$
$$\left.+\frac{M_fK_2}{(1-K_3)(\Gamma(\alpha+1))}\|x-y\|_\infty\right]ds,$$
$$\le \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)}\left[K_1|\varphi|+\frac{M_gK_1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{M_fK_2}{(1-K_3)(\Gamma(\alpha+1))}\right]\|x-y\|_\infty$$
$$\times\int_0^t (t-s)^{\beta-1}ds,$$
$$\le \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta+1)}\left[K_1|\varphi|+\frac{M_gK_1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{M_fK_2}{(1-K_3)(\Gamma(\alpha+1))}\right]\|x-y\|_\infty,$$

وفي الأخير نجد:

$$\|G(x)-G(y)\| \le \eta\|x-y\|_\infty,$$

حسب الشرط $(6,2)$ فإن المؤثر G مقلص وبناءا على نظرية بناخ للنقطة الثابتة المسألة $(1.2)-(3.2)$ تقبل حلا وحيدا معرف على المجال J.

3.2 دراسة استقرار المسألة حسب أولام هايرز

في هذا الجزء سنقوم بدراسة نوع من الاستقرار المسألة $(1.2)-(3.2)$ وهذا النوع يعرف باستقرار أولام- هايرز (Ulam-Hyers).

توطئة 1.3.2

ليكن $1<p\le 2$. نفرض أن الشرطين (H_1) و (H_2) محققين وإذا كان y حلا للمتراجحة التفاضلية الكسرية الآتية من أجل $\varepsilon>0$:

$$\left|\left({}^{C}D^{\alpha}_{0^+}\left(\frac{\phi_p({}^{R}D^{\beta}_{0^+}(y(t)))}{f(t,y(t))}\right)-g(t,y(t)),\frac{{}^{C}D^{\alpha}_{0^+}\,\phi_p({}^{R}D^{\beta}_{0^+}(y(t)))}{f(t,y(t))}\right)\right|\le\varepsilon, \qquad (9.2)$$

فإن y هو حل للمتراجحة التالية:

$$|y(t)-G(y(t))| \le \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha+1)},$$

حيث:

$$K=|\varphi|M_f+\frac{M_f(M_g+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

برهان

ليكن $y \in C(J)$ حل للمتراجحة $(9,2)$ من أجل $\varepsilon > 0$ وباستخدام التوطئة $1.2.2$ والملاحظة $1.5.1$ المتعلقة بالدالة المستمرة Ψ بحيث $|\Psi(t)| < \varepsilon$ من أجل $t \in J$ لدينا:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q \left[\varphi f(s, y(s)) + \frac{f(s, y(s))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \left(g(r, y(r), \sigma_y(r)) + \Psi(r) \right) dr \right] ds,$$

$$G(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q \left[\varphi f(s, y(s)) + \frac{f(s, y(s))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} g(r, y(r), \sigma_y(r)) dr \right] ds,$$

حسب التوطئة $2.3.1$ والشرط (H_1) نجد:

$$\begin{aligned} |y(t) - G(y(t))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left[\frac{(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} |\Psi(r)| dr \right] ds, \\ &\leq \frac{(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left(\int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \varepsilon dr \right) ds, \\ &\leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \end{aligned}$$

حيث:

$$K = |\varphi| M_f + \frac{M_f(M_g+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

نظرية 1.3.2

ليكن $1 < p \leq 2$. نفرض أن الشرطين (H_1) و (H_2) محققة من الشرط $(6,2)$ إذن المسألة $(1.2) - (3.2)$ مستقرة وفق أولام هايرز (Ulam-Hyers).

برهان

تحت الشروط (H_1) و (H_2) والشرط $(6,2)$ ومن النظرية $1,2,2$ إذن المسألة $(1.2) - (3.2)$ تقبل حل وحيد في $C(J)$ نرمز له بـ x ليكن y حل للمتراجحة (9.2) إذن من أجل $t \in J$ لدينا:

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |y(t) - G(y(t)) + G(y(t)) - x(t)| \\ &\leq |y(t) - G(y(t))| + |G(y(t)) - x(t)| \\ &\leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} + \eta \|x - y\|_\infty, \end{aligned}$$

ومنه

$$\|y-x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} + \eta\|x-y\|_\infty,$$

$$(1-\eta)\|y-x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

إذن

$$\|y-x\| \leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}M_f}{(1-\eta)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

وبالتالي المسألة $(1.2)-(3.2)$ مستقرة حسب أولاهم هايرز (Ulam-Hyers).

