

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكده

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/.../2023.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

La méthode d'estimation par seuillage en ondelettes d'un champ aléatoire

Option : ANEDP

Par : BOUKERFA Nedjla
BOUZABIA Rayane

Encadré par : KIMOUCHE Karima

M.C.A U.SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : LALLOUCHE Abdallah

M.C.B U. SKIKDA

Examinatrice : TILBI Djahida

M.C.B U. SKIKDA

Année 2022–2023

بسم الله الرحمن الرحيم

قال الله تعالى: " وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله و المؤمنون "

نحمد الله عز وجل الذي وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي و الذي ألهمنا الصحة والعافية والعزيمة، فالحمد لله حمدا كثيرا.

نتقدم بجزيل الشكر و التقدير إلى الأستاذة الدكتورة المشرفة " كيموش كريمة " على كل ما قدمته لنا من توجيهات و معلومات قيمة ساهمت في إطراء موضوع دراستنا في جوانبها المختلفة، و مساعدتها لنا طيلة إنجاز هذه المذكرة.

كما نتوجه بالشكر والعرفان و بالغ إمتناننا إلى أعضاء لجنة المناقشة الموقرة " لعلوش عبد الله " و " تيلبي جهيدة " لمنحنا بعض الوقت لمراجعة هذا العمل

أود أن أتقدم بخالص الشكر لمديري و جميع معلمي قسم الرياضيات في جامعة 20

أوت 1955

بسم الله الرحمن الرحيم

وصلت رحلتي الجامعية إلى نهايتها بعد تعب و مشقة وها أنا ذا أختتم بحث تخرجي بكل هممة و نشاط.

الحمد لله الذي أثار لنا درب العلم والمعرفة وأعانا على أداء الواجب ووقفنا إلى إنجاز هذا العمل.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى:

إلى من أفضّلها على نفسي، و لِمَ لا، فلقد ضحت من أجلي ولم تدّخر جهدا في سبيل إسعادي على الدّوام إلى رمز الحب والحنان إلى كل من في الوجود بعد الله ورسوله حبيبتي العزيزة والغالية أُمي الحبيبة حفظها الله إلى صاحب السيرة العطرة، و الفكر المستنير، إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم إلى من رفعت رأسي عاليا افتخارا به والدي الحبيب أطال الله في عمره

إلى أجمل هدية من الله سندي أخي المحترم أيوب الذي كنت و ما زلت أعتد عليه في أدق تفاصيل حياتي ما كبر حجمه و ما صغر إلى القلوب الطاهرة الرقيقة و النفوس البريئة إلى رياحين حياتي إخوتي " أسماء " " أمينة " " أميرة "

إلى صديقتي وتوأم روعي " منى " يا من عشت معها أعز أيامي رحمك الله و أسكنك فسيح الجنان فلم يعد شيء ينفع إلا الصبر والسلوان و آيات على قبرك تريحك " رحمك الله يا أعز ما أملك وبعذك لن يكون لي أعز منك إنسان " إلى من رافق دربي طيلة مشواري هذا و صديق الأيام جميعا بحلوها و مرّها نصفي الثاني وخطيبي " وليد "

إلى صديقتي وزميلتي في هذا العمل " ريان "

أرجو أن يكون بحثنا هذا خالصا لوجه الله وأن تكون فيه الفائدة، وأن يغفر الله لنا زلاتنا فيه، وأن يكتبنا مع طلبة العلم اتباعا لسنة نبيه الكريم عليه أفضل الصلاة والسلام .

نجلاء

بسم الله الرحمن الرحيم

وصلت رحلتي الجامعية إلى نهايتها بعد تعب و مشقة وها أنا ذا أختتم بحث تخرجي بكل همة و نشاط.

الحمد لله الذي أثار لنا درب العلم والمعرفة وأعانا على أداء الواجب ووقفنا إلى إنجاز هذا العمل.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى:

إلى الشمعة التي احترقت وضحت من أجلي، إلى التي لا أجد العبارات والكلمات لوصف حبي لها، إلى الصدر الحنون، إلى التي قيل عنها أن الجنة تحت أقدامها "أمي العزيزة" حفظها الله

إلى من كان المرشد الناصح طوال مشوار حياتي، إلى من علمني فضائل الأخلاق ودروس الحياة، و علمني أن الحياة أخذ و عطاء، إليك يا سراج ليلي أنحني تواضعا أهديك ثمرة ترقيقك طوال مشواري الدراسي "أبي العزيز" أطال الله في عمره

إلى أجمل هدية من الله وتوأم روحي وملاكي في الحياة أختي الوحيدة "رتاج"

إلى من بهم يشد ساعدي وتعلو هامتي هم سندي وركائز نجاحي إخواني " عبد الرحمان " "أيوب" "نذير"

إلى صديقتي وزميلتي في هذا العمل " نجلاء"

أرجو أن يكون بحثنا هذا خالصا لوجه الله وأن تكون فيه الفائدة، وأن يغفر الله لنا زلاتنا فيه، وأن يكتبنا مع طلبة العلم اتباعا لسنة نبيه الكريم عليه أفضل الصلاة والسلام .

ريان

Résumé

Ce mémoire est consacré essentiellement à l'étude de l'estimateur de la densité bispectrale dans les champs aléatoires non linéaires, qui est basé sur l'analyse en ondelettes. Nous avons défini les notions de base concernant les processus stochastiques et la densité spectrale, puis nous avons donné un bref sur la transformée en ondelettes (continue et discrète). Ensuite, nous avons étudié les champs aléatoires et l'analyse multirésolution où nous obtenons des expressions explicites pour les covariances de deuxième et troisième ordre entre les ondelettes et le coefficient d'échelle des champs aléatoires discrets. Enfin, nous proposons un estimateur à seuil par ondelettes de la densité bispectrale de champ aléatoire qui est plus performant que les estimateurs linéaires (noyaux).

Mots clés :

- Champ aléatoire
- Transformé par ondelette
- Analyse multirésolution
- densité bispectrale

Abstract

This graduation note is essentially devoted to the study of the bispectral density estimator in nonlinear random fields, which is based on wavelet analysis. We defined the basic notions concerning the stochastic processes and the spectral density, then we gave a brief on the wavelet transform (continuous and discrete). Next, we studied random fields and multiresolution analysis where we obtain explicit expressions for the second and third order covariances between wavelets and the scaling coefficient of discrete random fields. Finally, we propose a wavelets threshold estimator of the bispectral density of random field which is more powerful than the linear estimators (kernels).

Keywords :

- Random field
- Wavelet transforme
- Multiresolution analysis
- Bispectral density

ملخص

كرست هذه المذكرة بشكل أساسي لدراسة مقدر الكثافة ثنائية الطيفية في الحقول العشوائية غير الخطية، والتي تعتمد على تحليل الموجات. لقد حددنا المفاهيم الأساسية المتعلقة بالعمليات العشوائية والكثافة الطيفية، ثم قدمنا نبذة مختصرة عن التحويل المويجي (مستمر ومنفصل). إضافة إلى ذلك، درسنا الحقول العشوائية والتحليل متعدد الحلقات حيث تحصلنا على تعبيرات صريحة للتغاير من الرتبين الثانية والثالثة بين الموجات ومعامل القياس للحقول العشوائية المنفصلة. في الأخير قمنا باقتراح مقدرًا للعتبة بواسطة موجات الكثافة ثنائية الطيفية للمجال العشوائي والتي تكون أكثر كفاءة من المقدرات الخطية (النواة).

الكلمات المفتاحية:

- مجال عشوائي
- تحويل الموجات
- تحليل متعدد الحلقات
- الكثافة ثنائية الطيفية

Table des matières

Introduction	i
1 Processus stochastique	1
1.1 Processus stochastique	1
1.2 Les moments et les cumulants	2
1.3 La densité spectrale	4
1.4 Taux de convergence	6
2 La transformée en ondelettes	8
2.1 Inroduction	8
2.2 La transformée en ondelettes	8
2.2.1 Définitions	8
2.3 Les types de transformées en ondelettes	11
2.3.1 La transformée en ondelettes continue	11
2.3.2 La transformée en ondelettes discrète	13
2.4 Quelques familles de la transformé en ondelettes	14
2.5 Les avantages de la transformée en ondelettes	18
3 Les champs aléatoires	19
3.1 Analyse multirésolution dans \mathbb{R}^2	19
3.2 Les Champs aléatoires	23
3.2.1 La représentation d'un champ aléatoire discret en base en ondelettes	24
3.3 La structure des covariances	24
3.3.1 Les covariances du second ordre	24
3.3.2 Les covariances du troisième ordre	26
3.3.3 La structure de dépendance en termes de cumulants :	27

3.4	La transformée en ondelettes discrètes des champs aléatoires	28
4	L'estimation bispectrale par la méthode de seuillage en ondelettes	33
4.1	L'estimateur par ondelettes	33
4.2	La minimaxité de l'estimateur	35
4.3	Amélioration supplémentaire de l'estimateur	37

Introduction

Depuis le début des années 1990, la théorie des ondelettes, développée, entre autres, par Meyer (1990), a fourni aux statisticiens de nouveaux outils d'estimation non paramétrique. Elle est préconisée comme une alternative aux méthodes de Fourier pour l'analyse des signaux non linéaires et non stationnaires. Pour cela, les ondelettes se sont imposées comme des outils fondamentaux de l'analyse harmonique moderne. Elles sont issues de l'intuition d'un ingénieur en géophysique, J. Morlet, dans les années 1980, sous l'impulsion de personnalités scientifiques telles que le physicien A. Grossman ou le mathématicien Y. Meyer, il met l'accent sur les caractéristiques importantes du signal et semble en outre correspondre à des réalités physiques du traitement des signaux acoustiques. La méthode en ondelettes est un outil mathématique s'ajoute aux méthodes classiques d'analyse du signal.

L'estimation de la densité spectrale pour les champs aléatoires à une très longue histoire. Elle a occupé une place importante dans le domaine de traitement du signal et traitement d'image. Elle a prouvé leur utilité dans le filtrage linéaire et la théorie de prédiction en communication. Les spectres du second ordre jouent un rôle important dans le traitement du signal et le besoin d'analyse spectrale de puissance se fait sentir dans une variété de contextes, tels que la conception de filtres optimaux, la détection de signaux à bande étroite, l'estimation de modèles linéaires à paramètres finis, ...etc, bien que cela ne soit pas explicitement indiqué, l'hypothèse est que le signal est gaussien, si le signal n'est pas gaussien, une analyse spectrale d'ordre supérieur est nécessaire.

Le travail proposé dans ce mémoire consiste à l'étude de la densité bispectrale, qui est la transformée de Fourier des moments (retardés) du troisième ordre, nous proposons un estimateur de la densité bispectrale par la méthode de seuillage en ondelettes pour une large classe des champs aléatoires stationnaires, nous montrons que cet estimateur atteint le taux maximum sur les espaces de Sobolev, ce qui n'est pas atteint par les estimateurs linéaires (noyau ou spiline).

Compte tenu de cet objectif, nous avons opté pour le plan de travail suivant :

Le premier chapitre est consacré aux rappels sur les notions fondamentales concernant le

processus stochastiques et la densité spectrale.

Dans le deuxième chapitre on introduit les principales notions et propriétés de la transformée en ondelettes. Certains exemples des ondelettes sont aussi évoqués dans ce chapitre.

Le troisième chapitre est porté sur l'analyse multirésolution dans \mathbb{R}^2 et le champ aléatoire. Nous développons une procédure alternative dans laquelle un champ aléatoire continu est d'abord généré par interpolation des champs aléatoires discrets. Nous obtenons des expressions explicites pour les covariances de deuxième et troisième ordre entre les ondelettes et le coefficient d'échelle des champs aléatoires discrets et la structure de dépendance entre les coefficients d'ondelettes est étroitement liée à la dépendance des coefficients d'échelle.

Dans le dernier chapitre nous considérons un estimateur non linéaire (à seuil) de la densité bispectrale par ondelettes des champs aléatoires et nous obtenons des coefficients empiriques en ondelettes de la densité bispectrale, nous montrons que cet estimateur atteint le taux minimax sur les espaces de Sobolev, ce qui n'est pas atteint par les estimateurs linéaires (noyau ou spline).

Chapitre 1

Processus stochastique

1.1 Processus stochastique

Définition 1 un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$, est une suite de variables aléatoires indexée par un ensemble T , et sont définies sur un même espace de probabilité (Ω, T, P) . T est dit espace des temps.

- Si $T = \mathbb{R}$, le processus est dit à temps continue.
- Si $T = \mathbb{Z}$, le processus est dit à temps discret.

