وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Août 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كليـــــــية العلـــــوم

قسم الرياضيات

N[0] : U.S/F.S/D.M/……/2024.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Méthode de Galerkin pour l'équation de Boussinesq à mémoire viscoélastique et à conditions intégrales

Option : Analyse Fonctionnelle Appliquée

Par : ***TEBTOUB Amel***

Encadreur : DRAIFIA Ala Eddine — M.C.B U. AFLO
Co-Encadreur : LALLOUCHE Abdallah — M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : BOUZATOUTA Lamine — M.C.A U. SKIKDA
Examinateur : LATRECHE Abd El Karim — M.C.B U. SKIKDA

Année : 2023/2024

Table des matières

1 Préliminaires **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.2 Convergence faible* . . . 11
1.2.1 Définitions et premières propriétés . . . 11
1.3 Espace de Hilbert . . . 12
1.3.1 Espace normé et espace de Banach . . . 12
1.3.2 Espace de Hilbert . . . 12
1.3.3 Eléments orthogonaux. Supplémentaire orthogonal . . . 13
1.3.4 Système orthonormal . . . 14
1.4 Espace de Sobolev . . . 14
1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre entier H^m . . . 14
1.4.2 Espace de Sobolev $W^{m,p}$ . . . 15
1.5 L'injection continue et compacte . . . 17
1.6 Quelques Inégalités utiles . . . 17

2 L'étude de l'existence de la solution faible du problème posé par l'application de la méthode de Galerkin **22**
2.1 Introduction . . . 22
2.2 L'espace d'approximation de Galerkin d'ordre m . . . 23
2.3 Le schéma de la méthode de Galerkin . . . 23
2.4 Solution de l'équation de Boussinesq avec une condition non locale . . . 24

3 L'étude de l'unicité de la solution de l'équation de Boussinesq avec une condition non locale **42**
3.1 Introduction . . . 42

3.2 L'unicité de la solution 42

Remerciements

Je remercie Dieu tout puissant, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir ce travail
Je tiens à adressé mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur **M. Draifia Ala Eddine A maitre de conférence à Centre Universitaire Aflo** pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils judicieux que j'ai pu mener à bien ce travail de recherche.
Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour adresser mes remerciements aussi au mon **Co-encadreur M. Lallouche Abdallah,** pour sa disponibilité et son souci constant afin que cette travail se passe dans les meilleures conditions possible.
J'exprime mes remerciements à **M. Bouzatouta Lamine**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire.
Je remercie vivement Monsieur **M. Letrache Abd El Karim**, qui a accepté de juger ce mémoire.
Finalement, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui ont toujours soutenues et à tout ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.
Merci à vous tous

Dédicace 1

Je tiens c'est avec grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

Mon père .

Mes chers frères.

Résumé

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution généralisée pour un problème de Boussinesq avec une condition non locale en utilisant les techniques de Faedo-Galerkin. Ce travail est composé de trois chapitres :
Nous avons débuté le premier chapitre de ce mémoire par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires pour ce travail et les inégalités utilisées dans cette mémoire, et quelques théorèmes.
Dans le deuxième chapitre : on a traité un problème aux limites avec condition non locale pour une équation de Boussinesq. En utilisant la méthode de Galerkin pour démontrer l'existence de la solution faible du problème posé.
Dans le troisième chapitre, on a prouvé que cette solution est unique.

Mots clés : Espaces fonctionnelles ; Méthode de Faedo-Galerkin ; Conditions intégrales ; Équation de Boussinesq ; Solution généralisé.

Abstract

The main objective of this work is the study of the existence and uniqueness of the generalized solution for a Boussinesq problem with a nonlocal condition using Faedo-Galerkin techniques. This work is composed of three chapters :
We started the first chapter of this thesis with reminders of some basic preliminary notions and the tools necessary for this work and the inequalities used in this thesis, and some theorems.
In the second chapter : we dealt with a boundary problem with nonlocal condition for a Boussinesq equation. By using Galerkin's method to demonstrate the existence of the weak solution of the problem posed.
In the third chapter, we proved that this solution is unique.

Key words : Functional spaces ; Faedo-Galerkin method ; Integral conditions ; Boussinesq equation ; Approximate solution.

Résumé en arabe

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية الحل الضعيف لمشكلة بوسينسك مع شرط غير محلي بإستخدام طريقة فايدو-غالاركين. يتكون هذا العمل من ثلاثة فصول:

الفصل الأول تناولنا فيه تذكير ببعض المفاهيم الأساسية والأدوات اللازمة لهذا العمل إضافة إلى بعض المتراجحات والنظريات المستخدمة في هذا البحث.

في الفصل الثاني تناولنا إثبات لوجود الحل الضعيف لمشكلة بوسينسك مع شرط غير محلي بإستخدام طريقة فايدو-غالاركين.

في الفصل الثالث أثبتنا أن هذا الحل وحيد.

Notations

Nous utilisons les notations suivantes tout au long du travail

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: la frontière de Ω.

$|\Omega|$: mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω,

$|\partial\Omega|$: mesure de Lebesgue de frontière de Ω.

x : un point de $\mathbb{R}^n$; $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$.

η : la normal unitaire extérieure à Ω.

Δ : opérateure différentielle est appelé Laplacien.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier le problème de valeur aux limites mixtes non local suivant pour l'équation de Boussinesq à mémoire pour tout $(x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T)$, où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec la frontière $\partial\Omega$

$$v_{tt} - \alpha^2 \Delta v - \beta^2 \Delta v_{tt} + \int_0^t h(t-s)\, \Delta v(s)\, ds = |v|^{p-2} v, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1.1.1}$$

avec les condition initiale

$$v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1.2}$$

et la condition intégrale

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = g(x,t) + \int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.1.3}$$

où $2 < p \leq \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale, $T < \infty$, $h(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et $g(x,t)$, $h(t)$, $v_0(x)$, et $v_1(x)$ sont données des fonctions satisfaisant des conditions précisées ultérirurement.

Les équations de Boussinesq décrivent un grand groupe de phénomènes des vagues dispersives non linéaires, tels que la propagation des vagues longues sur la surface d'eau peu profonde. Le but de ce type de modélisation est de réduire les problèmes de trois dimensions à deux dimensions. Les équations de Boussinesq ont une forme différentielle facile par apport à celles d'Euler ou de Navier-Stokes, qui peuvent poser des difficultés dans leur approximation numérique. Les équations de Boussinesq possèdent une structure hyperbolique combiné avec des dérivés d'ordre élevé pour modéliser la dispersion des vagues. Le point de départ pour lamodélisation des vagues d'eau sont les équations de Navier-Stokes incompressibles. Cependant, la modélisation mathématique de ces équations est un problème en trois dimensions avec une limite de surface libre, les équations de Boussinesq décrivant les modèles des vagues d'eau peu profonde en deux dimensions.

Les différentes formes des équations de Boussinesq

Les différentes possibilités des équations de Boussinesq dans le choix de la grandeur de la vitesse. Dans la plupart des cas, on choisit la vitesse à un niveau d'eau arbitrair. La performance du modèle résultant est très sensible aux propriétés de la propagation. Le bon choix de la variable de vitesse, augmente considérablement l'amélioration de la propagation des vagues.

Il y a des différentes équations de Boussinesq, les plus importantes :

1. Boussinesq's Boussinesq Equation (BBE) : manque le quatrième dérivé mixte.

2. Boussinesq Paradigm Equation (BPE) : une application non linéaire sous la forme générale suivante :

$$v_{tt} = \Delta \left(v - \alpha v^2 + \beta_1 v_{tt} - \beta_2 \Delta v \right),$$

où v est l'élévation de la surface, β_1 et β_2 sont deux coefficients de la propaguation, et α est un paramètre d'amplitude.

L'objectif de ce mémoire est de donner l'application de la méthode de Galerkin dans l'étude de l'existence du solution généralisée d'un problème mixte avec condition aux limites non clasique Introduction sique pour une équation de Boussinesq de n-dimensions.

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très robuste. L'idée de la méthode est la suivante :

Partant d'un problème posé dans un espace de dimension infinie. On procède d'abord à une approximation dans une suite de sous espaces de dimension finie.

On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que le résoudre directement en dimension infinie.

Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre a la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter qu'outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit généralement un procédé constructif d'approximation.

Ce travail est composé de trois chapitres : Nous avons débuté le premier chapitre de ce mémoire par des rappels de certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires pour ce travail et les inégalités utilisées dans cette mémoire, et quelques théorèmes. Dans le deuxième chapitre : on a traité un problème aux limites avec condition non locale pour une équation de Boussinesq. En utilisant la méthode de Galerkin pour démontrer l'existence de la solution faible du problème posé. Dans le troisième chapitre, on a prouvé que cette solution est unique.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail. Nous rappelons quelques définitions, théorèmes, corollaires, lemmes et résultats de base sur les équations différentielles, les systèmes différentiels, et les équations aux dérivées partielles, ainsi qu'un petit rappel sur l'analyse fonctionnelle. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.2 Convergence faible*

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Definition 1.1 *Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E', et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

La limite faible est toujours unique car si f et g sont deux limites faible* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\langle f-g, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, puis par passage au sup en x, il vient d'après la définition de la norme dans E' que $\|f-g\|_{E'} = 0$, soit $f = g$.*

1.3 Espace de Hilbert

1.3.1 Espace normé et espace de Banach

On appelle norme sur un espace vectorielle E une application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que : (si on note $||v||$ la nome de v)

1. $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0.$

2. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (inégalité triangulaire).

3. $||\lambda v|| = |\lambda| \, ||v||$, $\forall v \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On appelle distance associée a la norme $||.||$ la quantité $(d\,(v, w) = ||v - w||\ )$.

Remark 1.1 *($(E, ||.||\ )$ est un espace Normé).*

Equivalence des normes

Definition 1.2 *Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur V on dit que ces deux normes sont équivalents s'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$\forall v \in V, \ c_1 \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2 \|v\|_1 .$$

Definition 1.3 *(Suite de Cauchy) Soit $(E, \ ||.||)$ espace normé et u_n une suite d'éléments de E telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \ \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow ||u_n - u_m|| < \varepsilon.$$

La suite u_n s'appelle une suite de Cauchy.

Definition 1.4 *(Espace Complet) Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace complet si toute suite de Cauchy u_n de l'espace E est converge vers un élément u de E.*

Definition 1.5 *(Espace de Banach) Soit $(E, ||.||\ )$ un espace normé, on dit que E est un espace de Banach si E est un espace complet c-a-d toute suite de Cauchy de l'espace E est convergente vers un élément u de E.*

1.3.2 Espace de Hilbert

Definition 1.6 *(Produit Scolaire) Soit E un espace vectoriel, on appelle application de $E \times E$ dans le corps $\mathbb{C}$ définit par $(.,.) : \ E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, un produit Scalaire si*

1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$ *pour tout $u, v \in E$.*

2. $(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda\,(u_1, v) + (u_2, v)$*, pour tout u_1, u_2 et $v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

3. $(u, \lambda v) = \overline{\lambda}\,(u, v)$ *tel que* $\lambda \in \mathbb{C}$.
4. $(u, u) \geq 0$ *et* $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Definition 1.7 *(Espace de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace de Banach* $(E,\ ||.||_E)$ *espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée*

$$||u||_E = (u, u)^{\frac{1}{2}} \ \ (i, e) \ \ ||u||_E^2 = (u, u)\,.$$

Lemma 1.1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *; L'espace* $L^2(\Omega)$ *est définit par*

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : /u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Est un espace de Hilbert munit de la norme suivante

$$\begin{aligned} ||u||_{L^2(\Omega)} \ &: = ||u||_2 \\ &: = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Et de produit Scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega u\,(x)\, v\,(x)\, dx \right) \text{ pour tout } u, v \in L^2(\Omega).$$

1.3.3 Eléments orthogonaux. Supplémentaire orthogonal

Definition 1.8 *Soit* E *un espace muni d'un produit scalaire. Chaque fois que* $(x, y) = 0$*, nous dirons que les éléments* x *et* y *sont orthogonaux et nous le noterons* $x \perp y$*. De toute évidence, l'élément nul de* E *est orthogonal à tout élément de* E*.*