مثال 1.3.2

$$\begin{cases} {}^C D_{0+}^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\phi_p\, {}^R D_{0+}^{\frac{1}{2}} x(t)}{1+\frac{1}{25}e^{-t^2}\cos(x(t))}\right) = \dfrac{1}{5}t\cos x(t) + \dfrac{1}{5+\left|{}^C D_{0+}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\phi_p\, {}^R D_{0+}^{\frac{1}{2}} x(t)}{1+\frac{1}{25}e^{-t^2}\cos(x(t))}\right)\right|} & (10.2) \\ \phi_p\, {}^R D_{0+}^{\beta} + x(0) = \varphi f(0,x(0)) & (11.2) \\ \lim\limits_{t\to 0}\left[t^{1-\beta}x(t)\right] = 0 & (12.2) \end{cases}$$

نأخذ $q=3$، $\varphi=\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$،
حيث f ، g دالتين مستمرتين معرفتين كما يلي:

$$f(t,x(t)) = 1 + \frac{1}{25}e^{-t^2}\cos x(t), \quad t\in J,$$

$$g(t,x(t), {}^C D_{0+}^{\alpha}\left[\frac{\phi_p({}^C D_{0+}^{\beta} x(t))}{f(t,x(t))}\right]) = \frac{1}{5}t\cos(x(t)) + \frac{1}{5+\left|{}^C D_{0+}^{\alpha}\left(\frac{\phi_p\, {}^R D_{0+}^{\frac{1}{2}} x(t)}{1+\frac{1}{25}e^{-t^2}\cos(x(t))}\right)\right|}, t\in J,$$

الأن نتحقق من الشروط $(H_1)-(H_2)$
نضع:

$$g(t,u,v) = \frac{1}{5}t\cos(u) + \frac{1}{5+|v|}, \quad (t,u,v)\in J\times\mathbb{R}^2,$$

و

$$f(t,u) = 1 + \frac{1}{25}t\cos u, \quad (t,u)\in J\times\mathbb{R},$$

ومن جهة أخرى ومن أجل كل $t\in J$ و $u,\overline{u},v,\overline{v}\in\mathbb{R}$ ولدينا:

$$|g(t,u,v)-g(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{5}|u-\overline{u}| + \frac{1}{25}|v-\overline{v}|,$$

$$|f(t,u)-f(t,\overline{u})| \leq \frac{1}{25}|u-\overline{u}|,$$

$$|g(t,u,v)| \leq \frac{2}{5},$$

و

$$|f(t,v)| \leq \frac{26}{25},$$

إذن كل الشروط $(H_1) - (H_2)$ تكون محققة و $\eta = 0.63086 < 1$ مع

$$M_f = \frac{26}{25}, M_g = \frac{2}{5}, K_1 = \frac{1}{25}, K_2 = \frac{1}{5}, K_3 = \frac{1}{25}, M = 0.98491$$

وحسب النظرية 1.2.2 فإن المسألة $(10.2) - (12.2)$ تقبل حلا وحيدا $x \in C(J)$ وحسب النظرية 1.3.2 فإن المسألة $(10.2) - (12.2)$ مستقرة وفق أولام هايرز أيضا.

الفصل 3

دراسة وجود و وحدانية واستقرار حلول المسألة ذات المعادلات التفاضلية الكسرية الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس

1.3 مقدمة

في هذا الفصل سنقدم جزئين، الجزء الأول نعالج فيه وجود ووحدانية الحل لمسألة ذات المعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس، أما في الجزء الثاني من هذا الفصل فنتطرق لدراسة استقرار حل هذه المسألة، ثم نختمه بمثال نوضح فيه النتائج المتحصل عليها.