Dans tout ce travail nous sommes intéressées aux processus à temps discret.

Définition 2 (Processus stationnaire) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, est dit stationnaire au second ordre si :

1. $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t) = \mu$, constante indépendante du temps.
2. $\forall t, s \in \mathbb{Z}, Cov(X_t, X_s) = \gamma(t - s)$, dépend uniquement de la différence entre les instants t, s .
En d'autre terme, invariant par translation dans le temps.

Si noté par $h = t - s$ alors $Cov(X_t, X_s)$ dépend uniquement de retard h , on pose alors $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$.

Définition 3 (Stationnarité stricte) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, est dit stationnaire au sens strict (ou fortement) si $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}$ et $n = 1, 2, \dots$ la loi du vecteur $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, est identique à la loi du vecteur $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k})$, i.e. toutes les lois de dimension finie du processus sont identiques.

Définition 4 (Fonction d'autocovariance) Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω, T, P) , la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est donnée par la fonction

$$\begin{aligned} \gamma & : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, s) & \rightarrow \text{Cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))] = \gamma(t - s) \end{aligned}$$

Propriétés :

La fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ vérifie les propriétés suivante :

1. $\gamma(0) \geq 0$
2. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$
3. $\gamma(h)$ est un fonction symétrique, i.e $h \in \mathbb{N}, \gamma(-h) = \gamma(h)$.
4. $\gamma(h)$ est une fonction semi-définie positive, i.e

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(i - j) \geq 0.$$

1.2 Les moments et les cumulants

Définition 5 (Le moment) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur I , de fonction de répartition F_X et de loi de probabilité P . Le moment (ou moment ordinaire, ou moment en 0) d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de X est défini, s'il existe, par : $m_r = E[x^r]$. On a donc, d'après le théorème de transfert :

$$m_r = \int_{x \in I} x^r dF_X,$$

cette intégrale de Stieltjes peut se réécrire :

- Si X est discrète : $m_r = \sum_{k \in I} k^r p_k$.
- Si X est absolument continue : $m_r = \int_{x \in I} x^r g(x) dx$, où $g(x)$ densité de probabilité.

Propriétés :

- Si X est une variable aléatoire constante ($X = k$) de probabilité 1 alors $E(X) = k$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires et a et b deux réels : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- Pour n variables aléatoires X_1, \dots, X_n , soit a_1, \dots, a_n n réels alors : $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$

En mathématiques et plus particulièrement en théorie des probabilités et en statistique, les cumulants d'une loi de probabilité sont des coefficients qui ont un rôle similaire à celui des moments. Les cumulants déterminent entièrement les moments et vice versa, c'est-à-dire que deux lois ont les mêmes cumulants si et seulement si elles ont les mêmes moments.

Définition 6 (Le cumulants) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On définit d'abord la fonction génératrice des cumulants K_X associée à X ,

$$K_X(t) = \ln(E[e^{t.X}]).$$

Les cumulants cum_n sont alors définis comme les coefficients dans le développement de K_X en série exponentielle :

$$K_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} cum_n \frac{t^n}{n!} = \mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Si on note $\mu = E[X]$ l'espérance de X et $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ sa variance alors on a en particulier que $\mu = cum_1$ et $\sigma^2 = cum_2$. Les cumulants sont donnés par les dérivées en 0 de K_X

$$cum_n = K_X^{(n)}(0), \forall n \geq 1.$$

Remarque 1 Certains auteurs préfèrent définir la fonction génératrice des cumulants plutôt comme le logarithme népérien de la fonction caractéristique. La fonction génératrice des cumulants prend alors parfois le nom de seconde fonction caractéristique

$$H_X(t) = \ln(E[e^{it.X}]) = \sum_{n=1}^{\infty} cum_n \frac{(it)^n}{n!} = \mu it - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Un avantage apparent à utiliser $H(t)$ (soit évaluer $K(t)$ pour une valeur imaginaire pure) est que $E[e^{it.X}]$ est bien défini pour tout t réel alors que ce n'est pas toujours le cas de $E[e^{t.X}]$, comme dans les cas où la probabilité est élevée que X ait de grandes valeurs.

Propriétés :

1. $K_{X+Y}(t) = \ln(E[e^{t.(X+Y)}]) = \ln(E[e^{t.X}] \cdot E[e^{t.Y}]) = \ln E[e^{t.X}] + \ln E[e^{t.Y}] = K_X(t) + K_Y(t)$. Tandis qu'avec la fonction génératrice des moments on obtient : $m_{X+Y}(t) = E[e^{t.(X+Y)}] = E[e^{t.X}] \cdot E[e^{t.Y}] = m_X(t) + m_Y(t)$.
2. $K_{aX}(t) = \ln(E[e^{t.aX}]) = K_X(at)$.

Propriétés :

1. Le premier cumulants est égal à la valeur attendue : $cum_1 = E[X]$.
2. Le second cumulants est égal à la variance : $cum_2 = Var[X]$.
3. Le troisième cumulants est égal au troisième moment est : $cum_3 = E[(X - E[X])^3]$.

1.3 La densité spectrale

La densité spectrale est un outil mathématique permettant de représenter les différentes composantes spectrales d'un signal et d'en effectuer l'analyse harmonique. Elle est utilisée en particulier en physique, en ingénierie et en traitement du signal. Elle contient la même information que la fonction d'autocovariance, mais elle est définie dans le domaine des fréquences plutôt que dans le domaine du temps.

Définition 7 (Densité spectrale) Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de fonction d'autocovariance $\gamma(h)$. On appelle densité spectrale de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ la transformation de Fourier discrète, f de la suite des autocovariances (lorsque elle existe)

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{i\omega \cdot h}.$$

Proposition 1 Réciproquement si $f(\omega)$ est la densité spectrale de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega \cdot h} d\omega.$$

Propriétés

1. La densité spectrale d'un bruit blanc est constante est donnée par $f_e(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$.
2. La densité spectrale du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie par : $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \cos(\omega \cdot h)$.
3. $\forall h \in \mathbb{Z}, \gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega \cdot h} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos(\omega \cdot h) d\omega$.

Preuve.

1. $\gamma(h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \sigma^2$ si $h = 0$

$$f_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \sigma^2 e^{i\omega \cdot h} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{i\omega \cdot h}$$

on a

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{i\omega \cdot h} = \sum_{h \geq 1} (e^{i\omega \cdot h} + e^{-i\omega \cdot h}) = 1.$$

2.

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{i\omega.h} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h>0} \gamma(h) e^{i\omega.h} + \sum_{h>0} \gamma(h) e^{-i\omega.h} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h>0} \gamma(h) (e^{i\omega.h} + e^{-i\omega.h}) \right] \text{ telle que } 2 \cos(\omega h) = (e^{i\omega.h} + e^{-i\omega.h}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{h \neq 0} \gamma(h) \cos(\omega.h) \right].
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\forall h \in \mathbb{Z}, \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{-i\omega.h} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\gamma(k) e^{i\omega.k}) e^{-i\omega.h} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega.(k-h)} d\omega \\
&= \gamma(h); \text{ d'après Fubini } \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega.(k-h)} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq h \\ 2\pi & \text{si } k = h \end{cases}
\end{aligned}$$

Parmi les outils les plus utilisés dans les techniques d'estimation spectrale, on trouve le périodogramme qui représente un outil important pour l'estimation de la densité spectrale : ce qui revient à estimation des coefficients de Fourier à partir des observations d'un processus d'une série chronologique. Le périodogramme a été introduit à la fin du 19ème siècle et a été utilisé pour détecter les périodicités cachées dans les observations des fameuses taches solaires. Parmi les travaux les plus influents en matière d'estimation spectrale des processus du second ordre stationnaires, nous trouvons Parzen [22], Rosenblatt [21], Masry [16], Priestley [23].

Définition 8 (Le périodogramme) *On appelle le périodogramme d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ la quantité $I_N(\lambda)$ donnée par*

$$I_N(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-it.\omega} \right|^2.$$

On note que, dans la pratique, les fréquences sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ sont remplacées par les fréquences de Fourier, ω_j , définies, pour $j = 0, \dots, N-1$ par $\omega_j = \frac{2\pi j}{N}$.

L'expression du périodogramme peut également s'écrire en fonction de la fonction d'autocovariance empirique de la série stationnaire.

En effet $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{t=1}^{N-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X})$, $h = 0, 1, \dots, N-1$ avec $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t$ et $\hat{\gamma}(h) = \gamma(-h)$ pour $h < 0$, donc $I_N(\omega_j) = \sum_{|k| < N} \hat{\gamma}(h) e^{-ih\omega_j}$.

Les deux principales propriétés du périodogramme en tant qu'estimateur de la densité spectrale sont les suivantes :

1. Il est asymptotiquement sans biais.
2. Il est non-consistant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov} \left(I_N(\omega), I_N(\omega') \right) = 0 \text{ si } \omega \neq \omega'$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} (I_N(\omega)) = \begin{cases} f^2(\omega) & \text{si } \omega \in [0, 2\pi[- \{0, \pi\} \\ 2f^2(\omega) & \text{si } \omega \in \{0, \pi\} \end{cases}.$$

Remarque 2 Dans la littérature, il existe deux méthodes de base pour estimer la densité spectrale : la méthode paramétrique et la méthode non paramétrique.

1. L'estimateur paramétrique de la densité spectrale suppose que le signal a une certaine structure qui peut être décrite selon un modèle paramétrique. ensuite, L'estimation est donné directement en utilisant les paramètres de ce modèle.
2. L'estimation non paramétrique est la méthode qui se focalise sur l'estimation de la fonction d'autocovariance sans mettre des hypothèses sur la structure du signal, généralement, le périodogramme est considéré comme l'approche la plus naturelle pour l'estimation non paramétrique

Dans ce mémoire, on va se concentrer sur l'estimation non paramétrique de la densité bispectrale.

1.4 Taux de convergence

nous introduirons des notations très importantes, appelées **notations O, o**, qui se lisent “notation grand-O”, et “notation petit-o.” Ici **O** et **o** indiquent l'ordre et sont souvent considérés comme des symboles d'ordre. De manière approximative, nous dirons qu'une certaine quantité est, disons, $O(x)$, lorsqu'elle est du même ordre, asymptotiquement, que la quantité x , alors qu'elle sera $o(x)$ quand elle sera d'un ordre inférieur à la quantité x .

Définition 9 Si $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont deux fonctions réelles de la variable positive entière n , alors la notation

$$f(n) = o(g(n)) \quad [\text{de façons facultative, quand } n \rightarrow \infty]$$

signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right) = 0.$$

Nous pouvons dire que $f(n)$ est d'un ordre plus faible que $g(n)$ asymptotiquement ou quand n tend vers l'infini.

Exemple 1 1. On a $f(n) = o(1)$, ceci signifie d'après la définition que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(n)) = 0,$$

autrement dit, que $f(n)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

2. Si on a $f(n) = o(n^{-1})$, alors $f(n)$ tend vers zéro plus vite que n^{-1} . Nous pourrions également dire que $f(n)$ est $o(n)$, et nous ne saurions pas alors si $f(n)$ possède une limite quand n tend vers l'infini. Mais nous savons que si $f(n)$ tend vers l'infini, c'est moins rapidement que n .

La notation grand- O , qui exprime la relation d'ordre identique, est plus précise que la notation petit- o , puisqu'elle nous indique le taux le plus fort auquel les quantités peuvent varier avec n . En voici la définition.

Définition 10 Si $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ sont deux fonctions réelles de la variable positive entière n , alors la notation

$$f(n) = O(g(n))$$

signifie qu'il existe une constante $K > 0$, indépendante de n , et un entier positif N tels que $\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < K$ pour tout $n > N$.

Nous disons que $f(n)$ et $g(n)$ sont du même ordre asymptotiquement ou quand $n \rightarrow \infty$.

Chapitre 2

La transformée en ondelettes

2.1 Introduction

La transformée en ondelettes est l'une des solutions les plus utilisées pour surmonter le problème temps-fréquence de la transformée de Fourier d'une part et le problème de la taille de la fenêtre de la transformée de Fourier fenêtré d'autre part. Elle présente des avantages par rapport aux méthodes de Fourier traditionnelles dans l'analyse des situations physiques où le signal contient des discontinuités et des déversements nets.