Definition 1.9 *Un ensemble* L *dans un espace vectoriel* E *s'appelle variété linéaire (ensemble linéaire) si pour deux éléments quelconques* x *et* $y \in L$ *et deux scalaires* $\lambda,\ \mu$ *; la combinaison linéaire* $\lambda x + \mu y \in L$*.*

Definition 1.10 *Soit* L *une variété linéaire dans un espace de Hilbert* H*. L'ensemble des éléments de* H *orthogonaux à* L *est appelé supplémentaire orthogonal de* L *et est noté* $L^\perp$*.*

Theorem 1.1 *Soit* L *une variété linéaire dans un espace de Hilbert* H*. Alors, pour que* L *soit dense dans* H*, il faut et il suffit que* $L^\perp = \{0\}$ *.*

1.3.4 Système orthonormal

Definition 1.11 *Soit $(E_n)_{n\in N}$ une suite de sous espace fermé de E, on dit que E est une somme Hilbertienne de $(E_n)_{n\in N}$, notée $E = \oplus_n E_n$ si*

1. *Les $(E_n)_{n\in N}$ sont deux à deux orthogonaux : $(u, v) = 0$, pour tout $u \in E_m,\ v \in E_n,\ m \neq n$.*
2. *Vect $\overline{(E_n, n \in \mathbb{N}\ )} = E$.*

Definition 1.12 *(Base Hilbertienne) Une base Hilbertienne est une suite $(e_n)_{n\in N}$ d'éléments de E tel que*

1. $||e_n|| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \langle e_m,\ e_n\rangle = 0$ *si* $m \neq n,\ (e_m \perp e_n,\ m \neq n)$.
2. *et Vect $(e_n,\ n \in \mathbb{N}) = E$.*

Definition 1.13 *(Espace Séparable) Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace Séparable.*

Theorem 1.2 *Toute espace de Hilbert Séparable admet une base Hilbertienne.*

1.4 Espace de Sobolev

1.4.1 Espace de Sobolev d'ordre entier H^m

Definition 1.14 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel, on appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$, l'ensemble*

$$H^m(\Omega) := \left\{u : \text{ mesurable tel que } D^a u \in L^2(\Omega),\ \forall a \in \mathbb{N}^n,\ |a| \leq m\right\}.$$

Où : $a = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in N^n$est un multi-indice et

$$D^a u := \frac{\partial^{|a|} u}{\partial_{x1}^{a_1} \partial_{x2}^{a_2} ... \partial_{x_n}^{a_n}}.$$

Désigne la dérivé d'ordre a aux sens des distributions

$$\begin{aligned} |a| \quad &: \ = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ &: \ = \sum_{i=1}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Quelques propriétés des espaces $H^m(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

1. On munit l'espace $H^m(\Omega)$ par le produit Scalaire

$$\begin{aligned}(u,v)_{H^m(\Omega)} &: = \sum_{|a|\leq m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)} \\ &: = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{1\leq|a|\leq m} (D^a u, D^a v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall u,v \in H^m(\Omega).\end{aligned}$$

2. la norme associée est donnée par

$$||u||_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{|a|\leq m} ||D^a u||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall u \in H^m(\Omega).$$

De plus il est bien connu que ce espace est un espace de Hilbert.

3. Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$; $H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega)$ et $H^m \subset H^{m-1} \subset$ ... $\subset H^1 \subset H^0 = L^2(\Omega)$ (injection continue).
4. Pour tout $m \geq 0,\ H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

1.4.2 Espace de Sobolev $\mathbf{W^{m,p}}$

Definition 1.15 (*Espace $L^p(\Omega)$*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.
On définit l'espace des classes des fonctions $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable},\ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Est muni de la norme

$$\begin{aligned}||u||_{L^p(\Omega)} &: = ||u||_p \\ &: = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Definition 1.16 (*Espace $L^\infty(\Omega)$*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit aussi l'espace $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) := \{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, u \text{ mesurable},\ \exists c > 0,\ \text{telle que } |u(x)| < c, \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

Il sera muni de la norme du $\sup$ *−essentiel*

$$\begin{aligned}||u||_{L^\infty(\Omega)} &: = ||u||_\infty \\ &: = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \\ &: = \inf \{ c : |u(x)| \leq c \ \text{ p.p sur } \Omega \}.\end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Remark 1.2 *L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert si $(p=2)$, (i.e) $(L^2(\Omega)$ est espace de Hilbert).*

Definition 1.17 (*Espace de Sobolev $W^{m,p}$*)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 1$ et p un nombre entier tel que $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme suite

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega), \text{ tel que } D^a u \in L^p(\Omega), \ \forall a \in \mathbb{N}^n, \ |a| \leq m \right\}.$$

Où : $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{N}^n$, est un multi-indice et

$$D^a := \frac{\partial^{|a|}}{\partial_{x_1}^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} ... \partial_{x_n}^{a_n}},$$

avec

$$\begin{aligned} |a| \ &: = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &: = a_1 + a_2 + ... + a_n. \end{aligned}$$

Definition 1.18 (*Espace H_0^1*) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$;*
1. *On appelle H_0^1 l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans H^1 ce qui on note aussi $H_0^1 = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$.*
2. *Pour $m > 0$, $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous-espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans*

$$W^{m,p}(\Omega) : W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Est le produit scalaire de $W_0^{1,2}(\Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned} (u,v)_{W^{2,1}(\Omega)} \ &: = \int_\Omega (uv + u_x v_x)\, dx \\ &: = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quelques propriétés des espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1. L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{m,p}(\Omega)} \ &: = ||u||_{p,\Omega}^m \\ &: = \left(\int_\Omega \sum_{a=0}^{m} \sum_{(a)} \left| \frac{\partial^a u}{\partial_x^{a_1} \partial_{x_2}^{a_2} ... \partial_{x_n}^{a_n}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &: = ||u||_{L^p} + \sum_{1 \leq |a| \leq m} ||D^a u||_{L^p}. \end{aligned}$$

2. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.
3. Pour $p = 2$: $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
4. Pour $m = 0$: $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

1.5 L'injection continue et compacte

Definition 1.19 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous-e.v.de F on notera $E \hookrightarrow F$ on dira que cette inclusion est :*

*- **Continue :** et on notera $E \hookrightarrow_{\text{continue}} F$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|u\|_F \leq \|u\|_E$ pour tout $u \in E$.*

*- **Compacte :** notée $E \hookrightarrow_{\text{compacte}} F$ si de toute borné dans E (pour la norme de E) il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F).*

*- **Dense :** si pour tout $(u \in F)$ il existe une sous-suite $(u_n) \subset E$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).*

Lemma 1.2 [27] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de classe C^1. Alors $H^1 \hookrightarrow L^p$, est continue si $1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$.*

1.6 Quelques Inégalités utiles

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) ; \int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(i.e) : \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

Inégalité de Young

Soit p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation suivante

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Inégalité de Young avec ε
Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2 .$$

Formule de Green
La formule de Green sur un domaine Ω est définie par

$$\int_\Omega \Delta uvdx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} vd\sigma - \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx.$$

Lemma 1.3 [28] (***Inégalité de trace***) *Soit $v \in H^1(\Omega)$, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$, alors*

$$\int_{\partial\Omega} v^2(x)\, dS_x \leq \gamma_\Omega \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} ,$$

où γ_Ω est une constante positive dépendant uniquement du domaine Ω.

Lemma 1.4 (***Lemme de Gronwall***) *Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda \geq 0$ p.p. et C_1, $C_2 \geq 0$. Soit $f \in L^1(0, T)$, $\Phi \geq 0$ presque partout, telle que $\lambda\Phi \in L^1(0, T)$ et*

$$f(t) \leq C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s) f(s)\, ds \right), \quad p.p\ t \in (0, T).$$

Alors on a

$$f(t) \leq C_1 exp \left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\, ds \right), \quad p.p\ t \in (0, T).$$

Proof. On a

$$\frac{f(t)}{C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s) f(s)\, ds \right)} \leq 1, \tag{1.5.1}$$

on multiplie (1.5.1) par $f(t)$ et intégrant de 0 à t, nous avons

$$\int_0^t \frac{f(s)\lambda(s)}{C_1 + C_2 \left(\int_0^s \lambda(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha \right)} ds \leq \int_0^t \lambda(s)\, ds,$$

alors

$$\ln \left[C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s) f(s)\, ds \right) \right] - \ln[C_1] \leq \int_0^t \lambda(s)\, ds,$$

donc

$$C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s) f(s)\, ds \right) \leq C_1 \exp \left(\int_0^t \lambda(s)\, ds \right),$$

et comme
$$f(t) \leq C_1 + C_2 \left(\int_0^t \lambda(s) f(s)\, ds \right),$$
alors
$$f(t) \leq C_1 exp \left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\, ds \right), \quad \text{p.p } t \in (0,T).$$
La preuve du Lemme 1.4 est complète. ■

Lemma 1.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert et borné de frontière $\partial\Omega$. Soit $2 \leq p \leq \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$. Alors il existe une constante C_p dépendant de p, N et Ω telle que*
$$\begin{aligned} & \left\| |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2 \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & C_p \left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)} \right)^{p-2} \right]^2 \|v_1 - v_2\|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$
pour tout $v_1,\ v_2 \in H^1(\Omega)$.

Proof. On a
$$\begin{aligned} & \left| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right| \\ =\ & \left| \int_0^1 \frac{d}{d\theta} \left[|v + \theta(u-v)|^{p-2} (v + \theta(u-v)) \right] d\theta \right| \\ =\ & (p-1)|u-v| \int_0^1 |v + \theta(u-v)|^{p-2}\, d\theta \\ \leq\ & (p-1)|u-v|\, |w|^{p-2}, \end{aligned}$$
tell que $w = |u| + |v|$. Et en appliquant l'inégalité de Hölder's, on obtient
$$\begin{aligned} & \left\| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right\| \\ & = \left(\int_\Omega \left| |u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq (p-1) \left(\int_\Omega |u-v|^2 |w|^{2p-4}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq (p-1) \left(\int_\Omega |u-v|^{2\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \left(\int_\Omega |w|^{(2p-4)\alpha'} dx \right)^{\frac{1}{2\alpha'}}, \quad \text{pour tout } \alpha > 1. \end{aligned}$$
Noter que, $H^1 \hookrightarrow L^q,\ 1 \leq q \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$, et $\|v\|_{L^q} \leqslant C_q \|v\|_{H^1},\ \forall v \in H^1,\ 1 \leq q \leq 2^*$.

Choisir $\alpha = \frac{2^*}{2} = \frac{N}{N-2}$, on a $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = \dfrac{\frac{N}{N-2}}{\frac{N}{N-2} - 1} = \frac{N}{2}$, et
$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |u-v|^{2\alpha}\, dx \right)^{\frac{1}{2\alpha}} &= \| u - v \|_{L^{2^*}} \\ &\leq C_{2^*} \|u-v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Par la condition $2 \leq p \leq \dfrac{2N-2}{N-2} = 2 + \dfrac{2}{N-2}$; $N \geq 3$ est équivalent à

$$0 \leq (2p-4)\,\alpha' \leq 2^* = \frac{2N}{N-2},$$

nous considérons donc deux cas comme suit.