لتكن المسألة ذات المعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس التالية:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left[\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))) - f(t,x(t))\right] = g(t,x(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\,\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))) - f(t,x(t)) & (1.3)\\ \phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(0)) = \varphi + f(0,x(0))), \quad \varphi\in\mathbb{R} & (2.3)\\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t)) = 0 & (3.3)\end{cases}$$

بحيث:

- $t\in J=[0,1]$ ،
- $0<\alpha,\beta<1$ ،
- ${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}$ المشتق الكسري لكابوتو من الرتبة α،
- ${}^{R}D_{0^+}^{\beta}$ المشتق الكسري لريمان ليوفيل من الرتبة β،
- ϕ_p هوالمؤثر $p-$ لابلاس ،
- $f:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:J\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ دالتين غير خطيتين ومستمرتين.

2.3 دراسة وجود و وحدانية حلول المسألة ذات المعادلات التفاضلية الكسرية الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس

نعتبر المسألة $(1.3)-(3.3)$

تعريف 1.2.3

نقول عن الدالة x من $C(J)$ أنها حل للمسألة $(1.3)-(3.3)$ إذا حققت المعادلة:

$${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left[\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t))) - f(t,x(t))\right] = g(t,x(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}(\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(t)))) - f(t,x(t))),$$

والشرطين الابتدائيين:

$$\lim_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t)) = 0,$$

و

$$\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}(x(0))) = \varphi + f(0,x(0)).$$

توطئة 1.2.3

إذا كانت $0 < \alpha, \beta < 1$ و $h : J \to \mathbb{R}$ دالة مستمرة فإن الدالة x تكون حلا للمعادلة التفاضلية الكسرية المختلطة الهجينة من الصنف الثاني بوجود المؤثر $p-$ لابلاس:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}\left[\phi_p({}^{R}D^{\beta}_{0^+}(x(t)) - f(t,x(t)))\right] = h(t), \tag{4.3}$$

وتحقق الشرطين:

$$\phi_p({}^{R}D^{\beta}_{0^+}\, x(0)) = \varphi + f(0,x(0))),$$

و

$$\lim_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t)) = 0,$$

إذا وفقط إذا كان x حلا للمعادلة التكاملية ذات الرتبة الكسرية:

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[f(s,x(s)) + \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}h(r)dr\right]ds, \tag{5.3}$$

من أجل $t \in J$.

برهان

لدينا x حلا للمعادلة التفاضلية (4.3) ويحقق الشرطين الابتدائيين بتطبيق تكامل ريمان ليوفيل الكسري من الدرجة α على طرفي المعادلة (4.3) وحسب التوطئتين 2.4.1 و 1.4.1 نجد:

$$\phi_p\, {}^{R}D^{\beta}_{0^+}\, x(t) - f(t,x(t)) = I^{\alpha}_{0^+}h(t) + C_0,$$

من الشرط (3.2) نجد:

$$C_0 = \phi_p\, {}^{R}D^{\beta}_{0^+}\, x(0) - f(0,x(0)) = \varphi,$$

بتعويض قيمة C_0 نجد:

$$\phi_p\, {}^{R}D^{\beta}_{0^+}\, x(t) = f(t,x(t)) + \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

ومنه:

$${}^{R}D^{\beta}_{0^+}\, x(t) = \phi_q(f(t,x(t)) + \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds),$$

بإدخال التكامل الكسري ريمان ليوفيل من الرتبة β نجد:

$$x(t) = I^{\beta}_{0^+}\left[\phi_q(\varphi + f(t,x(t))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + Kt^{\beta-1}\right],$$

من الشرط (3.3) نجد:

$$K = \lim(t^{1-\beta}x(t)) = 0,$$

بالتعويض نجد:

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[f(s,x(s)) + \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}h(r)dr\right]ds,$$

من الواضح أن المسألة ذات المعادلات التفاضلية المختلطة الهجينة $(4.3)-(2.3)-(3.3)$ تحقق المعادلة التكاملية (5.3) الإستلزام العكسي يستنتج بالحساب المباشروالتوطئة $1.4.1$.

