

الشعبية الجزائرية الديمقراطية الجمهورية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche

Scientifique

جامعة 20 أوت 1955 – سكيكدة

Université 20 Août 1955 – SKIKDA

Faculté de Technologie

Département de Pétrochimie



Mémoire

En vue d'obtention du diplôme de master

Filière : Industrie pétrochimique

Spécialité : Automatisation en industrie pétrochimique

THÈME :

Synthèse de la commande prédictive robuste fondée sur les fonctions de Laguerre

Réalisé par : MERAH Mohammed Seddik

BOUAZIZ Hamza

Encadré par : Dr-MENIGHED Kamel

Membre de Jury :

- ZENNIR Youcef (Pr)
- BOUCHEBBAT Rochdi (MCB)

Année universitaire 2024/2025

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre gratitude envers Dieu le Tout-Puissant et Miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Nous souhaitons également adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nous tenons à remercier chaleureusement le **Docteur MENIGHED Kamel** pour son encadrement précieux. Les conseils qu'il nous a prodigués, sa patience et la confiance qu'il nous a accordée ont joué un rôle déterminant dans la réalisation de notre travail. Veuillez trouver dans ce mémoire l'expression de notre plus profond respect.

Nous voudrions présenter nos remerciements à **professeur ZENNIR Youcef** pour l'intérêt qu'il a porté à nos recherches en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par ses propositions. Nous tenons à lui exprimer nos sincères gratitude.

Nous voudrions présenter nos remerciements à **BOUCHEBBAT Rochdi (MCB)** pour l'intérêt qu'il a porté à nos recherches en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par ses propositions. Nous tenons à lui exprimer nos sincères gratitude.

Dédicaces :

À mes chers parents :

MERAH Tahar, MERAH Fatiha

Qui ont toujours m'apporté le meilleur des meilleurs. Aucun mot ne pourra exprimer m'affection envers vous. Personne ne pourra vous rendre les sacrifices que vous avez déployés à mon égard, grâce à vous je suis un ingénieur d'automatisation en Pétrochimie à l'âge de 23 ans, j'espère toujours de rester fidèle aux valeurs que vous m'avez apprises. Que dieu vous procure de la santé, prospérité et du bonheur éternel...

Aux âmes de mes chers grands papas

Aux membres de ma famille qui sont entrain de soutenir ma vie ... Votre présence inspire mon existence :

Nabila, Faiza, Amira, Ali Bader eddine, Fares Seif eddine.

À tous les membres de la famille MERAH

À mon binôme BOUAZIZ HAMZA

À mon encadrant Dr- MENIGHED Kamel qui a sacrifié son temps pour ce travail.

À mes proches : M.Belhadj, M.Sid ahmed, Mesbahi.F, Bouabdallah Badr Eddine, Laouacheria nidal , Khenich mohamed , Lithim Aymen, Laouar mohamed , Kihel issam.

À tous les automaticiens de ma promotion, Skikda 2025

MERAH Mohammed Seddik

Dédicaces :

À mes chers parents :

Qui ont toujours m'apporté le meilleur des meilleurs. Aucun mot ne pourra exprimer m'affection envers vous. Personne ne pourra vous rendre les sacrifices que vous avez déployés à mon égard, grâce à vous je suis un ingénieur d'automatisation en Pétrochimie à l'âge de 23 ans, j'espère toujours de rester fidèle aux valeurs que vous m'avez apprises. Que dieu vous procure de la santé, prospérité et du bonheur éternel...

À tous les membres de ma famille

À mon binôme MERAH MOHAMMED SEDDIK

À mon encadrant Dr- MENIGHED Kamel qui a sacrifié son temps pour ce travail.

À tous les automaticiens de ma promotion, Skikda 2025

BOUAZIZ Hamza

Sommaire

<i>Remerciements</i>	
<i>Dédicaces</i> :	
<i>Dédicaces</i> :	
Sommaire	
Liste des Figures.....	
Liste des tableaux	
Liste des symboles et abréviations	
Introduction générale.....	1

Chapitre 1

La commande prédictive classique (MPC)

1.1 Introduction	2
1.2 Principe de la commande prédictive	3
1.3-Modèles d'espace d'état avec intégrateur intégré	6
1.3.1 Système à entrée unique et à sortie unique	6
1.4 Contrôle prédictif dans une ligne d'optimisation.....	8
1.4.1 Prédiction des variables d'état et de sortie.....	8
1.4.2 Optimisation	10
1.5 Contrôle de l'horizon fuyant.....	15
1.5.1 Système de contrôle en boucle fermée.....	17
1.6 Contrôle prédictif des systèmes MIMO	20
1.6.1 Formulation générale du modèle	21
1.6.2 Solution de contrôle prédictif pour les systèmes MIMO.....	25
1.7. Commande prédictive à temps discret et espace d'état sous contraintes.....	26
1.7.1. Types de contraintes opérationnelles	26
1.7.2. Incorporation de la contrainte dans le problème d'optimisation	29
1.8 Conclusion.....	31

Chapitre 2

MPC à temps discret basée sur les fonctions de Laguerre

2.1 Introduction	32
2.2 Fonctions de Laguerre :	32
2.2.1. Définition des fonctions de Laguerre	32
2.2.2. Génération de fonctions de Laguerre.....	33
2.3 Fonctions de Laguerre et DMPC.....	34
2.3.1 Réseaux de Laguerre à temps discret.....	35

2.3.2 Utilisation des réseaux de Laguerre dans la description du système.....	39
2.3.3 Utilisation des fonctions de Laguerre dans la modélisation de systèmes.....	40
2.4 Utilisation des fonctions de Laguerre dans la conception DMPC	40
2.4.1 Cadre de conception	41
2.4.2 Fonctions de coût	42
2.4.3 Contrôle de l'horizon fuyant.....	43
2.4.4 La trajectoire optimale du contrôle incrémental.....	44
2.5 Extension aux systèmes MIMO	46
2.6 Contrôle prédictif basé sur les fonctions de Laguerre sous contraintes	49
2.6.1 Contraintes sur les incréments du signal de commande.....	49
2.6.2 Contraintes sur l'amplitude du signal de commande.....	49
2.7 Conclusion.....	50

Chapitre 3

L'étude d'un système à quatre réservoirs avec interaction

3.1. Introduction	52
3.2. Description du procédé à quatre réservoirs avec interaction.....	52
3.3 Modélisation du procédé à quatre réservoirs avec interaction	55
3.4 Simulation et comparaison	57
3.5 Conclusions	65
Conclusion générale	66
Bibliographies	67
Résumé	

Liste des Figures

FIGURE 1.1 PRINCIPE DE LA COMMANDE PREDICTIVE	4
FIGURE 1.2 APPLICATION QUOTIDIENNE DE LA COMMANDE PREDICTIVE	5
FIGURE 1.3 COMPARAISON DE SOLUTIONS OPTIMALES.	13
FIGURE 1.4 CONTROLE DE L'HORIZON FUYANT	16
FIGURE 1.5 SCHEMA FONCTIONNEL D'UN SYSTEME DE CONTROLE PREDICTIF A TEMPS DISCRET.....	18
FIGURE 1.6. MODEL CLASSIQUE AUGMENTE	19
FIGURE 1.7. CONTROLEUR MPC	20
FIGURE 1.8 SCHEMA-BLOC GENERAL DE LA COMMANDE MPC SOUS FORME D'ETAT.....	21
Figure 2.1. Réseau de Laguerre.....	33
Figure 2.2. Réseau discret de Laguerre.....	36

FIGURE 2.3 FONCTIONS DE LAGUERRE.	39
FIGURE 2.4 UTILISATION DES FONCTIONS DE LAGUERRE DANS LA CONCEPTION DMPC.....	41
FIGURE. 2.5. COMPARAISON DES REPOSES AU SEIN D'UNE LIGNE D'OPTIMISATION.	46
FIGURE 3.1 LE PROCESSUS DU QUADRUPLE RESERVOIRS AVEC UNE INTERACTION.....	53
FIGURE 3.2 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2	57
FIGURE 3.3 EVOLUTION DE LA COMMANDE U1 ET U2	58
FIGURE 3.4 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2	58
FIGURE 3.5 EVOLUTION DE LA COMMANDE U1 ET U2	59
FIGURE 3.6 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2 AVEC PERTURBATION	60
FIGURE 3.7 EVOLUTIONS DE LA COMMANDE U1 ET U2 AVEC PERTURBATION	60
FIGURE 3.8 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2 AVEC PERTURBATION.....	61
FIGURE 3.9 EVOLUTIONS DE LA COMMANDE U1 ET U2 AVEC PERTURBATION	61
FIGURE 3.10 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2 AVEC DES CONTRAINTES	63
FIGURE 3.11 REPOSE DE LA SORTIE Y1 ET Y2 AVEC DES CONTRAINTES	63
FIGURE 3.12 EVOLUTIONS DE LA COMMANDE U1 ET U2 AVEC DES CONTRAINTES.....	64

Liste des tableaux

TABLEAU 2.1. PARAMETRES DANS η	45
TABLEAU 3.1 LES PARAMETRES DU PROCEDE QTPI	54
TABLEAU 3.2 LES POINTS DE FONCTIONNEMENT D'ENTREE ET DE SORTIE.....	56
TABLEAU 3.3 COMPARAISON ENTRE MPC CLASSIQUE ET LAGUERRE	59
TABLEAU 3.4 COMPARAISON ENTRE MPC CLASSIQUE ET LAGUERRE	62
TABLEAU 3.5 COMPARAISON ENTRE MPC CLASSIQUE ET LAGUERRE	64

Liste des symboles et abréviations

Symboles

a	Facteur d'échelle pour les fonctions de Laguerre à temps discret
$\arg \min$	l'argument minimiser
A	Matrice d'état du modèle d'espace d'état
B	Matrice d'entrée-état du modèle d'espace d'état
C	Matrice état-sortie du modèle espace-état
D	Matrice de transmission directe du modèle d'espace d'état
(A, B, C, D)	Espace-état
ΔU	Vecteur de paramètres pour la séquence de contrôle
$\Delta u(k_i + m)$	contrôle incrémental futur à l'échantillon m
$\Delta u^{\min}, \Delta u^{\max}$	limites minimum et maximum Δu
F, Φ	Paire de matrices utilisées dans l'équation de prédiction $Y = F x(k_i) + \Phi \Delta U$
$G(s)$	fonction de transfert
$I_{q \times q}$	Matrice identique avec des dimensions appropriées
J	Indice de performance pour l'optimisation
K_{mpc}	Gain de contrôle de rétroaction à l'aide du MPC
K_y	Gain de contrôle de rétroaction d'état lié à y
$\kappa(A)$	numéro de conditions de la matrice A
$li(\cdot)$	La i ème fonction de Laguerre discrète ou continue
$L(\cdot)$	La i ème fonction de Laguerre discrète ou continue de la forme vectorielle
$Li(s)$	Transformée de Laplace de la i ème fonction de Laguerre en temps continu
$Li(z)$	transformée en z de la i ème fonction de Laguerre discrète
m	Nombre d'entrées, ainsi que le m ième échantillon futur en temps discret
N	Nombre de termes utilisés dans le développement des fonctions de Laguerre.

N_c / N_u	horizon de contrôle
N_p	horizon de Prédiction
0_m	Vecteur nul avec une dimension appropriée
0_k	Vecteur de ligne zéro ($k = 1, 2, \dots$) avec des dimensions appropriées
Ω, Ψ	Paire de matrices dans le coût du contrôle prédictif
η	Vecteur de paramètres dans le développement de Laguerre
p	Facteur d'échelle pour les fonctions de Laguerre en temps continu
Q, R	Paire de matrices de pondération dans la fonction de coût du contrôle prédictif
q	nombre de sorties
$r(\cdot)$	Signal de consigne
T_p	Horizon de prédiction en temps continu
$u(\cdot)$	signale de contrôle
$x(\cdot)$	variable d'état
$x(k_i + m k_i)$	Vecteur de variable d'état prédit au temps d'échantillonnage m
$y(\cdot)$	signale de sortie
Y	Vecteur de données de sortie prédit
y^{\min}, y^{\max}	Limites minimales et maximales de y

Abréviations

MPC	Model Predictive Control
MIMO	Multi Input Multi Output
SISO	Single Input Single Output
QTPI	Quadruple Tank Process with an Interaction

Introduction générale

Introduction générale

Afin d'améliorer la qualité de vie et de maîtriser notre environnement on élabore des stratégies de contrôle efficaces, basant sur l'anticipation tenant compte des techniques de commande pour systèmes à dynamique telle que la MPC pour l'optimisation de la trajectoire de contrôle future et facilite la commande du système [11].

Focalisant sur les processus industriels qui fonctionnent dans un environnement multi-entrées et multi-sorties (MIMO) [10], et présentent une forte intégration, un comportement non linéaire, une incertitude, ainsi qu'une forte interaction entre les phases minimales et non minimales [9].

Pour vérifier que le MPC-Laguerre est recommandé pour les systèmes contraints et dans les applications nécessitant une rapidité et une fiabilité, on réalise une représentation au moyen d'un modèle dont les paramètres et les variables sont ceux du processus étudié, un processus à quatre réservoirs avec interaction (QTPI) en utilisant deux approches de commande prédictive : la commande prédictive classique (MPC) et la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre. Alors notre étude compare le MPC classique et le MPC-Laguerre à travers trois scénarios : système sans perturbations et sans contraintes, système perturbé et non contraint et système contraint sans perturbations.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, on va détailler les principes de la commande prédictive classique, la base de fonctionnement sans et sous contraintes dans les systèmes.
- Le deuxième chapitre on va détailler les principes de la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre, la base de fonctionnement sans et sous contraintes dans les systèmes.
- Le troisième chapitre est consacré à une application concrète sur un processus à quatre réservoirs avec interaction (QTPI). Les résultats des deux types ont été comparés selon trois scénarios distincts.

Enfin, nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1 :

La commande prédictive classique (MPC)

1.1 Introduction

Le MPC est une technique de commande pour systèmes à dynamique, compatible avec le fait qu'à chaque temps d'échantillonnage le signal de commande découle de la résolution d'un problème d'optimisation.

La commande prédictive constitue un domaine ample et varié et intègre des disciplines comme la commande optimale, la commande multi variable et la commande avec contrainte.

Pour bien maîtriser notre entourage. Il est donc logique d'analyser les comportements et utiliser l'anticipation, c'est-à-dire la prédiction, pour déterminer des stratégies de contrôle efficaces.

EXEMPLE 1 : Conduire une voiture

1. Les conducteurs regardent devant eux et anticipent les cibles ou les exigences futures.
2. Changement de route, piétons, autres véhicules, modification de la limitation de vitesse, etc.

EXEMPLE 2 : Remplir un récipient

1. Nous observons le changement de profondeur et anticipons les changements futurs.
2. Nous modifions le flux d'entrée pour garantir que la profondeur future ne dépasse pas la cible.

EXEMPLE 3 : Sports de raquette

1. Les joueurs planifient plusieurs coups à l'avance afin de placer leur adversaire en position de faiblesse ou d'éviter de se retrouver dans une telle position.
2. Ils prédisent l'impact de différents choix de tirs et sélectionnent ceux qui conduisent au résultat le plus souhaitable [1].

Et pour s'adapter à une grande variété de procédés : linéaires, non linéaires, stables ou non, on doit

- Prise en compte explicite des contraintes
- Robustesse par rapport aux perturbations
- Facilité de mise en œuvre : 3 paramètres de réglages [2].

Lorsque les humains utilisent des prédictions et des anticipations pour planifier la meilleure décision, il est implicite que de nombreux aspects sont pris en compte dans le processus décisionnel.

1. Les contraintes (ou leur évitement anticipé) sont garanties pour toutes les décisions valides.

2. Toute interaction entre différentes entrées et sorties est modélisée dans les prédictions et donc prise en compte de manière systématique plutôt que ponctuelle.
3. Lorsque nous disposons d'informations préalables sur les cibles et perturbations futures, une prise en compte appropriée est prise en compte.
4. Les dynamiques complexes, telles que les comportements de phase non minimaux et les retards, sont automatiquement prises en compte.

Par conséquent, les approches de contrôle prédictif sont devenues la norme de facto dans l'industrie dans les scénarios où des aspects tels que les contraintes sont particulièrement importantes et/ou lorsque de petites améliorations de performance peuvent entraîner d'importantes augmentations de profit, justifiant ainsi le coût supplémentaire d'une approche de conception systématique[1].

Afin de bien contrôler et prendre en charge ce système on résout les problèmes de synthèse (pratiques) :

- Choix des horizons de prédiction et de commande

Compromis entre faisabilité numérique et poursuite

- Le temps de calcul

Résolution du modèle et du problème d'optimisation en un temps inférieur à une période d'échantillonnage

Et les problèmes structurels (théoriques)

- Faisabilité a priori
- Stabilité[2].

1.2 Principe de la commande prédictive

Le contrôle prédictif utilise un modèle système disponible pour intégrer le comportement futur prédit du processus dans la procédure de conception du contrôleur. Cette méthode de conception de contrôle combine généralement :

- 1) Un modèle de processus, souvent linéaire et discret
- 2) Une équation prédictive, celle-ci est exécutée sur un nombre fixe de pas de temps afin de prédire le comportement probable du processus

3) Une trajectoire de référence future connue

4) Une fonction de coût, il s'agit généralement d'une fonction quadratique qui pénalise les erreurs de sortie futures du processus par rapport aux valeurs de référence et de contrôle connues.

L'optimisation de la fonction de coût en fonction des sorties et des contrôles futurs du processus conduit à une expression explicite du contrôle. Une autre capacité de la méthode est qu'elle peut intégrer des contraintes opérationnelles du processus. Si ces contraintes sont exprimées sous forme d'inéquation linéaire, le problème d'optimisation du contrôle prédictif prend la forme d'un problème de programmation quadratique (QP) qui peut être résolu par des méthodes d'optimisation standard[3].

La commande prédictive MPC représente un moyen relativement simple d'aborder une loi de commande dans le domaine temporel, et a démontré au travers des applications ses qualités liées à la régulation des systèmes multivariables, des systèmes instables, des systèmes à retard, des systèmes non-linéaires, des systèmes à non minimum de phase, des systèmes hybrides.

La Figure 1.1 illustre le principe de la commande prédictive : le calcul de la séquence de commande optimale (u) à appliquer au système se fait à chaque instant t_K jusqu'à l'instant t_{K+Nu} où Nu est l'horizon de commande de la MPC. Pour cela, il se base sur un modèle du système à contrôler permettant de prédire la sortie (y) jusqu'à l'instant t_{K+Np} et sur une trajectoire de référence à atteindre (r).

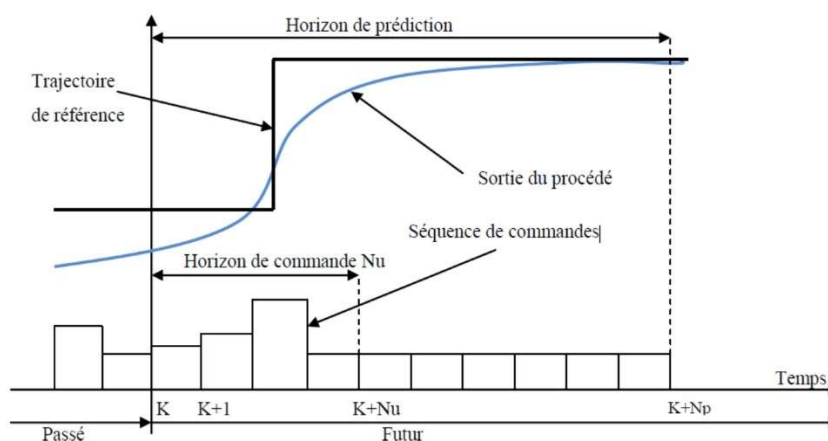


Figure 1.1 Principe de la commande prédictive

[4].

