وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N[0] : U.S/F.S/D.M/……/2022.

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Etude de l'existence et l'unicité de quelque problème de mathématique par la méthode du semi groupe d'opérateur

Option : Analyse fonctionnelle appliquée

Par :

1. ***Bouguerra Amani***
2. ***Zouied Manel***

Encadré par : Leulmi. Soumeya MAA U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : *Foughali Fouzia* MCB U. SKIKDA

Examinateur: *Ghanem Karima* MCB U. SKIKDA

Année : 2021/2022

Dédicace

Au nom du dieu le clément et le miséricordieux louange à **ALLAH** le tout puissant.

Je dédie ce modeste travail en signe de respect reconnaissance et de remerciement:

à mes chers parents,

à mes frères et mes sœurs,

à toute ma famille,

à mes professeurs,

à tout ceux qui m'aimen,

à tous ceux qui m'ont aide et soutenu de prés ou de loin.

Bouguerra. Amani & Zouied. Manel

TABLE DES MATIÈRES

Résumé en anglais **ii**

Résumé en français **iii**

Remerciements **iv**

Dédicace **v**

Notations générales **vi**

Introduction générale **1**

1 Quelques notions préliminaires **5**

1.1 Les espaces de Sobolev 5

1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$: 5

1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$: 6

1.2 Quelques inégalités importantes 6

1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz 6

1.2.2 Inégalité de Young 7

1.2.3 Inégalité de Holder 7
1.2.4 Inégalité de Poincaré 7
1.3 Théorème de Lax-Milgram 8
1.4 Equation différentielles à retard 8

2 Semi groupe 9
2.1 Définitions et propriétés générale d'un semi groupe 9
2.2 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe 10
2.2.1 Propriétés d'un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe 11
2.2.2 Transformation de Laplace d'un semi groupe 12
2.3 L'approximation de Hille-Yosida 12
2.4 Théorème de Hille-Yosida 13
2.5 Théorème du Lumer-Phillips 14
2.5.1 Opérateurs m-dissipatifs 14
2.5.2 Annonce du théorème 16
2.6 Problème de Cauchy abstrait 16
2.6.1 Equation d'évolution 16
2.6.2 L'existence de la solution 17
2.6.3 L'unicité de la solution 19
2.6.4 Régularité des solutions 19
2.6.5 Autre forme du problème de Cauchy 20

3 Applications du semi groupe 23
3.1 Equation des ondes 23
3.1.1 Position du problème 24
3.1.2 Existence et unicité 24
3.2 Système non-linéaire de Timoshenko avec retard 32

3.2.1 Position du problème 32
3.2.2 Existence et unicité 33
3.3 Système poreux-élastique amorti non linéaire avec deux retards 50
3.3.1 Position du problème 50
3.3.2 Existence et unicité 52

Conclusion générale **67**

Bibliographie **68**

Résumé en anglais

In this work, we exploit the theory of semi-groups, in particular the theorem of Lumer Phillips, to study the existence and uniqueness of the solution of certain mathematical problems. These equations can be written as an abstract Cauchy problem. Under suitable assumptions on the data, we establish the well posedness of the problem with respect to weak solutions. We have also relied on the Lax-Milgram theory and some famous inequalities in functional analysis by proving the conditions of Lumer Phillips.

Key words : Wave equation, existence and uniqueness of the solution, Cauchy problem, semigroup, Timoshenko system, damped porous-elastic system, Lumer Philips theorem.

Résumé en français

Dans ce travail, on utilise la théorie des semi-groupes, en particulier le théorème de Lumer Philips, pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de certains problèmes mathématiques. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait. Sous des hypothèses appropriées sur les données, nous établissons le bien posé de ces problèmes par rapport aux solutions faibles. Nous sommes également appuyés sur le théorème de Lax-Milgram et quelques inégalités célèbres en analyse fonctionnelle pour démontrer les conditions du théorème de Lumer Philips.

Mots clés : Equation des ondes, existence et unicité de la solution, problème de Cauchy, semi groupe, système de Timoshenko, système poreux-élastique amorti, théorème de Lumer Philips.

Remerciements

Avant d'aborder le vif du sujet, nous tenons à remercier **Allah** qui nous a donné la volonté et le courage d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mdm. Soumya Leulmi**, nous la exprimons nos remerciements et notre gratitude à notre enseignante compétente, pour tous les conseils et les précieuses informations qu'elle nous a fournis, en lui souhaitant une santé et un bien-être continus.

Nous tenons à exprimer nos remerciements aux membres du jury, qui ont accepter d'évaluer notre travail.

Nos remerciement s'adresse au chef de département **Mr. L Bouzatouta** pour son aide pratique et son soutien moral et ses encouragements.

En fin, Nos remerciement s'adresse également à l'ensemble des proffesseurs pour leurs générosités, leurs prècieux conseils et la grande patience dont ils su faire preuve malgré leurs charge académiques et professionnelles.

Dédicace

Notations générales

E	Espace de Banach.
$L(E)$	L'espace des applications linéaires continues de E à valeurs dans E.
$\|.\|$	Norme de E.
I	L'opérateur identite sur$E$.
$D(A)$	Le domaine de opérateur linéaire A.
$H^1(R); H_0^1(R)$	Espaces de Sobolev.
$\langle . \rangle$	Désigne le produit scalaire dans E.
ImA	L'image de l'opérateur A.
m-dissipatif	Maximal dissipatif.
A	Opérateur.
∂	L'opérateur de différentiation partielle.
$L^1(R)$	Espaces vectoriel des fonctions sommables sur l'ensemble R.
$L^2(R)$	Espace vectoriel des fonctions de carré sommables sur l'ensemble R.
Δ	Le laplacien.
∇	Le gradient de la fonction $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T$.
$C(I; E)$	La famille des fonctions holderiennes sur Id'exposant.

Introduction générale

La plus part des phénomènes dans la nature peuvent être reformulé et modélisé sous forme d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles, inclus les conditions au bord) ou d'un systèmes d'équations différentielles.

La question la plus pertinente est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des problèmes mathématiques.

Dans notre travail, on s'intéresse plus particulièrement à l'existence et l'unicité des solutions de telles équations.

Une vaste classe de ces équations peuvent être écrite sous forme d'un problème d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \ t > 0. \\ u(s) = x. \end{cases} \tag{1}$$

Dans le cas où $f(t) = 0$, $s = 0$ et A est une application Lipchitzienne le théorème de Cauchy-Lipchitz -Picard rend un grand service à résoudre ce problème et la solution sera donnée par la formule :

$$u(t) = e^{At}u_0.$$

Mais dans le cas où A est non borné, alors A est non Lipchitzienne, donc on peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipchitz-Picard.

L'idée serait de définir pour une classe d'opérateurs non nécessairement bornés un objet mathématique qui donne l'existence et l'unicité.

La théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires trouve dans les espaces de Banach une résolution dans le cas où A est non borné.

Cette théorie est devenue un objet important, en mathématiques, dans l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, ainsi que dans d'autres domaines scientifiques (physiques et mécaniques). Cette théorie a commencé au début de 19 ème siècle.

Un semi groupe linéaire sur un espace de Banach X est une famille d'opérateurs linéaire bornés $T(t) : X \to X$ pour tout $t \geq 0$ vérifiant les conditions suivant :

$$T(0) = I \text{ et } T(t+s) = T(t) \circ T(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

Donc, Un semi groupe est d'origine algébrique qui contient la loi de composition interne associative comme dans le cas de la famille $\{T(t), t \geq 0\}$ d'opérateurs linéaires bornée sur un espace de Banach X dans X.

Le mathématicien Henri. K. Abel (1802-1829) a définit l'opérateur A par :

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{dT(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall x \in D(A).$$

Il a nommé le générateur infinitésimal de semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Cela a donné la naissance effective de la théorie des semi groupes par Hadamard (1865-1963) qui à souligné dans le problème autonome de Cauchy qu'il admet des solutions uniques pour tout $t \geq 0$. Elle a connu ses premiers développements grâce au travaux de Kosaku Yosida (1909-1990) en 1948 avant d'atteindre son sommet avec l'édition de "Semigroups and Functional Analysis " de Carl Einar Hille (1894-1980) et Ralph Saul Phillips en 1957. La théorie a vue un parfait degré par les monographies Goldestein et Pazy [3]. Aujourd'hui, les semi groupes sont présents dans la majorité des disciplines mathématique on trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement au domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques mais elles deviennent un outil très puissant dans la résolution des équation intégraux-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie.

Donc, le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions des problèmes de Cauchy abstraits en utilisant la théorie des semi-groupes (Le théorème de Hille-Yoshida) car on peut transformer l'étude des problèmes aux limites en un problème de Cauchy pour équations différentielles opérationnelles. On va s'intéresser au cas où l'opérateur$A$ est un générateur infinitésimal d'un des semi groupes.

Le présent travail se décompose de trois chapitres et une conclusion précédées d'une introduction générale.

Dans le premier chapitre, on présente quelques résultats préliminaires : définitions, lemmes et le théorème de Lax-Milgram, que nous utiliserons dans toute la suite du mémoire quelques inégalité important comme inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Young, inégalité de Holder et l'inégalité de Poincaré.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, on trouve une étude générale des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornées dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach avec quelques propriétés, ainsi la notion de générateur infinitésimale voire des résultats liant ces deux notions : des conditions (nécessaires et suffisantes) pour qu'un opérateur linéaire génère un semi groupe, comme les théorèmes de Hille-Yoshida et Lumer-Phillips qui jouent un rôle important pour l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles. On donne aussi l'importance de la théorie des semi-groupes pour établir le problème de l'existence et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy abstrait.

Et une partie d'application qui constitue le troisième chapitre, dans le quel on étudie l'existence et l'unicité de quelques problème mathématiques par la théorie de semi groupe. Plus précédemment on utilise des conséquence du théorème de Hille-Yosida et la théorie du problème de Cauchy abstrait pour montrer l'existence et l'unicité. On divise en trois sections. Dans la première section on achevé notre par l'application du théorème de Lumer Philips sur l'´équation des ondes non homogène ; en déduisant que cette équation conserve la régularité des données initiales, ensuite, on s'intéresse à étudier l'existence et l'unicité du système non-linéaire de Timoshenko avec retard et enfin, on montre que le système poreux-élastique amorti non linéaire avec deux retards admet une solution unique.

CHAPITRE 1

Quelques notions préliminaires

Ce chapitre est consacré à certaines notions préliminaires sur les espaces de Sobolev et les inégalités importantes quand on va utiliser au long de cette mémoires et le théorème de Lax-Milgram ainsi qu'un rappel sur les équations différentielle avec retard.

1.1 Les espaces de Sobolev

1.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$:

Soit Ω un domaine borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.1 [3] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega);\ \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_I u\acute{\varphi} = \int_I g\varphi,\quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note $u' = g$.

Notations

L'espace $W^{1,p}$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{w^{1,p}} \quad = \quad \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

(ou parfois, si $1 \leq p \leq \infty$, de la norme équivalente $\left[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^P]^{\frac{1}{p}}\right]$).
L'espace H^1 est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} \quad = \quad (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2};$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1} \quad = \quad (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$.

1.1.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Définition 1.2 [3] Etant donné $1 \leq P \leq \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ l'espace $W_0^{1,p}$ est muni de la norme introduite par $W^{1,p}$;l'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1.

1.2 Quelques inégalités importantes

1.2.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 1.3 [3] Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive [i.e.$(u, v) \geq 0$, $\forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].

Donc, l'espace H est un espace de Hilbert.

Proposition 1.1 *[3] Soit H un espace de Hilbert. Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :*

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u,\ v \in H.$$

1.2.2 Inégalité de Young

Proposition 1.2 *[3] Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors :*

$$\forall (f,g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \int_\Omega |f^p|\, dx + \frac{1}{q.\varepsilon^{\frac{q}{p}}} \int_\Omega |g^q|\, dx.$$

Si $p = q = 2$, on a :

$$\forall (f,g) \in (L^p(\Omega))^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \int_\Omega |fg|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega \left|f^2\right| dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \left|g^2\right| dx.$$

1.2.3 lnégalité de Holder

Proposition 1.3 *[3] Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$avec $1 \leq p \leq \infty$, alors :*

$$\forall (f,g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) : \int |fg| \quad \leq \quad \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \ \text{ et } f.g \in L^1$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

Proposition 1.4 *[3] On suppose que Ω est borné. Alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$) telle que :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \|u'\|_{L^p} \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}$.

1.3 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.1 *[3] Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad et \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = Min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.4 Equation différentielles à retard

Soient X un espace de Banach et $r > 0$, on considère la fonction $u : [-r, \infty[\to X$. Pour tout $t \geq 0$ on appelle la fonction u_t définie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans X par :

$$u_t : s \mapsto u(t+s)$$

le segment d'histoire de u en t.

La fonction histoire de u est la fonction h_u définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans un espace de fonctions (l'espace histoire) par :

$$h_u : t \mapsto u_t$$

Définition 1.4 [1] On appelle équation différentielle à retard une équation de la forme :

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = g(u(t), u_t)$$

avec g est une application à valeurs dans X.

On voit bien que dans une équation différentielle à retard la valeur de la dérivée à un instant t de la solution u dépend non seulement de la valeur de u à l'instant t mais aussi de ses valeurs prises avant cet instant (dans le passé) d'où le mot retard.

CHAPITRE 2

Semi groupe

Dans ce chapitre, on donne des définitions et propriétés générale de semi groupe d'opérateurs linéaires bornés et son générateur infinitésimal. On cite aussi les théorèmes fondamentaux de la caractérisation du générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe (Hille Yosida et Lumer Phillips). L'application de ces derniers aux problèmes de Cauchy est le point central de ce travail. Pour cela, on présente des théorèmes d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy abstrait.

2.1 Définitions et propriétés générale d'un semi groupe

Soit X un espace de Banach.