سنبين فيمايلي وجود حل للمسألة $(1.3)-(3.3)$ باستعمال نظرية بناخ للنقطة الثابتة تحت شروط معينة يخضع لها التابعين f و g.

لتكن الشروط التالية:

(H_1) توجد الثوابت $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_+$ و $K_3 \in (0,1)$ بحيث :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K_1|x-y|, \;\; \forall (t,x,y) \in J \times \mathbb{R}$$
$$|g(t,x,y) - g(t,\overline{x},\overline{y})| \leq K_2|x-\overline{x}| + K_3|y-\overline{y}|, \;\; \forall (t,x,\overline{x},y,\overline{y}) \in J \times \mathbb{R}$$

(H_2) توجد $M_g, M_f \in \mathbb{R}_+$:

$$|f(t,x)| \leq M_f, \;\; \forall (t,x) \in J \times \mathbb{R}$$
$$|g(t,x,y)| \leq M_g, \;\; \forall (t,x,y) \in J \times \mathbb{R}^2$$

نظرية 1.2.3

ليكن $1 < p \leq 2$. نفرض أن الدالتين g و f مستمرتين وتحقق الشرطين (H_1) و (H_2) إذا كان:

$$\eta = \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta+1)}\left(K_1 + \frac{K_2}{(1-K_3)\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1, \qquad (6.3)$$

حيث:

$$M = |\varphi| + M_f + \frac{M_g}{\Gamma(\alpha+1)},$$

إذا المسألة $(1.3)-(3.3)$ تقبل حلا وحيدا معرف على المجال J.

برهان

نعرف المؤثر $G : C(J) \to C(J)$ كما يلي:

$$G(x(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[f(s,x(s)) + \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_x(r))dr\right]ds,$$

حيث:

$$\sigma_x(r)) = g(t,x(t), {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}\left(\phi_p({}^{R}D_{0^+}^{\beta}x(t) - f(t,x(t)))\right),$$

واضح أن النقطة الثابتة لـ G هي حل للمسألة (1.3) -(3.3).

سنبين الآن وجود نقطة ثابتة لـ G وذلك بإثبات أن G مقلص.

لتكن $x, y \in C(J)$ عندئذ من أجل كل $t \in J$ يكون:

$$\begin{aligned}
|G(x(t)) - G(y(t))| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q \left[\varphi + f(s, x(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \sigma_x(r) dr \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \phi_q(\varphi + f(s, y(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \sigma_y(r)) dr \right] ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left| \phi_q(\varphi + f(s, x(s))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \sigma_x(r)) dr \right)\Big) \\
&- \phi_q(\varphi + f(s, y(s))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \sigma_y(r)) dr \Big| ds
\end{aligned}$$

من الشرط (H_2) نجد:

$$\begin{aligned}
\left| \varphi + f(t, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \sigma_x(r) dr \right| &\leq |\varphi| + |f(t, x(t))| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (s-r)^{\alpha-1} |\sigma_x(r)| dr \\
&\leq |\varphi| + M_f + \frac{M_g}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (s-r)^{\alpha-1} dr \\
&= |\varphi| + M_f + \frac{M_g}{\alpha\Gamma(\alpha)} s^\alpha \\
&\leq |\varphi| + M_f + \frac{M_g}{\Gamma(\alpha+1)} = M.
\end{aligned}$$

حسب التوطئة 2.3.1 نجد:

$$\begin{aligned}
|(G(x(t)) - G(y(t)) \leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \\
+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} |\sigma_x(r) - \sigma_y(r)| dr ds
\end{aligned}$$

لدينا من الشرط (H_1):

$$\begin{aligned}
&|\sigma_x(r) - \sigma_y(r)| \leq K_2 |x(r) - y(r)| + K_3 |\sigma_x(r) - \sigma_y(r)| \\
&|\sigma_x(r) - \sigma_y(r)| \leq \frac{K_2}{(1-K_3)} |x(r) - y(r)| \quad r \in J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|G(x(t)) - G(y(t))| &\leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (K_1 |x(s) - y(s)| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \frac{K_2}{(1-K_3)} |x(r) - y(r)| dr) ds \\
&\leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left(K_1 \|x-y\|_\infty + \frac{K_2}{(1-K_3)\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\times \left. \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} \|x-y\|_\infty dr \right) ds \\
&\leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta)} \|x-y\|_\infty \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \left(K_1 + \frac{K_2}{(1-K_3)\Gamma(\alpha+1)} \right) ds \\
&\leq \frac{(q-1)M^{q-2}}{\Gamma(\beta+1)} \left(K_1 + \frac{K_2}{(1-K_3)\Gamma(\alpha+1)} \right) \|x-y\|_\infty, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