Les ondelettes sont des fonctions mathématiques qui nous permettent de diviser les données en différentes composantes de fréquence, puis d'étudier chaque composante avec une résolution appropriée à son échelle globale. Elles ont été développées indépendamment dans les domaines des mathématiques, de la physique quantique, du génie électrique et de la géologie sismique, les échanges entre ces domaines au cours des quarante dernières années ont conduit à de nombreuses nouvelles applications d'ondelettes telles que la compression d'images, la turbulence, la vision humaine, le radar et la prévision des tremblements de terre.

2.2 La transformée en ondelettes

2.2.1 Définitions

Définition 11 *La transformée en ondelettes est un outil mathématique qui décompose un signal en fréquences en conservant une localisation spatiale. Le signal de départ est projeté sur un ensemble de fonctions de base qui varient en fréquence et en espace. Ces fonctions de base s'adaptent aux*

fréquences du signal à analyser. Cette transformation permet donc d'avoir une localisation en temps et en fréquence du signal analysé.

Définition 12 Une ondelette est une forme d'onde qui a une valeur moyenne nulle et une durée limitée (ce qui explique le mot "ondelette" qui veut dire petit onde) Une ondelette est une forme d'onde qui a une valeur moyenne nulle et une durée limitée (ce qui explique le mot "ondelette" qui veut dire petit onde). Une ondelette est une forme d'onde qui a une valeur moyenne nulle et une durée limitée (ce qui explique le mot "ondelette" qui veut dire petit onde).

L'analyse en ondelettes adopte une fonction de prototype d'ondelettes connue sous le nom de "Ondelettes mère". Cette ondelette mère génère un ensemble de fonctions de base connues sous le nom "ondelettes enfants" par des translations et dilatations récursives.

En mathématique, une ondelette ψ est une fonction oscillante, comme les fonctions sinus et cosinus, mais localisée. Deux opérations importantes appliquées à la fonction d'ondelette nous permettent de générer une infinité de variations de celle-ci. La translation qui correspond au déplacement de l'ondelette le long de l'axe des 2, la deuxième opération est la dilatation. Cette notion est donnée par la formule générale d'une ondelette mère :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

Dans cette expression, Le paramètre b est relatif à la translation tandis que a est relatif à la dilatation "Echelle" ($\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$: ondelette enfants). L'idée était d'analyser le signal avec des fonctions élémentaires « Ondelettes » construites à partir de l'ondelette mère $\psi_{a,b}$, elle est conçue pour osciller (comme une onde) mais limitée dans le temps (petite onde), et doit être bien localisée aussi bien en temps qu'en fréquence. Ceci se traduit par une condition dite d'admissibilité qui est la suivante :

Soit ψ une fonction non nulle de $L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{\psi}$ sa transformée de Fourier :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{\|\hat{\psi}(v)\|^2}{v} dv < +\infty$$

alors ψ est dite admissible, on appelle également ψ ondelette analysante.

Propriétés d'une ondelette mère :

Moments nuls : Une ondelette a moins de moment nuls si et seulement si sa fonction d'échelle restitue le polynôme de degré inférieur ou égal à m . Alors que cette propriété sert pour les fonctions

d'échelle

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, 0 \leq k < N,$$

D'après la dernière équation de M_k , toute ondelette se doit d'avoir au moins un moment nul (le cas où $k = 0$).

Support compact : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

Régularité : La régularité d'une ondelette est la propriété permettant de localiser les singularités dans un signal. On peut noter qu'il existe un lien entre la régularité et les moments nuls. Autant on a des moments nuls autant le signal est régulier.

Symétrie : Comme le nombre de moments nuls, la symétrie de l'ondelette conditionne la régularité de celle-ci sur un intervalle.

Orthogonalité : L'orthogonalité d'une ondelette est la propriété permettant d'éliminer la redondance d'informations.

Théorème 1 soit la fonction $\psi \in L^1 \cap L^2$, on dit que ψ une ondelette-mère, si elle vérifie les conditions suivantes :

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|^2} dw = k < +\infty$

ii) $\|\psi\| = 1$.

On construit alors les ondelettes de base

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), b \in \mathbb{R}, a > 0,$$

et pour tout signal $f \in L^2$ on considère la transformée en ondelettes du signal f qui définie par : $C_f(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}_{a,b}(t) dt$, ou $C_f(a,b)$ sont les coefficients d'ondelettes. Alors on a :

1. Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{k} \int \int_{\mathbb{R}^2} |C_f(a,b)|^2 \frac{dadb}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

2. La formule de reconstruction

$$f(t) = \frac{1}{k} \int \int_{\mathbb{R}^2} C_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

au sens suivant si

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{k} \int \int_{|a|>\varepsilon, b \in \mathbb{R}} C_f(a, b) \Psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2},$$

alors $f_\varepsilon \rightarrow f$ dans L^2 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est aussi longue et technique. Nous référons le lecteur à [8].

Exemple 2 L'exemple le plus simple de fonction est évidemment celui d'une fonction constante par morceaux c'est l'ondelette de Haar définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} & . \end{cases}$$

On a dans ce cas $\hat{\psi}(\xi) = ie^{-i\pi\xi \frac{1-\cos(\pi\xi)}{\pi\xi}}$.

2.3 Les types de transformées en ondelettes

La transformée en ondelettes cherche une localisation temporelle du comportement fréquentiel d'un signal, qui permet un passage d'une représentation à une autre. De plus, nous pourrions dire que les ondelettes permettent aussi de mesurer les variations dans le temps des composantes fréquentielles (spectrales) d'un signal.

On distingue principalement deux types de transformées en ondelettes :

2.3.1 La transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelette continue (Continuous Wavelet Transform, i.e; CWT) a été introduite par Morlet et son équipe, qui utilise des translations et des dilatations de la fonction ondelette mère durant tout l'intervalle du temps de manière continue.

Elle permet d'analyser le comportement local d'un signal en réduisant progressivement le paramètre d'échelle. Cette procédure de zoom est un outil puissant pour détecter et caractériser les irrégularités d'un signal.

La transformée en ondelettes continue est donnée par :

$$W_f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx,$$

Cette transformation est en théorie infiniment redondante puisque l'ondelette est translatée de manière continue, cependant il existe des méthodes pour diminuer cette redondance l'une de ces méthodes consiste en l'emploi de la transformée en ondelettes discrète.

Propriétés

1. **Conservation de l'énergie** : soit ψ une ondelette analysante et f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ alors :

$$\int |f(x)|^2 dx = \int \int |W_f(a, b)|^2 \frac{1}{a^2} da db.$$

2. **L'inverse** :

$$f(x) = \int \int \psi_{a,b}(x) W_f(a, b) \frac{1}{a^2} da db.$$

3. **Linéarité, translation, dilatation et rotation** :

- (a) La transformée en ondelettes est linéaire :

$$W(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha W(f_1) + \beta W(f_2) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^2, (f_1, f_2) = L^2(\mathbb{R}^2).$$

- (b) Translation : la transformée en ondelettes est invariante par translation et on a :

$$W(\tau_b f)(a, b) = W_f(a, b - \hat{b}),$$

tel que τ_b est la translation de f par le vecteur b' .

- (c) Dilatation : la transformée en ondelette a également la propriété de dilatation tel que

$$W(\delta_k f)(a, b) = k^{-n/2} W_f(ka, kb),$$

avec

$$\delta_k f(x) = f(kx).$$

Cette propriétés liée à l'échelle est très utile pour l'analyse des fractales¹. Afin de s'affranchir du facteur de dilatation $k^{-n/2}$, la normalisation de la famille d'ondelettes peut s'avérer extrêmement importante. En effet, ceci conduit à une propriété d'invariance par dilatation.

¹ Analyse fractale, est la modélisation de données dont la fractalité est la propriété inhérente.

(d) Rotation : la transformé en ondelette a également la propriété de rotation tel que

$$W(R_{r_0}f)(a, b) = Wf(a, r_0^{-1}(b)),$$

où

$$R_{r_0}f(x) = f(r_0^{-1}(x)).$$

2.3.2 La transformée en ondelettes discrète

La transformée en ondelettes discrète est produite pour surmonter le problème de redondance de la transformée en ondelettes continue, Cette redondance mobilise une grande quantité de ressource de calcul. La transformée discrète en ondelettes, au contraire, fournit suffisamment d'information, tant pour l'analyse que pour la reconstruction du signal original. Ceci en un temps de calcul notablement réduit.

Définition 13 une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ est composée de fonctions $\psi_{j,k}$ donnée par

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j(x - 2^{-j}k))$$

où ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette mère, et j, k l'indice de position. $\psi_{j,k}$ est donc déduit de ψ par une transformation d'échelle et une translation.

Dans la définition, le facteur $2^{\frac{j}{2}}$ est introduit pour que la norme $L^2(\mathbb{R})$ de $\psi_{j,k}$ soit la même pour tous les j et les k . En effet,

$$\|\psi_{j,k}\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\psi\|_2$$

les fonctions $\psi_{j,k}$ sont obtenues de ψ par une normalisation, une dilatation ainsi qu'une translation.

De façon plus précise, la fonction $\psi_{j,k}$ est translatée de $2^{-j}k$ unités, elle est dilatée verticalement d'un facteur $2^{\frac{j}{2}}$ et horizontalement d'un facteur 2^{-j} par rapport à la fonction ψ .

Définition 14 Une ondelette mère est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que la famille de fonctions $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Puisque $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, la transformation en ondelettes orthogonales est alors définie par : $f \rightarrow \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ $j, k \in \mathbb{Z}$, avec la formule de reconstruction :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

t la formule de Plancherel :

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2.$$

En 1910, Alfred Haar est le premier à décrire une base orthonormale complète de $L^2(\mathbb{R})$. C'est ce que nous appelons aujourd'hui les ondelettes de Haar. L'ondelette mère est définie par

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2 *Le système $\{H_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.*

Les ondelettes mères sont souvent construites à partir d'une analyse multirésolution. Nous étudierons donc cette dernière, car elle donne un cadre naturel pour comprendre les bases de $L^2(\mathbb{R})$ qui forment des ondelettes mères. Les idées de l'analyse multirésolution qui ont été énoncées en 1986 par Mallat et Meyer, permet de décomposer des signaux mono ou multidimensionnels sur une base (orthonormée) de fonctions d'échelle et sur une base (orthonormée) de fonctions ondelette.

2.4 Quelques familles de la transformé en ondelettes

Il existe une infinité de fonctions d'ondelettes parce que toute fonction oscillante localisée est une ondelette mère possible. Toutefois, elles ne possèdent pas toutes des propriétés intéressantes. Aussi, de nombreux spécialistes des ondelettes ont construit des familles d'ondelettes possédant certaines propriétés remarquables Parmi les familles d'ondelettes, les ondelettes de Haar sont les plus simples, mais elles ne sont pas bien localisées. Ingrid Daubechies a construit des ondelettes à support compact qui permettent d'utiliser des filtres de taille finie. Les différentes familles d'ondelettes sont utilisées selon leurs propriétés en fonction du problème à résoudre.

Ondelette de Haar L'ondelette de Haar est générée par une fonction d'échelle ϕ défini par

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La fonction d'ondelette ψ de Haar associée à cette fonction d'échelle est définie par

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1),$$

ou encore

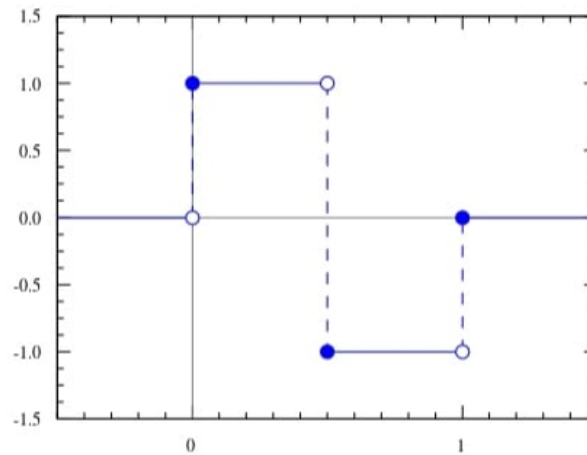


Fig (2.1). Ondelette de Haar.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Les ondelettes de Haar est un système orthonormé dans \mathbb{R} . Ce sont des fonctions discontinues, utilisées souvent pour détecter les transitions dans un signal.