La technique prédictive permet en fait de reproduire de façon théorique le comportement intuitif naturellement prédictif ou anticipatif de l'être humain :

En conduisant une voiture, en marchant, en faisant du ski, en respectant le budget alloué à certaines activités sur une période limitée, en traversant une rue... Ainsi, les skieurs (Figure 1.2) font une prédiction de la trajectoire à suivre sur un horizon fini, et élaborent des actions qui vont leur permettre de la suivre, et puis à chaque étape l'horizon de prédiction glisse avec eux. En utilisant des commandes classiques, les décisions sont réalisées à partir des erreurs passées entre la sortie et la consigne, et non des erreurs prédites. Or il apparaît clairement dans le cas du ski que la structure prédictive faisant intervenir des erreurs futures est fortement nécessaire, le cas contraire étant équivalent à skier en regardant à l'arrière pour réduire l'erreur entre la trajectoire désirée et la position réelle.



Figure 1.2 Application quotidienne de la commande prédictive

Les étapes spécifiques à toutes les lois de commande prédictive sont classifiées :

- ✓ L'élaboration (choix) du modèle du système sur lequel est basée la prédiction de la sortie
- ✓ Spécification de la trajectoire que doit suivre la sortie
- ✓ Minimisation d'un critère quadratique à horizon fini élaborant une séquence de commandes futures
- ✓ Application du premier élément de la séquence de commande au système et au modèle

Les deux dernières étapes sont répétées à chaque instant d'échantillonnage conformément au principe de l'horizon fuyant.

Pour les systèmes multivariables, cet algorithme est appliqué simultanément à chaque sortie, il en résulte une commande différente pour chaque entrée du système[5].

1.3-Modèles d'espace d'état avec intégrateur intégré

Les systèmes de contrôle prédictif sont conçus à partir d'un modèle mathématique de l'usine. Le modèle utilisé pour la conception du système de contrôle est un modèle espace-état. Grâce à ce modèle, les informations actuelles nécessaires à la prévision sont représentées par la variable d'état à l'instant présent.

1.3.1 Système à entrée unique et à sortie unique

On commence, en supposant que l'installation sous-jacente est un système à entrée et sortie unique, décrit par :

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) \quad (1.1)$$

$$y(k) = C_m x_m(k) \quad (1.2)$$

Où "u" est la variable manipulée ou variable d'entrée "y" est la sortie du procédé et "x_m" est le vecteur de variables d'état de dimension supposée n₁. Notez que ce modèle d'installation a u(k) comme entrée. Nous devons donc adapter le modèle à notre objectif de conception, qui intègre un intégrateur.

Notez qu'une formulation générale d'un modèle d'espace d'état a un terme direct entre le signal d'entrée u(k) et la sortie y(k) comme

$$y(k) = C_m x_m(k) + D_m u(k)$$

Cependant, en raison du principe de contrôle à horizon fuyant, où une information actuelle sur la centrale est nécessaire à la prédiction et au contrôle, nous avons implicitement supposé que l'entrée u(k) ne peut pas affecter simultanément la sortie y(k). Ainsi, D_m = 0 dans le modèle de la centrale.

En effectuant une opération de différence des deux côtés de (1.1), nous obtenons que

$$\Delta x_m(k+1) = A_m x_m(k+1) - B_m x_m(k)$$

Notons la différence de la variable d'état par :

$$\Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k)$$

Et la différence de la variable de contrôle par :

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k - 1)$$

Il s'agit des incréments des variables $x_m(k)$ et $u(k)$. Avec cette transformation, la différence de l'équation d'espace d'état est :

$$\Delta x_m(k + 1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) \quad (1.3)$$

Où l'exposant T indique la transposition de la matrice. Notez que

$$y(k + 1) - y(k) = C_m \Delta x_m(k + 1) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \quad (1.4)$$

La mise en commun de (1.3) et (1.4) conduit au modèle d'espace d'état suivant :

$$\begin{matrix} x(k+1) & A & x(k) & B \\ \left[\begin{matrix} \Delta x_m(k + 1) \\ y(k + 1) \end{matrix} \right] & = & \left[\begin{matrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{matrix} \right] & + & \left[\begin{matrix} B_m \\ C_m B_m \end{matrix} \right] \Delta u(k) \\ C & & & & \end{matrix}$$

$$y(k) = \left[\begin{matrix} 0_m & 1 \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{matrix} \right] \quad (1.5)$$

Où $0_m = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots\dots 0]$ (vecteur ligne de n_1 zéros). Le triplet (A, B, C) est appelé modèle augmenté, qui sera utilisé dans la conception du contrôle prédictif.

Exemple 1.1. Considérons un modèle à temps discret sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} xm(k + 1) &= Am xm(k) + Bm u(k) \\ y(k) &= Cm xm(k) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Où se trouvent les matrices du système :

$$Am = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; Bm = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}; Cm = [1 \ 0]$$

On va Trouver les matrices triplets (A, B, C) dans le modèle augmenté (1.5) et les valeurs propres de la matrice système, A, du modèle augmenté.

Solution : De (1.5), $n_1=2$ et $0_m = [0 \ 0]$. Le modèle augmenté pour cette plante est donné par :

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= A x(k) + B u(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Où les matrices du système augmenté

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0 \ 1]$$

L'équation caractéristique de la matrice A est donnée par :

$$\rho(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda I - Am & 0_m^T \\ -CmAm & (\lambda - 1) \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^3 \quad (1.8)$$

Par conséquent, le modèle d'espace d'état augmenté possède trois valeurs propres à $\lambda = 1$. Parmi elles, deux proviennent de l'usine d'intégration d'origine et une provient de l'augmentation du modèle d'usine.

1.4 Contrôle prédictif dans une ligne d'optimisation

Après la formulation du modèle mathématique, l'étape suivante de la conception d'un système de contrôle prédictif consiste à calculer la production prévue de l'installation, le signal de contrôle futur étant la variable ajustable. Cette prédiction est décrite dans une fenêtre d'optimisation. Cette section examine en détail l'optimisation réalisée dans cette fenêtre. Nous supposons ici que l'instant présent est k_i et que la longueur de la fenêtre d'optimisation est N_p , correspondant au nombre d'échantillons. Par souci de simplicité, nous considérons d'abord le cas des systèmes à entrées et sorties uniques, puis les résultats sont étendus aux systèmes à entrées et sorties multiples.

1.4.1 Prédiction des variables d'état et de sortie

En supposant qu'à l'instant d'échantillonnage k_i , $k_i > 0$, le vecteur de variables d'état $x(k_i)$ est disponible par mesure, l'état $x(k_i)$ fournit les informations actuelles de l'installation. Le cas plus général où l'état n'est pas directement mesuré sera abordé ultérieurement. La trajectoire de contrôle future est notée :

$$\Delta u(k_i), \Delta u(k_i + 1) \dots \dots \dots, \Delta u(k_i + N_c - 1),$$

Où N_c est appelé l'horizon de contrôle, qui détermine le nombre de paramètres utilisés pour capturer la trajectoire de contrôle future. Avec l'information $x(k_i)$ donnée, les variables d'état futures sont prédites pour un nombre N_p d'échantillons, où N_p est appelé l'horizon de prédiction. N_p est également la longueur de la fenêtre d'optimisation. Les variables d'état futures sont notées ainsi :

$$x(k_i + 1 | k_i), x(k_i + 2 | k_i), \dots \dots \dots x(k_i + m | k_i), \dots \dots \dots x(k_i + N_p | k_i)$$

Où $x(k_i + m | k_i)$ est la variable d'état prédite à $k_i + m$ avec les informations actuelles de la centrale $x(k_i)$. L'horizon de contrôle N_c est choisi inférieur (ou égal) à l'horizon de prédiction N_p .

En fonction du modèle espace-état (A, B, C), les variables d'état futures sont calculées séquentiellement à l'aide de l'ensemble des paramètres de contrôle futurs :

$$\begin{aligned}
 x(k_i + 1 | k_i) &= Ax(k_i) + B\Delta u(k_i) \\
 x(k_i + 2 | k_i) &= Ax(k_i + 1 | k_i) + B\Delta u(k_i + 1) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x(k_i + N_p | k_i) &= A^{N_p}x(k_i) + A^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + \dots + A^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1)
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

À partir des variables d'état prédites, les variables de sortie prédites sont, par substitution :

$$\begin{aligned}
 y(k_i + 1 | k_i) &= CAx(k_i) + CB\Delta u(k_i) & (1.10) \\
 y(k_i + 2 | k_i) &= CA^2x(k_i) + CAB\Delta u(k_i) + CB\Delta u(k_i + 1). \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 y(k_i + N_p | k_i) &= CA^{N_p}x(k_i) + CA^{N_p-1}B\Delta u(k_i) + CA^{N_p-2}B\Delta u(k_i + 1) + \dots \dots + \\
 &\quad CA^{N_p-N_c}B\Delta u(k_i + N_c - 1) & (1.11)
 \end{aligned}$$

Notez que toutes les variables prédites sont formulées en termes d'information sur la variable d'état actuelle $x(k_i)$ et de mouvement de contrôle futur $u(k_i+j)$, où $j=0,1,\dots,N_c-1$.

Définir des vecteurs :

$$\begin{aligned}
 Y &= [y(k_i + 1 | k_i) \ y(k_i + 2 | k_i) \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ y(k_i + N_p | k_i)]^T \\
 \Delta U &= [\Delta u(k_i) \ \Delta u(k_i + 1) \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T
 \end{aligned}$$

Où, dans le cas d'une entrée et d'une sortie uniques, la dimension de Y est N_p et la dimension de U est N_c . Nous regroupons (1.10) et (1.11) dans une matrice compacte sous la forme

$$Y = Fx(k_i) + \Phi\Delta U \tag{1.12}$$

Où

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}.$$

1.4.2 Optimisation

Pour un signal de consigne donné $r(k_i)$ au temps d'échantillonnage k_i , dans un horizon de prédiction, l'objectif du système de contrôle prédictif est de rapprocher la sortie prédite au maximum du signal de consigne, en supposant que ce signal reste constant dans la ligne d'optimisation. Cet objectif est ensuite traduit en une conception visant à trouver le meilleur vecteur de paramètres de contrôle U , de sorte que la fonction d'erreur entre la consigne et la sortie prédite soit minimisée.

En supposant que le vecteur de données contenant les informations de consigne est

$$R_s^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]_{N_p} r(k_i)$$

Nous définissons la fonction de coût J qui rejette l'objectif de contrôle comme

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T R \Delta U \quad (1.13)$$

Où le premier terme est lié à l'objectif de minimiser les erreurs entre la sortie prédite et le signal de consigne, tandis que le second terme reflète la prise en compte de la taille de U lorsque la fonction objectif J est réduite au maximum. R est une matrice diagonale de la forme :

$$R = r_w I_{N_c \times N_c}$$

($r_w \geq 0$), où r_w est utilisé comme paramètre de réglage pour les performances souhaitées en boucle fermée. Dans le cas où $r_w = 0$, la fonction de coût (1.13) est interprétée comme la situation où l'on ne souhaite pas prêter attention à la taille de U et où l'objectif est uniquement de réduire l'erreur $(R_s - Y)^T (R_s - Y)$ au minimum. Dans le cas d'un grand r_w , la fonction de coût (1.13) est interprétée comme la situation où nous examinerions attentivement la taille de U et réduirions prudemment l'erreur $(R_s - Y)^T (R_s - Y)$.

Pour trouver le U optimal qui minimisera J , en utilisant (1.12), J est exprimé comme suit :

$$J = (R_s - D_x(k_i))^T (R_s - F_x(k_i)) - 2\Delta U^T \Phi^T (R_s - F_x(k_i)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + \bar{R}) \Delta U \quad (1.14)$$

À partir de la première dérivée de la fonction de coût J :

$$\partial J / \partial \Delta U = -2\phi^T(Rs - Fx(ki)) + 2(\phi^T\Phi + \bar{R})\Delta U \quad (1.15)$$

La condition nécessaire du minimum J est obtenue comme

$$\partial J / \partial \Delta U = 0$$

À partir de laquelle nous trouvons la solution optimale pour le signal de commande comme

$$\Delta U = (\phi^T\Phi + \bar{R})^{-1}\phi^T(Rs - Fx(ki)) \quad (1.16)$$

En supposant que $(\Phi^T\Phi + R)^{-1}$ existe. La matrice $(\Phi^T\Phi + R)^{-1}$ est appelée matrice hessienne dans la littérature sur l'optimisation. Notez que Rs est un vecteur de données contenant les informations de consigne, exprimées comme suit :

$$Rs = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ \dots \ 1 \ Np]^T r(ki) = \bar{R}s \ r(ki)$$

Où

$$\bar{R}s = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ \dots \ 1 \ Np]^T$$

La solution optimale du signal de commande est liée au signal de consigne $r(ki)$ et à la variable d'état $x(ki)$ via l'équation suivante :

$$\Delta U = (\phi^T\Phi + \bar{R})^{-1}\phi^T(\bar{R}s - Fx(ki)) \quad (1.17)$$

Exemple 1.2. Supposons qu'un système du premier ordre soit décrit par l'équation d'état

$$\begin{aligned} xm(k+1) &= axm(k) + bu(k) \\ y(k) &= xm(k) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Où $a = 0,8$ et $b = 0,1$ sont des escalaires. w

En supposant un horizon de prédiction $Np = 10$ et un horizon de contrôle $Nc = 4$, on va calculer les composantes qui forment la prédiction de la sortie future Y, ainsi que les quantités $\Phi^T\Phi$, Φ^TF et Φ^TRs . En supposant qu'à l'instant ki ($ki = 10$ pour cet exemple), $r(ki) = 1$ et que le vecteur d'état $x(ki) = [0,1 \ 0,2]^T$. on va trouver la solution optimale U par rapport aux cas où $r_w = 0$ et $r_w = 10$, et compare les résultats.

Solution. L'équation d'espace d'état augmentée est

$$\begin{bmatrix} \Delta xm(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta xm(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{N_p-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

D'après (1.12), les matrices F et Φ prennent les formes suivantes :

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ CA^6 \\ CA^7 \\ CA^8 \\ CA^9 \\ CA^{10} \end{bmatrix} ; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB \\ CA^5B & CA^4B & CA^3B & CA^2B \\ CA^6B & CA^5B & CA^4B & CA^3B \\ CA^7B & CA^6B & CA^5B & CA^4B \\ CA^8B & CA^7B & CA^6B & CA^5B \\ CA^9B & CA^8B & CA^7B & CA^6B \end{bmatrix} .$$

Les coefficients des matrices F et Φ sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} CA &= [s_1 \ 1] \\ CA^2 &= [s_2 \ 1] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ CA^k &= [s_k \ 1] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où

$$\begin{aligned} s_1 &= a, s_2 = a^2 + s_1, \dots, s_k = a^k + s_{k-1} \\ CB &= g_0 = b \\ CAB &= g_1 a + g_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ CA^k B &= g_k = a^k b + g_{k-1} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Avec les paramètres de la plante $a = 0,8$ et $b = 0,1$, $N_p = 10$ et $N_c = 4$, nous calculons les quantités :

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} 1.1541 & 1.0407 & 0.9116 & 0.7726 \\ 1.0407 & 0.9549 & 0.8475 & 0.7259 \\ 0.9116 & 0.8475 & 0.7675 & 0.6674 \\ 0.7726 & 0.7259 & 0.6674 & 0.5943 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T F = \begin{bmatrix} 9.2325 & 3.2147 \\ 8.3259 & 2.7684 \\ 7.2927 & 2.3355 \\ 6.1811 & 1.9194 \end{bmatrix}; \Phi^T \bar{R}_s = \begin{bmatrix} 3.2147 \\ 2.7684 \\ 2.3355 \\ 1.9194 \end{bmatrix}$$

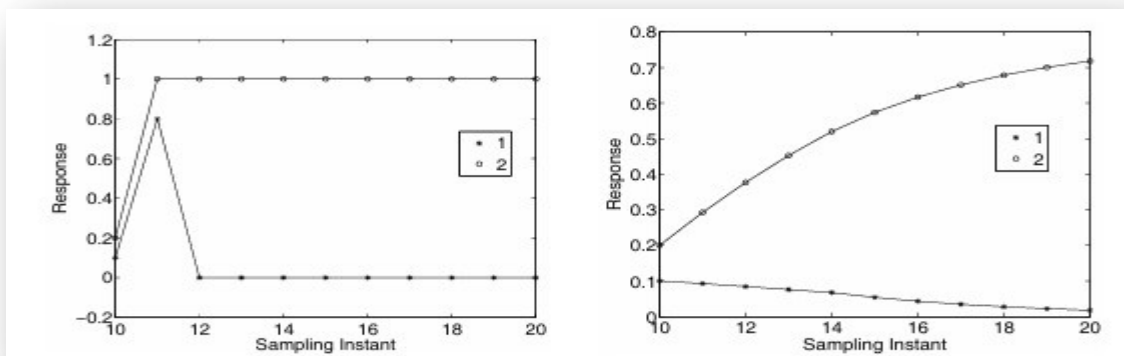
Notez que le vecteur $\Phi^T R_s$ est identique à la dernière colonne de la matrice $\Phi^T F$.

Ceci est dû au fait que la dernière colonne de la matrice F est identique à R_s .

À l'instant $k_i = 10$, le vecteur d'état $x(k_i) = [0, 1, 0, 2]^T$. Dans le premier cas, l'erreur entre Y et R_s prédits est réduite sans tenir compte de l'ampleur des variations de contrôle. À savoir, $r_w = 0$. Ensuite, la valeur Δu optimale est déterminée par le calcul.

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi)^T - 1(\Phi^T R_s - \Phi^T F x(k_i)) = [7.2 \quad -6.4 \quad 0 \quad 0]^T$$

Nous constatons que, sans pondération sur le contrôle incrémental, les deux derniers éléments $u(k_i+2)=0$ et $u(k_i+3)=0$, tandis que les deux premiers éléments ont une amplitude assez importante. La figure 1.3 a montré les variations des variables d'état où nous pouvons constater que la sortie prédite a atteint le point de consigne souhaité.



(a) $r_w = 0$

(b) $r_w = 10$

Figure 1.3 Comparaison de solutions optimales.

Key : line (1) Δx_m ; line (2) y

Tandis que x_m décroît vers zéro. Pour examiner l'effet du poids r_w sur la solution optimale du contrôle, posons $r_w = 10$. La solution optimale de ΔU est donnée ci-dessous, où I est une matrice identité 4×4 .

$$\begin{aligned} \Delta U &= (\Phi^T \Phi + 10 * I)^{-1} (\Phi R s - \Phi^T F x(k_i)) & (1.22) \\ &= [0.1269 \ 0.1034 \ 0.0829 \ 0.065]^T \end{aligned}$$

Avec ce choix, l'amplitude des deux premiers incréments de contrôle est significativement réduite, et les deux dernières composantes ne sont plus nulles. La figure 1.3

Illustre les variables d'état optimales. On constate que la sortie y n'atteint pas la valeur de consigne de 1, mais que x_m se rapproche de zéro.