وحسب الشرط (6.3) فإن المؤثر G مقلص وبناءا على نظرية بناخ للنقطة الثابتة فالمسألة (1.3) – (3.3) تقبل حلا وحيدا معرف في J.

3.3 دراسة استقرار المسألة حسب أولام هايرز Ulam-Hyers

في هذا الجزء سنقوم بدراسة نوع من الاستقرار للمسألة (1.3) – (3.3) وهذا النوع يعرف باستقرار أولام -هايرز.

توطئة 1.3.3

ليكن $1 < p \leq 2$. نفرض أن الشرطين (H_1) و (H_2) محققين وإذا كان y حلا للمتباينة التفاضلية الكسرية الآتية من أجل $\varepsilon > 0$

$$\left| {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}\left[\phi_p\left({}^{R}D^{\beta}_{0^+}+(y(t)) - f(t,y(t)) - g(t,y(t), {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}(\phi_p(y(t)) - f(t,y(t))\right)\right)\right]\right| < \varepsilon, \tag{7.3}$$

فإن y هو حل للمتراجحة التالية:

$$|y(t) - G(y(t))| \leq \frac{(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

حيث:

$$K = |\varphi| + M_f + \frac{M_g+1}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

برهان

ليكن $y \in C(J)$ حل للمتراجحة (7.3) من أجل $\varepsilon > 0$ وباستخدام التوطئة 1.2.3 والملاحظة 1.5.1 المتعلقة بالدالة المستمرة Ψ بحيث: $|\Psi(t)| < \varepsilon$ من أجل $t \in J$ لدينا:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[\varphi + f(s,y(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}(\sigma_y(r)+\Psi(r))dr\right]ds,$$

$$G(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\phi_q\left[\varphi + f(s,y(s)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\sigma_y(r)dr\right]ds,$$

حيث

$$\sigma_y(r) = g(r,y(r), {}^{C}D^{\alpha}_{0^+}[\phi_q(y(r)) - f(r,y(r))dr]ds,$$

حسب التوطئة 2.3.1 والشرط (H_2) نجد:

$$\begin{aligned}|y(t)-G(y(t))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left(\frac{(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s (s-r)|\Psi(r)|dr\right)\\ &\leq \frac{(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\left(\int_0^s (s-r)^{\alpha-1}\varepsilon dr\right)ds\\ &\leq \frac{(q-1)K^{q-2}\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.\end{aligned}$$

نظرية 1.3.3

ليكن $1 < p \leq 2$. نفرض أن الشرطين (H_1) و (H_2) محققين مع الشرط (6.3) إذن المسألة $(1.3)-(3.3)$ مستقرة وفق أولام هايرز.

برهان

تحت الشروط (H_1) و (H_2) والشرط (6.3) ومن النظرية 1.2.3 إذن المسألة $(1.2)-(3.2)$ تقبل حلا وحيد في $C(J)$ نرمز له بـ x ليكن y حل للمتراجحة $(7,3)$ إذن من أجل $t \in J$ لدينا:

$$\begin{aligned}|y(t)-x(t)| &= |y(t)-G(y(t))+G(y(t))-x(t)|\\ &\leq |y(t)-G(y(t))|+|G(y(t))-x(t)|\\ &\leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}+\eta\|x-y\|_\infty,\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\|y-x\|_\infty &\leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}+\eta\|x-y\|_\infty\\ (1-\eta)\|x-y\|_\infty &\leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},\end{aligned}$$

إذن

$$\|x-y\| \leq \frac{\varepsilon(q-1)K^{q-2}}{(1-\eta)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

وبالتالي المسألة $(1.3)-(3.3)$ مستقرة حسب أولاهم هايرز (Ulam-hyers).