Case 1. $1 \leq (2p-4)\,\alpha' \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$;

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |w|^{(2p-4)\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} &= \|w\|^{p-2}_{L^{2(p-2)\alpha'}} \\ &\leq \left(C_{2(p-2)\alpha'}\,\|w\|_{H^1}\right)^{p-2} \\ &= C^{p-2}_{2(p-2)\alpha'}\,\|w\|^{p-2}_{H^1}.\end{aligned}$$

Case 2. $0 \leq \beta = (2p-4)\,\alpha' < 1 \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$;

$$\begin{aligned}|w|^{(2p-4)\alpha'} &= |w|^\beta \\ &\leq 1 + |w|,\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |w|^{(2p-4)\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} &\leq \left(\int_\Omega (1+|w|)\,dx\right)dx^{\frac{1}{2\alpha'}} \\ &\leq \left(|\Omega| + |\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|w\|\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} \\ &\leq \left(|\Omega| + |\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|w\|_{H^1}\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} \\ &\leq \left(|\Omega| + |\Omega|^{\frac{1}{2}}\,\|w\|_{H^1}\right)^{\frac{1}{N}} \\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} + |\Omega|^{\frac{1}{2N}}\,\|\,w\,\|^{\frac{1}{N}}_{H^1}.\end{aligned}$$

Par conséquent, dans les deux cas, on obtient

$$\left(\int_\Omega |w|^{(2p-4)\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{2\alpha'}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}} + |\Omega|^{\frac{1}{2N}}\,\|\,w\,\|^{\frac{1}{N}}_{H^1} + C^{p-2}_{(p-2)N}\,\|w\|^{p-2}_{H^1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right\| &\leq (p-1)\,C_{2^*}\,\|u-v\|_{H^1} \\ &\times \left[|\Omega|^{\frac{1}{N}} + |\Omega|^{\frac{1}{2N}}\,\|w\|^{\frac{1}{N}}_{H^1} + C^{p-2}_{(p-2)N}\,\|w\|^{p-2}_{H^1}\right] \\ &\leq D_p\,\|u-v\|_{H^1}\left[1 + \|w\|^{\frac{1}{N}}_{H^1} + \|w\|^{p-2}_{H^1}\right] \\ &\leq D_p\left[1 + \left(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}\right)^{p-2}\right] \\ &\times \|u-v\|_{H^1}.\end{aligned}$$

La preuve du **Lemme 1.5** est complète. ∎

Chapitre 2

L'étude de l'existence de la solution faible du problème posé par l'application de la méthode de Galerkin

2.1 Introduction

La méthode de Galerkin est une méthode, ou plutôt une famille de méthodes, très générale et très robuste. Son idée est la suivante. Partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est en général plus facile que de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également dans certains cas un procédé constructif d'approximation. On pourra consulter pour de nombreux exemples d'utilisation de la méthode de Galerkin, principalement pour des problèmes d'évolutions.

Dans ce chapitre, on considère un problème de Boussinesq avec une condition non locale. En utilisant les techniques de Faedo-Galerkin, on démontre l'existence d'une solution faible du problème considéré en passant à la limite.

2.2 L'espace d'approximation de Galerkin d'ordre m

Definition 2.1 *Soit (V) un espace de Hilbert séparable et $\{V_m\}_{m\in N^*}$une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes*

$$\begin{cases} \quad 1. \quad V_m \subset V, \ \dim V_m < \infty. \\ \\ 2. \quad V_m \to V \quad \text{quand } m \to +\infty. \end{cases}$$

Au sens suivant : il existe K sous-espace dense de V, tel que pour tout $u \in K$, on peut trouver une suit $\{u_m\}_{m\in N^*}$ vérifiant : Pour tout m , $u_m \in V_m$ et $u_m \to u$ dans V lorsque $m \to \infty$.
L'espace V_m s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre m.

2.3 Le schéma de la méthode de Galerkin

Soit (P) le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable (V) . Soit (u) la solution unique du problème (P).
Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin (V_m) de (V), il convient de définir un problème approché (P_m) dans l'espace de dimension finie (V_m) ayant une unique solution (u_m).
Le déroulement de l'étude est alors le suivant :
étape n^{0}1 : On définit la solution (u_m) du problème (P_m).
étape n^{0}2 : On établit des estimations sur (u_m) (dites $\ll$ estimation a priori $\gg$ sur u) qui traduisent que (u_m) et uniformément bornée.
étape n^{0}3 : Par utilisation des résultats (u_m) et uniformément bornée, il est alors d'extraire de $\{u_m\}_{m\in N^*}$ une sous -suit $\{\grave{u}_m\}_{m\in N^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape $n^0 2$.
Soit alors (u) la limite obtenue.
étape n^{0}4 : On montre que u est solution du problème P : Donc la solution cherchée d'après l'unicité.
étape n^{0}5 : Résultats de convergences fortes.
Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u\,(x,t)$ comme combinaison linéaire de « fonctions de bases » $\psi_l\,(x)$ telle que $v^m\,(x,t) = \sum_{l=1}^{l=m} f_l\,(t)\,\psi_l\,(x)$ où les $f_l\,(t)$ sont alors solutions d'un système de m équations différentielles linéaires.

2.4 Solution de l'équation de Boussinesq avec une condition non locale

Maintenant, nous énonçons les hypothèses générales :

$(\mathbf{H}_1)$ $2 < p < \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$.

$(\mathbf{H}_2)$ $h(t) \geq 0$ et $h'(t) \leq 0$, pour tout $t \geq 0$.

$(\mathbf{H}_3)$ $\alpha^2 - \bar{h} > 0$ où $\bar{h} := \displaystyle\int_0^{\infty} h(s)\, ds$.

$(\mathbf{H}_4)$ $g \in L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))$, $g',\ g'' \in L^2(0,T; L^2(\partial\Omega))$.

Maintenant, soient $V(D_T)$ et $W(D_T)$ deux ensembles des espaces définis respectivement par

$$V(D_T) := \left\{ v \in H^1(D_T) : v_t \in H^1(D_T) \right\},$$

et

$$W(D_T) := \{ u \in V(D_T) : u(x,T) = 0 \}.$$

Nous avons l'équation suivante

$$\begin{aligned}
& (v_{tt}(t), u(t))_{L^2(D_T)} - \alpha^2 (\Delta v(t), u(t))_{L^2(D_T)} \\
& -\beta^2 (\Delta v_{tt}(t), u(t))_{L^2(D_T)} \\
& + \left(\int_0^t h(t-s) \Delta v(s)\, ds, u(t) \right)_{L^2(D_T)} \\
= \; & \left(|v|^{p-2} v(t), u(t) \right)_{L^2(D_T)},
\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

$(.,.)_{L^2(D_T)}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(D_T)$, v la solution de $(2.4.1)$; et $u \in W(D_T)$. Après l'utilisation la Formule de Green ; une intégration par partie et les conditions aux limites dans

(1.1.2) et (1.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
& -\left(v_t\left(t\right), u_t\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} + \alpha^2\left(\nabla v\left(t\right), \nabla u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
& -\beta^2\left(\nabla v_t\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} - \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\nabla v\left(s\right)ds, \nabla u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
= \;& (v_t(0), u(0))_{L^2(\Omega)} + \beta^2\left(\nabla v_t(0), \nabla u(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& +\alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega} g\left(x,t\right)v\left(t\right)dS_x dt \\
& +\alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t\int_\Omega v\left(\xi,\mu\right)d\xi d\mu\right)u\left(t\right)\right]dS_x dt \\
& +\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega} g_{tt}\left(x,t\right)v\left(t\right)dS_x dt \\
& +\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_\Omega v_t\left(\xi,t\right)d\xi\right)u\left(t\right)\right]dS_x dt \\
& -\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_\Omega v_t\left(\xi,0\right)d\xi\right)u\left(t\right)\right]dS_x dt \\
& -\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t h\left(t-s\right)g\left(s,x\right)ds\right)u\left(t\right)\right]dS_x dt \\
& -\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\left\{\int_0^s\int_\Omega v\left(\xi,\mu\right)d\xi d\mu\right\}ds\right)u\left(t\right)\right]dS_x dt \\
& +\left(\left|v\right|^{p-2}v\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)}.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Definition 2.2 *Une fonction $v \in V\left(D_T\right)$ est appelé une solution généralisée du problème $(1.1.1)-(1.1.3)$, si elle satisfait l'équation $(2.4.2)$ pour chaque $u \in W\left(D_T\right)$.*

Nous donnons maintenant le résultat de l'existence d'une solution au problème $(1.1.1)-(1.1.3)$, et le prouver à l'aide de la méthode de Galerkin.

Theorem 2.1 *Si $(v_0, v_1) \in \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^2$ et $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_4)$ est vérifiée, alors il ya au moins une solution généralisée dans $V\left(D_T\right)$ de problème $(1.1.1)-(1.1.3)$.*

Proof. Soient $\{\psi_l\left(x\right)\}_{l\geq 1}$ un système orthonormé fondamental dans $H^1\left(\Omega\right)$, (i.e) $\left(\psi_l\left(x\right), \psi_k\left(x\right)\right)_\Omega = \delta_{l,k}$. Nous cherchons une solution approchée $v^m\left(x,t\right)$ sous la forme

$$v^m\left(x,t\right) = \sum_{l=1}^{l=m} f_l\left(t\right)\psi_l\left(x\right),$$

où $f_l\left(t\right)$ sont des fonctions définis par les conditions

$$f_l\left(t\right) = \left(\psi_l\left(x\right), v^m\left(x,t\right)\right)_{L^2(\Omega)}, \quad l = 1, ..., m.$$

Et peut être déterminée cette relation

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}^{m}(x,t), \psi_k(x)\right)_{L^2(\Omega)} + \alpha^2 \left(\nabla v^m(x,t), \nabla \psi_k(x)\right)_{L^2(\Omega)} \\
& +\beta^2 \left(\nabla v_{tt}^{m}(x,t), \nabla \psi_k(x)\right)_{L^2(\Omega)} - \left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\, ds, \nabla \psi_k(x)\right)_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \alpha^2 \int_{\partial\Omega} g(x,t)\psi_k(x)\, dS_x + \alpha^2 \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right)\psi_k(x)\, dS_x \\
& +\beta^2 \int_{\partial\Omega} g_{tt}(x,t)\psi_k(x)\, dS_x + \beta^2 \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t \int_\Omega v_{\mu\mu}^{m}(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right)\psi_k(x)\, dS_x \\
& - \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\, g(x,s)\, ds\right)\psi_k(x)\, dS_x \\
& - \int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\left(\int_0^s \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right)\right\} ds\right)\psi_k(x)\, dS_x \\
& + \left(|v^m|^{p-2} v^m(t), \psi_k(x)\right)_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.4.3)
\end{aligned}$$

Par le théorème de Carathéodorie [30], il existe une solution $f_l(t)\,,\ l=1,...,m,\ t\in[0,t_m)\,.$ Nous avons besoin d'estimations a priori qui nous permettent d'étendre la solution à l'ensemble du domaine $[0,T]\,.$ Ainsi, pour tout m il existe une fonction $v^m(x,t)$ satisfaisant $(2.4.3)\,.$ Maintenant on va obtenir les bornes pour v^m qui ne dépend pas de m.

Dans la première estimation clé, nous mettons

$$S^m(t) := \|v^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,. \qquad (2.4.4)$$

Pour ce faire, on multiplie chaque équation de $(2.4.3)$ par l'approprié $f_k'(t)$, ajoutons-les de 1 à m et ensuite intégrons par rapport à t de 0 à τ, avec $\tau \leq T$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}^m(t), v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} + \alpha^2\left(\nabla v^m(t), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
& +\beta^2\left(\nabla v_{tt}^m(t), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
& -\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\,ds, \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= \; & \alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} g(x,t)\, v_t^m(t)\, dS_x dt \\
& +\alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right) v_t^m(t)\,dS_x dt \\
& +\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega} g_{tt}(x,t)\, v_t^m(t)\, dS_x dt \\
& +\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v_{\mu\mu}^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right) v_t^m(t)\,dS_x dt \\
& -\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\,g(x,s)\,ds\right) v_t^m(t)\,dS_x dt \\
& -\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right) v_t^m(t)\,dS_x dt \\
& +\left(|v^m|^{p-2} v^m(t), v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Évaluation de chaque terme de $(2.4.5)$. D'aprés une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}^m(t), v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= \; & \int_\Omega\int_0^\tau v_{tt}^m(t)\, v_t^m(t)\, dt dx \\
= \; & \int_\Omega\int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|v_t^m(t)|^2\right\} dt dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_\Omega |v_\tau^m(\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |v_t^m(0)|^2 dx \\
= \; & \frac{1}{2}\|v_\tau^m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|v_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

et

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \left(\nabla v^m(t), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
=\ & \alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau \nabla v^m(t) . \nabla v_t^m(t) dt dx \\
=\ & \alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\nabla v^m(t)|^2\right\} dt dx \\
=\ & \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla v^m(\tau)|^2 dx - \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla v^m(0)|^2 dx \\
=\ & \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

et

$$\begin{aligned}
&\beta^2 \left(\nabla v_{tt}^m(t), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
=\ & \beta^2 \int_\Omega \int_0^\tau \nabla v_{tt}^m(t) . \nabla v_t^m(t)\, dt dx \\
=\ & \beta^2 \int_\Omega \int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\nabla v_t^m(t)|^2\right\} dt dx \\
=\ & \frac{\beta^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\tau^m(\tau)|^2 dx - \frac{\beta^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_t^m(0)|^2 dx \\
=\ & \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_\tau^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

et

$$\begin{aligned}
&\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v_{\mu\mu}^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) v_t^m(t)\, dS_x dt \\
=\ & \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\, d\xi - \int_\Omega v_t^m(\xi,0)\, d\xi\right) v_t^m(t)\, dS_x dt \\
=\ & \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\, d\xi\right) v_t^m(t)\, dS_x dt \\
& -\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,0)\, d\xi\right) v_t^m(t)\, dS_x dt.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Calculons la partie

$$-\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\, ds, \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)},$$

on a

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\, ds, \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
=\ & -\int_0^\tau \left[\int_0^t h(t-s)\left(\nabla v^m(s), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(\Omega)} ds\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