Une observation découle de l'étude comparative. Il semble que si l'on souhaite que le contrôle évolue prudemment, le signal de contrôle met plus de temps à atteindre son état stationnaire (c'est-à-dire que les valeurs de U diminuent plus lentement), car l'énergie de contrôle optimale est répartie sur une période future plus longue.

Nous pouvons vérifier cela en augmentant N_c à 9, tout en maintenant $r_w = 10$. Le résultat

Montre que l'amplitude des éléments de ΔU diminue, mais qu'ils sont significatifs pour les 8 premiers éléments :

$$\Delta U^T = [0.1227 \ 0.0993 \ 0.0790 \ 0.0614 \ 0.0463 \ 0.0334 \ 0.0227 \ 0.0139 \ 0.0072]$$

Par rapport au cas où $N_c = 4$, on constate que lorsque $N_c = 9$, les quatre premiers paramètres de U sont légèrement différents du cas précédent.

Exemple 1.3. Il existe une autre façon de trouver le minimum de la fonction de coût en complétant les carrés. Il s'agit d'une approche intuitive, et le minimum de la fonction de coût devient un sous-produit de cette approche.

On va trouver la solution optimale pour U en complétant les carrés de la fonction de coût J (1.14).

Solution. À partir de (1.14), en additionnant et en soustrayant le terme

$$(R s - F x(k_i))^T \Phi (\Phi^T + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R s - F x(k_i))$$

À la fonction de coût d'origine J , sa valeur reste inchangée. Cela conduit à

$$\begin{aligned}
 J = & \overbrace{(Rs - Fx(ki))^T (Rs - Fx(ki)) - 2\Delta U^T \Phi^T (Rs - Fx(ki)) + \Delta U^T (\Phi^T \Phi + R) \Delta U} \\
 & \overbrace{+ (Rs - Fx(ki))^T \Phi (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki))} \\
 & - \overbrace{(Rs - Fx(ki))^T \Phi (\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki))} \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Où les quantités sous le \frown sont les carrés complétés :

$$\begin{aligned}
 J_0 = & (\Delta U - (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki)))^T * (\Phi^T \Phi + \bar{R}) (\Delta U - (\Phi^T \Phi + \\
 & \bar{R})^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki))) \quad (1.24)
 \end{aligned}$$

Ceci peut être facilement vérifié en ouvrant les carrés. Puisque le premier et le dernier terme de (1.23) sont indépendants de la variable U (parfois appelée variable de décision), et que $(\Phi^T \Phi + R)$ est supposé positif défini, alors le minimum de la fonction de coût J est atteint si la quantité J_0 est égale à zéro, c'est-à-dire

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki)) \quad (1.25)$$

Il s'agit de la solution de contrôle optimale. En substituant cette solution optimale dans la fonction de coût (1.23), nous obtenons le minimum du coût tel que

$$J_{\min} = (Rs - Fx(ki))^T (Rs - Fx(ki)) - (Rs - Fx(ki))^T \Phi (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (Rs - Fx(ki))$$

1.5 Contrôle de l'horizon fuyant

Bien que le vecteur de paramètres optimal ΔU contienne les contrôles $u(ki)$, $u(ki+1)$, $u(ki+2)$,..., $u(ki+Nc-1)$, avec le principe de contrôle à horizon fuyant, nous implémentons uniquement le premier échantillon de cette séquence, c'est-à-dire $u(ki)$, en ignorant le reste de la séquence. À la période d'échantillonnage suivante, la mesure la plus récente est utilisée pour former le vecteur d'état $x(ki+1)$ afin de calculer la nouvelle séquence de signaux de contrôle. Cette procédure est répétée en temps réel pour obtenir la loi de contrôle à horizon fuyant.

Exemple 1.4. Nous illustrons cette procédure en poursuivant l'exemple 1.2, où un système du premier ordre avec la description de l'espace d'état

$$xm(k + 1) = 0.8xm(k) + 0.1u(k)$$

est utilisé dans le calcul. Nous considérerons le cas $r_w = 0$. Les conditions initiales sont $x(10) = [0, 1, 0, 2]^T$ et $u(9) = 0$.

Solution. Au temps d'échantillonnage $ki = 10$, la commande optimale a été précédemment calculée comme $u(10) = 7,2$. En supposant que $u(9) = 0$, le signal de commande

envoyé à l'installation est $u(10) = u(9) + \Delta u(10) = 7,2$ et avec $x_m(10) = y(10) = 0,2$, nous calculons la variable d'état de l'installation simulée suivante.

$$x_m(11) = 0.8x_m(10) + 0.1u(10) = 0.88 \quad (1.26)$$

À $ki = 11$, la nouvelle information sur la plante est $\Delta x_m(11) = 0,88 - 0,2 = 0,68$ et $y(11) = 0,88$, ce qui donne $x(11) = [0,68 \ 0,88]^T$. On obtient alors

$$\Delta U = [-4.24 \ -0.96 \ 0 \ 0]^T$$

Cela conduit à la commande optimale $u(11) = u(10) + \Delta u(11) = 2,96$. Cette nouvelle commande est implémentée pour obtenir

$$x_m(12) = 0.8x_m(11) + 0.1u(11) = 1 \quad (1.27)$$

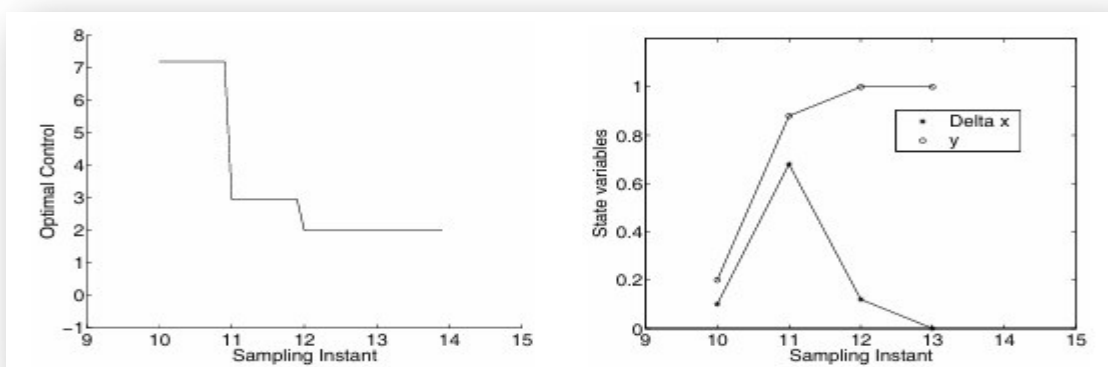
À $ki = 12$, les nouvelles informations sur la plante sont $\Delta x_m(12) = 1 - 0,88 = 0,12$ et $y(12) = 1$, ce qui forme $x(12) = [0,12 \ 1]$. Nous obtenons

$$\Delta U = [-0.96 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Cela conduit au contrôle à $ki = 12$ car $\Delta u(12) = u(11) - 0,96 = 2$. En implémentant ce contrôle, nous obtenons la sortie de l'installation suivante comme

$$x_m(13) = 0.8x_m(12) + 0.1u(12) = 1 \quad (1.28)$$

Les nouvelles informations sur la plante sont $\Delta x_m(13) = 1 - 1 = 0$ et $y(13) = 1$. À partir de ces informations, nous obtenons :



(a)Contrôle optimale

(b)variable d'état

Figure 1.4 Contrôle de l'horizon fuyant

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - F_x(k_i)) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

La figure 1.4 montre les trajectoires des variables d'état x_m et y , ainsi que le signal de commande utilisé pour réguler la sortie. Cet exemple illustre également les différences entre les vecteurs de paramètres Δu à différents instants. Nous constatons que lorsque la réponse de sortie atteint le signal de consigne souhaité, les paramètres de U se rapprochent de zéro.

1.5.1 Système de contrôle en boucle fermée

Un autre aspect a été illustré par l'exemple 1.4. Si nous examinons attentivement cet exemple, nous constatons qu'à un instant k_i donné, le vecteur de paramètres optimal Δu est résolu en utilisant

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - F_x(k_i))$$

Où $(\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T R_s$ correspond à la variation de la consigne, tandis que $-(\Phi^T \Phi + R)^{-1} \Phi^T F$ correspond à la commande par rétroaction d'état dans le cadre de la commande prédictive. Les deux dépendent des paramètres du système et sont donc des matrices constantes pour un système invariant dans le temps. En raison du principe de la commande à horizon fuyant, nous ne prenons que le premier élément de Δu à l'instant k_i comme commande incrémentale.

$$\begin{aligned} \Delta U(k_i) &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ N_c] (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - F_x(k_i)) \\ &= K_{yr}(k_i) - K_{mpc}x(k_i) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Où K_y est le premier élément de

$$(\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T R_s$$

Et K_{mpc} est la première rangée de

$$(\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T F$$

L'équation (1.29) est une forme standard de commande à rétroaction d'état linéaire invariante dans le temps. Le vecteur de gain de la commande à rétroaction d'état est K_{mpc} . Par conséquent, avec le modèle de conception augmenté

$$x(k+1) = Ax(k) + B\Delta u(k)$$

Le système en boucle fermée est obtenu en remplaçant (1.29) dans l'équation du système augmentée ; en remplaçant l'indice k_i par k , ce qui conduit à l'équation en boucle fermée.

$$x(k+1) = Ax(k) - BK_{mpc}x(k) + BK_{yr}(k) \quad (1.30)$$

$$= (A - BK_{mpc})x(k) + BK_{yr}(k) \quad (1.31)$$

Ainsi, les valeurs propres en boucle fermée peuvent être évaluées à l'aide de l'équation caractéristique en boucle fermée :

$$\det[I - (A - BK_{mpc})] = 0$$

En raison des structures particulières des matrices C et A, la dernière colonne de F est identique à Rs, qui est $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$. K_y est donc identique au dernier élément de K_{mpc} . Notant que le vecteur de variables d'état $x(k) = [x_m(k)^T \ y(k)^T]^T$, et avec la définition de K_y , on peut écrire $K_{mpc} = [K_x \ K_y]$, où K_x correspond au vecteur de gain de rétroaction lié à $x_m(k)$ et K_y au gain de rétroaction lié à $y(k)$. On obtient alors le schéma fonctionnel en boucle fermée du système de commande prédictive illustré à la figure 1.5, où q^{-1} désigne l'opérateur de décalage arrière. Ce schéma illustre la structure de rétroaction d'état pour la commande prédictive à modèle discret (DMPC) avec action intégrale, dans laquelle le module $(1 / (1-q^{-1}))$ désigne l'intégrateur à temps discret.

Exemple 1.5. Cet exemple examine les matrices de gain de rétroaction en boucle fermée générées à partir de l'exemple 1.2 et les valeurs propres du système en boucle fermée avec les pondérations $r_w = 0$ et $r_v = 10$.

Solution. Lorsque le poids $r_w = 0$, nous avons :

$$K_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] (\phi^T \Phi + R)^{-1} \phi^T [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = 10$$

$$K_{mpc} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] (\phi^T \Phi + R)^{-1} (\phi^T F) = [8 \ 10]$$

Par conséquent, les valeurs propres du système en boucle fermée sont calculées en évaluant les valeurs propres de la matrice en boucle fermée $A - BK_{mpc}$, où, à partir de l'exemple 1.2

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

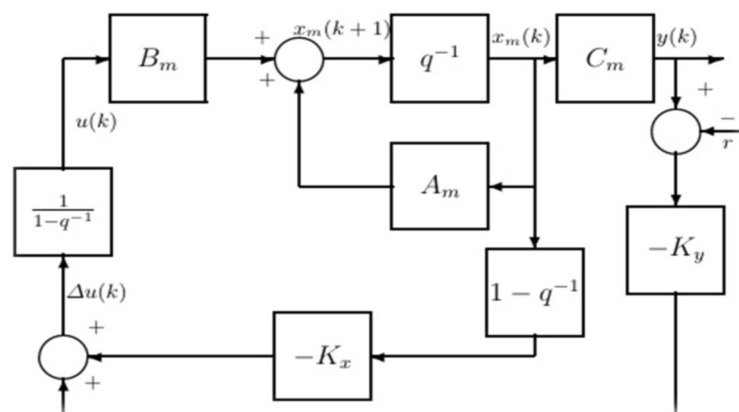


Figure 1.5 schéma fonctionnel d'un système de contrôle prédictif à temps discret

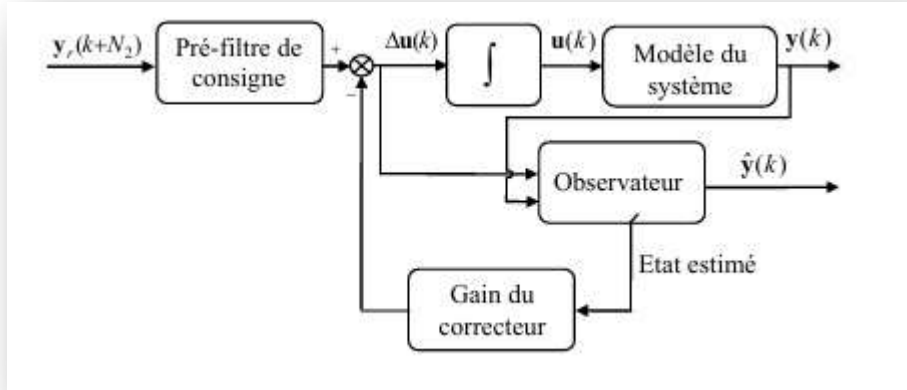


Figure 1.8 schéma-bloc général de la commande MPC sous forme d'état [5].

1.6.1 Formulation générale du modèle

Supposons que l'installation possède m entrées, q sorties et n_1 états. Nous supposons également que le nombre de sorties est inférieur ou égal au nombre d'entrées (c'est-à-dire $q \leq m$). Si le nombre de sorties est supérieur au nombre d'entrées, nous ne pouvons pas espérer contrôler chaque sortie mesurée indépendamment avec des erreurs nulles en régime permanent. Dans la formulation générale du problème de commande prédictive, nous prenons également en compte le bruit et les perturbations de l'installation.

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) + B_m w(k) \quad (1.33)$$

$$y(k) = C_m x_m(k) \quad (1.34)$$

Où $w(k)$ est la perturbation d'entrée, supposée être une séquence de bruit blanc intégré. Cela signifie que la perturbation d'entrée $w(k)$ est reliée à une séquence de bruit blanc de moyenne nulle $q(k)$ par l'équation aux différences.

$$w(k) - w(k-1) = e(k) \quad (1.35)$$

Notez que d'après (1.33), l'équation de différence suivante est également vraie :

$$x_m(k) = A_m x_m(k-1) + B_m u(k-1) + B_m w(k-1) \quad (1.36)$$

En définissant $\Delta x_m(k) = x_m(k) - x_m(k-1)$ et $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$, alors

la soustraction de (1.36) de (1.33) conduit à

$$x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) + B_m e(k) \quad (1.37)$$

Afin de relier la sortie $y(k)$ à la variable d'état $\Delta x_m(k)$, nous en déduisons que

$$\Delta y(k+1) = C_m \Delta x_m(k+1) = C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) + C_m B_d e(k)$$

. Où

$$\Delta y(k+1) = y(k+1) - y(k)$$

En choisissant un nouveau vecteur de variable d'état $x(k) = [\Delta x_m(k)^T \ y(k)^T]^T$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} B_d \\ C_m B_d \end{bmatrix} e(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0_m & I_{q \times q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Où $I_{q \times q}$ est la matrice identité de dimension $q \times q$, qui est le nombre de sorties ; et 0_m est une matrice $q \times n_1$ nulle. Dans (1.38), A_m , B_m et C_m ont respectivement les dimensions $n_1 \times n_1$, $n_1 \times m$ et $q \times n_1$.

Pour simplifier la notation, nous notons (1.38) par

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \Delta x(k) + B \Delta u(k) + B_d e(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \quad (1.39)$$

Où A , B et C sont des matrices correspondant aux formes données dans (1.38).

Dans ce qui suit, la dimensionnalité de l'équation d'espace d'état augmentée est prise égale à n ($= n_1 + q$).

Deux points méritent d'être examinés ici. Le premier concerne les valeurs propres du modèle de conception augmentée. Le second concerne la réalisation du modèle d'espace d'état. Ces deux points nous aideront à comprendre le modèle.

- **Valeurs propres du modèle augmenté**

Notez que l'équation polynomiale caractéristique du modèle augmenté est :

$$\rho(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda I - A_m & 0_m^T \\ -C_m A_m & (\lambda - 1) \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^q \det(\lambda I - A) = 0 \quad (1.40)$$

- **Contrôlabilité et observabilité du modèle augmenté**

Étant donné que le modèle d'origine de l'installation est complété par des intégrateurs et que la conception du MPC repose sur le modèle d'espace d'état augmenté, il est important, pour la conception du système de contrôle, que le modèle augmenté ne devienne ni incontrôlable ni inobservable, notamment en raison de la dynamique instable du système. La contrôlabilité est une condition préalable pour que le système de contrôle prédictif atteigne les performances souhaitées en boucle fermée, et l'observabilité est une condition préalable à la conception réussie d'un observateur. Cependant, les conditions peuvent être assouplies aux exigences de stabilité et de détectabilité, si seule la stabilité en boucle fermée est concernée.¹

1. Un système est stable si ses modes incontrôlables, s'il y en a, sont stables. Ses modes contrôlables peuvent être stables ou instables. Un système est détectable si ses modes inobservables, s'il y en a, sont stables. Ses modes observables peuvent être stables ou instables. Des modes stables signifient ici que les valeurs propres correspondantes sont strictement à l'intérieur du cercle unité.

Plus précisément, nous exigeons que le modèle soit à la fois contrôlable et observable afin d'atteindre les performances souhaitées en boucle fermée.

Comme le modèle augmenté a introduit des modes intégraux supplémentaires, nous devons examiner dans quelles conditions ces modes supplémentaires deviennent contrôlables. La méthode la plus simple pour mener cette étude repose sur l'hypothèse d'une réalisation minimale du modèle de l'installation.

Définition : Une réalisation de fonction de transfert $G(z)$ est tout triplet d'espace d'états (A,B,C) tel que $G(z) = C(zI - A)^{-1} * B$. Si un tel ensemble (A,B,C) existe, alors $G(z)$ est dit réalisable. Une réalisation (A,B,C) est dite minimale d'une fonction de transfert si aucune autre réalisation de dimension inférieure du triplet n'existe.

Une réalisation minimale présente la caractéristique distinctive résumée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.1. Une réalisation minimale est à la fois contrôlable et observable (Kailath, 1980, Bay, 1999).

Avec ces informations de base, nous cherchons à démontrer les conditions telles que le modèle augmenté soit à la fois contrôlable et observable grâce à l'argument de réalisation minimale.

Théorème 1.2. Supposons que le modèle de la plante (A_m, B_m, C_m) soit à la fois contrôlable et observable, avec une fonction de transfert $G_m(z)$ de réalisation minimale, où

$$G_m(z) = C_m(zI - A_m)^{-1} * B_m$$

Ensuite, la fonction de transfert du modèle de conception augmentée (1.39) a la représentation

$$G(z) = (z / (z - 1)) G_m(z) \quad (1.41)$$

est à la fois contrôlable et observable si et seulement si le modèle $G_m(z)$ n'a pas de zéro à $z = 1$.²

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

². Les zéros d'une fonction de transfert MIMO sont les valeurs de z qui font perdre le rang à la matrice $G_m(z)$.