Définition 2.1 [6] Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'élément de $\mathcal{L}(X)$ pour tout $t \geq 0$ forme un semi groupe sur X s'il vérifie les conditions suivantes :
1) $T(0) = I$.

2) $T(t+s) = T(t) \circ T(s), \ \ \forall t, s \geq 0.$

Définition 2.2 [6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe sur X. On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continue ou un C_0-semi groupe ou un semi groupe de classe C_0 s'il vérifie :

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Proposition 2.1 *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continue sur X, alors :*

$$\exists \omega \geq 0, \ \exists M \geq 1 \ \textit{tels que} \ \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.3 (semi groupe de contraction) [6] Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 est appelé semi groupe de contraction de classe C_0 si on a :

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Proposition 2.2 *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continue sur X, Alors Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to T(t)x$ est continue (à valeurs dans X) sur $[0, +\infty[$.*

2.2 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe

Soit X un espace de Banach.

Définition 2.4 [6] Soit $\{\ T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi groupe sur X, on appelle générateur infinitésimale du semi groupe $\{\ T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur $(A, D(A))$ définie par :

$$D(A) = \left\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \tfrac{T(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X\right\},$$
$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \tfrac{T(t)x - x}{t}.$$

2.2.1 Propriétés d'un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe

Théorème 2.1 *[6] Soit $\{\ T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe sur X et A le générateur infinitésimal du $\{\ T(t)\}_{t\geq 0}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) Pour tout $x \in X$, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\ ds = T(t)x.$$

2) Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$:

$$\int_0^t T(s)x\ ds \ \in D(A) \ et \ A\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x.$$

3) Si $x \in D(A)$ alors :

$$T(t)x \in D(A) \ et \ \frac{d}{dt}T(t) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4) Si $x \in D(A)$ alors :

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\sigma)Ax\ d\sigma = \int_s^t AT(\sigma)x\ d\sigma.$$

Théorème 2.2 *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe et A son générateur infinitésimal alors $D(A)$ dense dans X et A est un opérateur fermé.*

Proposition 2.3 ***(Unicité de l'engendrement)*** *[6] Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit B le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, Si $A = B$ alors $S(t) = T(t)$ pour tout $t \geq 0$.*

2.2.2 Transformation de Laplace d'un semi groupe

Soit X un espace de Banach et soit l'ensemble Λ_ω donné par :

$$\Lambda_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\}.$$

Remarque 2.1 [6] Soient $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ un semi groupe fortement continue et A son générateur infinitésimal si $\lambda \in \Lambda_\omega$ alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} R_\lambda & : & X \longrightarrow X \\ x & \mapsto & R_\lambda x = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\lambda t} T(t)x \, dt \end{array}$$

définit un opérateur linéaire borné sur X et on a :

$$R_\lambda x = R(\lambda, A)x, \quad \forall x \in X.$$

Remarque 2.2 1) $\forall x \in D(A)$ on a $R_\lambda x \in D(A)$ de plus $AR_\lambda x = R_\lambda Ax$.
2) $\exists \omega \geq 0$, $\exists M \geq 1$ telle qu $\Lambda_{e.\omega} \subset \rho(A)$.

Définition 2.5 [6] L'opérateur R_λs'appelle la transformé de Laplace du semi groupe $\{T(t)\}_{t\,\geq 0}$.

Théorème 2.3 *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\,\geq 0}$ un C_0-semi groupe et A sont générateur infinitésimal pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ alors*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2.3 L'approximation de Hille-Yosida

Soit X un espace de Banach.

Lemme 2.1 *[6] Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivant :*

1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.

2) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} 1)\ \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x & = & x, \quad \forall x \in X. \\ 2)\ \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to \infty} \lambda A R(\lambda, A)x & = & Ax, \quad \forall x \in D(A). \end{array}$$

Définition 2.6 [6] La famille $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_\omega} \in \mathcal{L}(X)$ où $A_\lambda = \lambda\ AR(\lambda, A)$ s'appelle l'approximation généralisé de yosida de l'opérateur$A$.

Lemme 2.2 *[6] Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivants :*

1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.

2) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Si $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisé de yosida de l'opérateur A alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq M^2 t e^{(\omega+\varepsilon)t} \|A_\alpha x - A_\beta x\|, \quad \forall x \in X \text{ et } t \geq 0.$$

2.4 Théorème de Hille-Yosida

On introduit maintenant un résultat très important concernant les semi-groupe, il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateur infinitésimal.

Théorème 2.4 *[6] Un opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si :*

1) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.

2) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2.5 Théorème du Lumer-Phillips

2.5.1 Opérateurs m-dissipatifs

Opérateur m-dissipatif dans un espace de Banach

Définition 2.7 [11] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X est dissipatif si :

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0 : \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Définition 2.8 [11] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans X est m-dissipatif si :

i) A est dissipatif.

ii) $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ telle que $\lambda x - Ax = f$.

Théorème 2.5 *[11] Si A est m-dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse $(\lambda I - A)^{-1} f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$ et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant :*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 2.6 *[11] Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans X. L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si :*

$$\exists \lambda_0 > 0 \ tq \ \forall f \in X, \exists x \in D(A) \ \textit{vérifiant} \ : \lambda_0 x - Ax = f.$$

Théorème 2.7 *[11] Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $(\lambda_0 I - A)$ est une bijection de $D(A)$ sur X, et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X alors A est fermé en particulier, si A est m-dissipatif alors A est fermé.*

Définition 2.9 On appelle opérateur m-accréatif un opérateur linéaire non borné tel que :

1) $\overline{D(A)} = X$.

2) l'opérateur $-A$ est m-dissipatif.

Corollaire 2.1 *[11] Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace $(D(A), \|.\|_G)$ est un espace de Banach muni de la norme du graphe*

$$\|x\|_G = \|x\|_X + \|Ax\|_X \,,$$

et $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$.

Opérateur m-dissipatif dans un espace de Hilbert

Soit H est un espace de Hilbert.

Théorème 2.8 *[11] Un opérateur $(A, D(A))$ linéaire non borné dans H est dissipatif si et seulement si :*

$$\forall x \in D(A), \quad \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par :

$$\forall x \in D(A), \quad \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

Théorème 2.9 *Si A est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans H.*

2.5.2 Annonce du théorème

Théorème 2.10 ***(Lumer- phillips)*** *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = X$, alors A est le générateur infinitésimal du C_0-semi groupe de contraction si et seulement si l'opérateur A est m-dissipatif.*

2.6 Problème de Cauchy abstrait

Dans cette section, on étudie des résultats d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy linéaire abstrait homogène et non homogène.

2.6.1 Equation d'évolution

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \ \ t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $u = u\,(t)$, $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur d'un espace de Banach X vers X, x est la donnée initiale et f est une application dans X.

Définition 2.10 [6] Le problème (P_1) est appelé problème de Cauchy non homogène. Si $f = 0$, on a :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

C'est un problème de Cauchy homogène.

2.6.2 L'existence de la solution

Théorème 2.11 *[6] Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach X. Si A est un générateur infinitésimale d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors le problème (P_2) possède une solution unique $u(t) = T(t)u_0$.*

Définition 2.11 [6] **(solution forte)** une fonction u est appelée solution forte du problème (P_1) si :

1) $u \in C([0, +\infty[, D(A))$ c-à-d u est une fonction continue à valeurs dans $D(A)$ par rapport à la norme du graphe.

2) $u \in C^1([0, +\infty[, X)$ c-à-d u est continument dérivable tant que fonction à valeurs de$X$.

3) $\frac{du}{dt} = Au + f$ et $u(0) = u_0$ c-à-d u vérifie l'équation et la condition initiale du problème(P_1).

Définition 2.12 [6] **(solution faible)** On dit que u est une solution faible du (P_1) si $u \in C^0([0, +\infty[, X)$ il est existe une suite $(u_n)_n$ tel que :

$$(u_n)_n \subset C^0([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X)$$

et

$$u_n \to u, \ \frac{du_n}{dt} - Au_n \to f$$

et

$$u_n(0) \to u_0.$$

Remarque 2.3 [6] Toute solution forte est une solution faible.

Théorème 2.12 *[6] Si $f \in C^1([0,+\infty[,X)$ et A est un générateur infinitésimale d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors, le problème (P_1) admet une solution forte s'écrit par :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Proposition 2.4 *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors pour tout $x \in X$, la fonction*

$$u : t \mapsto u(t) = T(t)x$$

est l'unique solution généralisée du problème (P_2).

Théorème 2.13 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, Soit $f \in L^1(0,T,X)$ continue sur $]0,T]$ et soit :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

Le problème (P_1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivante est satisfaite :
i) $v(t)$ est continument différentiable sur $]0,T[$.
ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0,T[$.
Si le problème (P_1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour certains $x \in D(A)$, alors v satisfait à la fois (i) et (ii).

Corollaire 2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f(s)$ est continument différentiable sur $[0,T]$, alors le problème (P_1) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$.*

Corollaire 2.3 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $f \in L^1(0,T,X)$ une fonction continue sur $]0,T[$. Si $f(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Af(t) \in L^1(0,T,X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème (P_1) admet une solution u sur $[0,T[$.*

2.6.3 L'unicité de la solution

Théorème 2.14 *Si A est un générateur infinitésimale d'un C_0-semi groupe $(s(t))_{t\geq 0}$ et si u une solution forte du problème (P_1), alors :*

$$u(t) = s(t)u_0 + \int_0^t s(t-s)f(s)ds.$$

2.6.4 Régularité des solutions

On constate que la régularité est étroitement liée au choix de la condition initiale on fonction du domaine A de définition il est donc naturel de penser qu'en imposant plus de "régularité" a u_0 on obtienne plus de régularité sur les solutions.

Plus précisément, on définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \left\{ v \in D(A^{k-1}),\ Av \in D(A^{k-1}) \right\},\ k \text{ entier} \geq 2.$$

on peut vérifier aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \left(A^j u; A^j v\right);$$

la norme correspondante est :

$$|u|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \left|A^j u\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.15 *Si $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution u du problème (P_2) est de classe $C^k([0;\infty[;X)$ et $C^{k-j}([0;\infty[;D(A^j))$. C'est à dire :*

$$u \in C^k([0;\infty[;X) \cap C^{k-j}\left([0;\infty[;D(A^j)\right), \quad \textit{pour } j = 0, 1...k$$

2.6.5 Autre forme du problème de Cauchy

Soient X un espace de Banach, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire et $F : X \longrightarrow X$ une application de X dans X.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$(P_3)\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) \text{ sur } [0, +\infty[. \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On a besoin des deux lemmes suivants pour montrer les théorèmes d'existences.

Lemme 2.3 *(**Gronwall**) Soient $T > 0$, $\lambda \in L^1([0,T])$, $\lambda \geq 0$ presque partout et $c_1, c_2 \geq 0$. Soit $\Phi \in L^1([0,T])$ et $\Phi \geq 0$ presque partout telle que $\lambda\Phi \in L^1([0,T])$. Si :*

$$\Phi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\Phi(s)ds \ pp, \ t \in [0,T],$$

alors

$$\Phi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right) \ pp \ t \in [0,T].$$

Lemme 2.4 *(**Théorème du point fixe de Banach**) Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $T : X \to X$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in X$. De plus on a les propriétés suivantes :*

1) La suite des itérée

$$(x_n)_{n\in N} : \begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Avec $x_0 \in X$ quelconque converge vers a.

2) L'estimation de l'erreur est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\|x_n - x\| \leq k^n (1-k)^{-1} \|x_1 - x_0\| .$$

Solutions globales généralises

Définition 2.13 On appelle solution globale généralisé du problème (P_3) toute fonction $u \in C([0, +\infty], X)$, telles que :

$$\forall t \geq 0,\ u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$

Où $(T(t))_{t\geq 0}$ est désigne le semi groupe associé à l'opérateur A.

Théorème 2.16 *Si $u_0 \in X$, A est un opérateur m-dissipatif et F est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $M > 0$, alors (P_3) admet une unique solution globale généralisé notée u.*

Solutions globales classique

Définition 2.14 Soit $u_0 \in D(A)$ on appelle solution classique globale toute fonction $u \in C^1([0, +\infty[, X) \cap C([0, +\infty[, D(A))$, telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) \text{ sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Théorème 2.17 *Si A est un opérateur m-dissipatif et F est une fonction Lipschitzienne de classe C^1(c'est à dire : l'application $u \in X \longmapsto F'(u) \in \mathcal{L}(X)$ est continue et $\|F'(u)\| \leq M$), alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe u solution globale classique de (P_3).*

Solution locales

Définition 2.15 1) On appelle solution généralisée locale de (P_3) toute fonction u pour tout $u_0 \in X$, il existe un $T > 0$ et un $u \in C([0,T]\ ,X)$, telle que :

$$\forall t > 0,\ u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds.$$

2) On dit que (P_3) admet une solution classique locale si pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe un $T > 0$ et $u \in C([0,T[, D(A)) \cap C^1(]0,T[, X)$, telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F(u) \text{ sur } [0,+\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Définition 2.16 On dit qu'une application $F : X \longrightarrow X$ est Lipschitzienne sur les bornés de X si :

$$\forall r > 0,\ \exists M_r \text{ tq } \forall u, v \in B(0,r),\ \ \|F(u) - F(v)\|_X \leq M_r \|u - v\|_X .$$

On a un résultat d'existence concernant les solutions locales du problème de Cauchy (P_3).

Théorème 2.18 *Soient A est un opérateur m-dissipatif et $F : X \longrightarrow X$ Lipschitzienne sur les bornés de X, alors pour tout $u_0 \in X$, il existe un $T > 0$ et un unique $u \in C([0,T], X)$ solution généralisée locale de (P_3).*

CHAPITRE 3

Applications du semi groupe

Dans ce chapitre, on donne des applications de la théorie des semi groupes et l'étude du problème de Cauchy abstrait dans la résolution de quelques problèmes de mathématiques tel que l'équation des ondes, le système de Timoshenko et le système de poreux-élastique amorti.