En utilisant

$$-\nabla v^{m}(x,s).\nabla v_{t}^{m}(x,t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}\right\}-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}\right\},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&-\int_{0}^{t}h(t-s)\left(\nabla v^{m}(s),\nabla v_{t}^{m}(t)\right)_{L^{2}(\Omega)}ds\\
=&\int_{0}^{t}h(t-s)\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}\right\}\right)dxds\\
&-\int_{0}^{t}h(t-s)\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}\right\}\right)dxds\\
=&\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dx\right\}\right)ds\\
&-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\}\right)ds. \qquad (2.4.11)
\end{aligned}$$

D'aprés une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h(t-s)\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dx\right\}ds\\
=&\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\frac{d}{dt}\left\{h(t-s)\left(\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dx\right)\right\}ds\\
&-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h'(t-s)\left(\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dx\right)ds\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{0}^{t}h(t-s)\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dxds\right\}\\
&-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h'(t-s)\left(\int_{\Omega}\left|\nabla v^{m}(x,s)-\nabla v^{m}(x,t)\right|^{2}dx\right)ds\\
=&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(h\circ\nabla v^{m})(t)\right\}-\frac{1}{2}(h'\circ\nabla v^{m})(t), \qquad (2.4.12)
\end{aligned}$$

où

$$(h\circ\nabla w)(t):=\int_{0}^{t}h(t-s)\int_{\Omega}\left|\nabla w(x,s)-\nabla w(x,t)\right|^{2}dxds.$$

D'aprés une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\}\right)ds\\
=&-\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{t}h(t-s)ds\right)\left(\frac{d}{dt}\left\{\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\}\right)\\
=&-\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{t}h(s)ds\right)\frac{d}{dt}\left\{\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\}\\
=&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_{0}^{t}h(s)ds\right)\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right\}+\frac{1}{2}h(t)\left\|\nabla v^{m}(t)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}. \qquad (2.4.13)
\end{aligned}$$

Remplacement $(2.4.12)$ et $(2.4.13)$ dans $(2.4.11)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\int_0^t h(t-s)\left(\nabla v^m(s), \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(\Omega)} ds \\ = & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(h \circ \nabla v^m)(t)\right\} - \frac{1}{2}(h' \circ \nabla v^m)(t) \\ & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)\, ds\right)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ = & \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}(h \circ \nabla v^m)(t) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)\, ds\right)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \\ & -\frac{1}{2}(h' \circ \nabla v^m)(t) + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Remplacement $(2.4.14)$ dans $(2.4.10)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\, ds, \nabla v_t^m(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\ = & \frac{1}{2}(h \circ \nabla v^m)(\tau) - \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau h(s)\, ds\right)\|\nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & -\frac{1}{2}\int_0^\tau (h' \circ \nabla v^m)(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Remplacement $(2.4.6)-(2.4.9)$ et $(2.4.15)$ dans $(2.4.5)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\int_0^\tau h(s)\,ds\right)\|\nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v^m_\tau(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v^m_\tau(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}(h\circ\nabla v^m)(\tau)\\
=\;&\frac{\alpha^2}{2}\|\nabla v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v^m_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v^m_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau(h'\circ\nabla v^m)(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&-\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v^m_t(\xi,0)\,d\xi\right)v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&+\alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&+\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v^m_t(\xi,t)\,d\xi\right)v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&-\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&+\alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}g(x,t)\,v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&-\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\,g(x,s)\,ds\right)v^m_t(t)\,dS_xdt\\
&+\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}g_{tt}(x,t)\,v^m_t(t)\,dS_xdt+\left(|v^m|^{p-2}v^m(t),v^m_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)}\\
=\;&\frac{\alpha^2}{2}\|\nabla v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v^m_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v^m_t(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau(h'\circ\nabla v^m)(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&+I_1+\ldots+I_8,
\end{aligned}\qquad(2.4.16)$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &: = -\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,0)\, d\xi \right) v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_2 &: = \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu \right) v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_3 &: = \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\, d\xi \right) v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_4 &: = -\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \left\{ \int_0^s \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu \right\} ds \right) v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_5 &: = \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} g(x,t)\, v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_6 &: = -\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\, g(x,s)\, ds \right) v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_7 &: = \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} g_{tt}(x,t)\, v_t^m(t)\, dS_x dt, \\
I_8 &: = \left(|v^m|^{p-2} v^m(t), v_t^m(t) \right)_{L^2(D_\tau)}.
\end{aligned}
$$

Estimation de I_1. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace et (2.4.4), on obtient

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\beta^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,0)\, d\xi \right)^2 dS_x dt + \frac{\beta^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t^m(t)|^2\, dS_x dt \\
&\leq \frac{\beta^2 |\Omega|}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega |v_t^m(\xi,0)|^2\, d\xi \right) dS_x dt + \frac{\beta^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau ||v_t^m(t)||_{H^1(\Omega)}^2 dt \\
&\leq \frac{\beta^2 |\Omega| |\partial\Omega| T}{2} \|v_t^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau S^m(t)\, dt. \qquad (2.4.17)
\end{aligned}
$$

Estimation de I_2. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie et (2.4.4), on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu \right)^2 dS_x dt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t^m(t)|^2\, dS_x dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} t \left(\int_0^t \left(\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi \right)^2 d\mu \right) dS_x dt + \frac{\alpha^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau \|v_t^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2\, dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} t \left(\int_0^t |\Omega| \left(\int_\Omega |v^m(\xi,\mu)|^2\, d\xi \right) d\mu \right) dS_x dt + \frac{\alpha^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau S^m(t)\, dt \\
&= \frac{\alpha^2 |\Omega| |\partial\Omega|}{2} \int_0^\tau t \left(\int_0^t ||v^m(\mu)||_{L^2(\Omega)}^2 d\mu \right) dt + \frac{\alpha^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau S^m(t)\, dt \\
&\leq \frac{\alpha^2 |\Omega| |\partial\Omega| \tau^2}{4} \int_0^\tau \|v^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\, dt + \frac{\alpha^2 \gamma_\Omega}{2} \int_0^\tau S^m(t)\, dt \\
&\leq \frac{\alpha^2 \left\{ |\Omega| |\partial\Omega| T^2 + 2\gamma_\Omega \right\}}{4} \int_0^\tau S^m(t)\, dt. \qquad (2.4.18)
\end{aligned}
$$

Estimation de I_3. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de trace et (2.4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\,d\xi\right)^2 dS_x dt + \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|v_t^m(t)|^2\,dS_x dt \\
&\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega}\left(|\Omega|\int_\Omega |v_t^m(\xi,t)|^2\,d\xi\right) dS_x dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\beta^2|\Omega||\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&\leq \frac{\beta^2\{|\Omega||\partial\Omega| + \gamma_\Omega\}}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt. \qquad (2.4.19)
\end{aligned}$$

Estimation de I_4. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie et (2.4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)^2 dS_x dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|v_t^m(t)|^2\,dS_x dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\left\{\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)^2 dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t t\left\{\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}^2 ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(t\int_0^t\left\{s\int_0^s\left(\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi\right)^2 d\mu\right\}ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(t\int_0^t\left\{s\int_0^s|\Omega|\left(\int_\Omega |v^m(\xi,\mu)|^2\,d\xi\right) d\mu\right\}ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&= \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2|\Omega||\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau\left(t\int_0^t\left\{s\int_0^s\left(\int_\Omega |v^m(\xi,\mu)|^2\,d\xi\right) d\mu\right\}ds\right) dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^4|\Omega||\partial\Omega|}{16}\int_0^\tau \|v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt \\
&\leq \frac{\left\{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^4|\Omega||\partial\Omega| + 8\gamma_\Omega\right\}}{16}\int_0^\tau S^m(t)\,dt. \qquad (2.4.20)
\end{aligned}$$

Estimation de I_5. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de trace et (2.4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|g(x,t)|^2\,dS_x dt + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|v_t^m(t)|^2\,dS_x dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau \|g(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau \|g(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\,dt. \qquad (2.4.21)
\end{aligned}$$

Estimation de I_6. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de trace, intégration par partie et $(2.4.4)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_6 &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\, g(x,s)\, ds\right)^2 dS_x dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t^m(t)|^2 dS_x dt \\ &\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t g(x,s)\, ds\right)^2 dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2} \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} t\left(\int_0^t |g(x,s)|^2 ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\, dt \\ &\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2}{4} \int_0^\tau \|g(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Estimation de I_7. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de trace et $(2.4.4)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_7 &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |g_{tt}(x,t)|^2 dS_x dt + \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t^m(t)|^2 dS_x dt \\ &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \|g_{tt}(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t^m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \|g_{tt}(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S^m(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Estimation de I_8. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), $(2.4.4)$ et depuis $1 \leq 2 \leq 2(p-1) \leq \dfrac{2N}{N-2}$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(p-1)}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} I_8 &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega |v^m(t)|^{2p-2} dx dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega |v_t^m(t)|^2 dx dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \|v^m(t)\|^{2(p-1)}_{L^{2(p-1)}(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau S^m(t)\, dt\right) \\ &\leq \frac{C}{2}\int_0^\tau \|v^m(t)\|^{2(p-1)}_{H^1(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau S^m(t)\, dt\right). \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

On a

$$\begin{aligned}
\|v^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \left\|v^m(0)+\int_0^t v_s^m(s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\le \|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\int_0^t v_s^m(s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad +2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}\left\|\int_0^t v_s^m(s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left\|\int_0^t v_s^m(s)\,ds\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2\int_\Omega\left(\int_0^t v_s^m(s)\,ds\right)^2 dx \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2\int_\Omega t\left(\int_0^t |v_s^m(s)|^2\,ds\right) dx \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2t\left(\int_0^t S^m(s)\,ds\right). \qquad (2.4.25)
\end{aligned}$$

En utilisant $(2.4.4)$ et $(2.4.25)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|v^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla v^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2t\int_0^t S^m(s)\,ds+\|\nabla v^m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\le 2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2t\int_0^t S^m(s)\,ds+S^m(t). \qquad (2.4.26)
\end{aligned}$$

Utilisons la relation suivante, on trouve que $(a+b+c)^q \le 3^{q-1}(a^q+b^q+c^q)$ queleque soit $q \ge 1$ et $a,b,c \ge 0$ et $(2.4.26)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v^m(t)\|_{H^1(\Omega)}^{2p-2} &\le \left(2\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+2t\int_0^t S^m(t)\,dt+S^m(t)\right)^{p-1} \\
&\le 3^{p-2}2^{p-1}\left(\|v^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{p-1} \\
&\quad +3^{p-2}2^{p-1}t^{p-1}\left(\int_0^t S^m(t)\,dt\right)^{p-1}+3^{p-2}(S^m(t))^{p-1}. \qquad (2.4.27)
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t S^m(t)\,dt\right)^{p-1} &\le \left(\int_0^t 1^{\frac{p-1}{p-2}}dt\right)^{p-2}\left(\int_0^t (S^m(t))^{p-1}\,dt\right) \\
&= t^{p-2}\left(\int_0^t (S^m(s))^{p-1}\,ds\right). \qquad (2.4.28)
\end{aligned}$$