Ondelette de Meyer L'ondelette de Meyer a une transformée de Fourier à support compact aussi infiniment dérivable. Cette ondelette se construit en considérant une fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est paire, C^∞ , telle que

$$\widehat{\phi}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < \frac{2\pi}{3}, \\ 0 & \text{si } |f| < \frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

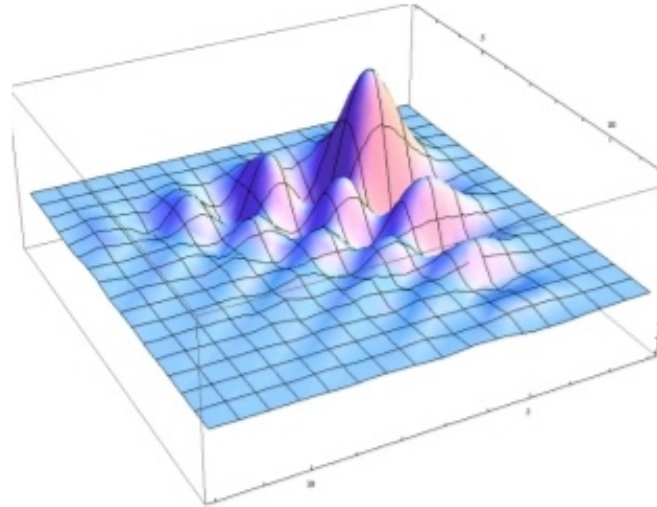
et qui vérifie les propriétés nécessaires pour décrire une fonction d'échelle. Contrairement à la précédente, cette ondelette est très régulière. Malheureusement, son support est lui aussi infini.



Fig (2.2). Ondelette de Meyer.

Ondelettes de Daubechies Les ondelettes de Daubechies (dbN) sont des ondelettes de support minimal pour un nombre de moments nuls donnés. Autrement dit, elles dépendent d'un paramètre N fixé. Elles ont alors N moments nuls et sont à support dans $[-N + 1, N]$. Cette ondelette

est obtenue de façon constructive, à partir des filtres h_0 et h_1 . Elle est aussi fortement asymétrique.



Fig(2.3). Ondelette 2Dde Daubechies.

Ondelettes de Symlets Les symlets ($symN$) constituent une famille d'ondelettes presque symétrique, proposée par I. Daubechies en modifiant la construction des dbN . A part la symétrie, les autres propriétés des deux familles sont similaires. [4]

Ondelettes de Coiflets Construite par I. Daubechies sur la demande de R. Coifman [4], les coiflets ($coifN$) constituent une famille d'ondelettes possédant une propriété inhabituelle. Non seulement, comme pour les deux familles précédentes, l'ondelette ψ associée à $coifN$ à $2N$ moments nuls.

Les deux fonctions ψ et j ont un support de longueur $6N - 1$.

Remarque 3 Dans la littérature il existe plusieurs types d'ondelette. Le critère de choix de la meilleure ondelette reste un problème à déterminer. Malheureusement, il n'y a pas d'ondelette qui soit meilleure que les autres, tout dépend de l'application. Dans certains cas, l'ondelette la plus simple (Haar) sera optimale. Pour d'autres applications, ce sera le pire des choix possibles.

2.5 Les avantages de la transformée en ondelettes

Le fait que la transformée utilise des fonctions bien localisées dans le plan temps fréquence lui donne beaucoup d'avantages :

1. La transformée en ondelettes donne une image différente avec plus d'informations.
2. La résolution en fréquence de la transformée dépend du facteur de dilatation par le principe de Heisenberg, on peut donc choisir arbitrairement celle-ci suivant ce que l'on désire analyser.
3. Pour des signaux physiques présentant des variations très rapides et des discontinuités, l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces variations et les analyser. Cette particularité rend l'analyse en ondelettes complémentaire à l'analyse de Fourier. En effet, avec l'analyse de Fourier, les discontinuités d'un signal ne sont pas facilement analysables.
4. La localisation en temps est précieuse pour beaucoup d'applications.
5. La transformée en ondelette peut représenter complètement et efficacement un signal quelconque avec peu de coefficients.

Chapitre 3

Les champs aléatoires

Ces dernières années, les méthodes par ondelettes sont préconisées comme une alternative aux méthodes de Fourier pour l'analyse des signaux déterministes et non déterministes. Généralement, les méthodes par ondelettes sont plus appropriées pour l'analyse de signaux non linéaires et non stationnaires, mais jusqu'à présent, les méthodes qui ont été proposées se limitent à l'analyse de champs aléatoires continus, dans ce chapitre, nous développons une approche pour traiter l'analyse multirésolution dans \mathbb{R}^2 et le champ aléatoire discret, puis nous étudions les structures probabilistes.

3.1 Analyse multirésolution dans \mathbb{R}^2

L'analyse multirésolution dans \mathbb{R}^2 fournit un cadre efficace pour la décomposition de champs aléatoires. Récemment, intérêt considérable a été accordée aux propriétés de la transformée en ondelettes et des représentations orthonormées en ondelettes de champs aléatoires (voir Antoine et al. (2004))

Définition 15 Une analyse multirésolution (AMR) de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ (espaces d'approximation) vérifiant les propriétés suivantes

1. Croissance : $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$.
2. Séparabilité : $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
3. Densité : $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. Dilatation : $X(t) \in V_j \iff X(2^j t) \in V_0$
5. Il existe $\phi \in V_0$ telle que la famille $\{\Phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de Riesz de V_0 .

Définition 16 Pour tout $\mathbf{t} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, une fonction $\Phi(\mathbf{t}) \in V_0$ qui satisfait

$$\Phi(\mathbf{t}) = \Phi(x, y) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} h_{kl} 2\Phi(2x - k, 2y - l),$$

où

$$\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (3.1)$$

et $h_{kl} = h_k h_l$. Puisque $\phi(x)$ et $\phi(y)$ satisfont l'équation d'échelle $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \phi(2x - k)$. Si $\{\Phi(\mathbf{t} - \mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ est un système orthonormé, alors Φ est appelée une fonction d'échelle orthonormale, et les fonctions d'ondelettes sont données par

$$\Psi^{(h)}(x, y) = \phi(x)\psi(y), \quad (3.4)$$

$$\Psi^{(v)}(x, y) = \psi(x)\phi(y),$$

$$\Psi^{(d)}(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$

La généralisation de l'équation d'ondelettes unidimensionnelle conduit aux relations suivantes :

$$\Psi^{(h)}(x, y) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} g_{kl}^{(h)} 2\Phi(2x - k; 2y - l),$$

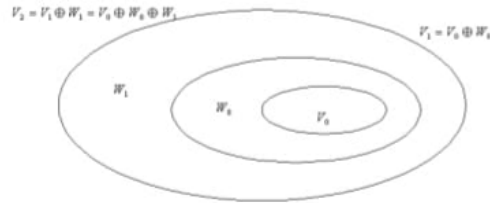
$$\Psi^{(v)}(x, y) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} g_{kl}^{(v)} 2\Phi(2x - k; 2y - l),$$

$$\Psi^{(d)}(x, y) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} g_{kl}^{(d)} 2\Phi(2x - k; 2y - l)$$

où $g_{kl}^{(h)} = h_k g_l$, $g_{kl}^{(v)} = g_k h_l$, $g_{kl}^{(d)} = g_k g_l$.

Remarque 4 Dans la littérature sur les ondelettes, le lecteur peut rencontrer une indexation de la multirésolution des sous-espaces, ce qui est l'inverse de celui de la définition 16

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \quad (3.5)$$



Remarque 5 Cette convention (les deux présentent des avantages et des inconvénients), parfois appelée convention «Daubechies», par opposition à la convention «Mallat» dans (3.5), est presque également souvent utilisée. Cependant, la famille $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t) = 2^j \Phi(2^j x - k, 2^j y - l), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ est une base de V_j selon l'indexation de Mallats, tandis que $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t) = 2^{-j} \Phi(2^{-j} x - k, 2^{-j} y - l), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ est une base de V_j selon l'indexation de Daubechies.

L'approximation d'une fonction $X(\mathbf{t})$ sur un sous-espace V_j est donnée en termes de fonctions d'échelle comme

$$\widehat{X}_j(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) \quad (3.6)$$

où $\alpha_{j,\mathbf{k}}$ est le coefficient d'échelle à la résolution j et à la translation \mathbf{k} et

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = 2^j \Phi(2^j x - k, 2^j y - l) \quad (3.7)$$

Par conséquent, une fonction $X(t) \in L^2(\mathbb{R})$ peut être représentée par un ensemble de fonctions d'échelle orthogonale comme

$$X(t) = \lim_j \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}).$$

Définition 17 Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, le sous-espace d'ondelettes W_j est défini par

$$W_j = \overline{\text{span}} \{ \Psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}.$$

Puisque $\{V_{j,j \in \mathbb{Z}}\}$ sont les sous-espaces de identification, nous pouvons représenter les sous-espaces V_{j-1} comme une somme directe de sous-espaces grossièrement approximés V_j et de ses sous-espaces complémentaires orthogonaux W_j , comme suit $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$.

Cela montre que la projection d'une fonction $X(\mathbf{t})$ sur les sous-espaces W_j donne les informations détaillées perdues lors de l'approximation de la fonction sur les sous-espaces V_j . Une base orthonormale peut maintenant être construite pour les sous-espaces W_j . Une collection de toutes ces fonctions de base pour les sous-espaces $\{W_j, j \in \mathbb{Z}^2\}$ forme une nouvelle base orthogonale pour $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ainsi, la même approximation en termes de fonction de base de W_j est donnée par

$$\widehat{X}_j(\mathbf{t}) = \sum_{u=1}^3 \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}),$$

où $\beta_{j,\mathbf{k},u}$ est le coefficient d'ondelette à la résolution j et à la translation \mathbf{k} et

$$\Psi_{j,\mathbf{k},u}(t) = 2^j \Psi_u(2^j x - k, 2^j y - l), \text{ pour tout } u \in \{1, 2, 3\} \quad (3.8)$$

Toute fonction intégrable carrée $X(\mathbf{t}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, elle peut être écrite en termes de fonctions d'échelle et d'ondelettes comme suit d'ondelettes comme

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{j,\mathbf{k}} \Phi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) + \sum_{u=1}^3 \sum_{j=-\infty}^l \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \beta_{j,\mathbf{k},u} \Psi_{j,\mathbf{k},u}(\mathbf{t}), \quad (3.9)$$

et les coefficients $\{\alpha_{j,\mathbf{k}}\}$ et $\{\beta_{j,\mathbf{k},u}\}$ sont les séquences qui décrivent le champ aléatoire alors que les fonctions de base sont fixes.

Remarque 6 *Les fonctions de base peuvent être orthonormées ou simplement linéairement indépendantes. Lorsque ceux-ci sont orthonormés, ils s'inscrivent dans un cadre général multirésolution. En d'autres termes, l'analyse multirésolution fournit une méthode pour construire un ensemble de fonctions orthonormées qui forment base de l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ et satisfait les propriétés d'une fonction d'ondelette. Dans cette analyse des fonctions sont approximées à différentes résolutions pour donner des versions lissées d'une fonction. L'incrément les informations perdues lors de l'approximation d'une fonction à différentes résolutions inférieures peuvent être des études utilisant coefficient d'ondelettes.*

Exemple 3 *Soit $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ les fonctions d'échelle et d'ondelettes associées à certains AMR, pour chaque $j, k, l, \in \mathbb{Z}$ définie*

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k;l}(x, y) &= 2^j \Phi(2^j x - k, 2^j y - l), \\ \Psi_{j,k;l}^{(h)}(x, y) &= 2^j \Psi^{(h)}(2^j x - k, 2^j y - l), \\ \Psi_{j,k;l}^{(v)}(x, y) &= 2^j \Psi^{(v)}(2^j x - k, 2^j y - l), \\ \Psi_{j,k;l}^{(d)}(x, y) &= 2^j \Psi^{(d)}(2^j x - k, 2^j y - l), \end{aligned}$$

la collection $\{\Phi_{j,k;l}(x, y), j, k, l \in \mathbb{Z}\} \cup \{\Psi_{j,k;l}^{(u)}(x, y), j, k, l \in \mathbb{Z}, u \in \{v, h, d\}\}$ est une base orthonormée sur \mathbb{R}^2 satisfaisant (3.1) et (3.4). Cependant, toute fonction $X(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être écrite en termes d'échelle et d'ondelette comme

$$X(x, y) = \sum_{j=-\infty}^l \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k;l} \Phi_{j,k;l}(x, y) + \sum_{u \in \{v, h, d\}} \sum_{j \geq J=-\infty}^l \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k,l}^{(u)} \Psi_{j,k,l}^{(u)}(x, y).$$

D'après la convention de Daubechies, nous pouvons exprimer n'importe quelle fonction $\Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ dans les sous-espaces V_j comme une combinaison linéaire des fonctions de base $\{\Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ de V_{j-1} comme

$$\Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}} \Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}), \quad (3.10)$$

où $h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}} = \int \Phi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{t}) \Phi_{j-1,\mathbf{k}}^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ et $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}} = 1$. Pour une base d'ondelettes du support compact, $\{h_{\mathbf{k}}\}$ est de longueur finie $|N|$ (i.e. $h_{\mathbf{k}}$ est différent de zéro dans l'intervalle $\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{N} - \mathbf{1}$ et zéro en de hors de l'intervalle).