Si $(A_{11})^{-1}$ et $(A_{22})^{-1}$ existent, alors

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{11}^{-1}A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

En appliquant l'égalité (1.42), on obtient

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (1.43)$$

Où

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (zI_m - A_m)^{-1} & 0 \\ (1 - z^{-1})C_m A_m (zI_m - A_m)^{-1} & (1 - z^{-1})I_q \end{bmatrix}$$

En substituant les matrices B et C de (1.39), la fonction de transfert du modèle augmenté est obtenue par (1.41). En supposant que le modèle d'installation $G_m(z)$ n'a pas de zéro à $z = 1$ et possède une réalisation minimale, la fonction de transfert du modèle augmenté présente une structure minimale d'après (1.41), elle est donc à la fois contrôlable et observable.

Pour un système à entrée et sortie unique, si l'un des zéros de la fonction de transfert est à $z = 1$, alors le modèle augmenté n'est pas contrôlable. Par exemple, si

$$G_m(z) = (z - 1) / ((z - 0.6)(z - 0.8))$$

Alors il y aura une annulation pôle-zéro dans $G(z)$, qui est

$$G(z) = (z / (z - 1)) * [(z - 1) / ((z - 0.6) (z - 0.8))]$$

1.6.2 Solution de contrôle prédictif pour les systèmes MIMO

L'extension de la solution de contrôle prédictif est relativement simple, et il convient de prêter attention aux dimensions des vecteurs d'état, de contrôle et de sortie dans un environnement multi-entrées et multi-sorties. Définissons les vecteurs Y et Δu comme suit :

$$\Delta U = [\Delta u(ki)^T \Delta u(ki + 1)^T \dots \dots \dots \Delta u(ki + Nc - 1)^T]^T$$

$$Y = [y(ki + 1 | ki)^T y(ki + 2 | ki)^T \dots \dots \dots y(ki + Np | ki)^T]^T$$

Sur la base du modèle d'espace d'état (A, B, C), les variables d'état futures sont calculées séquentiellement à l'aide de l'ensemble des paramètres de contrôle futurs.

$$x(ki + 1 | ki) = Ax(ki) + B\Delta u(ki) + Bde(ki)$$

$$x(ki + 2 | ki) = Ax(ki + 1 | ki) + B\Delta u(ki + 1) + Bde(ki + 1 | ki)$$

$$= A^2x(ki) + AB\Delta u(ki) + B\Delta u(ki + 1) + ABde(ki) + Bde(ki + 1 | ki)$$

.

.

$$x(ki + Np | ki) = A^{Np}x(ki) + A^{Np-1}B\Delta u(ki) + A^{Np-2}B\Delta u(ki + 1) + A^{Np-Nc}B\Delta u(ki + Nc - 1) + A^{Np-1}Bde(ki) + A^{Np-2}Bde(ki + 1 | ki) + \dots + Bde(ki + Np - 1 | ki)$$

En supposant que q(k) est une séquence de bruit blanc de moyenne nulle, la valeur prédite de q(ki + i | ki) pour l'échantillon futur i est supposée nulle. La prédiction de la variable d'état et de la variable de sortie est calculée comme les valeurs espérées des variables respectives ; l'effet du bruit sur les valeurs prédites est donc nul. Par souci de simplicité, l'opérateur d'espérance est omis, sans confusion.

En effet, nous avons

$$Y = Fx(ki) + \Phi\Delta U \tag{1.44}$$

Où

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ CA^{N_p-1}B & CA^{N_p-2}B & CA^{N_p-3}B & \dots & CA^{N_p-N_c}B \end{bmatrix}.$$

Le contrôle optimal incrémental dans une ligne d'optimisation est donné par

$$\Delta U = (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) \quad (1.45)$$

Où la matrice $\Phi^T \Phi$ a pour dimension $m_{NC} \times m_{NC}$ et $\Phi^T F$ a pour dimension $m_{NC} \times n$, et $\Phi^T R$ est égal aux q dernières colonnes de $\Phi^T F$. La matrice de pondération R est une matrice de blocs avec m blocs et a pour dimension la dimension de $\Phi^T \Phi$. Le signal de consigne est $r(k_i) = [r_1(k_i) \ r_2(k_i) \ \dots \ r_q(k_i)]^T$ comme q signaux de consigne envoyés au système multi-sorties.

En appliquant le principe de la commande par horizon fuyant, les m premiers éléments de ΔU sont utilisés pour former la commande optimale incrémentale :

$$\begin{aligned} \Delta U(k_i) &= [I_m \ 0_m \ \dots \ 0_m] (\Phi^T \Phi + \bar{R})^{-1} \Phi^T (R_s - Fx(k_i)) \\ &= K_{yr}(k_i) - K_{mpcx}(k_i) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Où I_m et 0_m sont respectivement la matrice identité et la matrice zéro de dimension $m \times m$.

D'autres travaux sur les approches de contrôle prédictif des systèmes MIMO seront présentés au chapitre 2, où les fonctions de Laguerre seront utilisées pour la conception. Ce chapitre présentera également les fonctions MATLAB pour la conception de systèmes de contrôle prédictif MIMO[6].

1.7. Commande prédictive à temps discret et espace d'état sous contraintes

1.7.1. Types de contraintes opérationnelles

Il existe trois principaux types de contraintes fréquemment rencontrés dans les applications. Les deux premiers types concernent les contraintes imposées aux variables de contrôle $u(k)$, et le troisième type de contrainte concerne la sortie $y(k)$.

- **Contraintes sur la variation incrémentale de la variable de contrôle**

Il s'agit de contraintes strictes sur l'amplitude des mouvements du signal de commande, c'est-à-dire sur le taux de variation des variables de contrôle ($\Delta u(n)$). Supposons que, pour un système à

entrée unique, la limite supérieure des incréments du signal de commande soit $\Delta u(n)$ et la limite inférieure $\Delta u(n)$. Les contraintes sont spécifiées sous la forme :

$$\Delta u^{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u^{\max}$$

Cette méthode est utilisée lorsque la vitesse de variation du signal de commande est limitée. Il s'agit généralement d'un problème concernant les actionneurs, où un changement de commande agressif peut être défavorable.

En cas d'entrées multiples, les contraintes de chaque entrée doivent être traitées indépendamment. Chaque variable avec son taux de variation est spécifiée comme suit :

$$\Delta u_1^{\min} \leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{\max}$$

$$\Delta u_2^{\min} \leq \Delta u_2(k) \leq \Delta u_2^{\max}$$

⋮

$$\Delta u_m^{\min} \leq \Delta u_m(k) \leq \Delta u_m^{\max}$$

Les contraintes pour la limite supérieure sont données comme suit :

$$\Delta u_{max} = [\Delta u_1^{\max} \ \Delta u_2^{\max} \ \dots \ \Delta u_m^{\max}]$$

Les contraintes pour la limite inférieure sont données comme suit :

$$\Delta u_{min} = [\Delta u_1^{\min} \ \Delta u_2^{\min} \ \dots \ \Delta u_m^{\min}]$$

- **Contraintes sur l'amplitude de la variable de contrôle**

Ce sont les contraintes les plus courantes parmi tous les types de contraintes. Par exemple, on ne peut pas s'attendre à ce qu'une vanne s'ouvre à plus de 100 % ni à ce qu'une tension dépasse une plage donnée. Ce sont les contraintes physiques strictes imposées au système. En résumé, nous exigeons que :

$$u^{\min} \leq u(k) \leq u^{\max}$$

Il convient ici de prêter une attention particulière au fait que $u(k)$ est une variable incrémentale, et non la variable physique réelle. La variable de contrôle physique réelle est égale à la variable incrémentale u plus sa valeur à l'état stationnaire u_{ss} .

Dans le cas d'entré multiples :

$$u_1^{\min} \leq u_1(k) \leq u_1^{\max}$$

$$u_2^{\min} \leq u_2(k) \leq u_2^{\max}$$

⋮

$$u_m^{\min} \leq u_m(k) \leq u_m^{\max}$$

Les limites supérieure et inférieure sont respectivement :

$$u_m^{\max} = [u_1^{\max} \ u_2^{\max} \ \dots \ u_m^{\max}]$$

$$u_m^{\min} = [u_1^{\min} \ u_2^{\min} \ \dots \ u_m^{\min}]$$

- **Contraintes de sortie**

Nous pouvons également définir des contraintes sur la sortie ; ces contraintes sont exprimées en termes de Δu . Supposons que la sortie $y(k)$ ait les limites y^{\min} et y^{\max} comme suit :

$$y^{\max} \leq y(k) \leq y^{\min}$$

De même, pour les contraintes sur le signal de commande et ses incréments, dans le cas de sorties multiples, nous définissons les limites pour chaque sortie séparément. Nous définissons les limites supérieure et inférieure de la sortie comme suit :

$$y^{\max} = [y_1^{\max} \ y_2^{\max} \ \dots \ y_q^{\max}]$$

$$y^{\min} = [y_1^{\min} \ y_2^{\min} \ \dots \ y_q^{\min}]$$

Les contraintes de sortie sont souvent implémentées comme des contraintes « souples » : une variable d'écart $sv > 0$ est ajoutée aux contraintes, formant :

$$y^{\max} - sv \leq y(k) \leq y^{\min} + sv$$

La variable d'écart autorise une légère violation de la contrainte, ce qui est utile lorsque des contraintes s'appliquent déjà au signal de commande et que l'on cherche à éviter tout conflit.

Les contraintes de sortie entraînent souvent des modifications importantes des variables de contrôle et de contrôle incrémental lorsqu'elles sont appliquées (nous les appellerons « devenir actives » dans les sections suivantes).

Dans ce cas, les variables de contrôle ou de contrôle incrémental peuvent violer leurs propres contraintes, ce qui pose un problème de conflit de contraintes. Lorsque les contraintes sur les variables de contrôle sont plus essentielles au fonctionnement de l'installation, les contraintes de sortie sont souvent assouplies en sélectionnant une variable d'écart sv plus importante pour résoudre le problème de conflit.

De même, nous pouvons imposer des contraintes sur les variables d'état si elles sont mesurables ou sur les variables d'état observatrices. Ces contraintes doivent également prendre la forme de contraintes « souples » pour les mêmes raisons que pour le cas de sortie ci-dessus.

1.7.2. Incorporation de la contrainte dans le problème d'optimisation

Après avoir formulé les contraintes, l'étape suivante consiste à les traduire en inégalités linéaires, puis à les relier au problème de contrôle prédictif du modèle initial. Puisque ce problème est formulé et résolu dans le cadre du contrôle à horizon fuyant, les contraintes sont prises en compte pour chaque fenêtre d'horizon mobile. Nous pouvons présenter cela sous la forme d'une séquence d'inéquations comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta u_1^{\min} &\leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{\max} \\ \Delta u_2^{\min} &\leq \Delta u_2(k+1) \leq \Delta u_2^{\max} \\ &\vdots \\ \Delta u_m^{\min} &\leq \Delta u_m(k+N_c-1) \leq \Delta u_m^{\max} \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire cette séquence sous forme de matrice compacte comme :

$$\Delta u_1^{\min} \leq \Delta u_1(k) \leq \Delta u_1^{\max} \quad (1.47)$$

Pour l'incrément du signal de commande, nous avons les contraintes écrites comme :

$$\begin{aligned} -\Delta U(k) &\leq -\Delta U^{\min} \\ \Delta U(k) &\leq \Delta U^{\max} \end{aligned}$$

Et nous le compactons comme suit :

$$\begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix}$$

Où Δu^{\min} et Δu^{\max} sont des vecteurs colonnes à N_c éléments de Δu^{\min} et Δu^{\max} .

On peut exprimer les contraintes de commande et de sortie en termes de Δu , et le signal de commande en termes de ses incréments comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} u(k_i) \\ u(k_i + 1) \\ u(k_i + 2) \\ \vdots \\ u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} u(k_i - 1) + \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_m & I_m & 0 & \dots & 0 \\ I_m & I_m & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & I_m & \dots & I_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i + 1) \\ \Delta u(k_i + 2) \\ \vdots \\ \Delta u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix} \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

En réécrivant l'équation (1.48) sous forme de matrice compacte, $C1$ et $C2$ correspondant aux matrices appropriées, les contraintes de mouvement de contrôle sont alors imposées comme suit :

$$\begin{aligned}
 & -(C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) \leq -U^{\min} \\
 & (C_1 u(k_i - 1) + C_2 \Delta U) \leq U^{\max}
 \end{aligned}$$

Où U^{\min} et U^{\max} sont des vecteurs colonnes de N_c éléments de u^{\min} et u^{\max} ,

Respectivement, les contraintes de sortie sont exprimées en termes d'incrément du signal de commande, comme suit :

$$Y^{\min} \leq Fx(k_i) + \Phi \Delta U \leq Y^{\max} \quad (1.49)$$

Maintenant que toutes les contraintes ont été imposées en termes de la variable ΔU , le problème d'optimisation consiste à minimiser la fonction de coût mentionnée précédemment pour cette variable ΔU , sous réserve de l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \Delta U \leq \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

Où les matrices de données sont :

$$M_1 = \begin{bmatrix} -C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \text{ Et } N_1 = \begin{bmatrix} -U^{\min} + C_1 u(k_i - 1) \\ U^{\max} - C_1 u(k_i - 1) \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -I \\ I \end{bmatrix} \text{ Et } N_2 = \begin{bmatrix} -\Delta U^{\min} \\ \Delta U^{\max} \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -\Phi \\ \Phi \end{bmatrix} \text{ Et } N_1 = \begin{bmatrix} -Y^{\min} + Fx(k_i) \\ Y^{\max} - Fx(k_i) \end{bmatrix}$$

Puisque la fonction de coût J est quadratique et que les contraintes sont des inégalités linéaires, le problème de la recherche d'un contrôle prédictif optimal revient à trouver une solution optimale à un problème de programmation quadratique standard. Pour des raisons de compacité, nous désignons l'équation (1.50) par :

$$M\Delta U \leq \gamma \quad (1.51)$$

Si nous imposons deux contraintes (supérieure et inférieure) pour chaque amplitude du signal de contrôle pour tout U , cela donnerait $Nc \times 2 \times m$ contraintes et le même nombre pour tous les incréments du signal de contrôle ΔU , et si nous imposons des contraintes pour le signal de sortie pour tout l'horizon de prédiction, alors le nombre total de contraintes imposées est de $4 \times Nc \times m \times 2 \times Np \times q$ [7].

1.8 Conclusion

En somme, les MPC classiques (Modèles de Prévion et de Commande) reposent sur une approche prédictive permettant d'optimiser le comportement futur d'un système à l'aide d'un modèle dynamique[10]. Leur principe consiste à prédire l'évolution du système sur un horizon donné, puis à calculer la commande optimale tout en respectant les contraintes imposées[11]. Bien que leur mise en œuvre nécessite des calculs complexes, les MPC classiques offrent une grande flexibilité et une performance supérieure dans la gestion de systèmes multivariables[9]. Ce chapitre a permis de poser les bases nécessaires à la compréhension de leur fonctionnement et de leur utilité dans un contexte industriel ou académique.

Chapitre 2 :

**MPC à temps discret basée sur les fonctions
de Laguerre**

2.1 Introduction

En substance, la technique principale de conception de MPC à temps discret repose sur l'optimisation de la trajectoire de contrôle future, c'est-à-dire la différence du signal de contrôle, $\Delta u(k)$. En supposant un horizon de contrôle fini N_c , la différence du signal de contrôle $\Delta u(k)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1$ est capturée par le vecteur de contrôle ΔU , tandis que le reste de $\Delta u(k)$ pour $k = N_c, N_c + 1, \dots, N_p$ est supposé nul. Dans les exemples précédents, la trajectoire négligée $\Delta u(k)$ n'était pas nulle, mais son amplitude était faible. L'idée de ce chapitre est de généraliser la procédure de conception en introduisant un ensemble de fonctions de base orthonormées discrètes[15]. Pour l'instant, concentrons-nous sur les idées de base en les considérant comme une généralisation de l'approche de base. Cette généralisation nous aidera à reformuler le problème de commande prédictive et à simplifier les solutions, ainsi qu'à optimiser le système de commande prédictive. De plus, un horizon de contrôle à long terme peut être réalisé sans utiliser un grand nombre de paramètres. Des fonctions sont présentées dans ce chapitre pour la conception de systèmes de commande prédictive à temps discret.

2.2 Fonctions de Laguerre :

2.2.1. Définition des fonctions de Laguerre :

Les fonctions de Laguerre sont un ensemble de fonctions orthonormées (Lee, 1960) qui satisfont à la loi orthonormée.

L'ensemble des fonctions de Laguerre est défini comme, pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned}
 l_1(t) &= \sqrt{2p} \times e^{-pt} \\
 l_2(t) &= \sqrt{2p}(-2pt + 1)e^{-pt} \\
 &\vdots \\
 l_i(t) &= \sqrt{2p} \cdot \frac{e^{pt}}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} [e^{-1}e^{-2pt}] \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Le paramètre p est appelé ici facteur d'échelle temporelle pour les fonctions de Laguerre. Ce facteur joue un rôle important dans l'application des fonctions de Laguerre, déterminant leur taux de décroissance exponentielle. Il est utilisé comme paramètre de conception que l'utilisateur spécifiera dans le cadre des exigences de conception.

La transformée de Laplace des fonctions de Laguerre (5.9) forme le réseau de Laguerre $L_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$, où :

$$\begin{aligned}
 L_1(s) &= \int_0^\infty l_1(t)e^{-s} dt = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \\
 L_2(s) &= \int_0^\infty l_2(t)e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)}{(s+p)^2} \\
 &\vdots \\
 L_i(s) &= \int_0^\infty l_i(t)e^{-s} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Chaque $L_i(s)$ peut également être appelé filtre de Laguerre. Comme la montre (2.2), les filtres de Laguerre ont des expressions analytiques simples où tous les pôles sont au même emplacement p et tous les filtres autres que le premier a un filtre du premier ordre en série avec des filtres passe-tout.

2.2.2. Génération de fonctions de Laguerre

Bien que les fonctions de Laguerre puissent être générées à l'aide de (2.1), il existe une méthode systématique pour les générer grâce aux réseaux de Laguerre (2.2). On peut dériver les fonctions de Laguerre en construisant la forme d'espace d'état comme suit : on définit le vecteur d'état $L(t)=[l_1(t) l_2(t)... l_N(t)]^T$. En supposant que les conditions initiales du vecteur d'état sont $L(0) = \sqrt{2p} [11...1]^T$, alors les fonctions de Laguerre satisfont l'équation d'espace d'état :

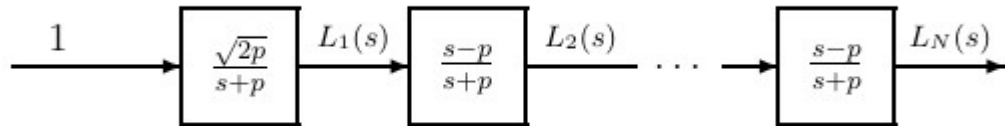


Figure 2.1. Réseau de Laguerre

$$\begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2p & \dots & -2p & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ \vdots \\ l_N(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La solution de l'équation différentielle (5.11) donne l'ensemble des fonctions de Laguerre pour $i = 1, 2, \dots, N$ comme :

$$L(t) = e^{A_p t} L(0) \quad (2.4)$$

Où

$$A_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & \dots & 0 \\ -2p & -p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2p & \dots & -2p & -p \end{bmatrix}$$

Cette représentation compacte de l'espace d'état des fonctions de Laguerre est primordiale pour la conception du contrôle prédictif en temps continu. Notez également que la matrice A_p est une matrice triangulaire inférieure, ce qui conduit à des solutions simplifiées lorsqu'elle est utilisée en contrôle prédictif.