Remplacement $(2.4.28)$ dans $(2.4.27)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|v^{m}(t)\right\|_{H^{1}(\Omega)}^{2p-2} \\
\leq\ & 3^{p-2}2^{p-1}\left(\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right)^{p-1} \\
&+3^{p-2}2^{p-1}t^{2p-3}\left(\int_{0}^{t}\left(S^{m}(s)\right)^{p-1}ds\right)+3^{p-2}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}.
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Remplacement $(2.4.29)$ dans $(2.4.24)$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{8}\ \leq\ & \frac{C3^{p-2}2^{p-1}}{2}\int_{0}^{\tau}\left[\left(\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}\right)^{p-1}\right]dt+\frac{C3^{p-2}2^{p-1}}{2}\int_{0}^{\tau}\left[t^{2p-3}\left(\int_{0}^{t}\left(S^{m}(s)\right)^{p-1}ds\right)\right]dt \\
&+\frac{C3^{p-2}}{2}\int_{0}^{\tau}\left[\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}\right]dt+\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\tau}S^{m}(t)\,dt\right) \\
\leq\ & \frac{3^{p-2}2^{p-1}CT}{2}\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2p-2}+\frac{C}{2}3^{p-2}2^{p-1}\int_{0}^{\tau}\left[t^{2p-3}\left(\int_{0}^{t}\left(S^{m}(s)\right)^{p-1}ds\right)\right]dt \\
&+\frac{3^{p-2}C}{2}\int_{0}^{\tau}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}dt+\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\tau}S^{m}(t)\,dt\right) \\
\leq\ & \frac{3^{p-2}2^{p-1}CT}{2}\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2p-2}+\frac{3^{p-2}2^{p-1}T^{2p-2}C}{4p-4}\int_{0}^{\tau}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}dt \\
&+\frac{3^{p-2}C}{2}\int_{0}^{\tau}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}dt+\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\tau}S^{m}(t)\,dt\right) \\
=\ & \frac{3^{p-2}2^{p-1}CT}{2}\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2p-2}+\frac{3^{p-2}C}{2}\left\{\frac{2^{p-1}T^{2p-2}}{2p-2}+1\right\}\int_{0}^{\tau}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}dt \\
&+\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\tau}S^{m}(t)\,dt\right),
\end{aligned}$$

donc, on trouve

$$I_{8}\leq C_{1}\left\|v^{m}(0)\right\|_{L^{2}(\Omega)}^{2p-2}+C_{2}\int_{0}^{\tau}\left(S^{m}(t)\right)^{p-1}dt+\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\tau}S^{m}(t)\,dt\right), \tag{2.4.30}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{c}
C_{1}:=\dfrac{3^{p-2}2^{p-1}CT}{2}>0, \\
\text{et} \\
C_{2}:=\dfrac{3^{p-2}C}{2}\left\{\dfrac{2^{p-1}T^{2p-2}}{2p-2}+1\right\}>0.
\end{array}\right.$$

Combiner les inégalités $(2.4.27)-(2.4.23)$ et $(2.4.30)$ dans $(2.4.16)$, et faire usage de l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\|v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left\{\|v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} dt \\
&= \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^\tau \int_\Omega v^m(t)\, v_t^m(t)\, dxdt \\
&\leq \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau \int_\Omega |v^m(t)|^2\, dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega |v_t^m(t)|^2\, dxdt \\
&\leq \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^\tau S^m(t)\, dt,
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\|v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2-\bar{h}}{2}\|\nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|v_\tau^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_\tau^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \|v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla v^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\left\{1+\beta^2|\Omega|\,|\partial\Omega|\,T\right\}}{2}\|v_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_t^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1\|v^m(0)\|^{2p-2}_{L^2(\Omega)} \\
&+\frac{\left\{\alpha^2+\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2\right\}}{2}\int_0^\tau \|g(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\, dt + \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \|g_{tt}(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\, dt \\
&+C_3\int_0^\tau S^m(t)\, dt + C_2\int_0^\tau (S^m(t))^{p-1}\, dt, \qquad (2.4.31)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C_3 \ :&= \left\{\frac{\gamma_\Omega\left\{24\beta^2+8\alpha^2(\gamma+1)+16\right\}}{16}\right\} \\
&+\frac{|\Omega|\,|\partial\Omega|\left\{8\beta^2+T^2\left(4\alpha^2+\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2\right)\right\}+40}{16} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

La relation $(2.4.31)$ se réduit à

$$\begin{aligned}
S^m(\tau) \ &\leq\ \omega\left\{\|v^m(0)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_t^m(0)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v^m(0)\|^{2p-2}_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\left.+\int_0^\tau \|g(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\, dt + \int_0^\tau \|g_{tt}(t)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\, dt\right\} \\
&+\omega\int_0^\tau S^m(t)\, dt + \omega\int_0^\tau (S^m(t))^{p-1}\, dt, \qquad (2.4.32)
\end{aligned}$$

où

$$\omega := \frac{\max\left\{\dfrac{\alpha^2}{2};\ \dfrac{\left\{1+\beta^2\left|\Omega\right|\left|\partial\Omega\right|T\right\}}{2};\ \dfrac{\beta^2}{2};\ C_1;\ \dfrac{\left\{2\alpha^2+\left(\sup_{0\leq t\leq T}h\left(t\right)\right)^2T^2\right\}}{2};\ \dfrac{\beta^2}{2};\ C_3;\ C_2\right\}}{\min\left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\alpha^2-\bar{h}}{2};\ \dfrac{\beta^2}{2}\right\}} > 0.$$

Pour l'inégalité $(2.4.32)$, nous appliquons le lemme de Volterra non linéaire (basée sur les méthodes de [32]), puis on intégre de 0 à τ pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^\tau S^m\left(t\right)dt \quad &\leq \quad \omega T\left\{\left\|v\left(0\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2p-2}+\left\|v\left(0\right)\right\|_{H^1(\Omega)}^{2}+\left\|v_t\left(0\right)\right\|_{H^1(\Omega)}^{2}\right.\\ &\left.+\int_0^\tau\left\|g\left(t\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2dt+\int_0^\tau\left\|g_{tt}\left(t\right)\right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2dt\right\},\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

à partir de $(2.4.33)$, on conclut que

$$\left\|v^m\left(t\right)\right\|_{H^1(D_T)}^2+\left\|v_t^m\left(t\right)\right\|_{H^1(D_T)}^2\leq A.$$

Donc, la suite $\{v^m\}_{m\geq1}$ est bornée dans $V\left(D_T\right)$, et nous pouvons en extraire une sous suite pour laquelle nous utilisons la même notation qui converge faiblement dans $V\left(D_T\right)$ à une fonction limite $v\left(x,t\right)$. Nous devons montrer que $v\left(x,t\right)$ est une solution généralisée de $(1.1.1)$, puisque $v^m\left(x,t\right)\to v\left(x,t\right)$ dans $L^2\left(D_T\right)$ et $v^m\left(x,0\right)\to v\left(x,0\right)$ dans $L^2\left(\Omega\right)$.

Maintenant, prouver que $(2.4.2)$ est valable, nous multiplions chacun des relations $(2.4.3)$ par une fonction $p_k\left(t\right)\in H^1\left(0,T\right),\ p_k\left(T\right)=0$, puis ajouter les égalités obtenues de $k=1$ à $k=N$, et on intégre par rapport a t sur $(0,T)$. Posons $\phi^m(x,t) := \sum_{k=1}^{k=m} p_k(t)\psi_k(x)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&-\left(v_t^m(t), \phi_t^m(t)\right)_{L^2(D_T)} + \alpha^2\left(\nabla v^m(t), \nabla\phi^m(t)\right)_{L^2(D_T)} \\
&-\beta^2\left(\nabla v_t^m(t), \nabla\phi_t^m(t)\right)_{L^2(D_T)} - \left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\,ds, \nabla\phi^m(t)\right)_{L^2(D_T)} \\
= \;& \left(v_t^m(0), \phi^m(0)\right)_{L^2(\Omega)} + \beta^2\left(\nabla v_t^m(0), \nabla\phi^m(0)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&+\alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega} g(x,t)\,\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&+\alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&+\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega} g_{tt}(x,t)\,\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&+\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\,d\xi\right)\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&-\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t^m(\xi,0)\,d\xi\right)\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\,g(x,s)\,ds\right)\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\left(\int_0^s\int_\Omega v^m(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)\right\}ds\right)\phi^m(t)\,dS_x dt \\
&+\left(|v^m|^{p-2}v^m(t), \phi^m(t)\right)_{L^2(D_T)}.
\end{aligned}$$

Pour tous $\phi^m(x,t)$ de la forme $\sum_{k=1}^{k=m} p_k(t)\psi_k(x)$. On a

$$\begin{cases}
\|v^m(t) - v(t)\|_{H^1(D_T)} \longrightarrow 0, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty, \\
\\
\|v_t^m(t) - v_t(t)\|_{H^1(D_T)} \longrightarrow 0, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.
\end{cases} \tag{2.4.34}$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\nabla v^m(s) - \nabla v(s)\right\}ds, \nabla\phi^m(t)\right)_{L^2(D_T)} \\
\leq \;& \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)T}{\sqrt{2}}\|\nabla v^m(t) - \nabla v(t)\|_{L^2(D_T)}\|\nabla\phi^m(t)\|_{L^2(D_T)},
\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

en utilisant (2.4.34) et (2.4.35), on obtient

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v^m(s)\,ds, \nabla\phi^m(t)\right)_{L^2(D_T)} \\
\longrightarrow \;& -\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,ds, \nabla\phi(t)\right)_{L^2(D_T)}, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_0^t \int_\Omega \left(v^m(\xi,\mu) - v(\xi,\mu)\right) d\xi d\mu \le \sqrt{T|\Omega|}\,\|v^m(t) - v(t)\|_{L^2(D_T)}, \tag{2.4.36}$$

en utilisant (2.4.34) et (2.4.36), on obtient

$$\begin{aligned}&\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) \phi^m(t)\, dS_x dt \\ \longrightarrow\ &\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) \phi(t)\, dS_x dt, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_\Omega \left(v_t^m(\xi,t) - v_t(\xi,t)\right) d\xi\right) \phi^m(t)\, dt \\ \le\ &\sqrt{|\Omega|}\,\|v_t^m(t) - v_t(t)\|_{L^2(D_T)} \left(\int_0^T |\phi^m(t)|^2 dt\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.4.37}$$

en utilisant (2.4.34) et (2.4.37), on obtient

$$\begin{aligned}&\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,t)\, d\xi\right) \phi^m(t)\, dS_x dt \\ \longrightarrow\ &\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\, d\xi\right) \phi(t)\, dS_x dt, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left(\int_\Omega \left(v_t^m(\xi,0) - v_t(\xi,0)\right) d\xi\right) \phi^m(t)\, dt \\ \le\ &\sqrt{|\Omega|}T\,\|v_t^m(0) - v_t(0)\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^T |\phi^m(t)|^2 dt\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

en utilisant (2.4.34) et (2.4.38), on obtient

$$\begin{aligned}&-\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t^m(\xi,0)\, d\xi\right) \phi^m(t)\, dS_x dt \\ \longrightarrow\ &-\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi,0)\, d\xi\right) \phi(t)\, dS_x dt, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.\end{aligned}$$

Et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \left[\left(\int_0^t h(t-s) \left\{\int_0^s \int_\Omega \left\{v^m(\xi,\mu) - v(\xi,\mu)\right\} d\xi d\mu\right\} ds\right) \phi^m(t)\right] dt \\ \le\ &\frac{\left(\sup_{0\le t\le T} h(t)\right) T^2 \sqrt{|\Omega|}}{2\sqrt{2}} \|v^m(t) - v(t)\|_{L^2(D_T)} \left(\int_0^T |\phi^m(t)|^2 dt\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

en utilisant $(2.4.34)$ et $(2.4.39)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \left\{ \left(\int_0^s \int_\Omega v^m(\xi,\mu)\, d\xi d\mu \right) \right\} ds \right) \phi^m(t)\, dS_x dt \\ \longrightarrow \quad & -\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \left\{ \left(\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu \right) \right\} ds \right) \phi(t)\, dS_x dt, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Utilisation de la fonction de continuité $t \longmapsto |t|^{t-2}\, t$, nous avons

$$|v^m|^{p-2}\, v^m(t) \longrightarrow |v|^{p-2}\, v(t)\,, \quad \text{et p.p. dans } D_T. \tag{2.4.40}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left\| |v^m|^{p-2}\, v^m(t) \right\|^2_{L^2(D_T)} &= \int_0^T \int_\Omega |v^m(x,t)|^{2p-2}\, dx dt \\ &= \int_0^T \|v^m(t)\|^{2p-2}_{L^{2p-2}(\Omega)}\, dt \\ &\leq \int_0^T \left(C_{2p-2} \|v^m(t)\|_{H^1(\Omega)} \right)^{2p-2} dt \\ &\leq C^{2p-2}_{2p-2} T \|v^m(t)\|^{2p-2}_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_4. \end{aligned} \tag{2.4.41}$$

Utiliser Lions $([31]$, **Lemme** 1.3 p.12), cela découle de $(2.4.40)$ et $(2.4.41)$ Cette

$$\left(|v^m|^{p-2}\, v^m(t)\,, \phi^m(t) \right)_{L^2(D_T)} \longrightarrow \left(|v|^{p-2}\, v(t)\,, \phi(t) \right)_{L^2(D_T)}, \quad \text{pour } m \longrightarrow \infty.$$

Ainsi, les fonctions de limite de v satisfait $(2.4.2)$ pour chaque $\phi^m(x,t) := \sum_{k=1}^{k=m} p_k(t)\, \psi_k(x)$. On note $\mathbb{Q}_m$ l'ensemble de toutes les fonctions de la forme $\phi^m(x,t) := \sum_{k=1}^{k=m} p_k(t)\, Z_k(x)$, avec $p_k(t) \in H^1(0,T)\,,\, p_k(T) = 0$.