3.1 Equation des ondes

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles hyperbolique de second ordre, elle joue un rôle fondamentale pour la description des ondes. Elle modélise la propagation d'une onde (électromagnétique, acoustique) dans un milieu élastique homogène.

3.1.1 Position du problème

L'équation des ondes dont v est une solution est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \triangle v = f, \quad \text{sur } \Omega \times [0,T], \\ v = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \\ v(x,0) = v_0, \quad \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1, \quad \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un sous-ensemble régulier de $\mathbb{R}^n$, v_0,v_1 sont des fonctions données et $\Delta = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux variable de l'espace x et t est le variable de temps.

3.1.2 Existence et unicité

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des ondes (3.1).

Théorème 3.1 ***(existence et unicité)*** *Si $v_0 \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ alors, il existe une solution unique de système* (3.1) *avec*

$$v \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

Preuve. On va appliquer une conséquence du théorème de Hille-Yosida et la théorie du problème de Cauchy abstrait. On va transformer l'équation (3.1) sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on montre que l'opérateur A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

1) Conversion de l'équation (3.1) **vers le système de Cauchy abstrait.**

Soient $t \geq 0$ et $x \in \Omega$. D'abord, on pose :

$$u_1 = v \text{ et } u_2 = \frac{\partial v}{\partial t}$$

et on remplace dans la première équation du système (3.1), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_2 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_1 = f, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1 + f, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on introduit la nouvelle variable suivant :

$$u = (u_1, u_2).$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F, \\ u(0) = u_0 = (v_0, v_1), \end{cases} \tag{3.2}$$

tel que :

$$Au = (u_2, \Delta u_1) \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

avec le domaine de A est donné par :

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega).$$

2) La démonstration que A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

Maintenant, on applique le théorème du Lumer-Phillips sur l'espace $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2 dx,$$

où

$$u = (u_1, u_2) \;\; et \;\; v = (v_1, v_2) \, .$$

Pour cela, on prouve que A génère un C_0-semi groupe de contraction et $F \in L^1 (0, T; L^1 (\Omega))$.

Pour montre que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe, on prouve que A est un opérateur m-dissipatif c-à-d, on démontre que A est maximal et dissipatif.

Premièrement, on montre que A est dissipatif.

On sait que A est dissipatif si pour tout $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\|\lambda u - Au\| \geq \lambda \|u\| \, .$$

Soient $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda u - Au\|^2 &= \langle \lambda u - Au; \lambda u - Au \rangle \\ &= \langle \lambda u; \lambda u \rangle - \langle \lambda u; Au \rangle - \langle Au; \lambda u \rangle + \langle Au; Au \rangle \\ &= \|\lambda u\|^2 + \|Au\|^2 - 2 \langle Au; \lambda u \rangle \\ &= \|\lambda\|^2 \|u\|^2 + \|A\|^2 \|u\|^2 - 2\lambda \langle Au, u \rangle \, . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Mais, on a :

$$\langle Au, u \rangle = \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx + \int_\Omega \triangle u_1 u_2 dx. \tag{3.4}$$

On applique la formule de Green sur la deuxième terme de l'équation (3.4), on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \triangle u_1 u_2 dx &= -\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u_1 u_2 \eta_1 (\xi) \, d\xi \\ &= -\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En substituant, l'équation (3.5) dans (3.4) , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En substituant (3.6) dans (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned}\|\lambda u - Au\|^2 &= \|\lambda\|^2 \|u\|^2 + \|A\|^2 \|u\|^2 \\ &\geq \|\lambda\|^2 \|u\|^2,\end{aligned}$$

car $\|A\|^2 \|u\|^2 \geq 0$. Alors :

$$\|\lambda u - Au\| \geq \|\lambda\| \|u\|.$$

Donc, A est dissipatif.

Deuxiément, on montre que A est maximal c-à-d on prouve que $I - A$ est surjectif c-à-d $(\mathrm{Im}(I - A) = E)$.

Pour cela, soient $(f, g) \in E$ et $u \in D(A)$ telle que $(I - A)u = (f, g)$, alors

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f, \\ u_2 - \triangle u_1 = g. \end{cases} \tag{3.7}$$

En remplaçant $u_2 = u_1 - f$ dans la deuxième équation, on obtient :

$$u_1 - \triangle u_1 = f + g. \tag{3.8}$$

On multiple l'équations de (3.8) par $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega u_1 w dx - \int_\Omega \triangle u_1 w dx = \int_\Omega (fw + gw) dx. \tag{3.9}$$

On applique la formule de Green sur l'équation (3.9), on trouve :

$$\int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx = \int_\Omega (fw + gw) dx. \tag{3.10}$$

On définit sur $X = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$ la forme bilinéaire $a : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u_1, w) = \int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx.$$

Et la forme linéaire $b : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$b(w) = \int_\Omega (fw + gw) dx.$$

Donc la résolution du système (3.7) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in X, \text{ telle que :} \\ a(u_1, w) = b(w), \quad \text{pour tout } w \in X. \end{cases} \tag{3.11}$$

Maintenant, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de problème(3.11), on utilise le théorème de Lax-Milgram. Alors pour cela, on prouve que :

- X est une espace de Hilbert.
- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $X \times X$.
- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur X.
- La forme linéaire $b(.)$ est continue sur X.

Il est clair que X est une espace de Hilbert.

★ **La continuité de la forme bilinéaire** a :

On sait que a est une forme bilinéaire continue sur $X \times X$ si et seulement s'il existe un $\alpha > 0$ telque :

$$|a(u_1, w)| \leq \alpha \|u_1\|_X \|w\|_X, \quad \text{pour tout } u_1, w \in X.$$

Soient $u_1, w \in X$, ona :

$$\begin{aligned} |a(u_1, w)| &= \left| \int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx \right| \\ &\leq \left| \int_\Omega u_1 w dx \right| + \left| \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u_1 w| \, dx + \int_\Omega |\nabla u_1 \nabla w| \, dx. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |a(u_1, w)| &\leq \|u_1\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_1\|_X \|w\|_X + \|u_1\|_X \|w\|_X \\ &\leq 2 \|u_1\|_X \|w\|_X \end{aligned}$$

On prend $\alpha = 2 > 0$ alors, il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$|a(u_1, w)| \leq \alpha \|u_1\|_X \|w\|_X.$$

Donc $a(.,.)$ est continue sur $X \times X$.

★ **La coercivité de la forme bilinéaire** a :

On a $a(.,.)$ est coercive sur X, si et seulement s'il existe un $\beta > 0$ telque :

$$a(u_1, u_1) \geq \beta \|u_1\|_X^2, \quad \text{pour tout } u_1 \in X.$$

Soit $u_1 \in X$, on a :

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1) &= \int_\Omega (u_1)^2 \, dx + \int_\Omega (\nabla u_1)^2 \, dx \\ &= \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u_1\|_X^2 \\ &\geq \|u_1\|_X^2 \end{aligned}$$

On prend $\beta = 1$ alors, il exist $\beta > 0$ telle que :

$$a(u_1, u_1) \geq \beta \|u_1\|_X^2.$$

Donc $a(.,.)$ est coercive sur X.

★ **La continuité de la forme linéaire** b :

On a $b(.)$ est continue sur X, s'iln existe un $\gamma > 0$ telque :

$$|b(w)| \leq \gamma \|w\|_X, \quad \text{pour tout } w \in X.$$

Soit $w \in X$, on a :

$$\begin{aligned} |b(w)| &= \left| \int_\Omega (fw + gw) \, dx \right|, \\ &\leq \int_\Omega |fw| \, dx + \int_\Omega |gw| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |b(w)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_X + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_X \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w\|_X \end{aligned}$$

On pend $\gamma = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right)$ alors, il existe $\gamma > 0$ telque :

$$|b(w)| \leq \gamma \|w\|_X .$$

Donc $b(.)$ est continue sur X.

D'après le théorème de Lax-Milgram il existe une solution unique $u_1 \in X$ telle que :

$$a(u_1, w) = b(w), \quad \forall w \in X.$$

★ La régularité de la solution

D'après l'équation (3.10), On a :

$$\int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx.$$

En utilisant une intégration par partie, on obtient :

$$\int_\Omega u_1 w dx - \int_\Omega \triangle u_1 w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx.$$

Alors

$$\int_\Omega (u_1 - \triangle u_1 - f - g)\, w dx = 0,$$

tel que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors

$$u_1 - \triangle u_1 - f - g = 0$$

donc

$$u_1 - \triangle u_1 = f + g.$$

Donc, il existe $u \in D(A)$ solution de $(I - A)u = (f, g)$ pour tout $(f, g) \in E$, c-à-d $\operatorname{Im}(I - A) = E$ alors $I - A$ est surjectif. Donc A est maximal.

Comme A est dissipatif et maximal alors l'opérateur A est m-dissipatif. Et comme $D(A)$ dense dans E. Alors d'après le théorème de Lumer-Phillips A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi groupe.

De théorème (2.12) on arrive à montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1) qui donnée par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

tel que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\ \geq 0}$.

■

3.2 Système non-linéaire de Timoshenko avec retard

Cette section est consacré a prouvé l'existence et l'unicité de la solution d'un système non-linéaire de Timoshenko à retard avec certaines conditions qui est publié par Said-Houari [5]. Dans la quelle on va appliquer le théorème de Lumer-Phillips avec l'utilisation du théorème de Lax-Milgram et les inégalités du Young et Cauchy-Schwarz.

3.2.1 Position du problème

Un système de Timoshenko non linéaire modélisant des poutres minces élastiques serrées avec un retard temporel. Le retard est défini sur un terme de rétroaction associée à l'équation de l'angle de rotation.

On considère le système non-linéaire de Timoshenko avec retard suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x,t) - k(\varphi_x + \psi)_x(x,t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + k(\varphi_x + \psi)(x,t) + \mu_1 \psi_t(x,t) + \mu_2 \psi_t(x,t-\tau) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

où $(x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty)$, $\tau > 0$ représente la temporisation et μ_1, μ_2 sont des constantes positives. Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \\ \psi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\tau), \end{cases} \tag{3.13}$$

et les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.14}$$

Hypothèse

Soient μ_1 et μ_2 sont des conditions positives, telle que :

$$\mu_2 < \mu_1.$$

3.2.2 Existence et unicité

On va utiliser la théorie de semi groupe pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.12),(3.13) et (3.14) plus précis, on applique une conséquence du théorème de Hille-Yosida. D'abord, on introduit la nouvelle variable suivant :

$$z\left(x,\rho,t\right)=\psi_t\left(x,t-\tau\rho\right), \quad x\in\left(0,1\right), \quad \rho\in\left(0,1\right), \quad t>0. \tag{3.15}$$

On peut vérifier que z satisfait :

$$\tau z_t\left(x,\rho,t\right)+z_\rho\left(x,\rho,t\right)=0, \quad \text{dans } \left(0,1\right)\times\left(0,1\right)\times\left(0,+\infty\right)$$

en effet, soient $x\in\left(0,1\right)$, $\rho\in\left(0,1\right)$ et $t>0$, on a :

$$\begin{aligned} z_t &= \frac{\partial\psi_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)}\frac{\partial(t-\tau\rho)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)} \end{aligned}$$

D'autre par, on a :

$$\begin{aligned} z_\rho &= \frac{\partial\psi_t}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)}\frac{\partial(t-\tau\rho)}{\partial \rho} \\ &= -\tau\frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \tau z_t\left(x,\rho,t\right)+z_\rho\left(x,\rho,t\right) &= \tau\frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)}-\tau\frac{\partial\psi_t}{\partial(t-\tau\rho)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, on a :

$$\tau z_t\left(x,\rho,t\right)+z_\rho\left(x,\rho,t\right)=0, \quad \text{dans } \left(0,1\right)\times\left(0,1\right)\times\left(0,\infty\right). \tag{3.16}$$

On voit que pour $\rho = 1$, on a :

$$z(x,1,t) = \psi_t(x, t-\tau), \quad x \in (0,1) \text{ et } t > 0.$$

Donc, le problème (3.12) est équivalent à :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x,t) - k(\varphi_x + \psi)_x(x,t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x,t) - b\psi_{xx}(x,t) + k(\varphi_x + \psi)(x,t) + \mu_1 \psi_t(x,t) + \mu_2 z(x,1,t) = 0, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

où $x \in (0,1)$, $\rho \in (0,1)$ et $t > 0$. Avec les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ z(x,0,t) = \psi_t(x,t), \quad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1, \quad \psi(x,0) = \psi_0, \quad \psi_t(x,0) = \psi_1, \quad x \in (0,1), \\ z(x,1,0) = \psi_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \quad \text{dans } (0,1) \times (0,\tau). \end{cases} \tag{3.18}$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.17)-(3.18), on utilise la théorie de semi groupe.

On réécrit le problème sous la forme du problème de Cauchy abstrait, c-à-d :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} &= AU, \\ U(0) &= U_0, \end{cases}$$

et on prouve que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe pour cela, en utilisant le théorème de Lumer-Phillips, on montre que A est maximal et dissipatif.

Soit $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, z)^T$.