2.3 Fonctions de Laguerre et DMPC

Pour simplifier la notation, le cas à entrée et sortie unique est examiné en premier, puis les résultats sont étendus aux cas à entrées et sorties multiples plus loin dans ce chapitre.

Rappelons que le vecteur de contrôle optimisé dans la conception du contrôle prédictif est ΔU , défini par :

$$\Delta U = [\Delta u(k_i) \quad \Delta u(k_i + 1) \quad \dots \quad \Delta u(k_i + N_c - 1)]^T$$

Où la dimension du vecteur de contrôle est N_c , appelé horizon de contrôle. À l'instant k_i , tout élément compris dans ΔU peut être représenté par la fonction discrète.

Fonction δ en conjonction avec ΔU :

$$\Delta u(k_i + i) = [\delta(i) \quad \delta(i - 1) \quad \dots \quad \delta(i - N_c + 1)] \Delta U$$

Où $\delta(i) = 1$, si $i = 0$; et $\delta(i) = 0$ si i diffère de 0. La fonction δ agit comme une impulsion (également appelée opérateur d'impulsion), et la fonction $\delta(i - d)$ décale le centre de l'impulsion vers l'avant lorsque l'indice d augmente. Cette expression montre clairement que les opérateurs d'impulsion sont utilisés pour capturer la trajectoire de contrôle si l'on considère U comme le vecteur de coefficients. Il est entendu que $u(k_i + i)$, $i = 0, 1, \dots, N_c - 1$ peut être approximé par une fonction polynomiale discrète. Il existe de nombreuses approches pour utiliser les fonctions polynomiales discrètes. Nous proposons ici d'utiliser un ensemble de fonctions de Laguerre discrètes pour approximer la suite $u(k_i)$, $u(k_i + 1)$, ..., $u(k_i + N_c - 1)$. Pour l'instant, introduisons les fonctions de Laguerre à temps discret, et les raisons d'utiliser cet ensemble de fonctions seront justifiées ultérieurement.

2.3.1 Réseaux de Laguerre à temps discret

Le réseau de Laguerre à temps discret a été généré à partir de la discrétisation d'un réseau de Laguerre à temps continu. Les transformées en z des réseaux de Laguerre à temps discret s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_1(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}}, \\ \Gamma_2(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}, \\ &\vdots \\ \Gamma_N(z) &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \cdots \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}} \quad (\text{N-1 fois}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où a est le pôle du réseau de Laguerre à temps discret, et $0 \leq a < 1$ pour la stabilité du réseau. Le paramètre libre, a, doit être sélectionné par l'utilisateur ; il est également appelé facteur d'échelle. Les réseaux de Laguerre sont réputés pour leur orthonormalité. Dans le domaine fréquentiel, cette orthonormalité s'exprime par les équations orthonormales pour Γ_m , $m = 1, 2, \dots$, comme :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_m(e^{iw}) \overline{\Gamma_n(e^{iw})} dw = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (2.6), (2.7).$$

Où A^* désigne le conjugué complexe de A. Dans la conception du contrôle prédictif, nous utilisons explicitement les fonctions de Laguerre dans le domaine temporel. Les fonctions de Laguerre à temps discret sont obtenues par la transformée en z inverse des réseaux de Laguerre. Cependant, cette transformation ne conduit pas à une expression compacte des fonctions de Laguerre dans le domaine temporel. Une méthode plus simple pour trouver ces fonctions à temps discret repose sur une réalisation des réseaux dans l'espace d'état.

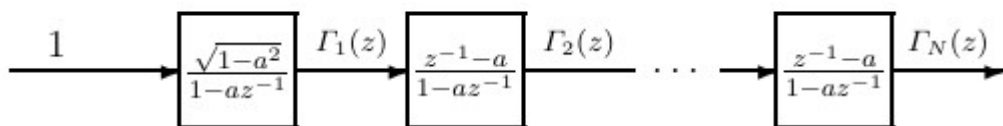


Figure2.2. Réseau discret de Laguerre

Noter que

$$\Gamma_k(z) = \Gamma_{k-1}(z) \cdot \frac{z^{-1}-a}{1-az^{-1}}. \quad (2.8)$$

Avec $\Gamma_1 =$

$$\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-az^{-1}}.$$

Avec cette relation, le réseau de Laguerre est illustré dans la figure 2.5.

Soit $l_1(k)$ la transformée en z inverse de $\Gamma_1(z,a)$, $l_2(k)$ la transformée en z inverse de $\Gamma_2(z,a)$ et bientôt $l_N(k)$ la transformée en z inverse de $\Gamma_N(z,a)$.

Cet ensemble de fonctions de Laguerre à temps discret s'exprime sous forme vectorielle par :

$$L(k) = \begin{bmatrix} l_1(k) \\ l_2(k) \\ \vdots \\ l_N(k) \end{bmatrix}.$$

Donc, l'ensemble des fonctions de Laguerre à temps discret satisfait l'équation différentielle suivante :

$$L(k+1) = A_t L(k), \quad (2.9)$$

où la matrice A_t est $(N \times N)$ et est une fonction des paramètres a et $\beta = (1-a^2)$, et la condition initiale est donnée par :

$$L(0)^T = \sqrt{\beta} [1 \quad -a \quad a^2 \quad -a^3 \quad \dots \quad (-1)^{N-1} a^{N-1}].$$

Par exemple, dans le cas où $N = 5$,

$$A_t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & a & 0 & 0 & 0 \\ -a\beta & \beta & a & 0 & 0 \\ a^2\beta & -a\beta & \beta & a & 0 \\ -a^3\beta & a^2\beta & -a\beta & \beta & a \end{bmatrix}, \quad L(0) = \sqrt{\beta} \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ a^2 \\ -a^3 \\ a^4 \end{bmatrix}.$$

L'orthonormalité exprimée dans (2.6) et (2.7) existe également dans le domaine temporel, à savoir

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_i(k)l_j(k) = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_i(k)l_j(k) = 1 \quad \text{pour } i = j.$$

L'orthonormalité sera utilisée dans la conception du contrôle prédictif du modèle à temps discret.

Le cas particulier lorsque $a=0$:

Lorsque $A=0$, la matrice A_l devient :

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

et le vecteur de condition initiale devient

$$L(0)^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Alors, $l_1(k) = \delta(k)$, $l_2(k) = \delta(k-1)$, $l_3(k) = \delta(k-2)$,..., $l_N(k) = \delta(k-N+1)$,

où $\delta(i)=1$ lorsque $i=0$; et $\delta(i)=0$ lorsque $i \neq 0$. On constate que les fonctions de Laguerre deviennent un ensemble d'impulsions lorsque $a=0$. Ceci est important car les travaux antérieurs sur la conception de la commande prédictive utilisent essentiellement ce type de description pour la trajectoire de commande incrémentale, d'où la conception du MPC utilisant des fonctions de Laguerre avec $a=0$.

Exemple 2.1. Supposons que le pôle occupe les deux positions différentes $a = 0,5$ et $a = 0,9$, respectivement, générons les trois premières fonctions de Laguerre pour chaque cas. Étudions également la propriété orthonormale des deux ensembles de fonctions de Laguerre en termes de sommes de points.

Solution. pour a donnée, l'équation de différence pour les trois premières fonctions de Laguerre est :

$$\begin{bmatrix} l_1(k+1) \\ l_2(k+1) \\ l_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a & 0 \\ -a(1-a^2) & 1-a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(k) \\ l_2(k) \\ l_3(k) \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Avec les conditions initiales $l_1(0) = \sqrt{1-a^2}$, $l_2(0) = -a(1-a^2)$ et $l_3(0) = a^2(1-a^2)$, les fonctions de Laguerre sont calculées itérativement. La figure 2.3 présente les fonctions de Laguerre pour $a = 0,5$ et $a = 0,9$ respectivement. On constate qu'avec $a = 0,5$, les fonctions de Laguerre décroissent vers zéro en moins de 15 échantillons. En revanche, avec $a = 0,9$, elles décroissent vers zéro beaucoup plus lentement (environ 50 échantillons sont nécessaires). De plus, les valeurs initiales des fonctions de Laguerre dont la valeur a est la plus petite sont supérieures à celles des fonctions correspondantes dont la valeur a est la plus grande, en particulier pour la première fonction de chaque ensemble. Pour étudier la propriété orthonormée des fonctions de Laguerre, nous calculons les sommes finies, pour $a = 0,5(S1)$ et pour $a = 0,9(S2)$.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{19} L(k)L(k)^T, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{50} L(k)L(k)^T.$$

Les matrices S1 et S2 sont

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0003 & -0.0012 \\ -0.0003 & 0.9970 & -0.0129 \\ -0.0012 & -0.0129 & 0.9430 \end{bmatrix}.$$

On constate que S1 est une matrice identité, mais que S2 ne l'est pas. En augmentant le nombre d'échantillons de 50 à 90, et avec $a = 0,9$, on obtient que

$$S_2 = \sum_{k=0}^{90} L(k)L(k)^T = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.9998 \end{bmatrix}.$$

Ce qui est beaucoup plus proche d'une matrice identité. Cela montre que le nombre d'échantillons requis pour atteindre l'orthonormalité dépend du choix du facteur d'échelle a et du nombre de termes N .

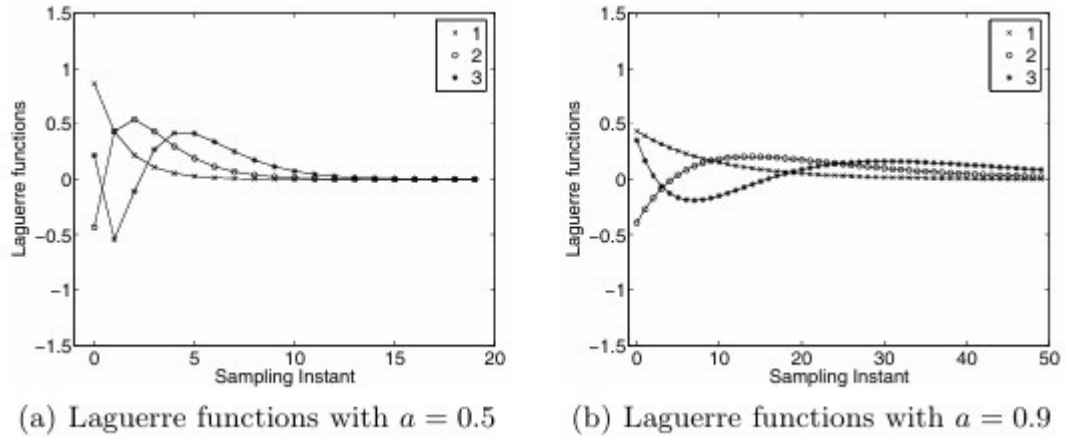


Figure 2.3 fonctions de Laguerre.

Key : line (1) l_1 ; line (2) $l_2(\cdot)$; line (3) $l_3(\cdot)$

2.3.2 Utilisation des réseaux de Laguerre dans la description du système

Jusqu'à présent, l'application des réseaux de Laguerre se situe principalement dans le domaine de l'identification de systèmes, où la réponse impulsionnelle à temps discret d'un système dynamique est représentée par un modèle de Laguerre . À cet égard, supposons que la réponse impulsionnelle d'un système stable soit $H(k)$, alors, avec un nombre de termes N donné, $H(k)$ s'écrit

$$H(k) = c_1 l_1(k) + c_2 l_2(k) + \dots + c_N l_N(k) \quad (2.14)$$

où c_1, c_2, \dots, c_N sont les coefficients à déterminer à partir des données du système. Les fonctions de Laguerre à temps discret sont des fonctions orthonormées, et grâce à ces propriétés orthonormées, les coefficients du réseau de Laguerre sont définis par la relation suivante : où $i = 1, 2, \dots, N$

$$c_i = \sum_{k=0}^{\infty} H(k) l_i(k),$$

En fait, à cause des propriétés orthonormées, les coefficients minimisent également la somme de la fonction d'erreur au carré.

$$J_{SE} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(H(k) - \sum_{i=1}^N c_i l_i(k) \right)^2.$$

Dans un esprit similaire à l'approximation dans le domaine du temps continu, l'approximation de $H(k)$ s'améliore à mesure que le nombre de termes N augmente, indépendamment du choix du paramètre $0 \leq a < 1$.

C'est la description de la réponse impulsionnelle à temps discret qui conduit à la conception d'une commande prédictive utilisant des fonctions de Laguerre. Les paramètres de la description sont la position du pôle de Laguerre a et le nombre de termes N . Afin de comprendre comment utiliser un réseau de Laguerre pour décrire une réponse impulsionnelle, le tutoriel MATLAB suivant est présenté afin de nous permettre d'expérimenter le processus de modélisation. Ce tutoriel permet également d'obtenir un modèle dynamique de Laguerre pour la conception d'une MPC à temps discret.

2.3.3 Utilisation des fonctions de Laguerre dans la modélisation de systèmes

La figure 2.4 présente les résultats de la modélisation pour $N = 3$ et $N = 4$ avec $a = 0,8$. Lorsque N passe à 4, le résultat de la modélisation s'améliore. On observe que lorsque $N = 4$, seuls 40 paramètres sont utilisés pour capturer la dynamique de la réponse impulsionnelle. En revanche, dans le cas de $a = 0$, c'est-à-dire l'opérateur impulsionnel, 60 paramètres sont nécessaires pour capturer la dynamique du système. Par conséquent, il est compréhensible que lorsqu'un a approprié est sélectionné, le réseau de Laguerre soit beaucoup plus efficace que le modèle de l'opérateur impulsionnel (c'est-à-dire $a = 0$).

2.4 Utilisation des fonctions de Laguerre dans la conception DMPC

Les chapitres précédents ont présenté la conception de DMPC à l'aide de l'opérateur impulsionnel (c'est-à-dire ΔU), qui correspond au cas où le paramètre $a = 0$ dans le polynôme de Laguerre. Par conséquent, en cas d'échantillonnage rapide, de dynamique de processus complexe et/ou d'exigences élevées en termes de performances en boucle fermée, une approximation satisfaisante du signal de commande ΔU peut nécessiter un très grand nombre de paramètres, ce qui conduit à des solutions mal conditionnées numériquement et à une charge de calcul importante lors de l'implémentation en ligne. Une approche plus appropriée consiste à utiliser les réseaux de Laguerre pour la conception de la commande prédictive du modèle. Par exemple, en supposant que la commande optimale sous-jacente

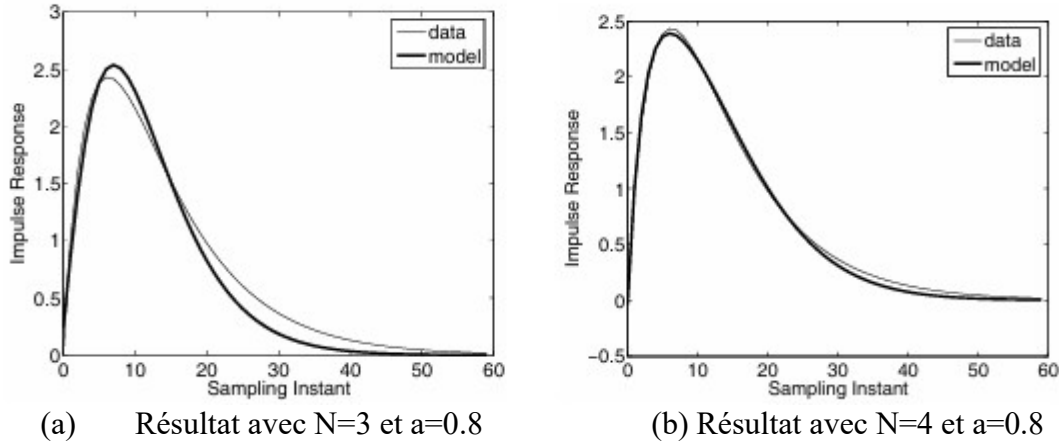


Figure 2.4 Utilisation des fonctions de Laguerre dans la conception DMPC

Key: line (1) 11 ; line (2) 12(.) ; line (3) 13 (.)

La trajectoire était la réponse impulsionnelle du système du second ordre de la figure 2.4. Lorsque $a = 0$, ce qui était le cas de l'opérateur impulsionnel, 60 paramètres étaient nécessaires pour capturer la réponse. Cependant, avec le polynôme de Laguerre avec $a = 0,8$, seuls 40 paramètres étaient nécessaires pour réaliser la même tâche.

2.4.1 Cadre de conception :

À l'instant k_i , la trajectoire de contrôle $\Delta u(k_i), \Delta u(k_i+1), \Delta u(k_i+2), \dots, \Delta u(k_i+k), \dots$, est considérée comme la réponse impulsionnelle d'un système dynamique stable. Ainsi, un ensemble de fonctions de Laguerre, $l_1(k), l_2(k), \dots, l_n(k)$ sont utilisées pour capturer cette réponse dynamique avec un ensemble de coefficients de Laguerre qui seront déterminés lors de la conception. Plus précisément, à un instant d'échantillonnage futur arbitraire, k :

$$\Delta u(k_i + k) = \sum_{j=1}^N c_j l_j(k), \tag{2.15}$$

où k_i est l'instant initial de la fenêtre d'horizon mobile et k l'instant d'échantillonnage futur ; N est le nombre de termes utilisés dans le développement et $c_j, j = 1, 2, \dots, N$ sont les coefficients, et ils sont des fonctions de l'instant initial de la ligne d'horizon mobile, k_i . Dans ce cadre de conception, l'horizon de contrôle N_c de l'approche précédente a disparu. À la place, le nombre de termes N est utilisé pour décrire la complexité de la trajectoire, en conjonction avec le paramètre a . Par exemple, une valeur plus élevée de a peut être sélectionnée pour obtenir un horizon de contrôle long avec un nombre plus faible de paramètres N requis dans la procédure d'optimisation. Nous notons que lorsque $a = 0$, $N = N_c$, nous retrouvons l'approche traditionnelle des chapitres précédents.

L'équation (2.15) peut également être écrite sous forme vectorielle :

$$\Delta u(k_i + k) = L(k)^T \eta, \quad (2.16)$$

où le vecteur de paramètres η comprend N coefficients de Laguerre :

$$\eta = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N]^T.$$

et $L(k)^T$ est le vecteur de la fonction de Laguerre transposée . En utilisant les fonctions de Laguerre, étant donné le modèle d'espace d'état (A, B, C) avec $\Delta u(\cdot)$ comme signal d'entrée et l'information de variable d'état initiale $x(k_i)$, la prédiction de la variable d'état future, $x(k_i + m | k_i)$ à l'instant d'échantillonnage m, devient

$$x(k_i + m | k_i) = A^m x(k_i) + \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} B L(i)^T \eta, \quad (2.17)$$

nous avons remplacé la fonction $\Delta u(k_i+i)$ par $L(i)^T \eta$. De même, après avoir obtenu la prédiction des variables d'état, la prédiction de la production de l'usine pour l'échantillon m futur est

$$y(k_i + m | k_i) = C A^m x(k_i) + \sum_{i=0}^{m-1} C A^{m-1-i} B L(i)^T \eta. \quad (2.18)$$

Avec cette formulation, les prédictions de la variable d'état et de la variable de sortie sont exprimées en termes du vecteur de coefficients η du réseau de Laguerre, au lieu de ΔU comme dans l'approche plus traditionnelle. Ainsi, le vecteur de coefficients η sera optimisé et calculé lors de la conception.