Mais $\cup_{k=1}^{k=\infty} \mathbb{Q}_k$ est dense dans $W(D_T)$, alors la relation est valable pour tout $v \in W(D_T)$. Ainsi, nous avons montré que la fonction de limite $v(x,t)$ est une solution généralisée du problème $(1.1.1) - (1.1.3)$ dans $V(D_T)$. ■

Chapitre 3

L'étude de l'unicité de la solution de l'équation de Boussinesq avec une condition non locale

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un problème de Boussinesq avec une condition non locale, on montrera l'unicité de la solution.

3.2 L'unicité de la solution

Theorem 3.1 *Si* $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ *est vérifiée, alors le problème* $(1.1.1) - (1.1.3)$ *ne peut pas avoir plus d'une solution généralisée en* $V(D_T)$ *.*

Proof. Supposons que $v_1 \in V(D_T)$ et $v_2 \in V(D_T)$ sont deux solutions de problème $(1.1.1)-(1.1.3)$ de telle sorte que v_1 est différente de v_2. Alors $v := v_1 - v_2$ résout

$$v_{tt} - \alpha^2 \Delta v - \beta^2 \Delta v_{tt} + \int_0^t h(t-s)\, \Delta v(s)\, ds = |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2, \tag{3.2.1}$$

avec les condition initiale

$$v(x,0) = v_t(x,0) = 0, \tag{3.2.2}$$

et la condition intégrale

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_0^t \int_\Omega v(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.2.3}$$

Maintenant, multipliez l'équation différentielle $(3.2.1)$ par u et intégrons sur $D_T = \Omega\times(0,T)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} - \alpha^2\left(\Delta v\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
& -\beta^2\left(\Delta v_{tt}\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} + \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\Delta v\left(s\right)ds, u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
= & \left(\left|v_1\right|^{p-2} v_1 - \left|v_2\right|^{p-2} v_2, u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)}.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Évaluation de chaque terme de $(3.2.4)$. D'aprés une intégration par partie et $(3.2.2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
= & \int_\Omega \int_0^T \left[v_{tt}\left(t\right) u\left(t\right)\right] dtdx \\
= & \int_\Omega \int_0^T v_t\left(t\right) u\left(t\right)\Big|_{t=0}^{t=T} dtdx - \int_\Omega \int_0^T \left[v_t\left(t\right) u_t\left(t\right)\right] dtdx \\
= & -\left(v_t\left(t\right), u_t\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

D'aprés la formule de Green et $(3.2.3)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2\left(\Delta v\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
= & -\alpha^2 \int_0^T \int_\Omega \left[\Delta v\left(t\right) u\left(t\right)\right] dxdt \\
= & \alpha^2\left(\nabla v\left(t\right), \nabla u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
& -\alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_0^t \int_\Omega v\left(\xi,\mu\right) d\xi d\mu\right) u\left(t\right)\right] dS_x dt,
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\beta^2\left(\Delta v_{tt}\left(t\right), u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} \\
= & -\beta^2 \int_0^T \int_\Omega \left[\Delta v_{tt}\left(t\right) u\left(t\right)\right] dxdt \\
= & \beta^2\left(\nabla v_{tt}, \nabla u\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} - \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_0^t \int_\Omega v_{\mu\mu}\left(\xi,\mu\right) d\xi d\mu\right) u\left(t\right)\right] dS_x dt \\
= & \beta^2 \int_\Omega \int_0^T \nabla v_t\left(t\right).\nabla u\left(t\right)\Big|_{t=0}^{t=T} dtdx - \beta^2 \int_\Omega \int_0^T \left[\nabla v_t\left(t\right).\nabla u_t\left(t\right)\right] dtdx \\
& -\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_\Omega v_t\left(\xi,t\right) d\xi - \int_\Omega v_t\left(\xi,0\right) d\xi\right) u\left(t\right)\right] dS_x dt \\
= & -\beta^2 \int_\Omega \int_0^T \left[\nabla v_t\left(t\right).\nabla u_t\left(t\right)\right] dtdx - \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_\Omega v_t\left(\xi,t\right) d\xi\right) u\left(t\right)\right] dS_x dt \\
= & -\beta^2\left(\nabla v_t\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)_{L^2(D_T)} + \beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_\Omega v_t\left(\xi,t\right) d\xi\right) u\left(t\right)\right] dS_x dt,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta v(s)\,ds, u(t)\right)_{L^2(D_T)} \\ = & -\left(\int_0^t h(t-s)\,\nabla v(s)\,ds, \nabla u(t)\right)_{L^2(D_T)} \\ & + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\} ds\right) u(t)\right] dS_x dt. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Remplacement de $(3.2.5)-(3.2.8)$ dans $(3.2.4)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -(v_t(t), u_t(t))_{L^2(D_T)} + \alpha^2 (\nabla v(t), \nabla u(t))_{L^2(D_T)} \\ & -\beta^2 (\nabla v_t(t), \nabla u_t(t))_{L^2(D_T)} - \left(\int_0^t h(t-s)\,\nabla v(s)\,ds, \nabla u(t)\right)_{L^2(D_T)} \\ = & \ \alpha^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right) u(t)\right] dS_x dt \\ & +\beta^2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right) u(t)\right] dS_x dt \\ & - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left[\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\} ds\right) u(t)\right] dS_x dt \\ & + \left(|v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2, u(t)\right)_{L^2(D_T)}. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Déffinir la fonction $u(x,t)$ par

$$u(x,t) := \begin{cases} \displaystyle\int_t^\tau v(x,s)\,ds, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Pour tout τ dans $[0,T]$, il est évident que

$$\begin{cases} u \in W(D_T), \\ \text{et} \\ u_t(x,t) = -v(x,t). \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Évaluation de chaque terme de $(3.2.9)$. D'aprés $(3.2.11)$, une intégration par partie et $(3.2.2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&-(v_t(t), u_t(t))_{L^2(D_T)} \\
&= -\int_\Omega \int_0^T [v_t(t) u_t(t)] \, dtdx \\
&= \int_\Omega \int_0^\tau [v_t(x,t) v(x,t)] \, dtdx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left\{ |v(x,t)|^2 \right\} dtdx \\
&= \frac{1}{2} \|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.2.12)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 (\nabla v(t), \nabla u(t))_{L^2(D_T)} \\
&= \alpha^2 \int_\Omega \int_0^T [\nabla v(t) . \nabla u(t)] \, dtdx \\
&= -\alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau [\nabla u_t(x,t) . \nabla u(x,t)] \, dtdx \\
&= -\frac{\alpha^2}{2} \int_\Omega \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left\{ |\nabla u(x,t)|^2 \right\} dtdx \\
&= \frac{\alpha^2}{2} \|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&-\beta^2 (\nabla v_t(t), \nabla u_t(t))_{L^2(D_T)} \\
&= -\beta^2 \int_\Omega \int_0^T [\nabla v_t(t) . \nabla u_t(t)] \, dtdx \\
&= \beta^2 \int_\Omega \int_0^T [\nabla v_t(t) . \nabla v(x,t)] \, dtdx \\
&= \frac{\beta^2}{2} \int_\Omega \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[|\nabla v(x,t)|^2 \right] dtdx \\
&= \frac{\beta^2}{2} \|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

Remplacement de $(3.2.12)-(3.2.14)$ dans $(3.2.9)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha^2}{2}\|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
=&-\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,ds,\nabla u(t)\right)_{L^2(D_T)}\\
&+\alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)u(t)\right]dS_x dt\\
&+\beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right)u(t)\right]dS_x dt\\
&-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)u(t)\right]dS_x dt\\
&+\left(|v_1|^{p-2}v_1-|v_2|^{p-2}v_2,u(t)\right)_{L^2(D_T)}\\
=&\ j_1+\ldots+j_5, \qquad (3.2.15)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
j_1 &:= -\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,ds,\nabla u(t)\right)_{L^2(D_T)},\\
j_2 &:= \alpha^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)u(t)\right]dS_x dt,\\
j_3 &:= \beta^2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right)u(t)\right]dS_x dt,\\
j_4 &:= -\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)u(t)\right]dS_x dt,\\
j_5 &:= \left(|v_1|^{p-2}v_1-|v_2|^{p-2}v_2,u(t)\right)_{L^2(D_T)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, comme

$$\begin{aligned}
u^2(x,t) &= \left(\int_t^\tau v(x,s)\,ds\right)^2\\
&\le \tau\int_0^\tau v^2(x,s)\,ds, \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

en appliquant l'intégrale par partie et (3.2.16), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2(Q_\tau)} &= \int_\Omega \left[\int_0^\tau u^2(x,t)\,dt\right] dx \\
&\leq \int_\Omega \int_0^\tau \left[\tau \int_0^\tau |v(x,s)|^2\,ds\right] dtdx \\
&\leq \tau \left(\int_0^\tau 1dt\right) \int_0^\tau \left[\int_\Omega |v(x,s)|^2\,dx\right] ds \\
&= \tau^2 \int_0^\tau \|v(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq T^2 \int_0^\tau \|v(x,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \qquad (3.2.17)
\end{aligned}$$

En mettant

$$S(t) := \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad (3.2.18)$$

où

$$\theta(x,t) := \int_0^t v(x,s)\,ds. \qquad (3.2.19)$$

En utilisant (3.2.10) et (3.2.19), on obtient

$$u(x,t) = \theta(x,\tau) - \theta(x,t),\ \nabla u(x,0) = \nabla\theta(x,\tau),$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,\tau) - \nabla\theta(x,t)|^2\,dxdt \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,\tau)|^2\,dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2\,dxdt \\
&\quad +2\int_0^\tau \int_\Omega \nabla\theta(x,\tau).\nabla\theta(x,t)\,dxdt \\
&\leq \tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,\tau)|^2\,dx + \int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\quad +\int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,\tau)|^2\,dxdt + \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\theta(x,t)|^2\,dxdt \\
&= 2\tau\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \qquad (3.2.20)
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2.17) et (3.2.18), on obtient

$$\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leq T^2 \int_0^\tau S(t)\,dt. \qquad (3.2.21)$$