On pose $u = \varphi_t$ et $v = \psi_t$, alors :

$$u_t = \varphi_{tt} \text{ et } v_t = \psi_{tt}$$

donc, $U=(\varphi,u,\psi,v,z)^{T}$ représente la solution du problème (3.17)-(3.18) telque d'aprés (3.17), on a :

$$\varphi_{tt}(x,t)=u_{t}(x,t)=\frac{k}{\rho_{1}}(\varphi_{xx}+\psi_{x})(x,t),$$

et

$$\psi_{tt}(x,t)=v_{t}(x,t)=\frac{b}{\rho_{2}}\psi_{xx}(x,t)-\frac{k}{\rho_{2}}(\varphi_{x}+\psi)(x,t)-\frac{\mu_{1}}{\rho_{2}}\psi_{t}(x,t)-\frac{\mu_{2}}{\rho_{2}}z(x,1,t),$$

et

$$z_{t}(x,\rho,t)=\frac{-1}{\tau}z_{\rho}(x,\rho,t).$$

Alors le système (3.17) , devient :

$$\begin{cases}\varphi_{t}=u,\\ u_{t}=\frac{k}{\rho_{1}}(\varphi_{xx}+\psi_{x}),\\ \psi_{t}=v,\\ v_{t}=\frac{b}{\rho_{2}}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_{2}}(\varphi_{x}+\psi)-\frac{\mu_{1}}{\rho_{2}}v-\frac{\mu_{2}}{\rho_{2}}z(x,1,t),\\ z_{t}=\frac{-1}{\tau}z_{\rho}.\end{cases} \tag{3.19}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases}\frac{dU}{dt}=AU,\\ U(0)=U_{0}=(\varphi(0),u(0),\psi(0),v(0),z(0))=(\varphi_{0},\varphi_{1},\psi_{0},\psi_{1},f(.,.-\tau))^{T},\end{cases} \tag{3.20}$$

où l'opérateur A est donné par :

$$A\begin{pmatrix}\varphi\\ u\\ \psi\\ v\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ \frac{k}{\rho_{1}}(\varphi_{xx}+\psi_{x})\\ v\\ \frac{b}{\rho_{2}}\psi_{xx}-\frac{k}{\rho_{2}}(\varphi_{x}+\psi)-\frac{\mu_{1}}{\rho_{2}}v-\frac{\mu_{2}}{\rho_{2}}z(x,1,t)\\ \frac{-1}{\tau}z_{\rho}\end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

avec le domaine de A est :

$$D(A)=\left\{(\varphi,u,\psi,v,z)^{T}\in H\ :v=z(.,0),\quad \text{dans }\ (0,1)\right\},$$

où

$$\begin{aligned} H &= \left(H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\right)\times H_0^1(0,1)\times\left(H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\right)\times \\ &\quad L^2\left(0,1,H^1(0,1)\right). \end{aligned}$$

Maintenant, l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{H}:=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2((0,1)\times(0,1)).$$

Il facile de prouver qu'il est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \left\langle U,\overline{U}\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1\left\{\rho_1u\overline{u}+\rho_2v\overline{v}+k(\varphi_x+\psi)\left(\overline{\varphi_x}+\overline{\psi}\right)+b\psi_x\overline{\psi_x}\right\}dx \\ &\quad +\zeta\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\,\bar{z}(x,\rho)\,d\rho dx, \end{aligned} \tag{3.22}$$

tells que $U=(\varphi,u,\psi,v,z)^T$, $\overline{U}=\left(\overline{\varphi},\overline{u},\overline{\psi},\overline{v},\overline{z}\right)^T$ et ξ est une constante positive vérifie :

$$\tau\mu_2\leq\zeta\leq\tau(2\mu_1-\mu_2). \tag{3.23}$$

Proposition 3.1 *L'opérateur A qui est définit par* (3.21) *est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. Pour trouver le résultat ci-dessus, on va appliquer un conséquence du théorème de Lumer-Phillips. Pour cela, on prouve que A est un opérateur m-dissipatif. On sait que A est un opérateur m-dissipatif si et seulement si :
1) A est dissipatif.
2) Pour tout $\lambda>0$, l'opérateur $\lambda I-A$ est surjecif.
D'abord, on prouve que A est dissipatif.
Pour montrer que A est dissipatif, on prouve que :

$$\forall U\in D(A):\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}}\leq 0.$$

Soit $U=(\varphi,u,\psi,v,z)^T\in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1\{\rho_1 u\left(\tfrac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx}+\psi_x)\right)+\rho_2 v\left(\tfrac{b}{\rho_2}\psi_{xx}-\tfrac{k}{\rho_2}(\varphi_x+\psi)-\tfrac{\mu_1}{\rho_2}v-\tfrac{\mu_2}{\rho_2}z(x,1)\right)\\ &\quad +k(\varphi_x+\psi)(u_x+v)+b\psi_x v_x\}dx+\zeta\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\left(\tfrac{-1}{\tau}z_\rho(x,\rho)\right)d\rho dx\\ &= \int_0^1\{k\varphi_{xx}u+k\psi_x u+b\psi_{xx}v-k\varphi_x v-k\psi v-\mu_1 v^2-\mu_2 z(x,1)v+k\varphi_x u_x\\ &\quad +k\varphi_x v+ku_x\psi+k\psi v+b\psi_x v_x\}dx-\tfrac{\zeta}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= k\int_0^1\varphi_{xx}udx+k\int_0^1\psi_x udx+b\int_0^1\psi_{xx}vdx+\int_0^1(-\mu_1 v^2-\mu_2 z(x,1)v+k\varphi_x u_x\\ &\quad +ku_x\psi+b\psi_x v_x)dx-\tfrac{\zeta}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx,\end{aligned}\tag{3.24}$$

En utilisant une intégration par partie et les condition aux bord, on trouve qu'on a les équations (3.25), (3.26) et (3.27)

$$k\int_0^1\varphi_{xx}udx=[k\varphi_x u]_{x=0}^{x=1}-k\int_0^1\varphi_x u_x dx=-k\int_0^1\varphi_x u_x dx,\tag{3.25}$$

$$k\int_0^1\psi_x udx=[k\psi u]_{x=0}^{x=1}-k\int_0^1 u_x\psi dx=-k\int_0^1 u_x\psi dx,\tag{3.26}$$

$$b\int_0^1\psi_{xx}vdx=[b\psi_x v]_{x=0}^{x=1}-b\int_0^1\psi_x v_x dx=-b\int_0^1\psi_x v_x dx.\tag{3.27}$$

En substituant les équations (3.25), (3.26) et (3.27) dans (3.24), on arrive à :

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^1(-k\varphi_x u_x-ku_x\psi-b\psi_x v_x-\mu_1 v^2-\mu_2 z(x,1)v+k\varphi_x u_x\\ &\quad +ku_x\psi+b\psi_x v_x)dx-\tfrac{\zeta}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_p(x,\rho)d\rho dx\\ &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)v(x)dx-\tfrac{\zeta}{\tau}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)z_\rho(x,\rho)d\rho dx.\end{aligned}$$

Mais, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\,z_\rho(x,\rho)\,d\rho dx &= \int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\,\frac{\partial}{\partial\rho}z(x,\rho)\,d\rho dx \\ &= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}z^2(x,\rho)\,d\rho dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left[z^2(x,\rho)\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{z^2(x,1)-z^2(x,0)\right\} dx,\end{aligned}$$

alors

$$\int_0^1\int_0^1 z(x,\rho)\,z_p(x,\rho)\,d\rho dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{z^2(x,1)-z^2(x,0)\right\} dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)\,dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)\,v(x)\,dx-\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 \left\{z^2(x,1)-z^2(x,0)\right\}dx \\ &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)\,dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)\,v(x)\,dx-\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 \left\{z^2(x,1)-v^2(x)\right\}dx \\ &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)\,dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)\,v(x)\,dx-\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)\,dx+\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 v^2(x)\,dx \\ &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)\,dx-\mu_2\int_0^1 z(x,1)\,v(x)\,dx-\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)\,dx+\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 v^2(x)\,dx,\end{aligned}$$

car

$$z(x,0) = v(x).$$

Maintenant, on appliquer l'inégalité de Young sur le deuxième terme de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\langle AU,U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu_1\int_0^1 v^2(x)\,dx+\frac{\mu_2}{2}\int_0^1 z^2(x,1)\,dx+\frac{\mu_2}{2}\int_0^1 v^2(x)\,dx-\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 z^2(x,1)\,dx+\frac{\zeta}{2\tau}\int_0^1 v^2(x)\,dx \\ &= \left(-\mu_1+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\zeta}{2\tau}\right)\int_0^1 v^2(x)\,dx+\left(\frac{\mu_2}{2}-\frac{\zeta}{2\tau}\right)\int_0^1 z^2(x,1)\,dx.\end{aligned}$$

D'aprés (3.23), on a :

$$\zeta \leq \tau\left(2\mu_1-\mu_2\right),$$

alors

$$-\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\zeta}{2\tau} \leq 0$$

et comme

$$\tau\mu_2 \leq \zeta$$

alors

$$\frac{\mu_2}{2} - \frac{\zeta}{2\tau} \leq 0$$

On pose :

$$c' = -\mu_1 + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\zeta}{2\tau} \quad \text{et} \quad c'' = \frac{\mu_2}{2} - \frac{\zeta}{2\tau}$$

alors

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} &\leq c' \int_0^1 v^2(x)\, dx + c'' \int_0^1 z^2(x,1)\, dx \\ &\leq c \int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx + c \int_0^1 z^2(x,1)\, dx, \end{aligned}$$

telle que $c = \min\{c', c''\}$.

Mais

$$c \int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx + c \int_0^1 z^2(x,1)\, dx = c\left[\int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx + \int_0^1 z^2(x,1)\, dx\right],$$

comme c', c'' sont négative alors c est négative. Or $\int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx + \int_0^1 z^2(x,1)\, dx$ est positive.Alors $c\left[\int_0^1 \psi_t^2(x,t)\, dx + \int_0^1 z^2(x,1)\, dx\right]$ est négative.

Donc, $\langle AU, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$ c-à-d. l'opérateur A est dissipatif.

Ensuite, on prouve que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif.

Soit $\lambda > 0$, on prouve que l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif c-à-d on montre que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$.

Pour cela, soient $U^* = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$ et $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T \in D(A)$ telle que $(\lambda I - A)U = U^*$, alors :

$$\begin{cases} \lambda\varphi - u = f_1, \\ \lambda u - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2, \\ \lambda\psi - v = f_3, \\ \lambda v - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\mu_1}{\rho_2}v + \frac{\mu_2}{\rho_2}z(.,1) = f_4, \\ \lambda z + \frac{1}{\tau}z_\rho = f_5. \end{cases} \tag{3.28}$$

On suppose que, on a trouvé φ et ψ par conséquent la première et la troisième équation donnent :

$$\begin{cases} u = \lambda\varphi - f_1, \\ v = \lambda\psi - f_3, \end{cases} \tag{3.29}$$

il est clair que $u \in H_0^1(0,1)$ et $v \in H_0^1(0,1)$.

Maintenant, on va résoudre la dernière équation du système (3.28) qui est :

$$\lambda z + \frac{1}{\tau}z_\rho = f_5. \tag{3.30}$$

Premièrement, on résout l'équation homogène

$$\lambda z + \frac{1}{\tau}z_p = 0.$$

Donc

$$z_\rho = -\lambda\tau z,$$

mais $z_\rho = \frac{dz}{d\rho}$, alors :

$$\frac{dz}{d\rho} = -\lambda\tau z,$$

on intègre les deux parties de l'équation (**??**), on trouve que :

$$z(x,\rho) = ce^{(-\lambda\tau\rho)}.$$

Deuxièment, on résout l'équation non-homogène, c-à-d on va calculer une solution particulier de l'équation (3.30). On a :

$$z(x,\rho) = ce^{(-\lambda\tau\rho)}.$$

Alors

$$z_\rho(x,\rho) = c_\rho e^{(-\lambda\tau\rho)} - \lambda\tau c e^{(-\lambda\tau\rho)}.$$

En remplace z et z_ρ dans (3.30), on obtient :

$$\lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tfrac{1}{\tau}\left(c_\rho e^{(-\lambda\tau\rho)} - \lambda\tau c e^{(-\lambda\tau\rho)}\right) = f_5(x,\rho). \tag{3.31}$$

Mais, on a :

$$\begin{aligned} \lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tfrac{1}{\tau}\left(c_\rho e^{(-\lambda\tau\rho)} - \lambda\tau c e^{(-\lambda\tau\rho)}\right) &= \lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tfrac{c_\rho}{\tau} e^{(-\lambda\tau\rho)} - \lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} \\ &= \lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tfrac{c_\rho}{\tau} e^{(-\lambda\tau\rho)} - \lambda c e^{(-\lambda\tau\rho)} \\ &= \tfrac{c_\rho}{\tau} e^{(-\lambda\tau\rho)}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

En substituant (3.32) dans (3.31), on obtient :

$$\frac{c_\rho}{\tau} e^{(-\lambda\tau\rho)} = f_5(x,\rho),$$

mais

$$c_\rho = \frac{dc}{d\rho}.$$

Alors

$$\frac{dc}{d\rho} = \tau e^{(\lambda\tau\rho)} f_5(x,\rho).$$

En intégrant sur l'intervalle $[0,\rho]$, on trouve :

$$c(\rho) - c(0) = \tau \int_0^\rho e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma.$$

Donc

$$c(\rho) = c(0) + \tau \int_0^\rho e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma,$$

or, $c(0) = z(x,0) = v(x)$. Alors :

$$c(\rho) = v(x) + \tau \int_0^{\rho} e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma,$$

donc

$$\begin{aligned} z(x,\rho) &= ce^{(-\lambda\tau\rho)} \\ &= \left(v(x) + \tau \int_0^{\rho} e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma \right) e^{(-\lambda\tau\rho)} \\ &= v(x)\, e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tau e^{(-\lambda\tau\rho)} \int_0^{\rho} e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma. \end{aligned} \tag{3.33}$$

D'après la troisième équation de (3.28), on a :

$$v(x) = \lambda\psi(x) - f_3. \tag{3.34}$$

En substituant (3.34) dans (3.33), on obtient :

$$z(x,\rho) = (\lambda\psi(x) - f_3)\, e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tau e^{(-\lambda\tau\rho)} \int_0^{\rho} e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma.$$

comme $\rho \in (0,1)$, alors :

$$z(x,\rho) = \lambda\psi(x)\, e^{(-z(x,\rho)\lambda\tau\rho)} - f_3 e^{(-\lambda\tau\rho)} + \tau e^{(-\lambda\tau\rho)} \int_0^{1} e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5(x,\sigma)\, d\sigma. \tag{3.35}$$

D'autre part, d'après (3.28) on a :

$$\begin{cases} \lambda^2\varphi - \frac{k}{\rho_1}(\varphi_{xx} + \psi_x) = f_2 + \lambda f_1, \\ \lambda^2\psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) + \frac{\mu_1}{\rho_2} v + \frac{\mu_2}{\rho_2} z(x,1) = f_4 + \lambda f_3. \end{cases} \tag{3.36}$$

On multiple la première équation (respectivement, la deuxième équation) de (3.36) par $\omega \in H_0^1(0,1)$ (resp, $\chi \in H_0^1(0,1)$) et on intègre sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_{xx} + \psi_x)\omega \right) dx = \int_0^1 \rho_1 (f_2 + \lambda f_1)\, \omega dx, \\ \int_0^1 \left(\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_{xx}\chi + k(\varphi_x + \psi)\chi + \mu_1 v\chi + \mu_2 z(x,1)\chi \right) dx = \int_0^1 \rho_2 (f_4 + \lambda f_3)\, \chi dx. \end{cases}$$

on utilise l'intégration par partie sur $(0,1)$, on trouve :

$$\begin{cases} \int_0^1 \left(\rho_1 \lambda^2 \varphi \omega + k\left(\varphi_x + \psi\right) \omega_x\right) dx = \int_0^1 \rho_1 \left(f_2 + \lambda f_1\right) \omega dx, \\ \int_0^1 \left(\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x + k\left(\varphi_x + \psi\right) \chi + \mu_1 v \chi + \mu_2 z\left(x,1\right) \chi\right) dx = \int_0^1 \rho_2 \left(f_4 + \lambda f_3\right) \chi dx, \end{cases} \tag{3.37}$$

pour tout $(\omega, \chi) \in H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$.