2.4.2 Fonctions de coût

Ici, avec les fonctions de Laguerre, une formulation alternative de la fonction de coût est obtenue, ce qui peut être plus simple du point de vue de la programmation, en particulier pour les systèmes comportant un grand nombre d'entrées et de sorties. Pour commencer, simplifions les choses en supposant un système SISO. Rappelons, comme indiqué au chapitre 1, qu'à l'instant k_i du signal de consigne, R_s est un vecteur constant dans l'horizon de prédiction, et que la fonction de coût initiale est :

$$J = (R_s - Y)^T (R_s - Y) + \Delta U^T R_{\Delta U} \Delta U$$

Où

$$Y = \begin{bmatrix} y(k_i + 1 | k_i) \\ y(k_i + 2 | k_i) \\ y(k_i + 3 | k_i) \\ \vdots \\ y(k_i + N_p | k_i) \end{bmatrix}, \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u(k_i) \\ \Delta u(k_i + 1) \\ \Delta u(k_i + 2) \\ \vdots \\ \Delta u(k_i + N_c - 1) \end{bmatrix}.$$

$$R_T^s = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]r(k_i).$$

et Rbar est une matrice diagonale d'élément identique rw. Sachant que Y et deltaU sont sous forme vectorielle, cette fonction de coût est équivalente à

$$J = \sum_{m=1}^{N_p} (r(k_i) - y(k_i + m | k_i))^T (r(k_i) - y(k_i + m | k_i)) + \eta^T R_L \eta. \quad (2.19)$$

Où R_L est une matrice diagonale (N × N) avec un r_w ≥ 0 sur sa diagonale et r(k_i) est le signal de consigne pour la sortie y à l'instant k_i. Dans (2.19), nous avons utilisé les propriétés orthonormées des fonctions de Laguerre de la manière suivante :

$$\Delta U^T R_{\Delta U} \Delta U = \sum_{m=0}^{N_p} \Delta u(k_i + m)^T R_{\Delta u} \Delta u(k_i + m),$$

Avec

$$\Delta u(k_i + m) = [l_1(m) \quad l_2(m) \quad \dots \quad l_N(m)]\eta.$$

et la propriété orthonormale des fonctions de Laguerre avec un horizon de prédiction N_p suffisamment grand pour que :

$$\sum_{m=0}^{N_p} l_i(m)l_j(m) = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad \sum_{m=0}^{N_p} l_i(m)l_j(m) = 1 \quad \text{si } i = j.$$

Ici, la grande valeur de N_p est liée au choix du facteur d'échelle a et N.

$$J = \sum_{m=1}^{N_p} x(k_i + m | k_i)^T Q x(k_i + m | k_i) + \eta^T R_L \eta. \quad (2.20)$$

avec les matrices de pondération Q ≥ 0 et R_L > 0. En particulier, Q a une dimension égale au nombre de variables d'état et R_L a une dimension égale à η.

2.4.3 Contrôle de l'horizon fuyant

La loi de contrôle de l'horizon fuyant est réalisée comme :

$$\Delta u(k_i) = L(0)^T \eta. \quad (2.21)$$

Avec :

$$\eta = \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \right)^{-1} \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m \right) x(k_i), \quad (2.22)$$

Et

$$\phi(m)^T = \sum_{i=0}^{m-1} A^{m-1-i} B L(i)^T.$$

où pour un N et un a donnés,

$$L(0)^T = (1 - a^2) [1 - a^2 - a^3 \dots (-1)^{N-1} a^{N-1}]. l_i(t)$$

La commande $\Delta u(k)$ peut être exprimée sous la forme d'une commande à rétroaction d'état linéaire en remplaçant k_i par k (η étant une fonction de la variable d'état $x(k_i)$). À savoir :

$$\Delta u(k) = -K_{mpc} x(k), \quad (2.23)$$

et la matrice de gain de rétroaction d'état :

$$K_{mpc} = L(0)^T \left(\left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \right)^{-1} \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m \right)$$

- Notez que dans le cas où $a = 0$, la solution devient identique à celle où l'on résout ΔU au lieu du vecteur de coefficients de Laguerre η .

Comme la prédiction des états futurs repose sur l'information actuelle sur $x(k_i)$, l'information de consigne est contenue dans $x(k_i)$. Plus précisément

$$x(k_i) = \begin{bmatrix} \Delta x_m(k_i)^T \\ e(k_i) \end{bmatrix}, \quad e(k_i) = y(k_i) - r(k_i).$$

2.4.4 La trajectoire optimale du contrôle incrémental

Afin de comprendre le comportement du DMPC, nous présentons l'exemple suivant, qui examine la trajectoire optimale de $\Delta u(k_i + m)$, pour $m = 0, 1, 2, \dots$

Exemple 2.2: Supposons qu'un système du premier ordre soit décrit par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= 0.8x_m(k) + 0.6u(k), \\ y(k) &= x_m(k). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Étant donné un instant $k_i = 10$, le vecteur d'état $x(k_i) = [0,1 \ 0,2]^T$ et un horizon de prédiction $N_p = 16$, trouver la trajectoire optimale de $\Delta u(k_i + m)$ pour $m = 0,1,2,\dots,N_p$. Les paramètres de conception sont $Q = [0 \ 0 ; 0 \ 1]^T$, $R = 1$ et $a = 0,6$. On va Examiner les solutions où N augmente de 1 à 4.

N	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄
1	-0.1149			
2	-0.1734	0.0804		
3	-0.1844	0.1120	-0.0293	
4	-0.1842	0.1110	-0.0274	-0.0022

Table2.1. Paramètres dans η

Solution. L'équation d'espace d'état augmentée est :

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \Delta u(k). \quad (2.25)$$

Avec la variable d'état initiale à $k_i = 10$ étant donné que $x(k_i)=[0,1 \ 0,2]^T$, la solution optimale du vecteur de paramètres η est :

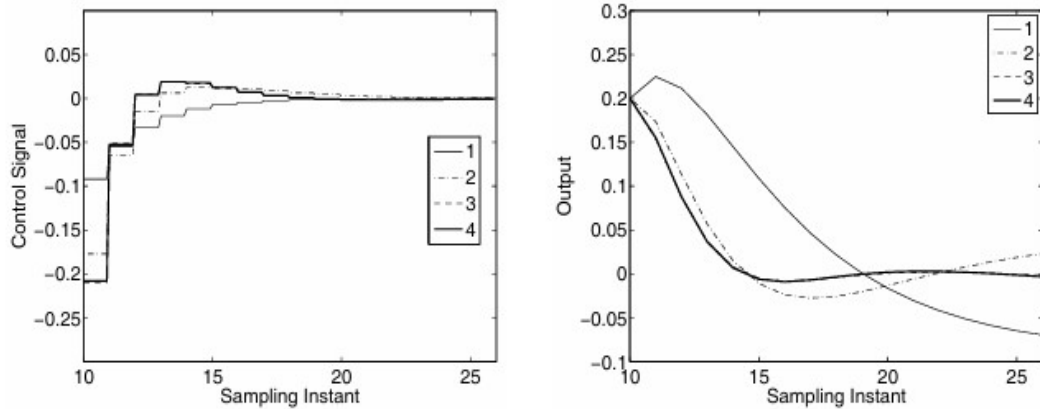
$$\eta = - \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)Q\phi(m)^T + R_L \right)^{-1} \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)QA^m \right) x(k_i)$$

Le vecteur de coefficients η est présenté dans le tableau 2.1 pour $N = 1, 2, 3, 4$. Avec les coefficients du tableau 2.1, la trajectoire de contrôle optimale $\Delta u(k_i + m)$ est construite comme suit : $m = 0, 1, 2,\dots, 16$,

$$\Delta u(k+m) = \sum_{j=1}^N c_j L_j(m).$$

La figure 2.5a montre $\Delta u(k_i+m)$ pour $k_i = 10$ et $m = 0, 1, 2, \dots$. On constate sur cette figure que le signal de commande incrémental est quasiment identique pour $N = 3$ et $N = 4$. Ceci est confirmé par les réponses de sortie pour les deux cas, comme le montre la figure 2.5b. Cependant, lorsque $N = 1$, la trajectoire de commande est très différente de celle de $N = 3$ ou 4. La réponse de

sortie de $N = 1$ est beaucoup plus lente que dans les trois autres cas, car le signal de commande est limité à la réponse du premier ordre.



(a) Signal de commande incrémental

(b) Réponse de sortie

Figure. 2.5. Comparaison des réponses au sein d'une ligne d'optimisation.

Légende : ligne (1) $N = 1$; ligne (2) $N = 2$; ligne (3) $N = 3$; ligne (4) $N = 4$ [6].

2.5 Extension aux systèmes MIMO

Dans la formulation d'un système de contrôle prédictif MIMO, chaque signal d'entrée est désigné pour avoir une position de pôle de Laguerre indépendante, de sorte que sa position puisse être utilisée pour influencer le taux de décroissance du signal de contrôle incrémental. Par exemple, si nous souhaitons qu'un contrôle incrémental spécifique décroisse rapidement, nous choisissons sa position de pôle $a = 0$; sinon, a est choisi supérieur à zéro. En gardant cela à l'esprit, la description est étendue aux systèmes multi-entrées avec une flexibilité totale dans le choix des paramètres a et N . Soit

$$\Delta u(k) = [\Delta u_1(k) \ \Delta u_2(k) \ \dots \ \Delta u_m(k)]^T,$$

et la matrice d'entrée soit :

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m],$$

où m est le nombre d'entrées et B_i est la i ème colonne de la matrice B .

Nous exprimons le i ème signal de commande $\Delta u_i(k)$ en choisissant un facteur d'échelle a_i et un ordre N_i , où a_i et N_i sont sélectionnés pour cette entrée particulière, de sorte que

$$\Delta u_i(k) = L_i(k)^T \eta_i, \quad (2.26)$$

où η_i et $L_i(k)$ sont la description du réseau de Laguerre du i ème contrôle, en particulier :

$$L_i(k)^T = [l_i(k) \ l_i(k) \ \dots \ l_i(k)],$$

En fonction de la partition de la matrice d'entrée et des informations sur la variable d'état donnée à $x(k_i)$, la prédiction de l'état futur à l'instant m s'écrit :

où le vecteur de paramètres η et la matrice de données $\phi(m)^T$ sont constitués des vecteurs de coefficients individuels donnés par :

$$\eta^T = [\eta_1^T \ \eta_2^T \ \dots \ \eta_m^T]$$

$$\phi(m)^T = \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1} [B_1 L_1(j)^T \ B_2 L_2(j)^T \ \dots \ B_m L_m(j)^T]$$

Notez que la matrice du k -ième bloc :

$$\phi(m)^{\bar{T}} = \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-j-1} B_k L_k(j)^T$$

a la même structure que le cas à entrée unique défini par $Sc(m)$, et peut donc être calculé récursivement en utilisant (2.20). À partir de là, la somme de convolution dans un système à entrées multiples est décomposée en calculant les sous-systèmes, et les résultats calculés sont assemblés bloc par bloc pour former la structure à entrées multiples. Nous soulignons que, dans la formulation du problème multivariable, les facteurs d'échelle a_i et le nombre de termes N_i peuvent être choisis indépendamment pour chaque signal d'entrée.

Comme dans le cas SISO, la fonction de coût est définie comme suit :

$$\begin{aligned} J &= \eta^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q \phi(m)^T + R_L \right) \eta + 2\eta^T \left(\sum_{m=1}^{N_p} \phi(m) Q A^m \right) x(k_i) \\ &+ \sum_{m=1}^{N_p} x(k_i)^T (A^T)^m Q A^m x(k_i) \\ &= \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \Psi x(k_i) + \sum_{m=1}^{N_p} x(k_i)^T (A^T)^m Q A^m x(k_i) \end{aligned} \quad (2.28)$$

où les matrices Ω et Ψ sont :

$$\Omega = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)Q\phi(m)^T + R_L, \quad \Psi = \sum_{m=1}^{N_p} \phi(m)QA^m$$

Sans contraintes, la solution optimale de la fonction de coût (2.28) est donnée par :

$$\eta = -\Omega^{-1}\Psi x(k_i) \quad (2.29)$$

Après avoir obtenu le vecteur de paramètres optimal η , les lois de contrôle de l'horizon fuyant sont réalisées

$$\Delta u(k_i) = \begin{bmatrix} L_1(0)^T & \sigma_1^T & \sigma_3^T & \cdots & \sigma_p^T \\ \sigma_1^T & L_2(0)^T & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \\ \sigma_1^T & \sigma_2^T & \cdots & & L_m(0)^T \end{bmatrix} \eta \quad (2.30)$$

Où σ_k^T , $k=1,2,\dots,m$ représente un vecteur ligne de bloc zéro de dimension identique à $L_k(0)^T$. La variable de contrôle $\Delta u(k)$ peut être écrite sous la forme d'un contrôle par rétroaction d'état linéaire en remplaçant k_i par k et en supposant que les trajectoires de référence futures sont constantes dans l'horizon de prédiction.

À savoir :

$$x(k+1) = (A - BK_{mpc})x(k) \quad (2.31)$$

où la matrice de gain de contrôle de rétroaction d'état K_{mpc} est :

$$K_{mpc} = \begin{bmatrix} L_1(0)^T & \sigma_1^T & \sigma_2^T & \cdots & \sigma_p^T \\ \sigma_1^T & L_2(0)^T & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \\ \sigma_1^T & \sigma_2^T & \cdots & & L_m(0)^T \end{bmatrix} \Omega^{-1}\Psi$$

Avec la définition de la matrice de gain de contrôle de rétroaction d'état K_{mpc} , le contrôle de rétroaction en boucle fermée est :

$$x(k+1) = (A - BK_{mpc})x(k) \quad (2.32)$$

La stabilité et les performances du système de contrôle prédictif en boucle fermée peuvent être vérifiées en examinant l'emplacement de ses valeurs propres..

2.6 Contrôle prédictif basé sur les fonctions de Laguerre sous contraintes

2.6.1 Contraintes sur les incréments du signal de commande

Nous avons signé les limites supérieure et inférieure de l'amplitude du signal de commande comme suit :

$$\Delta u^{min} \leq \Delta u(ki+m) \leq \Delta u^{max} \quad (2.33)$$

Avec $m=1,2,3,\dots$, et la fonction de coût mentionnée précédemment :

$$J = \eta^T \Omega \eta + 2\eta^T \Psi x(ki) \quad (2.34)$$

La procédure d'optimisation consiste à minimiser la fonction de coût (équation (2.33)) sous réserve de l'inégalité (équation (2.34)) :

Le signal de commande incrémental est représenté dans LDMPC comme suit :

$$\Delta u(ki+m) = L(m)^T \eta \quad (2.35)$$

Les contraintes s'écrivent donc :

$$\Delta u^{min} \leq L(m)^T \eta \leq \Delta u^{max}$$

Les contraintes sur l'échantillon futur m s'écrivent :

$$\Delta u^{min} \leq \begin{bmatrix} L_1(m)^T & 0_2^T & \dots & 0_m^T \\ 0_1^T & L_2(m)^T & \dots & 0_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_1^T & 0_2^T & \dots & L_m(m)^T \end{bmatrix} \eta \leq \Delta u^{max} \quad (2.36)$$

Où $m = 0, 1, \dots$, désigne l'ensemble des instants futurs auxquels nous souhaitons imposer les limites à Δu .

2.6.2 Contraintes sur l'amplitude du signal de commande

Signer les limites supérieure et inférieure de l'amplitude du signal de commande comme suit :

$$u^{min} \leq u(ki+m) \leq u^{max}$$

L'amplitude du signal de commande s'écrit en termes d'incrémentes :

$$u(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \Delta u(i)$$

Les contraintes pour le temps futur k sont exprimées comme pour $k=1, 2, \dots$:

$$u^{\min} \leq \begin{bmatrix} L_1(m)^T & 0_2^T & \cdots & 0_m^T \\ 0_1^T & L_2(m)^T & \cdots & 0_m^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_1^T & 0_2^T & \cdots & L_m(m)^T \end{bmatrix} \eta + u(k-1) \leq u^{\max} \quad (2.37) \quad [7]$$

2.7 Conclusion

En conclusion, le MPC Laguerre constitue une évolution du MPC classique en intégrant une base de fonctions orthonormées, notamment les fonctions de Laguerre, pour représenter la commande[13]. Cette approche permet de réduire significativement la complexité computationnelle du problème d'optimisation tout en conservant une performance de commande élevée[12]. Grâce à cette simplification, le MPC Laguerre devient particulièrement avantageux pour les systèmes à temps réel ou à ressources limitées[14]. Ce chapitre a ainsi mis en lumière les fondements théoriques de cette méthode et ses avantages par rapport aux approches classiques.

Chapitre 3 :

**L'étude d'un système à quatre réservoirs
avec interaction**

3.1. Introduction

La plupart des processus industriels fonctionnent dans un environnement multi-entrées et multi-sorties (MIMO) et présentent une forte intégration, une dynamique complexe et un comportement non linéaire. Ces caractéristiques sont courantes dans les processus industriels et présentent d'importantes incertitudes, ainsi qu'une forte interaction entre les phases minimales et non minimales.

Dans ce chapitre, nous allons réaliser une simulation du processus à quatre réservoirs avec interaction (QTPI) en utilisant deux approches de commande prédictive : la commande prédictive classique (MPC) et la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre. Chaque méthode sera testée dans deux configurations : avec et sans contraintes sur les variables de commande et/ou de sortie, et avec et sans perturbations.

3.2. Description du procédé à quatre réservoirs avec interaction

Le système est composé de quatre réservoirs (Tanks 1 à 4) et de deux pompes (Pump 1 et Pump 2). Les réservoirs 1 et 2 sont les réservoirs inférieurs, tandis que les réservoirs 3 et 4 sont les réservoirs supérieurs.

Entrées du système :

- V_1 : voltage de la pompe 1.
- V_2 : voltage de la pompe 2.

Sorties du système :

- h_1 : hauteur d'eau dans le réservoir 1 (Tank 1).
- h_2 : hauteur d'eau dans le réservoir 2 (Tank 2).

Les pompes injectent de l'eau dans le système à travers des vannes à deux voies (diviseurs de flux), contrôlées par des paramètres γ_1 et γ_2 .

- Une fraction γ_1 de V_1 est envoyée vers le réservoir supérieur Tank 3, et le reste vers Tank 1.
- Une fraction γ_2 de V_2 est envoyée vers le réservoir supérieur Tank 4, et le reste vers Tank 2.

L'eau s'écoule ensuite par gravité :

- De Tank 3 vers Tank 1.

- De Tank 4 vers Tank 2.