Estimation de j_1. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$) , l'inégalité de Cauchy-Schwartz, intégration par partie, (3.2.10) , (3.2.18) et (3.2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
j_1 &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,ds\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dxdt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_\Omega \left(\int_0^t \nabla v(s)\,ds\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_\Omega t\left(\int_0^t |\nabla v(s)|^2\,ds\right) dxdt \\
&\quad + \tau\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2}{4}\int_0^\tau \|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\quad + \int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \tau\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\left\{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2 + 4\right\}}{4}\int_0^\tau S(t)\,dt + \tau\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Estimation de j_2. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$) , l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie, (3.2.10) , (3.2.18) et (3.2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
j_2 &\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^T \int_{\partial\Omega}\left[\left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)^2\right] dS_x dt + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(t)|^2\,dS_x dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} t\left(\int_0^t \left(\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi\right)^2 d\mu\right) dS_x dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} t\left(\int_0^t |\Omega|\left(\int_\Omega |v(\xi,\mu)|^2\,d\xi\right) d\mu\right) dS_x dt \\
&\quad + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&= \frac{\alpha^2\,|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau t\left(\int_0^t ||v(\mu)||^2_{L^2(\Omega)} d\mu\right) dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\
&\quad + \alpha^2\gamma_\Omega\tau\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha^2\gamma_\Omega\int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\alpha^2\,|\Omega|\,|\partial\Omega|\,\tau^2}{4}\int_0^\tau \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\alpha^2\gamma_\Omega T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\
&\quad + \alpha^2\gamma_\Omega\int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \tau\alpha^2\gamma_\Omega\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\alpha^2\left\{T^2\left[2\gamma_\Omega + |\Omega|\,|\partial\Omega|\right] + 4\gamma_\Omega\right\}}{4}\int_0^\tau S(t)\,dt + \tau\alpha^2\gamma_\Omega\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Estimation de j_3. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$) , l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie, $(3.2.10)$, $(3.2.18)$ et $(3.2.20)$, on obtient

$$\begin{aligned}
j_3 &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right)^2 dS_x dt + \frac{\beta^2}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}|u(t)|^2\,dS_x dt \\
&\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(|\Omega|\int_\Omega |v_t(\xi,t)|^2\,d\xi\right) dS_x dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \\
&= \frac{\beta^2|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau \|v_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\quad + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\beta^2|\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\
&\quad + \beta^2\gamma_\Omega\tau\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta^2\gamma_\Omega\int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leq \frac{\beta^2\left\{|\Omega|\,|\partial\Omega| + \gamma_\Omega T^2 + 2\gamma_\Omega\right\}}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt + \tau\beta^2\gamma_\Omega\,\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Estimation de j_4. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$) , l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie, (3.2.10) , (3.2.18) et (3.2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
j_4 &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\} ds\right)^2 dS_x dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\partial\Omega} |u(t)|^2 dS_x dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\} ds\right)^2 dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t t\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\}^2 ds\right) dS_x dt \\
&\quad + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s \left(\int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi\right)^2 d\mu\right\} ds\right) dS_x dt \\
&\quad + \frac{\gamma_\Omega T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt + \gamma_\Omega \tau \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma_\Omega \int_0^\tau \|\nabla\theta(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s |\Omega| \left(\int_\Omega (v(\xi,\mu))^2 d\xi\right) d\mu\right\} ds\right) dS_x dt \\
&\quad + \frac{\gamma_\Omega \{T^2+2\}}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt + \gamma_\Omega \tau \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 |\Omega|\,|\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s \left(\int_\Omega |v(\xi,\mu)|^2 d\xi\right) d\mu\right\} ds\right) dt \\
&\quad + \frac{\gamma_\Omega \{T^2+2\}}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt + \gamma_\Omega \tau \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^4 |\Omega|\,|\partial\Omega|}{16}\int_0^\tau \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{\gamma_\Omega \{T^2+2\}}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\quad + \gamma_\Omega \tau \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{\left\{T^2\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2 |\Omega|\,|\partial\Omega| + 8\gamma_\Omega\right] + 16\gamma_\Omega\right\}}{16}\int_0^\tau S(t)\, dt + \gamma_\Omega \tau \|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Estimation de J_5. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$) , $(2.4.1)$, **lemme 3.4.**, $(3.2.10)$, $(3.2.18)$ et $(3.2.20)$, on obtient

$$\begin{aligned} J_5 &\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left||v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |u(t)|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\||v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\ &\leq \frac{C_p}{2}\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2 \\ &\quad \times \int_0^\tau \|v_1 - v_2\|^2_{H^1(\Omega)} dt + \frac{T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\ &= \frac{C_p}{2}\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2 \\ &\quad \times \int_0^\tau \|v(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt + \frac{T^2}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt \\ &\leq \frac{\{2C_5 + T^2\}}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt, \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

où

$$C_5 := \frac{C_p\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2}{2} > 0.$$

En utilisant $(3.2.23) - (3.2.26)$ dans $(3.2.15)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2}{2}\|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\; & C_6\int_0^\tau S(t)\,dt + \tau\left\{1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right\}\|\nabla\theta(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

où

$$\begin{aligned} C_6 \;:&= \frac{|\Omega|\,|\partial\Omega|\left\{8\beta^2 + T^2\left(4\alpha^2 + \left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2\right)\right\}}{16} \\ &+ \frac{\gamma_\Omega 8\left\{T^2\left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right] + 2\left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\right\}}{16} \\ &+ \frac{16\{C_5 + 1\} + T^2\left\{8 + 4\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2\right\}}{16} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Maintenant, multipliez l'équation différentielle $(3.2.1)$ par v_t et intégrons sur $D_\tau := \Omega\times(0,\tau)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} - \alpha^2 \left(\Delta v(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
& -\beta^2 \left(\Delta v_{tt}(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} + \left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta v(s)\,ds, v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & \left(|v_1(t)|^{p-2} v_1(t) - |v_2(t)|^{p-2} v_2(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)}. \qquad (3.2.28)
\end{aligned}$$

Évaluation de chaque terme de $(3.2.28)$. D'aprés une intégration par partie et $(3.2.2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(v_{tt}(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & \int_\Omega \int_0^\tau v_{tt}(t)\, v_t(t)\, dtdx \\
= & \int_\Omega \int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|v_t(t)|^2\right\} dtdx \\
= & \frac{1}{2}\int_\Omega |v_\tau(\tau)|^2\, dx \\
= & \frac{1}{2}\left\|v_\tau(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.2.29)
\end{aligned}$$

D'aprés la formule de Green, une intégration par partie, $(3.2.2)$ et $(3.2.3)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \left(\Delta v(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & -\alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau \Delta v(t)\, v_t(t)\, dtdx \\
= & \alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau \nabla v(t) . \nabla v_t(t) dtdx - \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) v_t(t)\, dS_x dt \\
= & \alpha^2 \int_\Omega \int_0^\tau \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\nabla v(t)|^2\right\} dtdx - \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) v_t(t)\, dS_x dt \\
= & \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla v(\tau)|^2\, dx - \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) v_t(t)\, dS_x dt \\
= & \frac{\alpha^2}{2}\left\|\nabla v(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right) v_t(t)\, dS_x dt, \qquad (3.2.30)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\beta^2 \left(\Delta v_{tt}(t), v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & -\beta^2 \int_\Omega \int_0^\tau \Delta v_{tt}(t) \, v_t(t) \, dt dx \\
= & \ \beta^2 \int_\Omega \int_0^\tau \nabla v_{tt}(t) . \nabla v_t(t) \, dt dx - \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \int_\Omega v_{\mu\mu}(\xi, \mu) \, d\xi d\mu \right) v_t(t) \, dS_x dt \\
= & \ \beta^2 \int_\Omega \int_0^\tau \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |\nabla v_t(t)|^2 \right\} dt dx \\
& -\beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi, t) \, d\xi - \int_\Omega v_t(\xi, 0) \, d\xi \right) v_t(t) \, dS_x dt \\
= & \ \frac{\beta^2}{2} \int_\Omega |\nabla v_\tau(\tau)|^2 \, dx - \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi, t) \, d\xi \right) v_t(t) \, dS_x dt \\
= & \ \frac{\beta^2}{2} \|\nabla v_\tau(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta^2 \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi, t) \, d\xi \right) v_t(t) \, dS_x dt. \qquad (3.2.31)
\end{aligned}$$

D'aprés la formule de Green et (3.2.22), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t h(t-s) \, \Delta v(s) \, ds, v_t(t) \right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & -\left(\int_0^t h(t-s) \, \nabla v(s) \, ds, \nabla v_t(t) \right)_{L^2(D_\tau)} \\
& + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s) \left\{ \int_0^s \int_\Omega v(\xi, \mu) \, d\xi d\mu \right\} ds \right) v_t(t) \, dS_x dt. \qquad (3.2.32)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& -\left(\int_0^t h(t-s) \, \nabla v(s) \, ds, \nabla v_t(t) \right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & -\int_0^\tau \left[\int_0^t h(t-s) \left(\nabla v(s), \nabla v_t(t) \right)_{L^2(\Omega)} ds \right] dt, \qquad (3.2.33)
\end{aligned}$$

en utilisant

$$-\nabla v(x,s) . \nabla v_t(x,t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |\nabla v(x,s) - \nabla v(x,t)|^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |\nabla v(x,t)|^2 \right\},$$

alors

$$\begin{aligned}
& -\int_0^t h(t-s)\left(\nabla v(s), \nabla v_t(t)\right)_{L^2(\Omega)} ds \\
= & \int_0^t h(t-s)\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2\right\}\right) dxds \\
& -\int_0^t h(t-s)\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\nabla v(x,t)|^2\right\}\right) dxds \\
= & \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dx\right\}\right) ds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\right) ds. \qquad (3.2.34)
\end{aligned}$$

Et en utilisant l'intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dx\right\} ds \\
= & \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left\{h(t-s)\left(\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dx\right)\right\} ds \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t h'(t-s)\left(\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dx\right) ds \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t h(t-s)\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dxds\right\} \\
& -\frac{1}{2}\int_0^t h'(t-s)\left(\int_\Omega |\nabla v(x,s)-\nabla v(x,t)|^2 dx\right) ds \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(h\circ\nabla v)(t)\right\} - \frac{1}{2}(h'\circ\nabla v)(t), \qquad (3.2.35)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)\left(\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\right) ds \\
= & -\frac{1}{2}\left(\int_0^t h(t-s)\, ds\right)\left(\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}\right) \\
= & -\frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)\, ds\right)\frac{d}{dt}\left\{\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \\
= & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)\, ds\right)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.2.36)
\end{aligned}$$

Remplacement les égalités $(3.2.35)$ et $(3.2.36)$ dans $(3.2.34)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& -\int_0^t h(t-s)\left(\nabla v(s), \nabla v_t(t)\right)_{L^2(\Omega)} ds \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(h\circ\nabla v)(t)\right\} - \frac{1}{2}(h'\circ\nabla v)(t) \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= & \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}(h\circ\nabla v)(t) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \\
& -\frac{1}{2}(h'\circ\nabla v)(t) + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.2.37)
\end{aligned}$$

Remplacement $(3.2.37)$ dans $(3.2.33)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& -\left(\int_0^t h(t-s)\nabla v(s)\,ds, \nabla v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & \frac{1}{2}(h\circ\nabla v)(\tau) - \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau h(s)\,ds\right)\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& -\frac{1}{2}\int_0^\tau (h'\circ\nabla v)(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \qquad (3.2.38)
\end{aligned}$$

Remplacement $(3.2.38)$ dans $(3.2.32)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^t h(t-s)\Delta v(s)\,ds, v_t(t)\right)_{L^2(D_\tau)} \\
= & \frac{1}{2}(h\circ\nabla v)(\tau) - \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau h(s)\,ds\right)\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& -\frac{1}{2}\int_0^\tau (h'\circ\nabla v)(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
& +\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right) v_t(t)\,dS_x dt. \qquad (3.2.39)
\end{aligned}$$