Depuis W_j est également un sous-espace de V_{j-1} nous pouvons exprimer n'importe quelle fonction $\Psi_{j,\mathbf{n},u}(\mathbf{t})$ dans les sous-espaces W_j en tant que combinaison linéaire des fonctions de base $\{\Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ de V_{j-1} comme

$$\Psi_{j,\mathbf{n},u}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)} \Phi_{j-1,\mathbf{k}}(\mathbf{t}), u = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

où $g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)} = \int \Psi_{j,\mathbf{n},u}(t) \Phi_{j-1,\mathbf{k}}^*(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$, $u = 1, \dots, 3$. De nombreux choix de $h_{\mathbf{k}}$ et $g_{\mathbf{k}}^{(u)}$ existent qui satisfont (3.10) et (3.11). Un de ces choix consiste à choisir des coefficients $\{g_{\mathbf{k}}^{(u)}, u = 1, 2, 3\}$ tel que $g_{\mathbf{k}_i} = (-1)^{k_i} h_{1-k_i}$.

La relation entre les coefficients qui donne les informations sur version lissée (coefficient d'échelle) et détaillée (coefficient d'ondelette) d'une fonction à différentes résolutions peut être obtenue en multipliant les conjugués de (3.10) et (3.11) avec $X(\mathbf{t})$ et intégrant par rapport à \mathbf{t} . Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha_{j,\mathbf{n}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^* \alpha_{j-1,\mathbf{k}} \\ \beta_{j,\mathbf{n},u} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}^{(u)*} \alpha_{j-1,\mathbf{k}} \text{ pour } u = 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc

$$\alpha_{j,\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{n}-2\mathbf{k}} \alpha_{j+1,\mathbf{k}} + \sum_{u=1}^3 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{n}-2\mathbf{k}}^{(u)} \beta_{j+1,\mathbf{k},u}$$

L'équation (3.12) indique que tous les coefficients d'échelle et d'ondelettes à la résolution $(j, j+1; j+2; \dots)$ peuvent être obtenu à partir d'un ensemble de coefficients $\{h_{\mathbf{k}-2\mathbf{n}}\}$ qui décrivent la base des ondelettes et l'ensemble initiale de $\{\alpha_{j-1,\mathbf{k}}; \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$.

3.2 Les Champs aléatoires

Les champs aléatoires ont trouvé de nombreuses applications dans divers domaines tels que le traitement d'images (voir par exemple Jain (1981)), l'océanographie (voir Sylvester (1974)), la géologie (voir Harbaugh et Preston (1968)), la foresterie (voir Matern (1960)), la turbulence (voir

Mandelbort (1975)) et la géomorphologie (voir Mandelbort (1975)). Dans la section précédente, une fonction $X(t)$ est supposée être un élément de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Dans le cas de champs aléatoires, tous peuvent ne pas avoir de chemins d'échantillonnage sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Cependant, si $X(t, \epsilon)$ est une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^2 \times \Lambda$ (Λ est l'espace échantillon) est satisfait $\int E \{X^2(t, \epsilon)\} dt < \infty$, alors $X(t, \epsilon) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ de probabilité 1 en Λ .

3.2.1 La représentation d'un champ aléatoire discret en base en ondelettes

Soit $(X(\mathbf{t}))_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2}$ un champ aléatoire continu construit à partir d'un champ aléatoire discret de moyenne nulle et de puissance finie, et soit $\{\Psi_{j,\mathbf{k},u}(t), u = 1, 2, 3, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2, j \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\Phi_{j,\mathbf{k}}(t); \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ sont des bases orthonormales de multirésolution d'échelles et d'ondelettes. De plus, supposons que $X(\mathbf{t}) \in V_0$, alors à partir de (??), nous avons

$$X(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \alpha_{0,\mathbf{k}} \Phi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{t})$$

où $\alpha_{0,\mathbf{k}}$ désigne le coefficient d'échelle à la résolution zéro, donné par

$$\alpha_{0,\mathbf{k}} = \int_{\mathbb{R}^2} X(\mathbf{t}) \Phi_{0,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) dt.$$

En substituant $X(\mathbf{t})$ en termes de $X(\mathbf{n})$ en utilisant (??), et en réorganisant, nous obtenons

$$\alpha_{0,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} X(\mathbf{n}) b_{\mathbf{k}-\mathbf{n}}, \quad (3.17)$$

où la séquence $(b_{\mathbf{m}})$ est calculée comme suit

$$b_{\mathbf{m}} = (2\pi) \int_{\pi} \tilde{\Phi}(-\lambda) e^{i\mathbf{m} \cdot \lambda} d\lambda \quad (3.18)$$

avec $\tilde{\Phi}(\lambda)$ indiquant la transformée de Fourier de $\Phi(\mathbf{t})$.

3.3 La structure des covariances

3.3.1 Les covariances du second ordre

Les propriétés du second ordre des coefficients d'ondelettes pour les processus aléatoires à paramètres continus et discrets ont été étudiées par Dijkerman et Mazumdar (1994), Mary (1993),

Tewfik (1992) et Subba Rao et Indukumar (1996). Cependant, dans cette section, nous obtenons des expressions explicites pour les covariances du second ordre des champs aléatoires discrets.

Le lemme suivant est une extension du résultat obtenu par Subba Rao et Indukumar (1996) dans un cadre unidimensionnel.

Lemme 3 *Soit $(X(n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$ sont des champs aléatoires discrets stationnaires de moyenne nulle appartenant à l'espace V_0 et soit $C(\mathbf{l}) =: \text{Cov} \{X(\mathbf{n}) X(\mathbf{n} + \mathbf{l})\}$ la covariance du champ aléatoire discret. Alors la covariance des coefficient d'échelle à la résolution Zéro $C_0^s(\mathbf{l}) =: E \{ \alpha_{0,k} \alpha_{0,k+1}^* \}$ est*

$$C_0^s(\mathbf{l}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} b_{\mathbf{m}} b_{\mathbf{n}}^* C(\mathbf{l} + \mathbf{m} - \mathbf{n}), \quad (3.21)$$

où $b_{\mathbf{m}}$ est défini par (3.18).

Lemme 4 *Soit $\alpha_{1,\mathbf{k}}$ et $\beta_{1,\mathbf{k},u}$ sont les coefficients d'échelle et d'ondelette à la première résolution définis par*

$$\begin{aligned} \alpha_{1,\mathbf{k}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{0}+\mathbf{m}+2\mathbf{k}}, \\ \beta_{1,\mathbf{k},u} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}}^{(u)} \alpha_{\mathbf{0},\mathbf{m}+2\mathbf{k}} \text{ pour } u = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Alors la covariance du coefficients d'échelle et d'ondelette satisfaisant (3.23) est

$$\begin{aligned} C_1^s(\mathbf{l}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{n}}^* C_0^s(\mathbf{n} - \mathbf{m} + 2\mathbf{l}) \\ C_{1,u}^w(\mathbf{l}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}}^{(u)} g_{\mathbf{n}}^{(u)*} C_0^s(\mathbf{n} - \mathbf{m} + 2\mathbf{l}) \text{ pour } u = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Preuve. Simple et donc omise.

Corollaire 5 *Soit $\alpha_{r,\mathbf{k}}$ et $\beta_{r,\mathbf{k},u}$ sont les coefficients d'échelle et d'ondelette à la r -ième résolution donnés par la formule de récurrence donnée par (3.23).*

Ensuite, la fonction de covariance aux résolutions inférieures des coefficients d'échelle et d'ondelette sont les suivantes :

$$\begin{aligned} C_r^s(\mathbf{l}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{n}}^* C_{r-1}^s(\mathbf{n} - \mathbf{m} + 2\mathbf{l}) \\ C_{r,u}^w(\mathbf{l}) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}}^{(u)} g_{\mathbf{n}}^{(u)*} C_{r-1}^s(\mathbf{n} - \mathbf{m} + 2\mathbf{l}) \text{ pour } u = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Pour toute r -ième résolution, nous pouvons écrire (3.24) comme suit

$$\begin{aligned} C_r^s(\mathbf{1}) &= \left| \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}-2\mathbf{k}} \right|^{2r} C_0^s(\mathbf{1}) \\ C_{r,u}^w(\mathbf{1}) &= \left| \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}-2\mathbf{k}}^{(u)} \right|^{2r} C_0^s(\mathbf{1}) \text{ pour } u = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.3.2 Les covariances du troisième ordre

Il est clair d'après (3.21) que la covariance d'échelle et d'ondelette pour deux processus spatiaux stationnaires différents ayant la même covariance ne peuvent être distingués. Par exemple, les processus $SARMA(p, q)$ et $SBL_d(p, q, P, Q)$ ont la même structure de covariance voir [9]. Cela montre que les processus linéaires et non linéaires ne peuvent pas être identifiés en utilisant des statistiques de second ordre. Il est donc nécessaire d'étudier les statistiques d'ordre supérieur dans l'analyse en ondelettes.

Dans cette section, nous développons l'expression des covariances d'ordre 3 entre les coefficients d'échelle et l'ondelette pour les champs aléatoires discrets.

Corollaire 6 *Soit $\alpha_{0,\mathbf{k}}$ le coefficient d'échelle à la résolution zéro satisfaisant (3.17). Alors la covariance du troisième ordre des coefficients d'échelle et d'ondelette à la r -ième résolution est donnée par*

$$\begin{aligned} E \{ \alpha_{r,\mathbf{k}} \alpha_{r,\mathbf{k}+\mathbf{j}} \alpha_{r,\mathbf{k}+\mathbf{l}} \} &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}} h_{\mathbf{n}} h_{\mathbf{p}} E \{ \alpha_{r-1,\mathbf{m}+2\mathbf{k}} \alpha_{r-1,\mathbf{n}+2\mathbf{j}} \alpha_{r-1,\mathbf{p}+2\mathbf{l}} \}, \quad (3.28) \\ E \{ \beta_{r,\mathbf{k},u} \beta_{r,\mathbf{k}+\mathbf{j},u} \beta_{r,\mathbf{k}+\mathbf{l},u} \} &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}}^{(u)} g_{\mathbf{n}}^{(u)} g_{\mathbf{p}}^{(u)} E \{ \alpha_{r-1,\mathbf{m}+2\mathbf{k}} \alpha_{r-1,\mathbf{n}+2\mathbf{j}} \alpha_{r-1,\mathbf{p}+2\mathbf{l}} \}, \end{aligned}$$

pour $u = 1, 2, 3$.

Remarque 7 *D'après la relation entre les coefficients d'échelle et d'ondelette, nous pouvons écrire (3.28) comme suit*

$$\begin{aligned} E \{ \alpha_{r,\mathbf{k}} \alpha_{r,\mathbf{k}+\mathbf{j}} \alpha_{r,\mathbf{k}+\mathbf{l}} \} &= \left| \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{m}-2\mathbf{k}} \right|^r \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{n}-2\mathbf{j}} \right|^r \left| \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2} h_{\mathbf{p}-2\mathbf{l}} \right|^r E \{ \alpha_{0,\mathbf{k}} \alpha_{0,\mathbf{k}+\mathbf{j}} \alpha_{0,\mathbf{k}+\mathbf{l}} \}, \\ E \{ \beta_{r,\mathbf{k},u} \beta_{r,\mathbf{k}+\mathbf{j},u} \beta_{r,\mathbf{k}+\mathbf{l},u} \} &= \left| \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{m}-2\mathbf{k}}^{(u)} \right|^r \left| \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{n}-2\mathbf{j}}^{(u)} \right|^r \left| \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2} g_{\mathbf{p}-2\mathbf{l}}^{(u)} \right|^r E \{ \alpha_{0,\mathbf{k}} \alpha_{0,\mathbf{k}+\mathbf{j}} \alpha_{0,\mathbf{k}+\mathbf{l}} \}. \end{aligned}$$

pour $u = 1, 2, 3$.