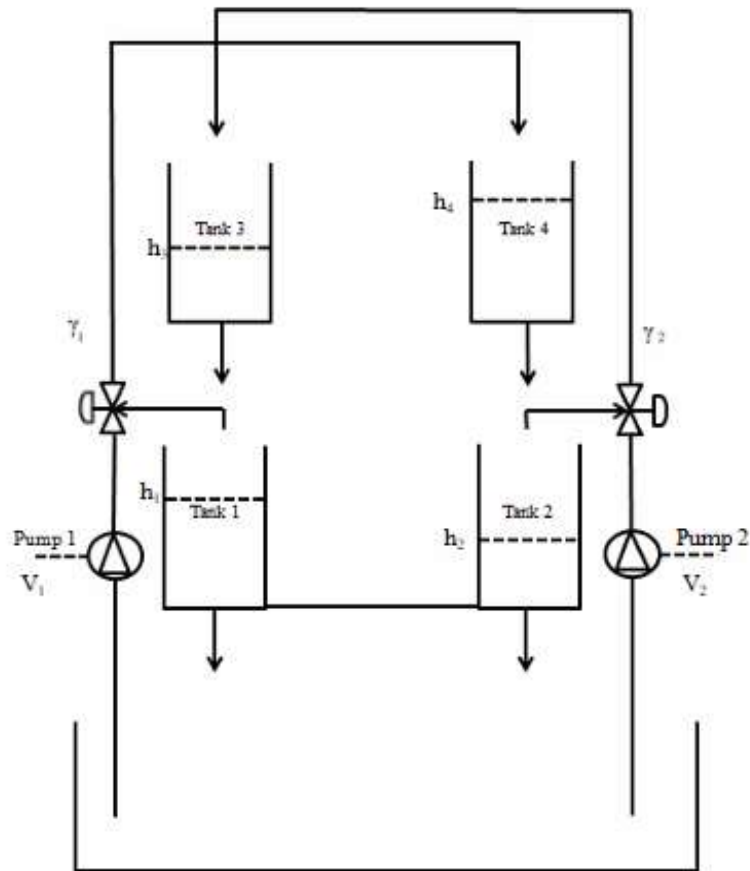


Figure 3.1 Le processus du quadruple réservoirs avec une interaction

Chaque réservoir du procédé est constitué d'un ou plusieurs flux d'entrée et de sortie. Le volume du réservoir est proportionnel à sa surface et à son niveau réel. Le paramètre $h(t)$ est un temps qui varie en fonction des variations des flux d'entrée et de sortie. Les équations de bilan massique du procédé sont présentées ci-dessous.

Les équations d'état suivantes représentent le modèle non linéaire du procédé QTPI :

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3(t)} - \frac{a_{12}}{A_1} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} + \frac{\gamma_1 K_1}{A_1} V_1 \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2(t)} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4(t)} - \frac{a_{12}}{A_1} \sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|} + \frac{\gamma_2 K_2}{A_2} V_2 \\ \frac{dh_3(t)}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2)K_2}{A_3} V_2 \\ \frac{dh_4(t)}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1)K_1}{A_4} V_1 \end{aligned}$$

Les paramètres du procédé sont présentés dans le tableau 3.1.

Ces paramètres sont utilisés pour développer le modèle de simulation et les matrices du procédé QTPI.

Paramètres (unité)	Valeur
A ₁ , A ₃ [cm ²]	28
A ₂ , A ₄ [cm ²]	32
a ₁ ,a ₂ [cm ²]	0.071
a ₃ ,a ₄ [cm ²]	0.057
Kc[V /cm]	1
g[cm/s ²]	9.81
K ₁ [cm ³ /Vs]	3.14
K ₂ [cm ³ /Vs]	3.29
γ ₁	0.6
γ ₂	0.6

Tableau 3.1 Les paramètres du procédé QTPI

3.3 Modélisation du procédé à quatre réservoirs avec interaction

Le modèle non linéaire du procédé QTPI est linéarisé par rapport au point de fonctionnement étant donné par la hauteur de liquide des réservoirs h_1, h_2, h_3, h_4 .

Les équations différentielles non linéaires ci-dessus sont converties en un modèle d'espace d'état linéarisé à l'aide d'une matrice jacobien. Cette matrice est représentée par :

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} & \frac{\partial f_1}{\partial h_3} & \frac{\partial f_1}{\partial h_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} & \frac{\partial f_2}{\partial h_3} & \frac{\partial f_2}{\partial h_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial h_1} & \frac{\partial f_3}{\partial h_2} & \frac{\partial f_3}{\partial h_3} & \frac{\partial f_3}{\partial h_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial h_1} & \frac{\partial f_4}{\partial h_2} & \frac{\partial f_4}{\partial h_3} & \frac{\partial f_4}{\partial h_4} \end{bmatrix}$$

En utilisant cette l'équation, le modèle d'espace d'état linéarisé pour le processus QTPI est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

À l'aide de la matrice jacobien, le modèle d'espace d'état du processus QTPI représenté comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_{12}} & \frac{1}{T_{12}} & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ \frac{1}{T_{12}} & -\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_{21}} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 K_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 K_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)K_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)K_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} K_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Où

$$K_i = \frac{K_c K_i}{A_i} \quad \text{pour } i = 1,2$$

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} (\sqrt{2 * h_i / g}) \quad \text{pour } i = 1,2,3,4$$

$$T_{12} = \frac{A_1}{a_1} (\sqrt{2 * (h_1 - h_2) / g})$$

$$T_{21} = \frac{A_2}{a_2} (\sqrt{2 * (h_1 - h_2) / g})$$

$$K_{13} = \frac{K_c K_2}{A_1 T_3}$$

$$K_{24} = \frac{K_c K_1}{A_2 T_4}$$

Les points de fonctionnement d'entrée et de sortie sont indiqués dans le tableau 3.2 :

Paramètres(unité)	Valeur
$h_1[\text{cm}]$	10.43
$h_2[\text{cm}]$	15.98
$h_3[\text{cm}]$	6.60
$h_4[\text{cm}]$	9.57
$V_1[\text{V}]$	3.15
$V_2[\text{V}]$	3.15

Tableau 3.2 les points de fonctionnement d'entrée et de sortie[8].

Objectif d'étude : L'objectif est de contrôler le niveau d'eau dans les réservoirs inférieurs 1 et 2 grâce aux deux pompes.

3.4 Simulation et comparaison

Dans cette section, nous avons appliqué à notre système à la fois le contrôle prédictif discret basé sur Laguerre et le contrôle prédictif discret classique. L'ensemble du schéma de contrôle est implémenté dans MATLAB sous forme de script. Nous avons observé les résultats de simulation pour différents scénarios de réglage et différents cas de perturbations, avec et sans contraintes en entrée et en sortie.

- Résultats de simulation sans perturbations et sans contraintes :

Par MPC classique :

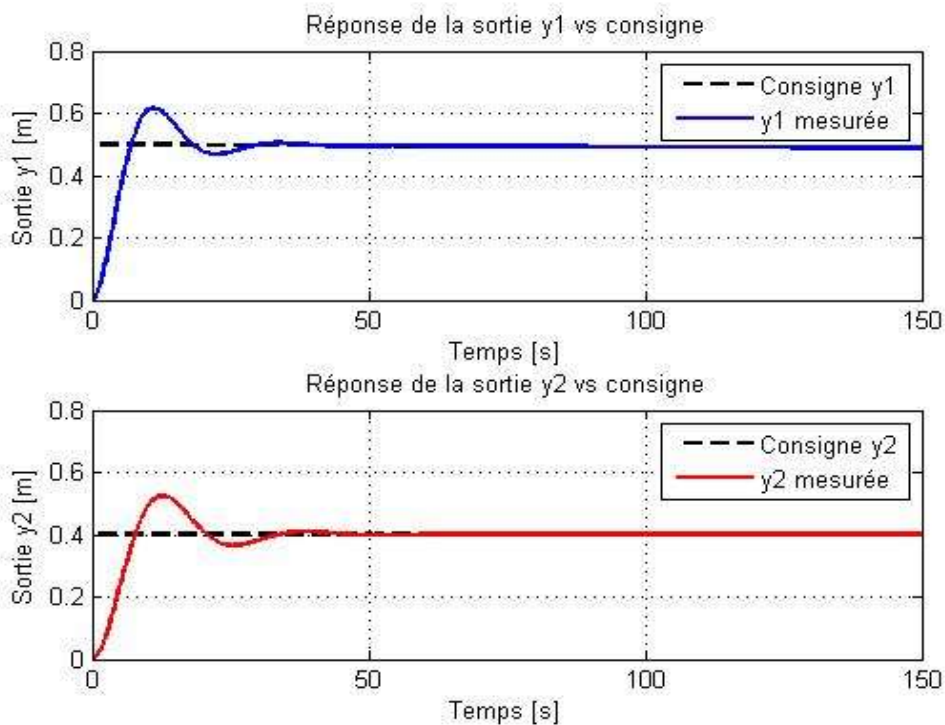


Figure 3.2 réponse de la sortie y_1 et y_2 avec $N_p=20$ et $N_c=8$.

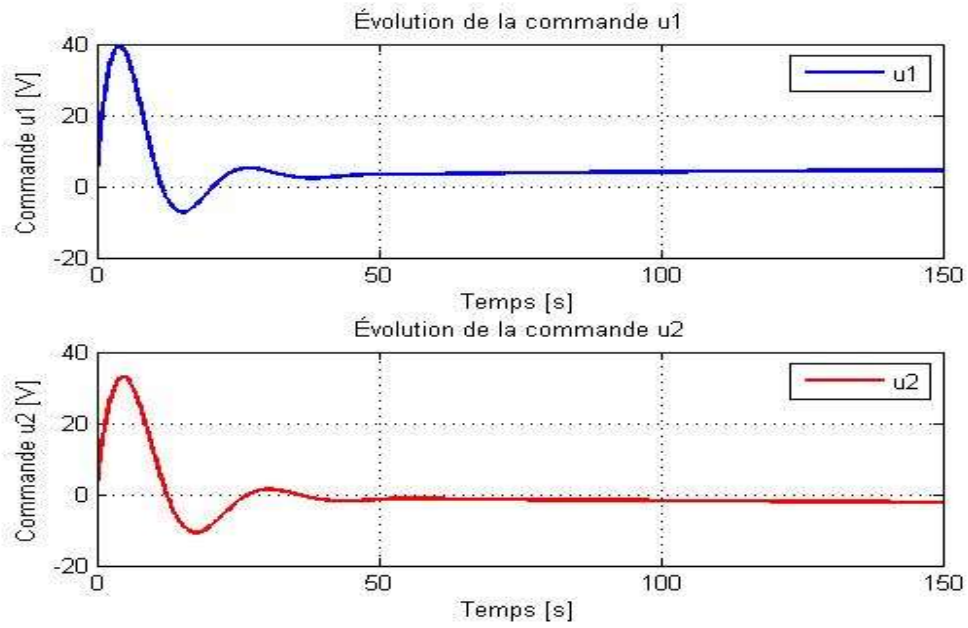


Figure 3.3 évolution de la commande u_1 et u_2 avec $N_p=20$ et $N_c=8$.

Par MPC basé sur Laguerre :

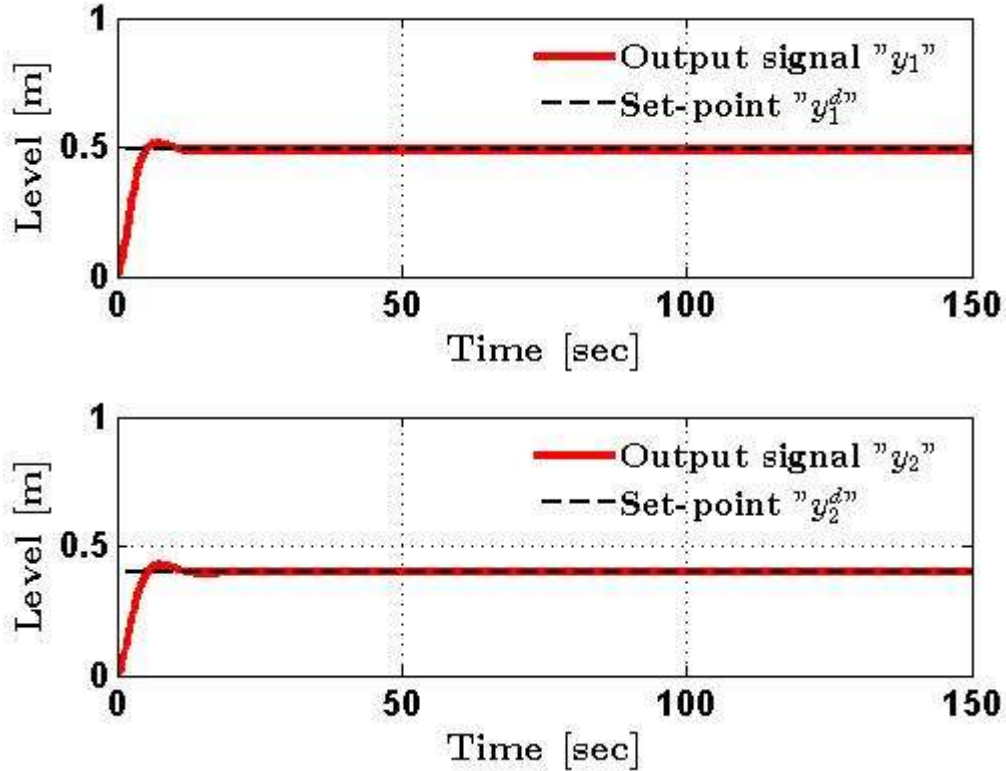


Figure 3.4 réponse de la sortie y_1 et y_2 avec, $N=[4 \ 4]$ et $a=[0.5 \ 0.5]$.

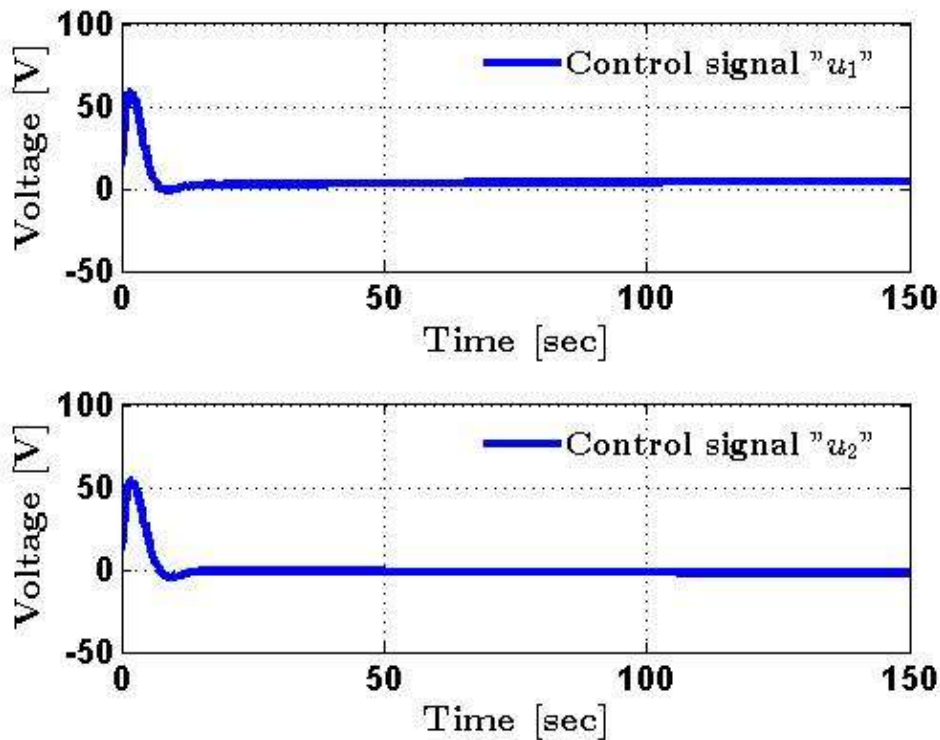


Figure 3.5 évolution de la commande u_1 et u_2 avec $N=[4 \ 4]$ et $a=[0.5 \ 0.5]$.

Comparaison :

Critère	MPC classique	MPC Laguerre	Comparaison
Temps de calcul	Modéré à élevé	Réduit	Laguerre plus rapide
Précision	Bonne	Excellente (si bien réglé)	Laguerre donne une meilleure précision
Complexité de mise en œuvre	Standard	Plus complexe	Laguerre plus complexe
Stabilité	Assurée avec un bon réglage	Assurée également	Equivalent

Tableau 3.3 Comparaison entre MPC classique et Laguerre

Conclusion :

Le MPC Laguerre est plus efficace en termes de calcul et offre une meilleure précision dans ce cas idéal, alors que le MPC classique peut être plus lourd sans avantage significatif.

- Résultats de simulation avec des perturbations sur l'entrée, la sortie et sans contraintes :

Par MPC classique :

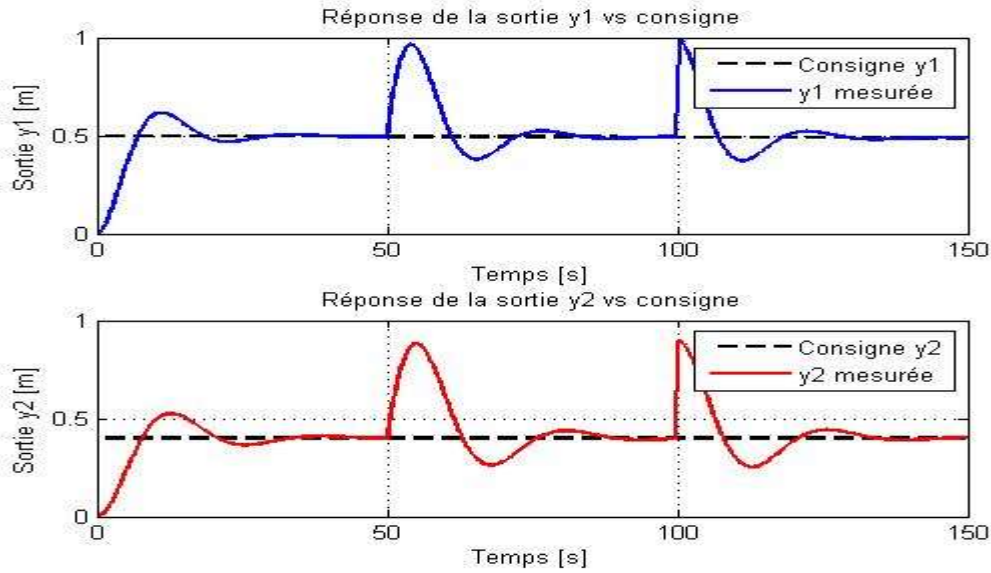


Figure3.6 Réponse de la sortie y_1 et y_2 avec perturbation

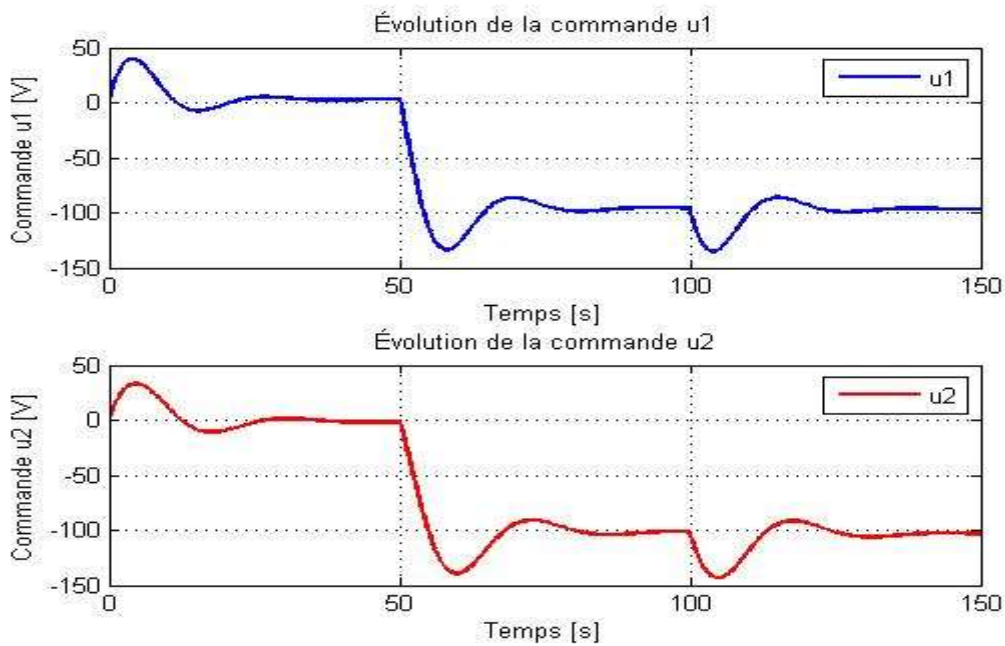


Figure3.7 évolutions de la commande u_1 et u_2 avec perturbation

Par MPC basé sur Laguerre :