مثال 1.3.3

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}(\phi_p({}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(t)-\frac{1}{100}t\cos(x(t))))=\frac{1}{5}t\cos(x(t))+ \\ \dfrac{1}{5+({}^{C}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}(\phi_p({}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(t)-\frac{1}{100}t\cos(x(t)))))} & (8.3) \\ \phi_p({}^{R}D^{\beta}_{0^+}(x(0)))=\varphi+f(0,x(0)) & (9.3) \\ \lim\limits_{t\to 0}(t^{1-\beta}x(t))=0 & (10.3) \end{cases}$$

نأخذ $q=3$ و $\varphi=\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ حيث f ، g دالتين مستمرتين معرفتين كما يلي:

$$f(t,x(t))=\frac{1}{100}t\cos(x(t)),\quad t\in J$$

$$g(t,x(t),{}^{C}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}(\phi_p({}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(t))-f(t,x(t))=\frac{1}{5}t\cos(x(t))+ \frac{1}{5+({}^{C}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}(\phi_p({}^{R}D^{\frac{1}{2}}_{0^+}x(t)-\frac{1}{100}t\cos(x(t)))))},\quad t\in J$$

نضع

$$g(t,u,v)=\frac{1}{5}t\cos(u)+\frac{1}{5+|v|},(t,u,v)\in J\times\mathbb{R}^2,$$

و

$$f(t,u)=\frac{1}{100}t\cos(u),(t,u)\in J\times\mathbb{R},$$

من أجل كل $\overline{v},\overline{u},v,u$ و $t\in J$ لدينا:

$$|f(t,u)-f(t,\overline{u})|\leq\frac{1}{100}|u-\overline{u}|$$
$$|g(t,u,v)-g(t,\overline{u},\overline{v})\leq\frac{1}{5}|u-\overline{u}|+\frac{1}{25}|v-\overline{v}|$$

$$|f(t,v)|\leq\frac{1}{4},$$

و

$$|g(t,u,v)|\leq\frac{2}{5},$$

ومنه نستنتج

$$K_1=\frac{1}{100},K_2=\frac{1}{5},K_3=\frac{1}{25},M_f=\frac{1}{4},M_g=\frac{2}{5}$$

وبالحساب كذلك نجد $M=0.56135$
إذن: كل الشروط $(H_1)-(H_2)$ محققة بالإضافة إلى الشرط:

$$n=0.31047<1$$

حسب النظرية 1.2.3 فإن المسألة $(8.3)-(10.3)$ تقبل حلا وحيدا $x\in C(J)$ وحسب النظرية 1.3.3 فإن المسألة $(8.3)-(10.3)$ مستقرة وفق أولام هايرز كذلك.

خـــاتمة

نظرا للأهمية الكبيرة التي توليها المعادلات التفاضلية سواء في الرياضيات و غيرها من المجالات، و بالأخص المعادلات التفاضلية الكسرية التي تعتبر من بين أهم مجالات البحث . تعتبر مذكرتنا استكمالا لأعمال أخرى في الحساب الكسري حيث عالجنا فيها وجود و وحدانية و استقرار الحل لبعض المسائل المختلطة بوجود المشتقات الكسرية من نوع ريمان و كابوتو، الهجينة من الصنف الأول و الثاني و ذلك بوجود المؤثر$p-$ لابلاس .

نرجو ان نكون قد قطفنا الثمرة المبتغاة من هدا البحث المتواضع و الذي فائدته تعود الينا أولا ثم إلى الطلبة الذين نأمل أن نكون قد رسمنا لهم الخطى الأولى في هذا الموضوع، غير أننا لا ندعي الكمال فمن المؤكد أن في العمل نقائص فرحم الله امرؤ رأى خللا فسده أو نقصا فأتمه و ذلك حتى تتم الفائدة.

في الختام يمكن تطوير الدراسة إلى أعمال أخرى مثلا ك:

- استعمال أنواع أخرى من المشتقة الكسرية .
- توسيع الدراسة في مجالات غير المنتهية.
- تعميم الدراسة إلى فضاءات بناخ أوسع.