3.3.3 La structure de dépendance en termes de cumulants :

La structure de dépendance des champs aléatoires Gaussiens est entièrement caractérisée par la covariance. Lorsque l'hypothèse de normalité n'est plus vérifiée, des cumulants d'ordre supérieur sont nécessaires. La covariance et les propriétés spectrales de la transformée en ondelettes et du coefficient d'ondelettes discrètes pour les champs aléatoires ont été largement étudiées dans le passé (voir Masry(1998)). Dans cette section, nous obtenons une nouvelle expression pour le cumulants du coefficient d'échelle, et la structure de dépendance entre les coefficients d'ondelettes est étroitement liée à la dépendance des coefficients d'échelle. Par conséquent, pour expliquer comment obtenir les cumulants conjoints des coefficients d'échelle à partir des cumulants conjoints des champs aléatoires, nous avons

Proposition 2 *Soit $(\alpha_{0,\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2}$ le coefficient d'échelle à une résolution nulle satisfait (3.17), et supposons que les cumulants joints de $(X(n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$ d'ordre s existent. Alors*

$$Cum(\alpha_{0,k_1}, \dots, \alpha_{0,k_s}) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}^2} \dots \sum_{n_s \in \mathbb{Z}^2} \prod_{i=1}^s b_{k_i - n_i} Cum(X(n_1), \dots, X(n_s)).$$

Corollaire 7 *Soient $(\alpha_{1,\mathbf{k}})$ et $(\beta_{1,\mathbf{k},u})$ les coefficients d'échelle et d'ondelettes à la première résolution satisfaisent (3.12). Alors*

$$\begin{aligned} Cum(\underline{\alpha_{1,\mathbf{k}}}) &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}^2} \dots \sum_{m_s \in \mathbb{Z}^2} \prod_{i=1}^s h_{m_i} Cum(\underline{\alpha_{0,m+2\mathbf{k}}}), \\ Cum(\underline{\beta_{1,\mathbf{k},u}}) &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}^2} \dots \sum_{m_s \in \mathbb{Z}^2} \prod_{i=1}^s g_{m_i}^{(u)} Cum(\underline{\alpha_{0,m+2\mathbf{k}}}) \text{ pour } u = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Cum(\underline{\alpha_{1,\mathbf{k}}}) &= Cum(\alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{1,k_s}), \\ Cum(\underline{\beta_{1,\mathbf{k},u}}) &= Cum(\beta_{1,k_1,u}, \dots, \beta_{1,k_s,u}), \end{aligned}$$

Corollaire 8 *Soient $(\alpha_{r,\mathbf{k}})$ et $(\beta_{r,\mathbf{k},u})$ les coefficients d'échelle et d'ondelettes à la r -ième résolution satisfaisent (3.12). Alors*

$$\begin{aligned} Cum_r(\underline{\alpha_{r,\mathbf{k}}}) &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}^2} \dots \sum_{m_s \in \mathbb{Z}^2} \prod_{i=1}^s h_{m_i} Cum_{r-1}(\underline{\alpha_{r-1,m+2\mathbf{k}}}), \\ Cum_r(\underline{\beta_{r,\mathbf{k},u}}) &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}^2} \dots \sum_{m_s \in \mathbb{Z}^2} \prod_{i=1}^s g_{m_i}^{(u)} Cum_{r-1}(\underline{\alpha_{r-1,m+2\mathbf{k}}}) \text{ pour } u = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

3.4 La transformée en ondelettes discrètes des champs aléatoires

Soit $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire discret de moyenne nulle, nous définissons la transformée en ondelettes discrète par rapport à Ψ comme

$$d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}) = 2^{-j} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} X(\mathbf{n}) \Psi(2^{-j}\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (3.29)$$

condition(3.1) Soit $C(\mathbf{l})$ une fonction de covariance d'un champ aléatoire $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ satisfaisant

$$\sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} [1 + |\mathbf{l}|] |C(\mathbf{l})| < \infty.$$

Nous avons $E \{d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})\} = 0$ et

$$\begin{aligned} \text{var} \{d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})\} &= 2^j \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} \sum_{\mathbf{m}=0}^{\mathbf{N}-1} C(\mathbf{n} - \mathbf{m}) \Psi(2^{-j}\mathbf{n} - \mathbf{k}) \Psi(2^{-j}\mathbf{m} - \mathbf{k}) \\ &= 2^j \sum_{\mathbf{l}=-\mathbf{N}+1}^{\mathbf{N}-1} C(\mathbf{l}) \tilde{\Psi}(|\mathbf{l}|) \end{aligned}$$

$$\text{où } \tilde{\Psi}(|\mathbf{l}|) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1-|\mathbf{l}|} \Psi(2^{-j}\mathbf{n} - \mathbf{k}) \Psi(2^{-j}\mathbf{n} + |\mathbf{l}| - \mathbf{k}).$$

Si la condition 3.1 est valable, alors

$$\text{var} \{d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})\} \longrightarrow \eta_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \text{ quand } \mathbf{N} \longrightarrow \infty$$

où

$$\eta_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}) = 2^j \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} C(\mathbf{l}) \tilde{\Psi}_{\infty}(|\mathbf{l}|) \quad (3.30)$$

est le spectre en ondelettes de $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ et $\tilde{\Psi}_{\infty}(|\mathbf{l}|) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \Psi(2^{-j}\mathbf{n} - \mathbf{k}) \Psi(2^{-j}\mathbf{n} + |\mathbf{l}| - \mathbf{k})$ est appelée fonction d'autocorrélation d'ondelette en (j, \mathbf{k}) .

Théorème 9 Soit $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire discret de moyenne nulle, avec une fonction de covariance $C(\mathbf{l})$ satisfaisant la condition (3.1), et soit

$$\eta_{(j_1, j_2)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}(\mathbf{n}) = 2^{j_1 + j_2} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \gamma(\mathbf{l}) \Psi\left(2^{-j_1}\mathbf{n} - \mathbf{k}_1 + |\mathbf{l}| I_{\{\mathbf{u} > 0\}}\right) \Psi\left(2^{-j_2}\mathbf{n} - \mathbf{k}_2 + |\mathbf{l}| I_{\{\mathbf{u} > 0\}}\right),$$

pour $(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$, $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{Z}^4$ la covariance de la transformée en ondelettes par rapport à Ψ puis,

- i) $E \{d_{j_1, \mathbf{k}_1}(\mathbf{n}) d_{j_2, \mathbf{k}_2}(\mathbf{n})\} \longrightarrow \eta_{(j_1, j_2)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}(\mathbf{n})$ comme $N \rightarrow \infty$,
- ii) si $j_1 = j_2$, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, puis $\eta_{(j_1, j_2)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}(\mathbf{n}) = \eta_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n})$,
- iii) $E \{d_{j_1, \mathbf{k}_1}(\mathbf{n}) d_{j_2, \mathbf{k}_2}(\mathbf{n})\} = O(1)$ comme $\mathbf{N} \rightarrow \infty$.

Preuve. (i) et (ii) sont immédiats.

pour (iii), soit $d_{j, \mathbf{k}}^{(\psi)} = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{T}-1} X(\mathbf{n}) \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n})$. puis

$$\begin{aligned} E \left\{ d_{j, \mathbf{k}}^{(\psi)} d_{j', \mathbf{k}'}^{(\psi)} \right\} &= \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{s}=\mathbf{0}}^{\mathbf{T}-1} \gamma(\mathbf{n} - \mathbf{s}) \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{s}) \\ &= \sum_{\mathbf{u}=-\mathbf{(T-1)}}^{\mathbf{T}-1} \gamma(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{\mathbf{T}-1-|\mathbf{u}|} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} > \mathbf{0}\}}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}\}}) \end{aligned}$$

Ensuite, avec $\mathbf{u} > \mathbf{0}$, (le cas négatif suit de manière similaire),

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\mathbf{n}} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n}) - \sum_{\mathbf{n}} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n}) \right| \\ &\leq \sum_{\mathbf{n}} \left| \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n}) \right| \left| \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \right| \\ &\leq 2^{-j'/2} A \sum_{\mathbf{n}} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{1}) + \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{1}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{2}) + \\ &\quad \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{2}) - \dots + \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{1}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \\ &\leq 2^{-j'/2} A \sum_{\mathbf{n}} \left| \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{1}) \right| + \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{1}) \\ &\quad - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{u} - \mathbf{2}) + \dots + \left| \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + \mathbf{1}) - \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \right| \\ &\leq 2^{j'/2} A 2^{-j/2} V |\mathbf{u}| \\ &= 2^{-(j'+j)/2} AV |\mathbf{u}| \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} E \left\{ d_{j, \mathbf{k}}^{(\psi)} d_{j', \mathbf{k}'}^{(\psi)} \right\} &= \sum_{\mathbf{u}=-\mathbf{(T-1)}}^{\mathbf{T}-1} \gamma(\mathbf{u}) \sum_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{\mathbf{T}-1-|\mathbf{u}|} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} > \mathbf{0}\}}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}\}}) \\ &= \sum_{\mathbf{u}=-\mathbf{(T-1)}}^{\mathbf{T}-1} \gamma(\mathbf{u}) \sum_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}^{\mathbf{T}-1-|\mathbf{u}|} \psi_{j, \mathbf{k}}(\mathbf{n}) \psi_{j', \mathbf{k}'}(\mathbf{n}) + \varepsilon_T \\ &= 0(1) \end{aligned}$$

quand $T \rightarrow \infty$, car par la condition (3.1), nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mathbf{u}} \gamma(\mathbf{u}) \sum_{\mathbf{n}} \psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \psi_{j',\mathbf{k}'}(\mathbf{n}) \right| &\leq \sum_{\mathbf{u}} |\gamma(\mathbf{u})| \sum_{\mathbf{n}} |\psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}) \psi_{j',\mathbf{k}'}(\mathbf{n})| \\ &\leq \sum_{\mathbf{u}} |\gamma(\mathbf{u})| 2^{j/2} A 2^{j'/2} A \left| [\text{support } \psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})] \cap [\text{support } \psi_{j',\mathbf{k}'}(\mathbf{n})] \right| \\ &\leq \sum_{\mathbf{u}} |\gamma(\mathbf{u})| 2^{(j+j')/2} A^2 \left| [\text{support } \psi_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})] \cap [\text{support } \psi_{j',\mathbf{k}'}(\mathbf{n})] \right| < \infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\varepsilon_T| &\leq \sum_{\mathbf{u}=-(\mathbf{T}-1)}^{\mathbf{T}-1} |\gamma(\mathbf{u})| 2^{-(j'+j)/2} A V |\mathbf{u}| \\ &\leq 2^{-(j'+j)/2} A V \sum_{\mathbf{u}=-(\mathbf{T}-1)}^{(\mathbf{T}-1)} |\mathbf{u}| |\gamma(\mathbf{u})| < \infty. \end{aligned}$$

Théorème 10 Soit $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ est un champ aléatoire stationnaire du second ordre avec une moyenne nulle et la fonction de covariance $C(\mathbf{l}) \neq 0$ pour $|\mathbf{l}| \leq \mathbf{L}$, $\mathbf{L} \ll \mathbf{N}$ pour $\Psi(\mathbf{n})$ a un support $[K_1, K_2]$, où $K_1 \geq 0, K_2 \geq 0$, alors

$$E \{ d_{j_1, \mathbf{k}_1}(\mathbf{n}) d_{j_2, \mathbf{k}_2}(\mathbf{n}) \} = 0,$$

pour $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| > K_2 - K_1 + (2^j \mathbf{L})$, $j = 1, \dots, M$ et $k = 0, 1, \dots, (2^{M-j} - 1)$.

Preuve. Soit

$$E \left\{ d_{j, \mathbf{k}_1}^{(\psi)} d_{j, \mathbf{k}_2}^{(\psi)} \right\} = \sum_{\mathbf{u}=-(\mathbf{T}-1)}^{\mathbf{T}-1} \gamma(\mathbf{u}) \sum_{\mathbf{t}=0}^{\mathbf{T}-1-|\mathbf{u}|} \psi_{j, \mathbf{k}_1}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} > \mathbf{0}\}}) \psi_{j, \mathbf{k}_2}(\mathbf{n} + |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}\}}),$$

Puis

$$[\text{suupport } \psi_{j, \mathbf{k}_1}] = [2^j(\mathbf{K}_1 + \mathbf{k}_1) - |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} > \mathbf{0}\}}; 2^j(\mathbf{K}_2 + \mathbf{k}_1) - |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} > \mathbf{0}\}}]$$

et

$$[\text{suupport } \psi_{j, \mathbf{k}_2}] = [2^j(\mathbf{K}_1 + \mathbf{k}_2) - |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}\}}; 2^j(\mathbf{K}_2 + \mathbf{k}_2) - |\mathbf{u}| I_{\{\mathbf{u} \leq \mathbf{0}\}}].$$

s'il s'ensuit que

$$[\text{suupport } \psi_{j, \mathbf{k}_1}] \cap [\text{suupport } \psi_{j, \mathbf{k}_2}]$$

est vide si $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| > \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 + (U/2^j)$.