De l'équation (3.35), on a :

$$\begin{aligned} z\left(x,1\right) &= \lambda \psi\left(x\right) e^{(-\lambda\tau)} - f_3 e^{(-\lambda\tau)} + \tau e^{(-\lambda\tau)} \int_0^1 e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5\left(x,\sigma\right) d\sigma \\ &= \lambda \psi\left(x\right) e^{(-\lambda\tau)} + z_0\left(x\right), \end{aligned}$$

pour tout $x \in (0,1)$ et $z_0 \in L^2(0,1)$ défini par :

$$z_0\left(x\right) = -f_3 e^{(-\lambda\tau)} + \tau e^{(-\lambda\tau)} \int_0^1 e^{(\lambda\tau\sigma)} f_5\left(x,\sigma\right) d\sigma.$$

On additionne la première équation avec la deuxième équation de (3.37), on trouve :

$$\int_0^1 \left(\rho_1 \lambda^2 \varphi \omega + k\left(\varphi_x + \psi\right) \omega_x\right) dx + \int_0^1 \left(\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x + k\left(\varphi_x + \psi\right) \chi + \mu_1 v \chi + \mu_2 z\left(x,1\right) \chi\right) dx$$
$$= \int_0^1 \rho_1 \left(f_2 + \lambda f_1\right) \omega dx + \int_0^1 \rho_2 \left(f_4 + \lambda f_3\right) \chi dx,$$

alors

$$\int_0^1 \left(\rho_1 \lambda^2 \varphi \omega + k\left(\varphi_x + \psi\right)\left(\omega_x + \chi\right)\right) dx + \int_0^1 \left(\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x\right) dx + \int_0^1 \mu_1 v \chi dx + \int_0^1 \mu_2 z\left(x,1\right) \chi dx$$
$$= \int_0^1 \rho_1 \left(f_2 + \lambda f_1\right) \omega dx + \int_0^1 \rho_2 \left(f_4 + \lambda f_3\right) \chi dx.$$

Mais

$$z\left(x,1\right) = \lambda \psi\left(x\right) e^{(-\lambda\tau)} + z_0\left(x\right) \text{ et } v\left(x\right) = \lambda \psi\left(x\right) - f_3.$$

Alors

$$\int_0^1 \left(\rho_1 \lambda^2 \varphi \omega + k\left(\varphi_x + \psi\right)\left(\omega_x + \chi\right)\right) dx + \int_0^1 \left(\rho_2 \lambda^2 \psi \chi + b \psi_x \chi_x\right) dx + \int_0^1 \mu_1 \left(\lambda \psi\left(x\right) - f_3\right) \chi dx$$
$$+ \int_0^1 \mu_2 \left(\psi\left(x\right) e^{(-\lambda\tau)} + z_0\left(x\right)\right) \chi dx = \int_0^1 \rho_1 \left(f_2 + \lambda f_1\right) \omega dx + \int_0^1 \rho_2 \left(f_4 + \lambda f_3\right) \chi dx.$$

Donc

$$\int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_x+\psi)(\omega_x+\chi)\right)dx + \int_0^1 \left(\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x\right)dx + \int_0^1 \left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi\chi dx$$
$$= \int_0^1 ((\mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3))\chi dx + \int_0^1 \rho_1 (f_2+\lambda f_1)\omega dx + \int_0^1 \rho_2 (f_4+\lambda f_3)\chi dx. \tag{3.38}$$

On pose $X=(\varphi,\psi)$ et $Y=(\omega,\chi)$, alors on définit sur $W=\left[H_0^1(0,1)\times H_0^1(0,1)\right]$ la forme bilinéaire $b : W^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par :

$$\begin{aligned} b(X,Y) &= \int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_x+\psi)(\omega_x+\chi)\right)dx + \int_0^1 \left(\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x\right)dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi\chi dx. \end{aligned}$$

Et la forme linéaire $l : W \longrightarrow \mathbb{R}$ defini par :

$$l(Y) = \int_0^1 (\mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3)\chi dx + \int_0^1 \rho_1 (f_2+\lambda f_1)\omega dx + \int_0^1 \rho_2 (f_4+\lambda f_3)\chi dx.$$

La résolution du système (3.37) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } X\in W, \text{ telle que :} \\ b(X,Y) = l(Y), \quad \text{pour tout } Y\in W. \end{cases} \tag{3.39}$$

Maintenant, pour montrer l'éxistence et l'unicité de la solution de problème (3.39), on utilise le théorème de Lax-Milgram. Pour cela, on prouve que :

-W est une espace de Hilbert.

- La forme bilinéaire $b(.,.)$ est continue sur $W\times W$.

- La forme bilinéaire $b(.,.)$ est coercive sur W.

- La forme linéaire $l(.)$ est continue sur W.

Il est clair que W est une espace de Hilbert.

Tout d'abord, on commence par :

★ La continuité de la forme bilinéaire b :

On sait que $b(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $W\times W$ si et seulement s'il existe un $c>0$ telque :

$$|b(X,Y)| \leq c\,\|X\|_W \|Y\|_W, \quad \text{pour tout } X,Y\in W.$$

Soient X, $Y \in W$, on a :

$$\begin{aligned}
|b(X,Y)| &= \left| \int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_x+\psi)(\omega_x+\chi)\right)dx + \int_0^1 \left(\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x\right)dx \right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi\chi dx \right| \\
&\leq \rho_1\lambda^2\int_0^1 |\varphi\omega|\,dx + k\int_0^1 |\varphi_x\omega_x|\,dx + k\int_0^1 |\varphi_x\chi|\,dx + k\int_0^1 |\psi\omega_x|\,dx + k\int_0^1 |\psi\chi|\,dx \\
&+ \rho_2\lambda^2\int_0^1 |\psi\chi|\,dx + b\int_0^1 \psi_x\chi_x dx + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\int_0^1 |\psi\chi|\,dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
|b(X,Y)| &\leq \rho_1\lambda^2\|\varphi\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} + k\|\varphi_x\|_{L^2}\|\omega_x\|_{L^2} + k\|\varphi_x\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + k\|\psi\|_{L^2}\|\omega_x\|_{L^2} \\
&+ \left(k+\rho_2\lambda^2+\lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)x+}\right)\right)\|\psi\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + b\|\psi_x\|_{L^2}\|\chi_x\|_{L^2} \\
&\leq \max\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2+\lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)x+}\right), b\right\}\left(\|\varphi\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2}\|\omega_x\|_{L^2}\right. \\
&\left. + \|\varphi_x\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}\|\omega_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2}\|\chi_x\|_{L^2}\right) \\
&\leq \max\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)x+}\right), b\right\}\left(\|\varphi\|_{H_0^1}+\|\psi\|_{H_0^1}\right)\left(\|\omega\|_{H_0^1}+\|\chi\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \max\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2+\lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)x+}\right), b\right\}\|X\|_W\|Y\|_W.
\end{aligned}$$

On pose $c = \max\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2+\lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right), b\right\}$, qui est positive.

Alors il existe un $c > 0$ telque :

$$|b(X,Y)| \leq c\|X\|_W\|Y\|_W.$$

Donc, $b(.,.)$ est une forme bilinéaire continue.

★ **La coersivité de la forme bilinéaire** b :

On a $b(.,.)$ est coercive sur W si et seulement s'il existe un $c_1 > 0$ telque :

$$b(X,Y) \geq c_1\|X\|_W^2, \text{ pour tout } X \in W.$$

Soit $X \in W$, ona :

$$\begin{aligned}
b(X,X) &= \int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi^2 + k(\varphi_x+\psi)^2\right)dx + \int_0^1 \left(\rho_2\lambda^2\psi^2 + b\psi_x^2\right)dx + \int_0^1 \left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi^2 dx \\
&= \rho_1\lambda^2\int_0^1 \varphi^2 dx + k\int_0^1 (\varphi_x+\psi)^2 dx + \rho_2\lambda^2\int_0^1 \psi^2 dx + b\int_0^1 \psi_x^2 dx + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\int_0^1 \psi^2 dx \\
&\geq \min\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2 + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right), b\right\}\left(\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\
&\geq \min\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2 + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right), b\right\}\left(\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2\right) \\
&\geq \min\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2 + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right), b\right\}\|X\|_W^2 .
\end{aligned}$$

On prend $c_1 = \min\left\{\rho_1\lambda^2, k, k+\rho_2\lambda^2 + \lambda\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right), b\right\}$, qui est positive, alors il existe un $c_1 > 0$ telque :

$$b(X,Y) \geq c_1 \|X\|_W^2 .$$

Donc, $b(.,.)$ est coercive sur W.

★ **La continuité de la forme linéaire l :**

Pour montrer que la forme linéaire $l\ (.)$ continue sur W; on va chercher un $c_2 > 0$ telque :

$$|l(Y)| \leq c_2 \|Y\|_W, \text{ pour tout } Y \in W.$$

Soit $Y \in W$, on a :

$$\begin{aligned}
|l(Y)| &= \left|\int_0^1 (\mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3)\chi dx + \int_0^1 \rho_1(f_2+\lambda f_1)\omega dx + \int_0^1 \rho_2(f_4+\lambda f_3)\chi dx\right| \\
&= \int_0^1 |(\rho_2(f_4+\lambda f_3) + \mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3)\chi|\, dx + \int_0^1 |\rho_1(f_2+\lambda f_1)\omega|\, dx.
\end{aligned}$$

On pose $F_1 = \rho_2(f_4+\lambda f_3) + \mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3$ et $F_2 = \rho_1(f_2+\lambda f_1)$, alors :

$$|l(Y)| = \int_0^1 |F_1\chi|\, dx + \int_0^1 |F_2\omega|\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
|l(Y)| &\leq \|F_1\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} + \|F_2\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} \\
&\leq \max\left\{\|F_1\|_{L^2}, \|F_2\|_{L^2}\right\}\left(\|\chi\|_{L^2} + \|\omega\|_{L^2}\right) \\
&\leq \max\left\{\|F_1\|_{L^2}, \|F_2\|_{L^2}\right\}\left(\|\chi\|_{H_0^1} + \|\omega\|_{H_0^1}\right) \\
&\leq \max\left\{\|F_1\|_{L^2}, \|F_2\|_{L^2}\right\}\|Y\|_W
\end{aligned}$$

tel que $c_2 = \max\left\{\|F_1\|_{L^2}, \|F_2\|_{L^2}\right\}$. Donc il existe un $c_2 > 0$, telque :

$$l(Y) \leq c_2\|Y\|_W.$$

Donc $l(.)$ est continue sur W.

D'aprés le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique $X \in W$ telle que :

$$b(X,Y) = l(Y), \quad \forall Y \in W.$$

★ **La régularité de la solution**

D'après (3.29), on a $u = \lambda\varphi - f_1 \in H_0^1$ et $v = \lambda\psi - f_3 \in H_0^1$.