Remplacement les égalités $(3.2.29) - (3.2.31)$ et $(3.2.39)$ dans $(3.2.28)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\alpha^2-\int_0^\tau h(s)\,ds\right)\|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|v_\tau(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_\tau(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}(h\circ\nabla v)(\tau)\\
&-\frac{1}{2}\int_0^\tau (h'\circ\nabla v)(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^\tau h(t)\|\nabla v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
=\;&\alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)v_t(t)\,dS_xdt\\
&+\beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right)v_t(t)\,dS_xdt\\
&-\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)v_t(t)\,dS_xdt\\
&+\left(|v_1|^{p-2}v_1-|v_2|^{p-2}v_2,v_t\right)_{L^2(D_\tau)}\\
=\;&j_6+\ldots+j_9,
\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

où

$$\begin{aligned}
j_6 &:= \alpha^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)v_t(t)\,dS_xdt,\\
j_7 &:= \beta^2\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\,d\xi\right)v_t(t)\,dS_xdt,\\
j_8 &:= -\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right\}ds\right)v_t(t)\,dS_xdt,\\
j_9 &:= \left(|v_1|^{p-2}v_1-|v_2|^{p-2}v_2,v_t\right)_{L^2(D_\tau)}.
\end{aligned}$$

Estimation de I_6. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon=1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie et $(3.2.18)$, on obtient

$$\begin{aligned}
J_6 &\le \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^t\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi d\mu\right)^2 dS_xdt+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}|v_t(t)|^2\,dS_xdt\\
&\le \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}t\left(\int_0^t\left(\int_\Omega v(\xi,\mu)\,d\xi\right)^2d\mu\right)dS_xdt+\frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau\|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\\
&\le \frac{\alpha^2}{2}\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}t\left(\int_0^t|\Omega|\left(\int_\Omega|v(\xi,\mu)|^2\,d\xi\right)d\mu\right)dS_xdt+\frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt\\
&= \frac{\alpha^2|\Omega||\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau t\left(\int_0^t||v^m(\mu)||^2_{L^2(\Omega)}d\mu\right)dt+\frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt\\
&\le \frac{\alpha^2|\Omega||\partial\Omega|\tau^2}{4}\int_0^\tau\|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\frac{\alpha^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\,dt\\
&\le \frac{\alpha^2\left\{|\Omega||\partial\Omega|T^2+2\gamma_\Omega\right\}}{4}\int_0^\tau S(t)\,dt.
\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

Estimation de I_7. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace et (3.2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
J_7 &\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_\Omega v_t(\xi,t)\, d\xi\right)^2 dS_x dt + \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t(t)|^2\, dS_x dt \\
&\leq \frac{\beta^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(|\Omega| \int_\Omega |v_t(\xi,t)|^2\, d\xi\right) dS_x dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq \frac{\beta^2 |\Omega|\, |\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau \|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt + \frac{\beta^2\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\beta^2 \{|\Omega|\, |\partial\Omega| + \gamma_\Omega\}}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt. && (3.2.42)
\end{aligned}$$

Estimation de I_8. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), l'inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalité de trace, intégration par partie et (3.2.18), on obtient

$$\begin{aligned}
J_8 &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\} ds\right)^2 dS_x dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} |v_t(t)|^2\, dS_x dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t \left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\} ds\right)^2 dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau \|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(\int_0^t t\left\{\int_0^s \int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi d\mu\right\}^2 ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s \left(\int_\Omega v(\xi,\mu)\, d\xi\right)^2 d\mu\right\} ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2}{2}\int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s |\Omega| \left(\int_\Omega |v(\xi,\mu)|^2\, d\xi\right) d\mu\right\} ds\right) dS_x dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&= \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 |\Omega|\, |\partial\Omega|}{2}\int_0^\tau \left(t\int_0^t \left\{s\int_0^s \left(\int_\Omega |v(\xi,\mu)|^2\, d\xi\right) d\mu\right\} ds\right) dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^4 |\Omega|\, |\partial\Omega|}{16}\int_0^\tau \|v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \frac{\gamma_\Omega}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\left\{\left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^4 |\Omega|\, |\partial\Omega| + 8\gamma_\Omega\right\}}{16}\int_0^\tau S(t)\, dt. && (3.2.43)
\end{aligned}$$

Estimation de I_9. Et en appliquant l'inégalité de Young (pour $\varepsilon = 1$), (3.2.18) et Lemme 1.5, on obtient

$$
\begin{aligned}
J_9 &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega \left| |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2 \right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_\Omega |v_t(t)|^2 dxdt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \left\| |v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{C_p}{2}\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2 \\
&\quad \times \int_0^\tau \|v_1 - v_2\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&= \frac{C_p}{2}\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2 \\
&\quad \times \int_0^\tau \|v(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt \\
&\leq \frac{\{C_7 + 1\}}{2}\int_0^\tau S(t)\, dt,
\end{aligned}
\tag{3.2.44}
$$

où

$$
C_7 := C_p\left[1 + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{N}} + \left(\|v_1\|_{H^1(\Omega)} + \|v_2\|_{H^1(\Omega)}\right)^{p-2}\right]^2 > 0.
$$

La combinaison des inégalités $(3.2.41) - (3.2.44)$, et l'égalité $(3.2.40)$ donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha^2 - \bar{h}}{2}\|\nabla v(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|v_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & C_8\int_0^\tau S(t)\, dt,
\end{aligned}
\tag{3.2.45}
$$

où

$$
\begin{aligned}
C_8 \ :&= \frac{|\Omega|\,|\partial\Omega|\left\{T^2\left[4\alpha^2 + \left(\sup_{0\leq t\leq T} h(t)\right)^2 T^2\right] + 8\beta^2\right\}}{16} \\
&\quad + \frac{8\left\{\alpha^2 + \beta^2 + 1\right\}\gamma_\Omega + 8\left\{C_7 + 1\right\}}{16} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

En ajoutant côté à l'autre de $(3.2.27)$ et $(3.2.45)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|v(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\left\{\beta^2 + \alpha^2 - \bar{h}\right\}}{2}\|\nabla v(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\frac{1}{2}\|v_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\beta^2}{2}\|\nabla v_\tau(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+\left\{\frac{\alpha^2}{2} - \tau\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)\right\}\|\nabla\theta(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \{C_6 + C_8\}\int_0^\tau S(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Nous supposons que $\left(\frac{\alpha^2}{2} - \tau\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)\right) > 0$, nous obtenons

$$S(t) \leq \omega' \int_0^\tau S(t)\, dt, \tag{3.2.46}$$

où

$$\omega' := \frac{C_6 + C_8}{\min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \bar{h}}{2};\ \frac{\alpha^2}{2} - \tau\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)\right\}} > 0.$$

Si nous appliquons le lemme de Gronwall à $(3.2.46)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|v(t)\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|v_t(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \\ \leq\ & 0, \quad \forall \tau \in \left[0, \frac{\alpha^2}{2\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)}\right]. \end{aligned}$$

Même manière pour des intervalles $\tau \in \left[\frac{(m-1)\alpha^2}{2\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)}, \frac{m\alpha^2}{2\left(1 + \left[\alpha^2 + \beta^2 + 1\right]\gamma_\Omega\right)}\right]$ pour couvrir tout l'intervalle $[0, T]$, et prouvant ainsi que $v(x, \tau) = 0$, pour tout τ dans $[0, T]$. ■

Conclution

Les équations de Boussinesq décrivent un grand groupe de phénomènes des vagues dispersives non linéaires, tels que la propagation des vagues longues sur la surface d'eau peu profonde. Le but de ce type de modélisation est de réduire les problèmes de trois dimensions à deux dimensions.... Au cour de ce mémoire,nous avons étudier l'existance et l'unicité de la solution faible d'un problème de Boussinesq avec une condition non local utilisons la méthode de Faedo- Galerkin.

Bibliographie

[1] p. Shi, Shilor, Design of contact patterns in one dimensional Termoelasticity, in theoretical aspects of industrial design, Society for Industrial and Applied Mathematics (1992).

[2] R. E. Ewing, T. Lin, A class of parameter estimation techniques for fluid flow in porous media, Advances in Water Resources. $14(1991),\ 89-97$.

[3] Y. S. Choi, K. Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electro-chemestry, Nonlinear Analysis. $18(1992),\ 317-331$.

[4] A. Bouziani, Strong solution for a mixed problem with a nonlocal condition for certain pluriparabolic equations, Hiroshima Mathematical Journal. $27(1997),\ 373-390$.

[5] A. M. Nakushev, On certain approximate method for boundary value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics, Differenentsialnie Uravnenia. $18\,(1982)\,;\ 72-81$.

[6] L. Pulkina, A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). $45\,(1999)\,,\ 1-6$.

[7] L. Muravei, AV. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, Matem. zametki. $541\,(993)\,,\ 98-116$.

[8] S. Mesloub, S. Messaoudi, A three point boundary value problem with a non-local condition for a hyperbolic equation, Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). $62\,(2002)\,,\ 1-13$.

[9] S. Mesloub, S. Messaoudi, A nonlocal mixed semilinear problem for second order hyperbolic equations, Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). $30\,(2003)\,,\ 1-17$.

[10] S. Mesloub, A. Bouziani, On a classe of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. $22(3)\,(1999)\,,\ 511-519$.

[11] Mesloub S, Lekrine N. On a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta Scientiarum Mathematicarum. (Szeged). $70\,(2004)\,,\ 65-75$.

[12] S. Beilin, On a mixed nonlocal problem for a wave equation, Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). $103\,(2006)\,,\ 1-10$.

[13] S. Mesloub, A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudopar-abolic equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications. $316\,(2006)\,,\ 189-209$.

[14] S. Mesloub, On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions, Nonlinear Analysis : Theory, methods & applications. $68\,(2008)\,,\ 2594-2607$.

[15] S. Mesloub, Mixed non local problem for a nonlinear singular hyperbolic equation, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. $(2010)\,,\ 3357-70$, DOI : 10.1002/mma.1150.

[16] G. Lebon, A. Cloot, Propagation of ultrasonic sound waves in dissipative dilute gases and extended irreversible thermodynamics, Wave Motion. $11\,(1989)\,,\ 23-32$.

[17] S. Boulaaras, A. Zaraï, A. Draifia, Galerkin method for nonlocal mixed boundary value problem for the Moore-Gibson-Thompson equation with integral condition, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. $(2019)\,,\ 1-16$, DOI : 10.1002/mma.5540.

[18] I. Lasiecka, X. Wang, Moore–Gibson–Thompson equation with memory, part I : exponential decay of energy, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. $67(2016),\ 1-17$, DOI $10.1007/s00033-015-0597-8$.

[19] S. Mesloub, F. Mesloub, On the higher dimension Boussinesq equation with nonclassical condition, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. $34(5)\,(2011)\,,\ 578-586$.

[20] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, R. Marchand, Well-posedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, Control Cybernet. $40(4)\,(2011)\,,\ 1245-1264$.

[21] R. Marchand, T. McDevitt, R. Triggiani, An abstract semigroup approach to the third-order Moore-Gibson-Thompson partial differential equation arising in high-intensity ultrasound : structural decomposition, spectral analysis, exponential stability, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. $35(15)\,(2012)\,,\ 1896-1929$.

[22] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka, M. Pospieszalska, Well-posedness and exponential decay of the energy in the nonlinear Jordan-Moore-Gibson-Thompson equation arising in high intensity ultrasound, Math Models Methods Appl Sci. $22(11)\,(2012)\,,\ 195-207$.

[23] I. Lasiecka, X. Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I : exponential decay of energy, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. $67(2)\,(2016)\,,\ 17-23$.

[24] A. Guezane-Lakoud, N. Boumaza, Galerkin method for the boussinesq equation with integral condition, Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications. $3\,(2012)$, $29-40$.

[25] N. Boumaza, B. Gheraibia, On the existence of a local solution for an integro-differential equation with an integral boundary condition, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. https ://doi.org/10.1007/s$40590-019-00266$-y.

[26] S. Mesloub, F. Mesloub, Solvability of a Mixed Nonlocal Problem for a Nonlinear Singular Viscoelastic Equation, Acta Appl Math. $110\,(2010)$, $109-129$, DOI 10.1007/s$10440-008-9388$-y.

[27] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York (2010).

[28] O. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Springer : New York, Heidelberg, Tokyo, (1985).

[29] L. Ngoc, N. Triet, N. Long N, Existence and exponential decay estimates for an N-dimensional nonlinear wave equation with a nonlocal boundary condition, Ngoc et al. Boundary Value Problems $20\,(2016)$, DOI $10.1186/s13661-016-0527-5$.

[30] E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, (1955).

[31] J. Lions, Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod/Gauthier-Villars, Paris (1969).

[32] V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities, vol. 1. Academic Press, New York (1969).