Définition 18 *Un champ aléatoire du second ordre à valeurs réelles $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ est dit faiblement homogène si*

- i) $m(\mathbf{n}) = E \{X(\mathbf{n})\}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$.
- ii) $C(\mathbf{n} + \mathbf{u}, \mathbf{m} + \mathbf{u}) = C(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$.

Nous supposons que $C(\mathbf{l})$ est continu et a la représentation spectrale

$$C(\mathbf{l}) = \int_{\pi} e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\lambda}} dF(\boldsymbol{\lambda}).$$

où $dF(\boldsymbol{\lambda})$ est une mesure finie sur π .

Théorème 11 *Supposons que $\Psi(\mathbf{n}) \in L(\mathbb{R}^2)$. Les champs aléatoires $(d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$, sont conjointement faiblement homogènes avec des moyennes nulles et des fonctions de covariance croisée*

$$C_{d_{j,\mathbf{k}}}(\mathbf{l}) = E \{d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n})d_{j,\mathbf{k}}^*(\mathbf{n} + \mathbf{l})\},$$

$$C_{d_{j_1,\mathbf{k}_1}, d_{j_2,\mathbf{k}_2}}(\mathbf{l}) = E \{d_{j_1,\mathbf{k}_1}(\mathbf{n})d_{j_2,\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{n} + \mathbf{l})\},$$

ayant les représentations spectrales

$$C_{d_{j,\mathbf{k}}}(\mathbf{l}) = 2^{dj} \sum_{\mathbf{l}=-\mathbf{N}-1}^{\mathbf{N}-1} \int_{\pi} \tilde{\Psi}(|\mathbf{l}|) e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\lambda}} dF_x(\boldsymbol{\lambda}),$$

$$C_{d_{j_1,\mathbf{k}_1}, d_{j_2,\mathbf{k}_2}}(\mathbf{l}) = 2^{j+j_2} \sum_{\mathbf{l}=-\mathbf{N}-1}^{\mathbf{N}-1} \int_{\pi} \tilde{\Psi}(\mathbf{0}) e^{i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\lambda}} dF_X(\boldsymbol{\lambda}),$$

où $\tilde{\Psi}(\cdot)$ est la transformée de Fourier de $\Psi(\cdot)$ et

$$\tilde{\Psi}(|\mathbf{l}|) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-1-|\mathbf{l}|} \Psi(2^j \mathbf{n} - \mathbf{k}) \Psi(2^j \mathbf{n} + |\mathbf{l}| - \mathbf{k}),$$

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-1-|\mathbf{l}|} \Psi(2^{j_1} \mathbf{n} - \mathbf{k}_1) \Psi(2^{j_2} \mathbf{n} - \mathbf{k}_2).$$

Remarque 8 *D'après le théorème ci-dessus, la transformée en ondelettes $\{d_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2\}$ est un champ aléatoire faiblement homogène avec une mesure spectrale*

$$dF_d(\boldsymbol{\lambda}) = 2^{2j} \sum_{\mathbf{l}=-\mathbf{N}-1}^{\mathbf{N}-1} \tilde{\Psi}(\mathbf{l}) dF_X(\boldsymbol{\lambda}),$$

En particulier, si le champ aléatoire d'entrée $(X(\mathbf{n}))_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2}$ possède une densité spectrale $f_X(\boldsymbol{\lambda})$, alors il en va de même la transformée en ondelettes et

$$f_d(\boldsymbol{\lambda}) = 2^{2j} \sum_{\mathbf{l}=-\mathbf{N}-1}^{\mathbf{N}-1} \tilde{\Psi}(\mathbf{l}) f_X(\boldsymbol{\lambda}).$$

Chapitre 4

L'estimation bispectrale par la méthode de seuillage en ondelettes

Dans ce chapitre, nous proposons un estimateur de la densité bispectrale par la méthode de seuillage en ondelettes pour une large classe des champs aléatoires stationnaires. Comme dans le cas unidimensionnel (voir Touati et Pesquet [28]), nous montrons que cet estimateur atteint le taux maximum sur les espaces de Sobolev, ce qui n'est pas atteint par les estimateurs linéaires (noyau ou spline).

4.1 L'estimateur par ondelettes

Soit $(X_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2}$, un champ aléatoire stationnaire de densité bispectrale définie par

$$f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{Z}^2} C_3(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) e^{-i(\mathbf{h}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{h}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2)}. \quad (4.1)$$

Le principal outil d'analyse dont on dispose pour estimer empiriquement la densité bispectrale théorique du processus est le bi-périodogramme effilé $I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$, défini sur $[0, 2\pi]^2$ par :

$$I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \frac{1}{(2\pi)^4 H_3^T} d_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1) d_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_2) d_{\mathbf{N}}(-\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2), \quad (4.2)$$

où $d_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1) = \sum_{\mathbf{t}=1}^{\mathbf{N}} h_i\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{N}}\right) X_{\mathbf{t}} e^{-i\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega}}$, $\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega} = t_1 \cdot \omega_1 + t_2 \cdot \omega_2$, $\mathbf{N} = N_1 \cdot N_2$ (la transformée de Fourier des données) et $H_3^T = \sum_{\mathbf{t}=0}^{\mathbf{N}-1} \prod_{i=1}^3 h_i\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{N}}\right)$, $h_i, i = 1, 2, 3$, sont les fonctions effilées (taper function). Il est bien connu que sous des hypothèses assez générales $I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ est asymptotiquement sans biais pour $f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$.

Il est important donc de chercher à améliorer les performances du bi-périodogramme en tant qu'estimateur de la densité bispectrale. La méthode de l'effilage des données (smooth data tapers) permet d'améliorer la précision du bi-périodogramme dans l'estimation de la densité bispectrale, en particulier, cette méthode permet de réduire le biais d'échantillon fini du bi-périodogramme. Cependant, le bi-périodogramme est inconsistant (la variance est proportionnelle à la taille de l'échantillon \mathbf{N}). Afin d'assurer la consistance, les méthodes du noyau utilisent des noyaux adéquats avec une bande passante bien choisie pour lisser le bipériodogramme. Alternativement, nous essayons de construire un estimateur à seuil de la densité bispectrale par la méthode en ondelette, qui surpasse les estimateurs linéaires traditionnels.

Plus précisément, nous considérerons le modèle suivant :

$$I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + e_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2). \quad (4.3)$$

contrairement au modèle unidimensionnel traditionnel dans l'estimation par la méthode en ondelettes, les erreurs $e_{\mathbf{N}}$ dans ce modèle ne sont pas ni gaussiens, ni des variables aléatoires qui suivent toutes la même loi de probabilité et sont indépendantes (i.e. i.i.d).

Pour $f_3 \in L^2([0, 2\pi]^2)$ nous avons la représentation

$$f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \Lambda_l^2} \alpha_{l, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi_{l, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \sum_{u=1}^7 \sum_{j \geq l} \sum_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \Lambda_j^2} \beta_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u} \Psi_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2).$$

Dans cette section, nous montrons que les estimateurs à seuil de la densité bispectrale $f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2)$ par la méthode en ondelettes atteignent un taux de convergence minimax presque optimal dans la boule bidimensionnelle de Sobolev

$$\mathbf{W}_{m,p}(C) = \left\{ \left\| f \right\|_{L_p([0, 2\pi]^2)} + \left\| \frac{\delta^m f}{\delta x_1^m} \right\|_{L_p([0, 2\pi]^2)} + \left\| \frac{\delta^m f}{\delta x_2^m} \right\|_{L_p([0, 2\pi]^2)} \leq C \right\}.$$

De plus, l'estimateur est obtenu en utilisant une décomposition à quatre dimensions de bi-périodogramme effilé par la méthode en ondelettes, en seuillant les coefficients d'ondelettes empiriques obtenus puis en construisant l'estimateur à partir des coefficients seuillés.

Sous les hypothèses suivantes, nous pouvons dériver des estimations appropriées du biais et de la variance des coefficients d'ondelettes empiriques de la densité bispectrale définis par

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} &= \int_{\pi_2} \int_{\pi_2} I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \Phi_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2, \\ \tilde{\beta}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u} &= \int_{\pi_2} \int_{\pi_2} I_{\mathbf{N}}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \Psi_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2. \end{aligned}$$

Hypothèse (4.1) La fonction effilé h est de variation bornée et satisfaisant $H = \int h^2(x) dx > 0$.

Hypothèse (4.2) $\forall k \geq 2$, il existe $C > 0$ et $\gamma \geq 0$ tel que

$$\sup_{1 \leq t_1 \leq \infty} \left\{ \sum_{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_p} |Cum(X(\mathbf{t}_1), \dots, X(\mathbf{t}_p))| \right\} \leq C^k (p!)^{\gamma+1}.$$

Hypothèse (4.3) f_3 est de variation totale finie sur $([0, 2\pi]^2, \|f_3\|_\infty < D, \forall D > 0)$.

Hypothèse (4.4)

Condition 12

- $\Phi(\mathbf{t})$ and $\Psi_u(\mathbf{t})$ sont dans C^r , pour tout $r > m$.
- $\int \Phi(\mathbf{t}) dt = 1$ et $\int \Psi_u(\mathbf{t}) |\mathbf{t}|^k dt = 1$ pour $0 \leq k \leq r$. (i.e. $|\mathbf{t}| = t_1.t_2$).
- $C = \max \left(\left\| \tilde{\Phi} \right\|_{L^1}, \left\| \tilde{\Psi}_u \right\|_{L^1} \right)$ et $D = \max \left(\left\| \tilde{\Phi}' \right\|_{L^1}, \left\| \tilde{\Psi}'_u \right\|_{L^1} \right)$ sont finis, et $\max \left(\left\| \Phi_{j,\mathbf{k}} \right\|_\infty, \left\| \tilde{\Psi}_{j,\mathbf{k},u} \right\|_\infty \right) \leq A2^{j/2}$.

L'estimateur par la méthode en ondelettes est donc

$$\hat{f}_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \sum_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \Lambda_l^2} \tilde{\alpha}_{l, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \Phi_{l, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \sum_{u=1}^7 \sum_{j \geq l} \sum_{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \Lambda_j^2} \delta(\tilde{\beta}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}, \boldsymbol{\lambda}^N) \Psi_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2),$$

où $\delta(\cdot)$ désigne un seuil souple ou dur et la valeur de seuil $\boldsymbol{\lambda}^N > 0$.

De plus, nous notons $\gamma_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ l'un des coefficients $\alpha_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$, $\beta_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}$ et par $\tilde{\gamma}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ l'un des coefficients $\tilde{\alpha}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$, $\tilde{\beta}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, u}$ et la variance de ces composantes sera notée par $\sigma_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ et par $\varphi_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ la fonction en base d'ondelettes associée. On note aussi par $\gamma_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i}$ les parties réelles et imaginaires de $\gamma_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ et de même pour $\tilde{\gamma}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i}$. La variance de ces composantes sera notée $\tilde{\sigma}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i}$.

4.2 La minimaxité de l'estimateur

Soit

$$J_\delta := J_\delta(N) = \left\{ l \leq j, 2^j \leq N^{\frac{1-\delta}{2}}, \delta > 0 \right\}$$

où $(1 - \delta)r(m, p) \geq v(m)$, $r(m, p) = m + 1 + \frac{2}{p}$ et $\tilde{p} = \min(p, 2)$.

D'après l'hypothèse 4.1-4.4, le problème du modèle (4.3) est transféré à la régression gaussienne suivante

$$\zeta_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i} = \gamma_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i} + \tilde{\sigma}_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{r, i} \varepsilon_{j, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}, j \in J_\delta, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \Lambda_j^2 \quad (4.4)$$

où $\varepsilon_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \sim N(0,1)$ sont i.i.d. La quasi-minimaxité de l'estimateur est basée sur l'estimation de cumulants du troisième ordre (les coefficients d'ondelettes empiriques du bi-périodogramme).