De l'équation (3.38), Si $\omega = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&k\int_0^1(\varphi_x + \psi)\chi dx + \int_0^1\left(\rho_2\lambda^2\psi\chi + b\psi_x\chi_x\right)dx + \int_0^1\left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi\chi dx \\
= &\int_0^1((\mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3))\chi dx + \int_0^1\rho_2(f_4 + \lambda f_3)\chi dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
&k\int_0^1(\varphi_x + \psi)\chi dx + \int_0^1\left(\rho_2\lambda^2\psi\chi - b\psi_{xx}\chi\right)dx + \int_0^1\left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\lambda\psi\chi dx \\
= &\int_0^1((\mu_2 z_0(x) - \mu_1 f_3))\chi dx + \int_0^1\rho_2(f_4 + \lambda f_3)\chi dx.
\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1\left(k\varphi_x + k\psi + \rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + \lambda\left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\psi + \mu_1 f_3 - \mu_2 z_0(x) - \rho_2 f_4 - \lambda\rho_2 f_3\right)\chi dx = 0.$$

On a $\chi \neq 0$, alors :

$$k\varphi_x + k\psi + \rho_2\lambda^2\psi - b\psi_{xx} + \lambda\left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\psi + \mu_1 f_3 - \mu_2 z_0(x) - \rho_2 f_4 - \lambda\rho_2 f_3 = 0.$$

Or $\psi = \frac{1}{\lambda}(v + f_3)$, alors :

$$\begin{aligned} 0 &= k\varphi_x + k\left(\frac{1}{\lambda}(v+f_3)\right) + \rho_2\lambda^2\left(\frac{1}{\lambda}(v+f_3)\right) - b\psi_{xx} + \lambda\left(\mu_1 + \mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)\left(\frac{1}{\lambda}(v+f_3)\right) \\ &\quad + \mu_1 f_3 - \mu_2 z_0(x) - \rho_2 f_4 - \lambda\rho_2 f_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= \tfrac{k}{b}\varphi_x + \tfrac{k}{\lambda b}v + \tfrac{k}{\lambda b}f_3 + \tfrac{\rho_2\lambda}{b}v + \tfrac{\rho_2\lambda}{b}f_3 + \tfrac{\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)}{b}v + \tfrac{\left(\mu_1+\mu_2 e^{(-\lambda\tau)}\right)}{b}f_3 + \tfrac{\mu_1}{b}f_3 - \tfrac{\mu_2}{b}z_0(x) \\ &\quad - \tfrac{\rho_2}{b}f_4 - \tfrac{\lambda\rho_2}{b}f_3. \end{aligned}$$

Alors $\psi_{xx} \in L^2(0,1)$ donc, $\psi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.

De méme si $\chi = 0$, on a :

$$\int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_x + \psi)\omega_x\right)dx = \int_0^1 \rho_1(f_2 + \lambda f_1)\omega dx.$$

On utilise l'intégration par partie, on trouve :

$$\int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi\omega + k(\varphi_{xx} + \psi_x)\omega\right)dx = \int_0^1 \rho_1(f_2 + \lambda f_1)\omega dx.$$

Alors

$$\int_0^1 \left(\rho_1\lambda^2\varphi + k(\varphi_{xx} + \psi_x) - \rho_1 f_2 - \lambda\rho_1 f_1\right)\omega dx = 0,$$

mais $\omega \in H_0^1(0,1)$.

On a $\omega \neq 0$, alors :

$$\rho_1\lambda^2\varphi + k(\varphi_{xx} + \psi_x) - \rho_1 f_2 - \lambda\rho_1 f_1 = 0,$$

mais $\varphi = \frac{1}{\lambda}(u + f_1)$, alors :

$$\rho_1\lambda u + \rho_1\lambda f_1 + k\varphi_{xx} + k\psi_x - \rho_1 f_2 - \lambda\rho_1 f_1 = 0.$$

Alors

$$\varphi_{xx} = -\tfrac{\rho_1\lambda}{k}u - \tfrac{\rho_1\lambda}{k}f_1 - k\psi_x + \tfrac{\rho_1}{k}f_2 + \tfrac{\lambda\rho_1}{k}f_1.$$

Alors $\varphi_{xx} \in L^2(0,1)$ donc, $\varphi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.
Donc, il existe $U = (\varphi, u, \psi, v, z)^T \in D(A)$ solution de $(\lambda I - A)U = U^*$ pour tout $U^* \in \mathcal{H}$. C-à-d $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ alors $\lambda I - A$ est surjectif, donc A est maximal. Comme A est dissipatif et maximal alors l'opérateur A est m-dissipatif. Et comme $D(A)$ dense dans $\mathcal{H}$, d'après le théorème de Lumer-Phillips, A est le gènèrateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe. ■

Proposition 3.2 *Le systhème non-linéaire de Timoshenko avec retard* (3.12) *admet une solution unique.*

Preuve. D'après la proposition précédente on a A est un générateur d'un semi groupe de contraction et comme $F \in L^1(0, T,\ X)$. En utilisant le théorème (2.13) on conclut que le système non-linéaire de Timoshenko avec retard (3.12) admet une solution unique.

■

3.3 Système poreux-élastique amorti non linéaire avec deux retards

Dans cette section, en se référant à **[9]**, on va présenter le système poreux-élastique amorti non linéaire avec un retard distribué pour les cas de vitesses égales et non égales de propagation des ondes, sous des conditions supplémentaires, puis on étudie l'existence et l'unicité de sa solution sous quelques conditions imposées sur le terme non linéaire.

3.3.1 Position du problème

On considère le système non linéaire avec deux retards suivants :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \int\limits_0^\infty g\left(p\right)\phi_{xx}\left(t-p\right)dp \\ +\mu_1\,\phi_t + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left|\mu_2\left(\varrho\right)\right|\phi_t\left(x, t-\varrho\right)d\varrho + \alpha\left(t\right)f\left(\phi_t\right) = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

où $(x, \varrho, t) \in (0,1)\times(\tau_1, \tau_2)\times(0,\infty)$ et $\rho, \mu, b, j, \delta, \xi$ et μ_1 sont des constantes vérifiant :

$$\mu\xi > b^2.$$

Pour les conditions initiales, c'est à dire à l'instant $t = 0$, on a :

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x), \quad \forall x \in (0,1), \\ \phi(x,0) = \phi_0(x),\ \ \phi_t(x,0) = \phi_t(x), \quad \forall x \in (0,1), \\ \phi_t(x,-t) = f_0(x,t), \quad \forall (x,t) \in (0,1)\times(0,\tau_2), \end{cases} \tag{3.41}$$

et on a les conditions aux limites de Neumann-Dirichlet suivantes :

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = \phi(0,t) = \phi(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.42}$$

Pour que le problème soit bien posé c'est à dire pour assurer l'existence et l'unicité de ce problème, on cite les hypothèses suivantes :

Hypothèses

H1 : La fonction $g \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ satisfait :

$$g\,(0) > 0, \quad \delta - \int_0^\infty g(p)dp = l > 0, \quad \int_0^\infty g(p)dp = g_0.$$

H2 : Il existe deux fonctions différentiables non croissantes $\alpha, \eta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t > 0$ telles que :

$$g'(t) \leq -\eta(t)g(t), \ \forall t \geq 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} \frac{-\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0.$$

H3 : La fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est non décroissante tels qu'il existe trois nombres réèls $v_1, v_2, \varepsilon > 0$ et une fonction strictement décroissante $G \in C^1([0,\infty))$ avec $G(0) = 0$ et G est une linéaire ou strictement convexe de classe C^2 sur $(0, \varepsilon]$ et on a :

$$s^2 + f^2(s) \leq G^{-1}(sf(s)), \quad \forall\, |s| < \varepsilon,$$

$$v_1\,|s| \leq |f(s)| \leq v_2\,|s|\,, \quad \forall\, |s| \geq \varepsilon.$$

ce qui implique que $sf(s) > 0$ pour tout $s \neq 0$. La fonction f vérifie :

$$|f(\psi_2) - f(\psi_1)| \leq k_0(|\psi_2|^\beta + |\psi_1|^\beta)\,|\psi_2 - \psi_1|\,, \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R},$$

où $k_0, \beta > 0$.

H4 : La fonction borné $\mu_{2:}[\tau_1, \tau_2] \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifie :

$$\int_{\tau_1}^{\tau 2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho < \mu_1.$$

3.3.2 Existence et unicité

On va utiliser la théorie de semi groupe pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.40),(3.41) et (3.42). Plus précisèment, on va appliquer le théorème (2.18). Afin de traiter ce problème on introduit ces deux nouvelles variables très fréquent suivantes :

$$y(x,\rho,\varrho,t)=\phi_t(x,t-\varrho\rho),\ \forall x\in(0,1),\ \forall\rho\in(0,1)\text{ et }\forall t>0, \tag{3.43}$$

et

$$\eta^t(x,s)=\phi(x,t)-\phi(x,t-s),\quad \forall(x,t,s)\in(0,1)\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+. \tag{3.44}$$

Premièrement, il est facile de prouver que les deux fonctions y et η^t satisfait les relations suivantes :

$$\varrho y_t(x,\rho,\varrho,t)+y_\rho(x,\rho,\varrho,t)=0,\quad \text{dans } (0,1)\times(0,1)\times(0,\infty). \tag{3.45}$$

et

$$\eta_t^t+\eta_s^t=\phi_t(x,t),\quad \forall(x,t,s)\in(0,1)\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+. \tag{3.46}$$

On voit que pour $\rho=1$, on a :

$$y(x,1,\varrho,t)=\phi_t(x,t-\varrho),\quad x\in(0,1)\text{ et }t>0.$$

Et pour $\rho=0$, on a :

$$y(x,0,\varrho,t)=\phi_t(x,t).$$

Alors, le problème (3.40) est équivalent à :

$$\begin{cases}\rho u_{tt}-\mu u_{xx}-b\phi_x=0,\\ \jmath\phi_{tt}-l\phi_{xx}+bu_x+\xi\phi+\int\limits_0^\infty g(p)\eta_{xx}^t(p)dp+\mu_1\phi_t+\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}|\mu_2(\varrho)|\,y(x,1,\varrho,t)d\varrho+\alpha(t)f(\phi_t)=0,\\ \varrho y_t(x,\rho,\varrho,t)+y_\rho(x,\rho,\varrho,t)=0,\\ \eta_t^t+\eta_s^t=\phi_t(x,t),\end{cases} \tag{3.47}$$

tel que $(x,\rho,\varrho,t) \in (0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\times(0,\infty)$, avec les conditions initiales et les conditions aux limites de Neumann-Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} u_x(0,t)=u_x(1,t)=\phi(0,t)=\phi(1,t)=0, \quad t\geq 0,\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in(0,1),\\ \phi(x,0)=\phi_0(x),\ \phi_t(x,0)=\phi_1(x), \quad x\in(0,1),\\ y(x,\rho,\varrho,0)=\phi_t(x,-\varrho\rho)=f_0(x,\varrho\rho), \quad x\in(0,1),\ \rho\in(0,1) \text{ et } \varrho\in(0,\tau_2),\\ \eta^t(x,0)=0,\ \eta^0(x,s)=\eta_0\left(x,s\right), \quad (x,s)\in(0,1)\times\mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{3.48}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.47),(3.48), on utilise la théorie de semi groupe.

Deuxièment, On réécrit le problème sous la forme du problème de Cauchy abstrait suivante :

$$\begin{cases} U_t = AU+\Gamma(U),\\ U\left(0\right)=U_0. \end{cases}$$

Ensuite, on prouve que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe et Γ est localement Lipchitzienne dans $\mathcal{H}$.

Soit $U=(u,u_t,\phi,\phi_t,y,\eta^t)^T$, on pose $v=u_t$, $\psi=\phi_t$ et $\varphi=\eta^t$ alors

$$v_t=u_{tt},\ \psi_t=\phi_{tt} \text{ et } \varphi_t=\eta_t^t,$$

donc, $U=(u,v,\phi,\psi,y,\varphi)^T$. Représente la solution du problème (3.47) et (3.48) telque, d'aprés(3.47), on a :

$$u_{tt}=\frac{\mu}{\rho}u_{xx}+\frac{b}{\rho}\phi_x.$$

D'autre part, on a :

$$\phi_{tt}=\frac{l}{J}\phi_{tt}-\frac{b}{J}u_x-\frac{\xi}{J}\phi-\frac{1}{J}\int_0^\infty g(p)\eta_{xx}^t(p)dp-\frac{\mu_1}{J}\psi-\frac{1}{J}\int_{\tau_1}^{\tau_2}|u_2(\varrho)|\,y(x,1,\varrho,t)d\varrho-\frac{\alpha(t)}{J}f'(\phi_t).$$

En utilisant l'équation (3.45) et le nouveau changement de variable, on voit que :

$$y_t=\frac{-1}{\varrho}y_\rho.$$

De l'équation (3.46), $\psi = \phi_t$ et $\varphi = \eta^t$ on trouve :

$$\eta_t^t = \psi - \varphi_s.$$

Enfin, le systéme (3.47) devient :

$$\begin{cases} u_t &= v, \\ v_t &= \frac{\mu}{\rho} u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x, \\ \phi_t &= \psi, \\ \psi_t &= \frac{l}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi - \frac{1}{J}\int\limits_0^\infty g(p)\eta_{xx}^t(p)dp - \frac{\mu_1}{J}\psi - \frac{1}{J}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho - \frac{\alpha(t)}{J}f'(\phi_t), \\ y_t &= \frac{-1}{\varrho} y_\rho, \\ \varphi_t &= \psi - \varphi_s. \end{cases} \tag{3.49}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + \Gamma(U(t)), \quad \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, f_0, \eta_0)^T, \end{cases} \tag{3.50}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est définit par :

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \phi_t \\ \psi_t \\ y_t \\ \varphi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\mu}{\rho}u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x \\ \psi \\ \frac{l}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi - \frac{1}{J}\int\limits_0^\infty g(p)\eta_{xx}^t(p)dp - \frac{\mu_1}{J}\psi - \frac{1}{J}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho \\ \frac{-1}{\varrho}y_\rho \\ \psi - \varphi_s \end{pmatrix}, \tag{3.51}$$

et Γ est donné par :

$$\Gamma(U)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\frac{\alpha(t)}{J}f'(\phi_t)\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

et $\mathcal{H}$ est l'espace énergétique donné par :

$$\mathcal{H}:=H^1_*(0,1)\times L^2_*(0,1)\times H^1_0(0,1)\times L^2(0,1)\times L^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))\times L_g(0,1),$$

tel que :

$$\begin{array}{rcl}L^2_*(0,1) & = & \left\{\Phi\in L^2(0,1): \int_0^1\Phi(x)dx=0\right\},\\ H^1_*(0,1) & = & H^1(0,1)\cap L^2_*(0,1),\\ L_g(0,1) & = & \left\{\Phi:\mathbb{R}_+\longrightarrow H^1_0(0,1),\ \int_0^1\int_0^\infty g(s)\Phi^2_x(p)\,dp<\infty\right\},\end{array}$$

où l'espace $L_g(0,1)$ est doté produit scalaire suivant :

$$\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle_{L_g(0,1)} = \int_0^1\int_0^\infty g(p)\Phi_{1x}(p)\Phi_{2x}(p)dp.$$

Maintenant, pour tout $U=(u,v,\phi,\psi,y,\varphi)^T\in\mathcal{H}$ et $\hat{U}=(\hat{u},\hat{v},\hat{\phi},\hat{\psi},\hat{y},\hat{\varphi})^T\in\mathcal{H}$, on peut facilement prouver que l'application $\langle.,.\rangle_{\mathcal{H}}$ tel que :

$$\begin{array}{rcl}\left\langle U,\hat{U}\right\rangle_{\mathcal{H}} & = & \rho\int_0^1 v\hat{v}dx+\mu\int_0^1 u_x\hat{u}_xdx+j\int_0^1\psi\hat{\psi}dx+\xi\int_0^1\phi\hat{\phi}dx+l\int_0^1\phi_x\hat{\phi}_xdx+b\int_0^1(u_x\hat{\phi}+\hat{u}_x\phi)dx\\ & & +\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau 2}\varrho\left|u_2(\varrho)\right|y\hat{y}d\varrho d\rho dx+\langle\varphi,\hat{\varphi}\rangle_{L_g(0,1)}.\end{array}$$

est défini un produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Donc, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

puis, le domaine de $\mathcal{A}$ est donné par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{\begin{array}{l}U\in\mathcal{H}\ /\ u\in H^2_*\cap H^1_*,\ \phi\in H^2\cap H^1_0,\ v\in H^1_*,\ \psi\in H^1_0(0,1),\ \varphi\in L_g(0,1),\\ y,y_\rho\in L^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)),\ y(x,0,\varrho,t)=\psi,\end{array}\right\},$$

avec

$$H_*^2(0,1) = \left\{\Phi \in H^2(0,1) \diagup \Phi_x(1) = \Phi_x(0) = 0.\right\}$$

Remarque 3.1 Il est clair que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Maintenant on peut énoncer et prouver l'existence et l'unicité du problème (3.50).