قائمة المراجع

[1] S. abbas, M. Benchohra, N. Laledj, Y. Zhou, Existence ans Ulam stability for implicit fractional q-difference equations. Adv. Differ. Equ. 2019, 48 (2019).

[2] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, An existence theorem for fractional hybrid di erential inclusions of Hadamard type with Dirichlet boundary conditions, em Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 705809, 7 pp.

[3] A. Ardjouni, A. Djoudi, Approximating solutions of nonlinear hybrid Caputo fractional integro-differential equations via Dhage iteration principle, Ural Mathematical Journal, 5(1)(2019), 3-12.

[4] H. Boulares, A. Ardjouni, Y. Laskri, Stability in delay nonlinear fractional differential equations, Rend. Circ. Mat. Palermo, 65, 2016, 243-253.

[5] M. Benchohra, E.L. Jamal, On stability for nonlinear implicit fractional differential equations, Le Matematiche, 70(2), 2015, 49-61.

[6] Y. Cui, Uniqueness of solution for boundary value problems for fractional differential equations. Appl. Math. Lett., 51 (2016), 48- 54.

[7] B. Dhage, N. Jadhav, "Basic results in the theory of hybrid differential equations with linear perturbations of second type," Tamkang Journal of Mathematics, vol. 44(2)(2013), 171-186, .

[8] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations, Lecture Notes in Math- ematics, 2010.

[9] K. Diethelm, A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, Scienti...c Computing in Chemical Engineerin II : Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering, and Molecular Properties, F. Keil, W. Mackens, H. voss, and J. Werther, Eds., Springer, Heidelberg, Germany, 1999.

[10] A. Granas, J. dugundji, Fixed Point Theory, Springer, New york 2003.

[11] A. Guezane-Lakoud, A. Ashyralyeval, Fixed point theorem applied to a fractional boundary value problem, Pure and Applied Mathematics Letters, 2(2014), 1-6.

[12] Guo, X.: Existence of unique solution to switched fractional differential equations with p-Laplacian operator. Turk.J. Math. 39(2015), 864- 871.

[13] Z. Han, H. Lu, S. Sun and D. Yang, Positive solutions to boundary-value problems of p-Laplacian fractional differential equations with a parameter in the boundary. Electron. J. Differ. Equ., 2012, Article ID 213(2012).

[14] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scienti...c Publishing Co.,River Edge, NJ, USA, 2000.

[15] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier B. V; Amsterdam, 2006.

[16] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, Differential equations of fractional order : methods, results and problems. I, Applicable Analysis, 78(1) (2001), 153-192.

[17] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo, Differential equations of fractional order : methods, results and problems. II, Applicable Analysis, 81 (2) (2002), 435-493.

[18] H. Jafari, D. Baleanu, H. Khan, R.A. Khan, A. Khan, Existence criterion for the solutions of fractional order p-Laplacian boundary value problems. Bound. Value Probl.2015, 164 (2015)

[19] X. P. Liu, M. Jia, X. F. Xiang, On the solvability of a fractional differential equation model involving the P-Laplacian operator, Comput. Math. Appl., 64 (2012), 3267-3272.

[20] K. Liu, J.R. Wang, Y. Zhou, D. O' Regan, Hyers-Ulam stability and existence of solutions for fractional differential equations with MittagLe- er kernel, Chaos Soliton. Fract., 132(2020), 109534

[21] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[22] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.

[23] D.R. Smart, Fixed Point Theorems. Cambridge University Press, London (1974).

[24] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, Y. Li, The existence of solutions for boundary value problem of fractional hybrid di erential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17 (2012), 4961-4967.

[25] J. Wang, X. Li, Ulam-Hyers stability of fractional Langevin equations, Appl. Math. Comput., 258(2015), 72- 83.

[26] J. Xu, D. O' Regan, Positive solutions for a fractional p-Laplacian boundary value problem. Facul. Sci. Math. Filom. 31(6) (2017), 1549- 1558.

[27] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, Theory of fractional hybrid di erential equations, Comput. Math. Appl. 62 (2011), 1312-1324.