Proposition 3 *Pour tout $\rho > 0$, soit $J_{\delta,\rho}^N = \{l \leq j, 2^j \leq N^{1-\delta}, 2^j \geq N^\rho\}$ et supposons que les conditions 5.1 à 5.4 sont satisfaisantes. Alors*

$$\left| \text{Cum} \left(\frac{\tilde{\gamma}_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{r,i} - \gamma_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{r,i}}{\tilde{\sigma}_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{r,i}} \right) \right| \leq (n!)^{3+3\gamma} (K_1 N)^{-2\mu(n-2)},$$

pour K_1 approprié et $\mu > 0$, et cette borne est uniforme en $n \geq 3$ et $j \in J_{\delta,\rho}^N$.

Théorème 13 *Supposons que les conditions 4.1 à 4.4 sont satisfaisantes et que le seuil satisfait*

$$\tilde{\sigma}_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{r,i} [2 \log(|J_\rho^N|)]^{1/2} \leq \lambda_{j,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^N \leq K N^{-1} \sqrt{2 \log(N)}$$

sur J_δ . où K est constante. Alors,

$$\sup_{f_3 \in \mathbf{W}_{m,p}(C)} (E \left\{ \left\| \hat{f}_3 - f_3 \right\|_{L_2(\pi_4)}^2 \right\}) = O \left(\left(\frac{2 \ln(N)}{N^2} \right)^{\frac{m}{m+1}} \right).$$

Preuve. D'après les hypothèses 4.1 à 4.4, le problème du modèle (4.3) est transféré à la régression gaussienne suivante :

$$\xi_{j,k_1,k_2}^{r,i} = \gamma_{j,k_1,k_2}^{r,i} + \tilde{\sigma}_{j,k_1,k_2}^{r,i} \varepsilon_{j,k_1,k_2}, \quad j \in J_\delta^N, \quad k_1, k_2 \in H_j, \quad (4.5)$$

où $\varepsilon_{j,k_1,k_2} \sim N(0,1)$ sont i.i.d.

En effet, en utilisant le lemme 1 dans Rudzkis (1978), on obtient la Gaussianité asymptotique de coefficients d'ondelettes empiriques pour j dans $J_{\delta,\rho}^N$. Par conséquent, nous montrons que pour ρ assez petit ($\rho \leq 1 - v(m)$), le risque sur les niveaux de résolution en J_δ^T , dans l'estimation de $\gamma_{j,k_1,k_2}^{r,i}$, par le seuillage $\tilde{\gamma}_{j,k_1,k_2}^{r,i}$ avec λ_{j,k_1,k_2}^N est équivalent à une erreur d'ordre $O\left((N)^{-v(m)}\right)$, au risque de seuil basé sur le modèle Gaussein (4.5).

d'autre part, l'erreur de la projection de f_3 sur l'espace des ondelettes correspondant aux niveaux de résolution en $j \in J_\delta^T$ est d'ordre $O\left((T)^{-v(m)}\right)$, puisque pour $j \in J_{\delta,p}^T$ les variances $\tilde{\sigma}_{j,k_1,k_2}^{r,i}$ sont équivalents à $T^{-\frac{1}{2}}$, la minimaxité de l'estimateur est dérivée d'après les résultats classiques sur le modèle gaussien bidimensionnel.

Notons également que ce taux n'est en générale pas atteint par les estimateurs linéaires de la densité bispectrale. En effet le risque L^2 des estimateurs linéaires ne dépend que des premier et deuxième moments des distributions d'erreurs.

Donc encore une fois, par le équivalence ci-dessus du modèle (4.3) au modèle Gaussien et par des résultats classiques, nous pouvons conclure que le taux d'estimation de la densité bispectrale linéaire est le taux sous-optimal $T^{-v(\tilde{m})}$ où $\tilde{m} = m + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Le taux quasi-optimal $\left(\frac{\log(N)}{N}\right)^{v(m)}$ pour l'estimation de la densité bispectrale est alors atteint par l'estimateur de seuillage par ondelettes mais pas des estimateurs linéaires si $p < 2$ (c'est-à-dire dans les cas de régularité inhomogène de la densité bispectrale sur le domaine bifréquenciel).

notez qu'il existe de nombreuses possibilités pour m et p satisfaisant $(1 - \delta) \gamma(m, p) \geq v(m)$. Par conséquent, l'estimateur est simultanément presque optimal sur une large gamme de classes de lissage.

4.3 Amélioration supplémentaire de l'estimateur

L'estimateur \hat{f}_3 atteint le taux quasi-optimal souhaité $\left(\frac{2 \ln(N)}{N^2}\right)^{\frac{m}{m+1}}$, mais il existe deux possibilités évidentes pour l'améliorer encore pour des tailles d'échantillon finies.

1. Premièrement, contrairement à l'estimateur par noyau usuel de f_3 , les estimateurs par ondelettes ne sont pas invariants par translation. Si nous décalons le bipériodogramme d'une certaine quantité (s_1, s_2) , nous appliquons un seuillage non linéaire et nous reculons l'estimation de (s_1, s_2) , ce nouvel estimateur sera différent de la variante non transmise $\hat{f}_3^{(s_1, s_2)}$ dans la plupart des cas. Les seules longueurs de décalage qui ne modifient pas l'estimateur \hat{f}_3 sont des multiples de longueur de décalage de la base d'ondelettes à l'échelle la plus grossière, i.e. $\frac{(2\pi)^4}{2^I}$. D'autre part, il n'ya aucune raison de supposer que l'un des déplacements possibles est toujours supérieur aux autres. Pour affaiblir l'effet de ne pas être transformée en ondelette stationnaire et définie avec décalages $s_{i,j} = (s_i, s_j)$ où $s_i = \frac{i(2\pi)^4}{2^I} i = 0, \dots, I - 1$, le nouvel estimateur

$$\hat{f}_3^*(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{I^2} \sum_{i,j=0}^{I-1} \hat{f}_3^{(s_{i,j})}(\omega_1, \omega_2),$$

alors, on obtient par l'inégalité de Jensen que

$$\| \hat{f}_3^* - f_3 \|_{L_P(\pi_4)}^2 \leq \frac{1}{I^2} \sum_{i,j=0}^{I-1} \| \hat{f}_3^{(s_{i,j})} - f_3 \|_{L_P(\pi_4)}^2, \quad (4.6)$$

où l'inégalité stricte satisfaite si $\hat{f}_3^{(s_{i,j})} \neq \hat{f}_3^{(s_{i',j'})}$ pour tout $(i, j) \neq (i', j')$. En particulier \hat{f}_3^* vérifient également le résultat du théorème 13. De plus, compte tenu de l'inégalité possible-ment stricte dans (4.6), nous espérons obtenir une amélioration significative pour des tailles d'échantillon finies.

2. Deuxièmement, notez que la densité bispectrale f_3 satisfait les symétries ci-dessous, alors qu'elles ne sont pas satisfaites par \widehat{f}_3^* si les ondelettes à support compact différentes des ondelettes de Haar sont utilisées

$$f_3(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \overline{f_3(-\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_2)} = f_3(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1) = f_3(-(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \boldsymbol{\omega}_2), \quad (4.7)$$

Afin de construire un estimateur qui satisfait les symétries ci-dessus, nous prenons la moyenne de huit estimateurs symétriques presque optimaux :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_3^{**}(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) &= \frac{1}{8} \left[\widehat{f}_3^*(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) + \widehat{f}_3^*(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_1) + \overline{\widehat{f}_3^*(-\boldsymbol{\omega}_1, -\boldsymbol{\omega}_2)} + \overline{\widehat{f}_3^*(-\boldsymbol{\omega}_2, -\boldsymbol{\omega}_1)} + \widehat{f}_3^*(-(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \boldsymbol{\omega}_1) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{f}_3^*(-(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2), \boldsymbol{\omega}_2) + \overline{\widehat{f}_3^*(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, -\boldsymbol{\omega}_1)} + \overline{\widehat{f}_3^*(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, -\boldsymbol{\omega}_2)} \right] \end{aligned}$$

Donc, on a encore par l'inégalité de Jensen, et le fait que f_3 satisfait (4.7), que la nouvel l'estimateur \widehat{f}_3^{**} satisfait

$$\| \widehat{f}_3^{**} - f_3 \|_{L^2(\pi_4)}^2 \leq \| \widehat{f}_3^* - f_3 \|_{L^2(\pi_4)}^2,$$

où l'inégalité stricte est vraie si deux des huit estimateurs ci-dessus sont différents.

Conclusion

Les ondelettes, comme la décomposition de Fourier, sont des stars en analyse du signal. Cette discipline essaie d'étudier et de comprendre les signaux grâce aux mathématiques. Nous avons donné un bref sur la transformée en ondelettes (continue et discrète) pour un champ aléatoire discret et nous proposons un estimateur à seuil par ondelettes de la densité bispectrale qui est plus performant que les estimateurs linéaires (noyaux).

REFERENCES

- [1] Antoine, J. P., Murenzi, R., Vanderghynst, P., Twareque Ali, S. (2004). Two dimensional wavelets and their relatives. Cambridge Press.
- [2] Benyahia, A. (2014). Application des ondelettes à la détermination de l'espacement moyen entre diffuseurs, universite d'oran .
- [3] Chian, C., Morettin, P. A. (1998). A wavelet analysis for time series. Nonparametric Statistics.Vol. 10. 1-46.
- [4] Daubechies, I. (1999). The wavelet transforms time-frequency localization and signal analysis . IEEE Trans. On information theory, Vol. 36, N. 5, pp. 961-1005.
- [5] Dijkerman, R. W., Mazumdar, R. R. (1994). Wavelet representation of stochastic processes and multiresolution stochastic models. IEEE trans. Signal Process, 1640-1652.
- [6] Harbaugh, J. W., Preston, F. W. (1968). Fourier series analysis in geology, in : B.J.L. Berry, S.F. Marble(Eds), Spatial analysis : A Reader in statistical Geography, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [7] Jain, A. K. (1981). Advances in mathematical models for image processing. Proc. IEEE 69. 502-528.
- [8] Kaiser, G. (1994). A Friendly Guide to Wavelets, Birkhauser, berlin.
- [9] Kimouche, K. (2013). Analyse spectrale dans les champs aléatoires nonlinéaires. Thèse de doctorat. Université de constantine.
- [10] Kimouche, K. (2020). Probabiliés (cour et exercices) ,université 20 août 1955 skikda.
- [11] Lii, K. S. and Rosenblatt, M.(2002). Spectral analysis for harmonizable processes, Annals of Statistics.
- [[12]] Mallat, S. (1996). Wavelet signal Processing, Academie Press.
- [13] Mandelbrot, B. B. (1975). Stochastic models for the Eart's relief. the shape and fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 72, 3825-3828.
- [14] Mandelbrot, B. B. (1975). On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surface of scalars. J. Fluid Mech. 72, 401-417.
- [15] Mary, E. (1993). Wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion. IEEE Trans. Inform. Theory, 260-264.
- [16] Masry, E. (1998). Covariance and spectral properties of the wavelet transform and discrete wavelet coefficients of second order random fields. Signal Processing. Vol. 64. 131-143.
- [17] Matern, B. (1960). Spatial variation. Comm. Swed. Forestry Res, Inst. 49, 1-144.
- [18] Merah, F. (2007). Estimation de la densité spectrale d'un processus en temps continue par echantillonnage aléatoire. Constantine.

- [19] Meyer, Y. Jaffard, S. and Rioul, O. (1987). L'analyse par ondelettes, Pour La Science, no. 119, pp. 28–37.
- [20] Meyer, Y. (1990). *Ondelettes : Ondelettes et Opérateurs I*, Hermann, Paris.
- [21] Rosenblatt, M. (1985). *Stationary sequences and random fields*. Birkhäuser.
- [22] Parzen, E. (1957). On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series, *The Annals of Mathematical Statistics*.
- [23] Priestly, M. B. (1964). The analysis of two dimensional stationary processes with discontinuous spectra. *Biometrika*, 51, 1 and 2, 195.
- [24] Rudskis, R., Saulis. L., Statulevicius. V. (1978). A general lemma on probabilities of large deviations. *Lith. Math. J. Vol. 18*, 226-299.
- [25] Subba Rao, T., Indukumar, K. C. (1996). Spectral and wavelet methods for the analysis of nonlinear and nonstationary times series. *J. Franklin Inst. Vol. 333 (B)*, 425-452.
- [25] Sylvester, R. (1974). *Coastal Engineering. I : Generation, Propagation, and Influence of Waves*, *Developments in Geotechnical Engineering*. Elsevier, New York.
- [26] Tewfik, A. H. (1992). Correlation structure of the discrete wavelet coefficient of fractional Brownian motion, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 904-909.
- [27] Touati, S. Pesquet, J.C. (2002). Wavelet thresholding for bispectrum estimation. Publication in the conference proceedings of EUSIPCO, Toulouse, France,