Proposition 3.3 *L'opérateur A qui est définit par* (3.51) *est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. On montre que L'opérateur A qui est définit par (3.51) est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe dans $\mathcal{H}$.
Pour obtenir le résultat ci-dessus, on doit prouver que A est un opérateur m-dissipatif. On sait que A est un opérateur m-dissipatif si et seulement si :
1) A est dissipatif.
2) pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif.
D'abord, on prouve que A est dissipatif c'est-à-dire on montre que :

$$\forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) : \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Soit $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; & \rho\int_0^1 v\left(\tfrac{\mu}{\rho}u_{xx} + \tfrac{b}{\rho}\phi_x\right)dx + \mu\int_0^1 u_x v_x dx + j\int_0^1 \psi\left(\tfrac{l}{J}\phi_{xx} - \tfrac{b}{J}u_x - \tfrac{\xi}{J}\phi\right.\\
& \left. - \tfrac{1}{J}\int_0^\infty g(p)\varphi_{xx}(p)dp - \tfrac{\mu_1}{J}\psi - \tfrac{1}{J}\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho\right)dx\\
& + \xi\int_0^1 \phi\psi dx + l\int_0^1 \phi_x\psi_x dx + b\int_0^1 (u_x\psi + v_x\phi)\,dx\\
& + \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varrho\,|u_2(\varrho)|\, y\left(\tfrac{-1}{\varrho}y_\rho\right)d\varrho d\rho dx + \langle\varphi, -\varphi_s + \psi\rangle_{L_g(0,1)}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \mu\int_0^1 u_{xx}vdx + b\int_0^1 \phi_x vdx + \mu\int_0^1 u_x v_x dx + l\int_0^1 \phi_{xx}\psi dx - b\int_0^1 u_x\psi dx - \xi\int_0^1 \phi\psi dx \\
&-\int_0^1 \psi\int_0^\infty g(p)\varphi_{xx}(p)dpdx - \mu_1\int_0^1 \psi^2 dx - \int_0^1 \psi\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho dx \\
&+\xi\int_0^1 \phi\psi dx + l\int_0^1 \phi_x\psi_x dx + b\int_0^1 u_x\psi dx + b\int_0^1 v_x\phi dx - \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, yy_\rho d\varrho d\rho dx
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} &= \mu\int_0^1 u_{xx}vdx + b\int_0^1 \phi_x vdx + \mu\int_0^1 u_x v_x dx + l\int_0^1 \phi_{xx}\psi dx - \mu_1\int_0^1 \psi^2 dx \\
&-\int_0^1 \psi\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho dx + l\int_0^1 \phi_x\psi_x dx + b\int_0^1 v_x\phi dx \\
&-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, yy_\rho d\varrho d\rho dx - \int_0^1\int_0^\infty g(p)\varphi_{xp}(p)\varphi_x(p)dpdx.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

En utilisant une intégration par partie et les condition aux bord, on trouve qu'on a les équations (3.54) , (3.55) et (**??**) :

$$\mu\int_0^1 u_{xx}vdx = [\mu u_x v]_{x=0}^{x=1} - \mu\int_0^1 u_x v_x dx = -\mu\int_0^1 u_x v_x dx. \tag{3.54}$$

$$l\int_0^1 \phi_{xx}\psi dx = [l\phi_x\psi]_{x=0}^{x=1} - l\int_0^1 \phi_x\psi_x dx = -l\int_0^1 \phi_x\psi_x dx. \tag{3.55}$$

$$b\int_0^1 \phi_x vdx = b\,[\phi v]_{x=0}^{x=1} - b\int_0^1 \phi v_x dx = -b\int_0^1 v_x\phi dx. \tag{3.56}$$

En substituant, les équations (3.54) , (3.55) et (**??**) dans (3.53) , on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\mu_1\int_0^1 \psi^2 dx - \int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, \psi y(x,1,\varrho,t)d\varrho dx - \int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, yy_\rho d\varrho d\rho dx \\
&-\int_0^1\int_0^\infty g(p)\varphi_{xp}(p)\varphi_x(p)dpdx.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

En premier temps, pour le troisième terme de(3.57), on a :

$$\begin{aligned}
-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, yy_\rho d\varrho d\rho dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_0^1 |u_2(\varrho)|\, \frac{d}{d\rho} y^2 d\rho d\varrho dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\, d\varrho dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,0,\varrho,t)\, d\varrho dx.
\end{aligned}$$

Mais, $y(x,0,\varrho,t) = \psi$, alors

$$-\int_0^1\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, yy_\rho d\varrho d\rho dx = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\, d\varrho dx + \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho\right)\int_0^1 \psi^2 dx. \tag{3.58}$$

En second, pour le deuxième terme de (3.57) on applique l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, \psi y(x,1,\varrho,t) d\varrho dx &\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho\right)\int_0^1 \psi^2 dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\, d\varrho dx.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Puis, en intégrant le dernier terme du membre droite de(3.57), on a :

$$-\int_0^1\int_0^\infty g(p)\varphi_{xp}(p)\varphi_x(p) dp dx = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\infty g'(p)\varphi_x^2(p) dp dx. \tag{3.60}$$

En remplaçant les équations (3.58), (3.59) et (3.60) dans l'équation (3.57), on trouve :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &\leq -\mu_1\int_0^1 \psi^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\, d\varrho dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho\right)\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho\right)\int_0^1 \psi^2 dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y^2(x,1,\varrho,t)\, d\varrho dx + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\infty g'(p)\varphi_x^2(p) dp dx \\
&\leq -\left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, d\varrho\right)\int_0^1 \psi^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^\infty g'(p)\varphi_x^2(p) dp dx
\end{aligned}$$

L'hypothèse **H4** donne que **:**

$$\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Donc, l'opérateur A est dissipatif.

Ensuite, on prouve que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif. Soit $\lambda > 0$, on va démontrer que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif (c-à-d : $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$). En effet, pour tout $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$, on cherche un $V = (u, v, \phi, \psi, y, \varphi) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, telque :

$$(\lambda I - \mathcal{A})\, V = F. \tag{3.61}$$

En utilisant la définition de l'opérateur $\mathcal{A}$ et l'équation (**??**) , on trouve :

$$\begin{cases} \lambda u - v & = f_1 \in H_*^1(0,1), \\ \rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\phi_x & = \rho f_2 \in L_*^2(0,1), \\ \lambda\phi - \psi & = f_3 \in H_0^1(0,1), \\ J\lambda\psi - l\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - \int\limits_0^\infty g(p)\varphi_{xx}(p)dp & \\ +\mu_1\psi + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, y(x,1,\varrho,t)d\varrho & = Jf_4 \in L^2(0,1), \\ \lambda\varrho y\,(x,\rho,\varrho,t) + y_\rho\,(x,\rho,\varrho,t) & = \varrho f_5 \in L^2\left((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2)\right), \\ \lambda\varphi - \psi + \varphi_s & = f_6 \in L_g(0,1). \end{cases} \tag{3.62}$$

On va résoudre la cinquième équation du système (3.62) qui est :

$$\lambda\varrho y + y_\rho \quad = \quad \varrho f_5.$$

Pour la résolution du cinquième équation du système (3.62) qui est une équation différentielle linéaire de premier ordre non homogène, on utilise la méthode des variation des constante , on trouve :

$$y\,(x,\rho,\varrho,t) \quad = \quad \psi e^{-\lambda\varrho\rho} + \varrho e^{-\lambda\varrho\rho}\int\limits_0^\rho e^{\lambda\varrho\sigma} f_5\,(x,\sigma,\varrho,t)\, d\sigma, \tag{3.63}$$

mais, on a :

$$\psi = \phi_t. \tag{3.64}$$

En substituant (3.64) dans (3.63), on obtient :

$$y(x,\rho,\varrho,t) = \phi_t e^{-\lambda\varrho\rho} + \varrho e^{-\lambda\varrho\rho}\int_0^\rho e^{\lambda\varrho\sigma} f_5(x,\sigma,\varrho,t)\, d\sigma.$$

On voit que pour $\rho = 1$, on a :

$$y(x,1,\varrho,t) = \phi_t e^{-\lambda\varrho} + \varrho e^{-\lambda\varrho}\int_0^1 e^{\lambda\varrho\sigma} f_5(x,\sigma,\varrho,t)\, d\sigma.$$

De même, la solution de la dernière équation du système (3.62) est donné par :

$$\varphi = e^{\lambda s}\int_0^s (\phi_t + f_6(\tau))\, e^{\tau} d\tau.$$

Maintenant, on a trouvé les deux fonctions y et φ. Il reste de chercher que les fonctions u, v, ψ et ϕ sont existe.

On remarque que :

$$v = \lambda u - f_1 \text{ et } \psi = \lambda\phi - f_3$$

Donc il suffit de montrer l'existence des deux fonctions u et ϕ.

En appliquant le théorème de Lax-Milgram.

D'après (3.62) ,on a :

$$\begin{cases} \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = h_1 \in L^2_*(0,1), \\ \mu_3\phi - \mu_4\phi_{xx} + bu_x = h_2 \in L^2(0,1), \end{cases} \tag{3.65}$$

où

$$\begin{cases} \mu_3 &= J\lambda^2 + \xi + \lambda\mu_1 + \lambda\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, e^{-\lambda\varrho} d\varrho, \\ \mu_4 &= l + \int\limits_0^\infty g(p) \left(1 - e^{\lambda p}\right) dp, \\ h_1 &= \rho\,(\lambda f_1 + f_2)\,, \\ h_2 &= \left(J\lambda + \mu_1 + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |u_2(\varrho)|\, e^{-\lambda\varrho} d\varrho\right) f_3 + J f_4 \\ & \quad -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varrho\, |u_2(\varrho)|\, e^{\lambda\varrho} \int\limits_0^1 e^{\lambda\varrho\sigma} f_5\,(x,\sigma,\varrho,t)\, d\sigma \\ & \quad +\int\limits_0^\infty g(p) e^{\lambda p} \int\limits_0^p e^{\tau}\,(\psi + f_6\,(\tau))_{xx}\, d\tau dp. \end{cases}$$

On multiple la première (resp.la deuxième) équations de 3.65 par $\hat{u} \in H_*^1\,(0,1)$ $\left(\text{resp :} \hat{\phi} \in H_0^1\,(0,1)\right)$, et on utilise une intégration par partie sur l'interval $(0,1)\,,$ on trouve :

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \rho\lambda^2 u\hat{u} dx + \int\limits_0^1 \mu u_x \hat{u}_x dx - \int\limits_0^1 b\phi_x \hat{u} dx &= \int\limits_0^1 h_1 \hat{u} dx, \\ \int\limits_0^1 \mu_3 \phi\hat{\phi} dx + \int\limits_0^1 \mu_4 \phi_x \hat{\phi}_x dx + \int\limits_0^1 b u_x \hat{\phi} dx &= \int\limits_0^1 h_2 \hat{\phi} dx, \end{cases} \tag{3.66}$$

pour tout $\hat{u}\ ,\ \hat{\phi} \in H_*^1\,(0,1) \times H_0^1\,(0,1)\,.$

On additionne les deux equations de $(3.66)\,,$ on trouve :

$$\begin{aligned} &\rho\lambda^2 \int\limits_0^1 u\hat{u} dx + \mu\int\limits_0^1 u_x \hat{u}_x dx + \mu_3 \int\limits_0^1 \phi\hat{\phi} dx + \mu_4 \int\limits_0^1 \phi_x \hat{\phi}_x dx + b\int\limits_0^1 \left(u_x \hat{\phi} + \phi\hat{u}_x\right) dx \\ = &\int\limits_0^1 h_1 \hat{u} dx + \int\limits_0^1 h_2 \hat{\phi} dx. \end{aligned} \tag{3.67}$$

On définit sur $V = [H_*^1\,(0,1) \times H_0^1\,(0,1)]$ la forme bilinéaire $B : V^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et la forme linéaire $Y : V \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} B\left((u,\phi)\,, \left(\hat{u},\hat{\phi}\right)\right) &= \rho\lambda^2 \int\limits_0^1 u\hat{u} dx + \mu\int\limits_0^1 u_x \hat{u}_x dx + \mu_3 \int\limits_0^1 \phi\hat{\phi} dx \\ &\quad + \mu_4 \int\limits_0^1 \phi_x \hat{\phi}_x dx + b\int\limits_0^1 \left(u_x \hat{\phi} + \phi\hat{u}_x\right) dx. \\ Y\left(\hat{u},\hat{\phi}\right) &= \int\limits_0^1 h_1 \hat{u} dx + \int\limits_0^1 h_2 \hat{\phi} dx. \end{aligned} \tag{3.68}$$

tel que V muni de la norme suivante :

$$\|(u,\phi)\|_V^2 \quad = \quad \|u\|_2^2 + \|\phi\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\phi_x\|_2^2 \,.$$

On remarque que la résolution du système (3.66) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ (u,\phi) \in H_*^1(0,1) \ \text{ telle que :} \\ B\left((u,\phi),\left(\hat{u},\hat{\phi}\right)\right) = Y\left(\hat{u},\hat{\phi}\right), \quad \text{pour tout } \ \left(\hat{u},\hat{\phi}\right) \in H_0^1(0,1)\,. \end{cases} \tag{3.69}$$

Maintenant, pour montrer l'éxistence et l'unicité de la solution de problème (3.69) , on applique le théorème de Lax-Milgram. Alors, pour cela, on prouve que :

- V est une espace de Hilbert.
- La forme bilinéaire $B(.,.)$ est continue sur $V \times V$.
- La forme bilinéaire $B(.,.)$ est coercive sur V.
- La forme linéaire $Y(.)$ est continue sur V.