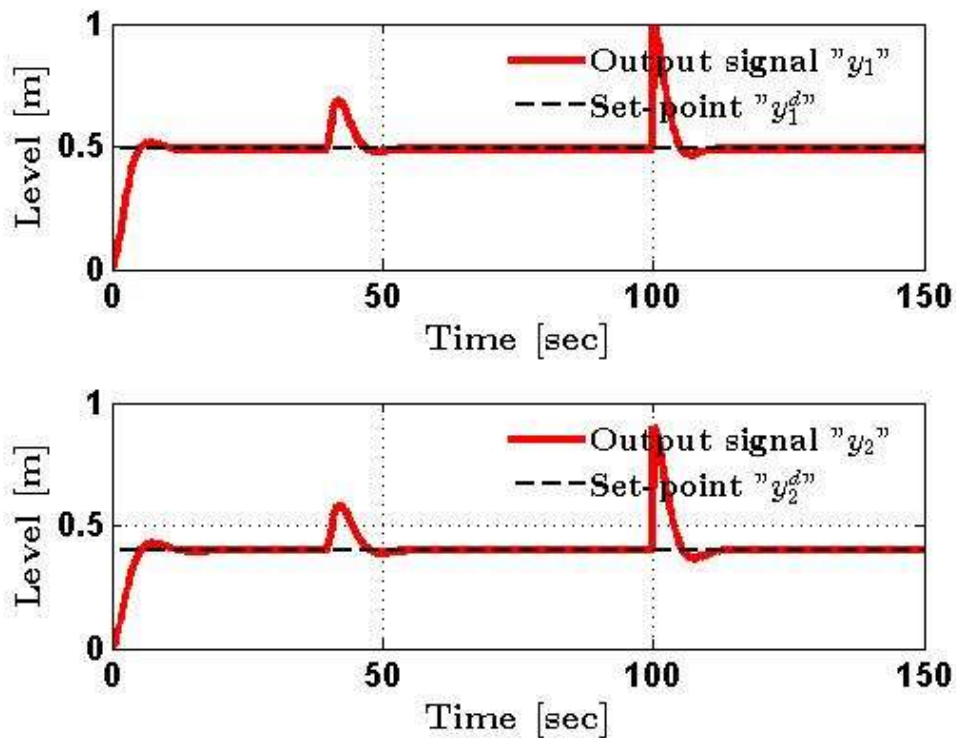


Figure3.8 Réponse de la sortie y_1 et y_2 avec perturbation

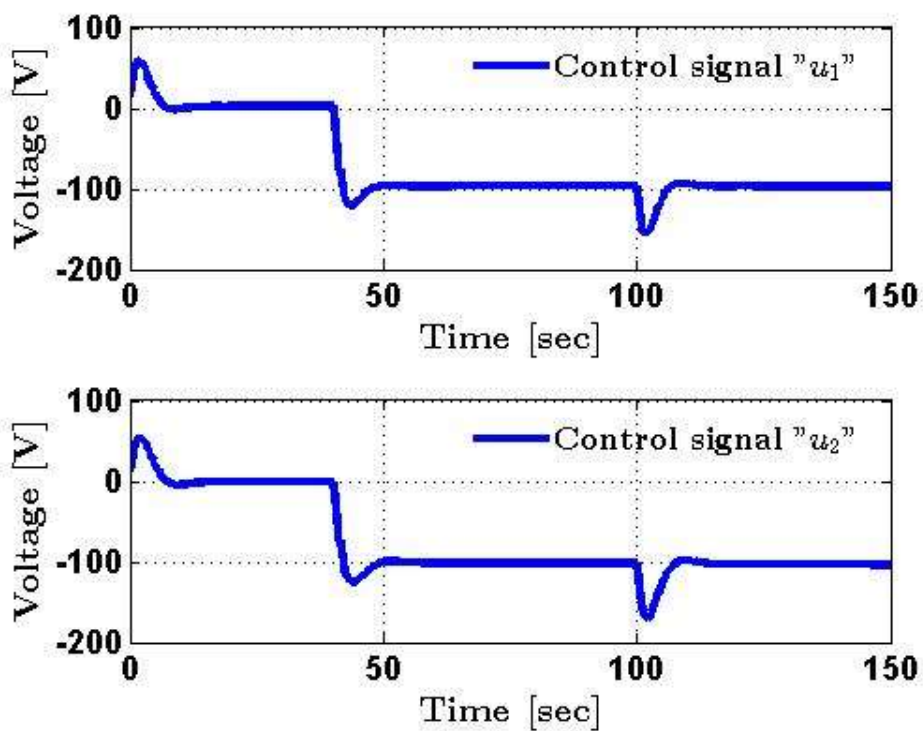


Figure3.9 évolutions de la commande u_1 et u_2 avec perturbation

Comparaison :

Critère	MPC classique	MPC Laguerre	Comparaison
Robustesse	Bonne avec bon réglage	Meilleure résistance	Laguerre plus robuste
Réjection de perturbations	lente	Rapide	Laguerre plus efficace
Temps de calcul	Plus long	Plus rapide	Laguerre pour la vitesse
Performance globale	Bonne	Très Bonne	Laguerre donne un performance mieux que la Classique

Tableau 3.4 Comparaison entre MPC classique et Laguerre

Conclusion : Le MPC Laguerre surpasse le MPC classique en présence de perturbations, avec une réponse plus stable et moins énergivore.

- **Résultats de simulation avec des contraintes sur l'entrée et la sortie, sans perturbation :** $[0 \leq y_1, y_2 \leq 0.35]$ et $[-30 \leq u_1, u_2 \leq 30]$.

Par MPC classique :

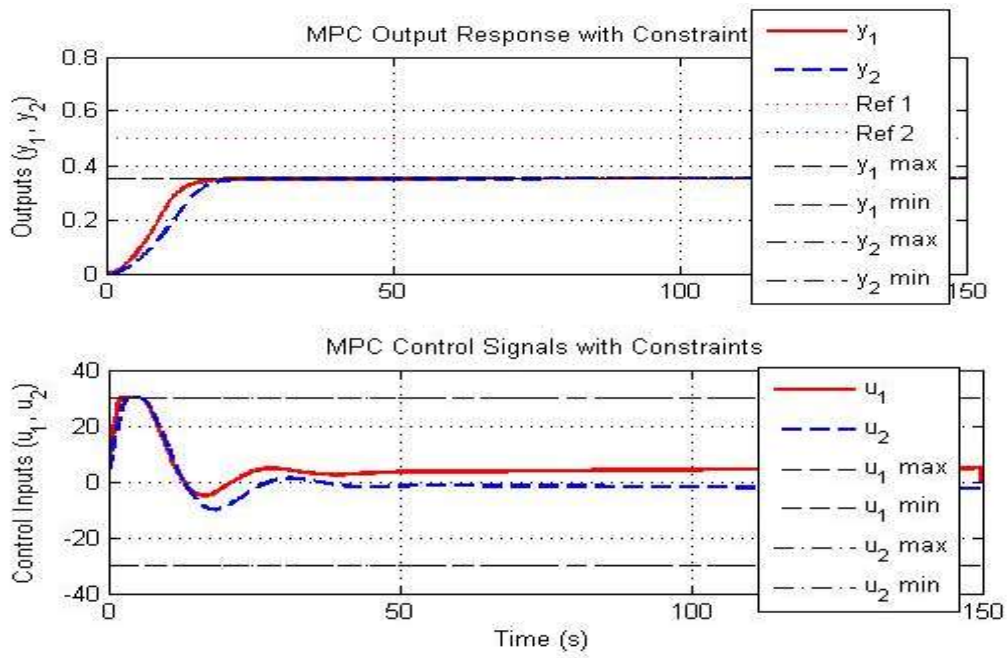


Figure3.10 Réponse de la sortie y_1 et y_2 et la commande u_1 et u_2 avec contraintes.

Par MPC basé sur Laguerre :

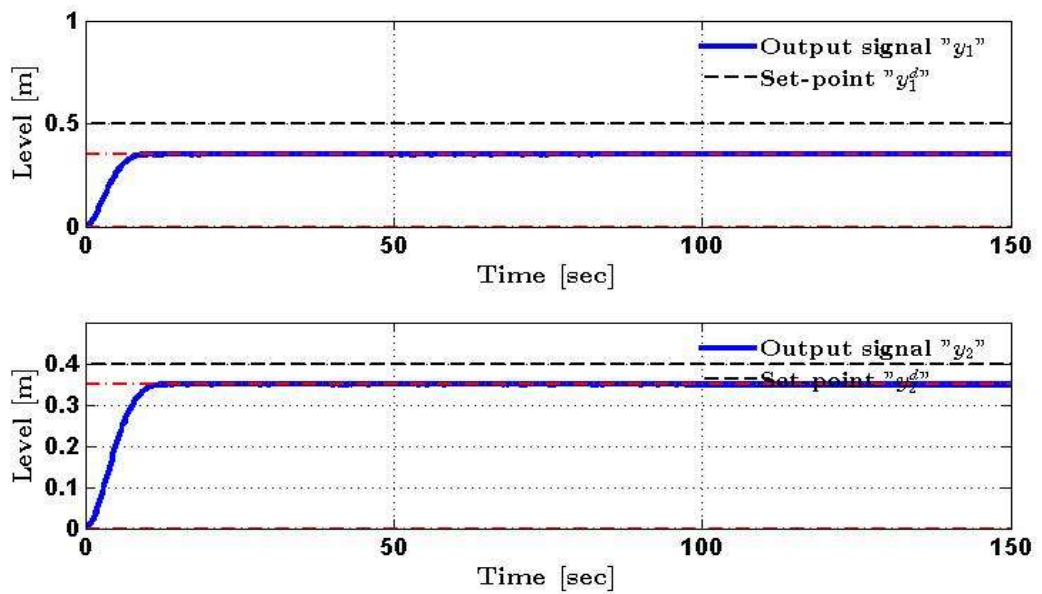


Figure3.11 Réponse de la sortie y_1 et y_2 avec des contraintes

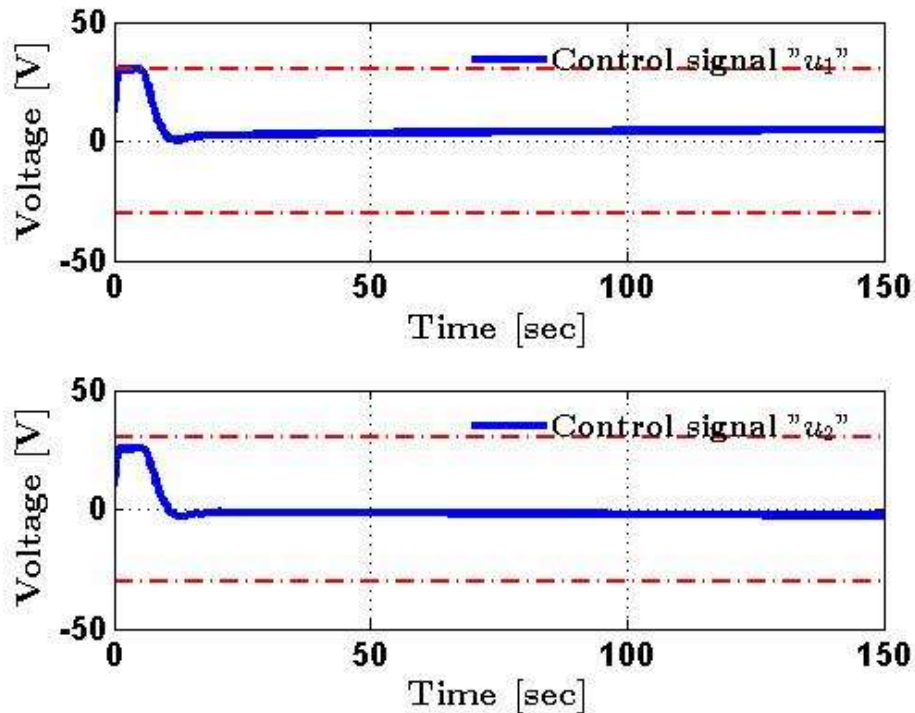


Figure3.12 évolutions de la commande u_1 et u_2 avec des contraintes

Comparaison :

Critère	MPC classique	MPC Laguerre	Comparaison
Gestion des contraintes	Complexe (le nombre de contraintes augmente avec l'horizon de prédiction).	Simplifiée grâce à la réduction des degrés de liberté (moins de variables d'optimisation).	Laguerre plus efficace
Temps de calcul	Élevé (augmente avec le nombre de contraintes et l'horizon).	Réduit	Laguerre plus rapide
Précision du suivi	Bonne	Excellente	Laguerre plus précis
Stabilité	Sensible au réglage des pondérations et à l'horizon.	Plus robuste (structure orthogonale des	Laguerre plus robuste et stable

		fonctions de Laguerre).	
--	--	-------------------------	--

Tableau 3.5 Comparaison entre MPC classique et Laguerre

Conclusion :

Le MPC-Laguerre est recommandé pour les systèmes contraints, notamment dans les applications nécessitant rapidité et fiabilité (robotique, contrôle de procédés industriels). Le MPC classique peut être retenu si l'horizon est très court ou si les contraintes sont peu nombreuses.

3.5 Conclusions

Cette étude compare le MPC classique et le MPC-Laguerre à travers trois scénarios : système sans perturbations et sans contraintes, système perturbé et non contraint et système contraint sans perturbations. Les résultats montrent que le MPC-Laguerre surpasse systématiquement l'approche classique :

- Précision accrue et calculs plus efficaces dans le cas normale.
- Meilleure robustesse face aux perturbations.

Alors que le MPC classique reste flexible, il souffre d'une complexité calculatoire élevée et d'une sensibilité aux réglages. Le MPC-Laguerre se révèle donc particulièrement adapté aux systèmes dynamiques complexes et / ou rapides, où l'équilibre entre performance et efficacité numérique est crucial. Ce travail confirme son potentiel pour des applications industrielles exigeantes.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif principal de ce mémoire était d'étudier, modéliser et comparer deux approches de commande prédictive : la commande prédictive classique (MPC) et la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre (MPC-Laguerre), dans le but de déterminer l'approche la plus adaptée aux systèmes contraints et aux applications exigeant rapidité et fiabilité.

Dans le premier chapitre, nous avons détaillé les principes de la commande prédictive classique, largement utilisée pour sa simplicité conceptuelle mais dont la charge computationnelle peut devenir importante dans les systèmes complexes ou fortement contraints. Le second chapitre a introduit la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre, qui permet une réduction du nombre de paramètres optimisés, améliorant ainsi la rapidité de calcul sans compromettre la performance.

Afin de valider expérimentalement les avantages du MPC-Laguerre, le troisième chapitre a été consacré à une application concrète sur un processus à quatre réservoirs avec interaction (QTPI). Les deux approches ont été comparées selon trois scénarios distincts.

Les résultats ont montré que, bien que la MPC classique fournisse de bonnes performances dans un environnement simple, la MPC-Laguerre se distingue nettement dans les situations avec contraintes ou perturbations, notamment grâce à sa capacité à gérer rapidement les variations et à respecter les limitations du système.

Le bénéfice majeur de ce travail réside dans la mise en évidence de l'efficacité de la commande prédictive Laguerre, qui offre un compromis optimal entre performance, temps de calcul et robustesse. Cette approche s'avère particulièrement adaptée pour les systèmes temps réel, industriels ou embarqués, où les ressources de calcul sont limitées mais la fiabilité critique.

En résumé, notre étude montre que la commande prédictive basée sur les fonctions de Laguerre constitue une alternative performante et efficace à la MPC classique dans les différents environnements de fonctionnement. Ce travail ouvre la voie à une exploitation plus large de cette méthode dans des applications industrielles complexes nécessitant à la fois réactivité et précision.

Bibliographies

Bibliographies

- [1] J.A.ROSSITER, *A First Course in Predictive Control, Second Edition*, Taylor&Francis Group. U.S.A: Taylor & Francis Group 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742, 2018.
- [2] C. ESTELLE, « commande prédictive et asservissement visuel ». institut PRISME, 3 décembre 2009.
- [3] Begovich, O., J.C. Felipe and V.M. Ruiz, « , “Real-time implementation of a decentralized control for an open irrigation canal prototype” to appear in Asian Journal of Control, » 2007.
- [4] M. TURKI, « systhèse de contrôleurs prédictifs anti-adaptatifs pour l’optimisation des performances des systemes », Rouen Normandle.
- [5] C. STOOICA MANIU, « Robustification de lois de commande prédictives multivariables », vol. 237, p. 28-29, oct. 2008.
- [6] Liuping Wang, *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*, vol. 397. School of Electrical and Computer Engineering RMIT University Melbourne, VIC 3000 Australia.
- [7] Kedissa Faiza et Fadel Manel, « Laguerre Orthogonal Functions Based Discrete Model Predictive Control », 2020.
- [8] E.Govinda Kumar, , B .Shiva ram, , U.B.Deepak, et , G.Sabarinathan, « The Quadruple Tank Process with an Interaction A Mathematical Model ». 2018.
- [9] Camacho, E. F., & Bordons, C. (2007). *Model Predictive Control*. Springer.
- [10] Rawlings, J. B., & Mayne, D. Q. (2009). *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob Hill Publishing.
- [11] Qin, S. J., & Badgwell, T. A. (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7), 733–764.
- [12] Rossiter, J. A., & Kouvaritakis, B. (1998). Model predictive control based on basis functions. *Automatica*, 34(10), 1353–1364.
- [13] Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer.
- [14] Alamir, M. (2006). *Stabilization of Nonlinear Systems Using Receding-Horizon Control Schemes: A Parametrized Approach for Fast Systems*. Springer.
- [15] Rossiter, J. A. (2003). *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. CRC Press.

Résumé

La commande prédictive classique permet de prédire le comportement d'un système, mais elle demande beaucoup de calculs, ce qui la rend lente et limite son application dans les systèmes rapides ou à ressources limitées. Pour améliorer cela, on utilise une version basée sur les fonctions de Laguerre. Cette méthode réduit la complexité des calculs, ce qui rend la commande plus rapide et plus adaptée aux systèmes en temps réel, tout en conservant des bonnes performances de prédiction.

Abstract

Classical predictive control can predict the behavior of a system, but it is computationally intensive, making it slow and limiting its application in fast or resource-limited systems. To improve this, a version based on Laguerre functions is used. This method reduces computational complexity, making the control faster and more suitable for real-time systems, while maintaining good prediction performance.

ملخص

يمكن للتحكم التنبؤي الكلاسيكي التنبؤ بسلوك النظام، لكنه يتطلب الكثير من الحسابات، مما يجعله بطيئاً ويحد من تطبيقه في الأنظمة السريعة أو ذات الموارد المحدودة. لتحسين ذلك، يتم استخدام إصدار يعتمد على وظائف لاجير. تقلل هذه الطريقة من التعقيد الحسابي، مما يجعل التحكم أسرع وأكثر ملاءمة للأنظمة في الوقت الفعلي، مع الحفاظ على أداء تنبؤ جيد.