On a V est une espace de Hilbert.

Tout d'abord, Il es facile de monter que la forme bilinéaire B et la forme linéaire Y sont continues.

★ **Montrons La coèrcivité de la forme bilinéaire** B :

On a la forme bilinéaire $B(.,.)$ est coercive sur $V \times V$ si et seulement s'il existe un $\beta > 0$ tel que :

$$B\left((u,\phi),(u,\phi)\right) \geq \beta \left\|(u,\phi)\right\|_V^2, \ \text{ pour tout } \ (u,\phi) \in V.$$

Soit $(u,\phi) \in V$, on a :

$$B\left((u,\phi),(u,\phi)\right) \quad = \quad \rho\lambda^2 \int_0^1 u^2 dx + \mu \int_0^1 u_x^2 dx + \mu_3 \int_0^1 \phi^2 dx + \mu_4 \int_0^1 \phi_x^2 dx + 2b \int_0^1 u_x \phi dx.$$

Par contre on peut écrire

$$\mu u_x^2 + 2b u_x \phi + \mu_3 \phi^2 \quad = \quad \frac{1}{2}\left[\mu\left(u_x + \frac{b}{\mu}\phi\right)^2 + \mu_3\left(\phi + \frac{b}{\mu_3}u_x\right)^2 + \left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right)u_x^2 + \left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\phi^2\right].$$

Mais on a :

$$\mu\xi \quad > \quad b^2.$$

En déduire que :

$$\mu u_x^2 + 2bu_x\phi + \mu_3\phi^2 \quad > \quad \frac{1}{2}\left[\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right)u_x^2 + \left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\phi^2\right].$$

Alors

$$\begin{aligned} B\left((u,\phi),(u,\phi)\right) &> \rho\lambda^2\int_0^1 u^2dx + \mu_4\int_0^1 \phi_x^2dx + \frac{1}{2}\left[\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right)u_x^2 + \left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\phi^2\right] \\ &> \rho\lambda^2\left\|u\right\|_2^2 + \mu_4\left\|\phi_x\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right)\left\|u_x\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\left\|\phi\right\|_2^2 \\ &> \min\left(\rho\lambda^2, \mu_4, \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right), \frac{1}{2}\left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\right)\left(\|u\|_2^2 + \|\phi_x\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\phi\|_2^2\right) \\ &> \min\left(\rho\lambda^2, \mu_4, \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right), \frac{1}{2}\left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\right)\left\|(u,\phi)\right\|_V^2. \end{aligned}$$

On prend $\beta = \min\left(\rho\lambda^2, \mu_4, \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3}\right), \frac{1}{2}\left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu}\right)\right)$, qui est positive alors il existe un $\beta > 0$ tel que :

$$B\left((u,\phi),(u,\phi)\right) \quad \geq \quad \beta\left\|(u,\phi)\right\|_V^2.$$

Donc, $B(.,.)$ est coercive sur V.

D'aprés le théorème de Lax-Milgram on conclut qu'il existe une solution unique $X = (u,\phi) \in V$ telle que :

$$B\left((u,\phi),\left(\hat{u},\hat{\phi}\right)\right) = Y\left(\hat{u},\hat{\phi}\right).$$

★ La régularité de la solution

D'après l'équation (3.62), on a :

$$v = \lambda u - f_1 \in H_*^1(0,1), \psi = \lambda\phi - f_3 \in H_0^1(0,1) \text{ et } y, y_\rho \in L^2((0,1)\times(0,1)\times(\tau_1,\tau_2))$$

Si $\hat{u} = 0 \in H_*^1(0,1)$ dans(3.67), on a :

$$\mu_3\int_0^1 \phi\hat{\phi}dx + \mu_4\int_0^1 \phi_x\hat{\phi}_xdx + b\int_0^1 u_x\hat{\phi}dx = \int_0^1 h_2\hat{\phi}dx.$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\mu_3\int_0^1 \phi\hat{\phi}dx - \mu_4\int_0^1 \phi_{xx}\hat{\phi}dx + b\int_0^1 u_x\hat{\phi}dx = \int_0^1 h_2\hat{\phi}dx,$$

alors

$$\int_0^1 \left(\mu_3\phi - \mu_4\phi_{xx} + bu_x - h_2\right)\hat{\phi}dx = 0, \quad \forall\hat{\phi} \in H_0^1\left(0,1\right),$$

on a, $\hat{\phi} \neq 0$ donc :

$$\mu_3\phi - \mu_4\phi_{xx} + bu_x - h_2 = 0.$$

Or, $\phi = \frac{1}{\lambda}\left(\psi + f_3\right)$ alors :

$$\mu_3\left(\frac{1}{\lambda}\left(\psi + f_3\right)\right) - \mu_4\phi_{xx} + bu_x - h_2 = 0$$

Donc

$$\phi_{xx} = \frac{1}{\lambda\mu_4}\mu_3\psi + \frac{1}{\lambda\mu_4}\mu_3 f_3 + \frac{b}{\mu_4}u_x - \frac{1}{\mu_4}h_2$$

alors $\phi_{xx} \in L^2\left(0,1\right)$. Donc $\phi \in H^2\left(0,1\right) \cap H_0^1\left(0,1\right)$.

De même, si $\hat{\phi} = 0 \in H_0^1\left(0,1\right)$, on a :

$$\lambda^2\rho\int_0^1 u\hat{u}dx + \mu\int_0^1 u_x\hat{u}_x dx + b\int_0^1 \phi\hat{u}_x dx = \int_0^1 h_1\hat{u}dx.$$

On utilise l'intégration par partie, on trouve :

$$\lambda^2\rho\int_0^1 u\hat{u}dx - \mu\int_0^1 u_{xx}\hat{u}dx - b\int_0^1 \phi_x\hat{u}dx = \int_0^1 h_1\hat{u}dx,$$

alors

$$\int_0^1 \left(\lambda^2\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x - h_1\right)\hat{u}dx = 0, \quad \forall\hat{u} \in H_*^1\left(0,1\right).$$

On a, $\hat{u} \neq 0$ donc :

$$\lambda^2\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x - h_1 = 0,$$

mais, $u = \frac{1}{\lambda}\left(v + f_1\right)$, alors

$$\lambda^2\rho\left(\frac{1}{\lambda}\left(v + f_1\right)\right) - \mu u_{xx} - b\phi_x - h_1 = 0,$$

donc
$$u_{xx} = \frac{\lambda\rho}{\mu}v + \frac{\lambda\rho}{\mu}f_1 - \frac{b}{\mu}\phi_x - \frac{1}{\mu}h_1.$$
Alors, $u_{xx} \in L_*^2(0,1)$. Donc $u \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)$.

Donc, il existe$V = (u, v, \phi, \psi, y, \varphi) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solution de $(\lambda I - \mathcal{A})V = F$, pour tout $F \in \mathcal{H}$, c-à-d $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, alors $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

Donc $\mathcal{A}$ maximal.

On a $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal alors $\mathcal{A}$ est m-dissipatif. ■

Lemme 3.1 *L'opérateur Γ définit dans (3.52) est localement Lipschitzien dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. On montre que l'opérateur Γ définit dans (3.52) est localement Lipschitzien dans $\mathcal{H}$.

On sait que Γ est Lipschitzien dans $\mathcal{H}$ si pour tout $U, \hat{U} \in \mathcal{H}$ on a :
$$\left\|\Gamma(U) - \Gamma\left(\hat{U}\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leq M_1 \left\|U - \hat{U}\right\|_{\mathcal{H}}.$$
Soient $U = (u, v, \phi, \psi, y, \varphi)^T$, et $\hat{U} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{\phi}, \hat{\psi}, \hat{y}, \hat{\varphi})^T$ dans $\mathcal{H}$. On a :
$$\begin{aligned}\left\|\Gamma(U) - \Gamma\left(\hat{U}\right)\right\|_{\mathcal{H}} &= \left\|\left(0,0,0,\tfrac{-\alpha(t)}{j}f(\psi),0,0\right)^T - \left(0,0,0,\tfrac{-\alpha(t)}{j}f\left(\hat{\psi}\right),0,0\right)^T\right\|_{\mathcal{H}} \\ &= \left\|\left(0,0,0,f(\psi) - f\left(\hat{\psi}\right),0,0\right)^T\right\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

alors
$$\left\|\Gamma(U) - \Gamma\left(\hat{U}\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leq M_0 \left\|f(\psi) - f\left(\hat{\psi}\right)\right\|_{L^2(0,1)}.$$
D'aprés l'hypothèse **H3**, on a :
$$\left\|f(\psi) - f\left(\hat{\psi}\right)\right\|_{L^2(0,1)} \leq k_0\left(\|\psi\|^\beta + \left\|\hat{\psi}\right\|^\beta\right)\left\|\psi - \hat{\psi}\right\|.$$
Par l'inégalité de Poincaré, on trouve :
$$k_0\left(\|\psi\|^\beta + \left\|\hat{\psi}\right\|^\beta\right)\left\|\psi - \hat{\psi}\right\| \leq k_1\left\|\psi_x - \hat{\psi}_x\right\|_{L^2(0,1)},$$

alors

$$\left\|f(\psi)-f\left(\hat{\psi}\right)\right\|_{L^2(0,1)} \leq k_1\left\|\psi_x-\hat{\psi}_x\right\|_{L^2(0,1)},$$

alors, on obtient :

$$\left\|\Gamma(U)-\Gamma\left(\hat{U}\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leq M_1\left\|U-\hat{U}\right\|_{\mathcal{H}}.$$

Donc, Γ est localement Lipschitzien dans $\mathcal{H}$. ■

Proposition 3.4 *Le problème* (3.40), (3.41) *et* (3.42) *admet une solution unique.*

Preuve. D'après les deux lemmes précédents, on a A qui est définit par (3.51) est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe dans $\mathcal{H}$ et l'opérateur Γ définit dans (3.52) est localement Lipschitzien dans $\mathcal{H}$.
Appliquant le théorème (2.17) on voit qu'il existe une solution unique du problème. ■

Conclusion générale

S'intéressant à l'analyse de problèmes aux limites régis par des équations différentielles et des systèmes différentielles.

A travers le troisième chapitre, on a exposé l'utilisations de la théorie des semi groupes pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de l'équation des ondes, le système de Timoshenko et le système de poreux-élastique amorti, qui peuvent s'écrire sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait.

Plus précisément, on a donné des conditions nécessaires pour que les problèmes précédents soit bien posé, en utilisant, la théorie des semi groupes.

On a montré aussi que les solutions des problèmes précédents définissent un semi groupe fortement continue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Y.Abdelbadie,** La théorie de Semi-Groupes et les équations aux dérivées partielles à retard, MiMOIRE DE MASTER, UNIVERSIT ABOU BEKR BELKAID TLEMCEN, 2019.

[2] **O.Bouanane,A.Boukezzoula** Système d'évolution à base du problème de Cauchy abstarit dans le cas hyperbolique en théorie des semi-groupe, Centre Universitaire Abdelhafide Boussouf Mila.

[3] **H.BREZIS,** Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983, ISBN :2-225-77198-7.

[4] **F.Dardalhon,FedericoVerga,** le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problème d'évolution semi-linéaires mémoire encadré par Florence Hubert 7 juin 2006, 43-59,8.

[5] **B.S.Houari, Y.Laskri,** A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedbach, Applied Mathematics and Computation 217(2010) 2857-2869.

[6] **S.Leulmi**, Semi-Groupe, Note de cours, Université 20 Aout 1955 de Skikda, 2020.

[7] **L.D.LEMLE,** *Autour des propriétés des Semi-Groupe volume 31,* 99-145.

[8] **I.Mazari,** EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Thierry Gallay(cours) & Julien Vovelle (TD), Cours de MI-ENS de Lyon Année scolaire 2014-2015.

[9] **A.Moumen,D.Ouachenane,K.Bouhali and Y.Altayeb** Well-Prosedness and Stability Results for a Damped Porous-Elastics System with Infinite Memory and Distributed Delay Terms Mathematicul Applications 2021.

[10] **A.pazy,** Semi-Groupe of lineair operators and Applications to Partial Differential Equations,Grivat Ram 91904 jerusalem Israel,100-109.

[11] **J.Pierre Raymond,** équation d'évolution, Université Paul Sabatier ,6-11.