وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

**Faculté des Sciences**

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلــــوم

قسم الرياضيات

**Faculté des Sciences**
**Département de Mathématiques**

# Cours

**Destiné aux étudiants de master 2 en mathématiques**
**Option : Analyse fonctionnelle appliquée**

# Cours de la théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires

**Proposé par :**

Leulmi. Soumya

**Année : 2022/2023**

# TABLE DES MATIÈRES

# Introduction générale

La plus part des phénomènes dans la nature peuvent être reformulé et modélisé sous forme d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles, inclus les conditions au bord) ou d'un systèmes d'équations différentielles.

Une vaste classe de ces équations peuvent être écrite sous forme d'un problème d'évolution :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \ t > 0. \\ u(s) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Dans le cas où $f(t) = 0$, $s = 0$ et $A$ est une application Lipchitzienne le théorème de Cauchy-Lipchitz -Picard rend un grand service à résoudre ce problème et la solution sera donnée par la formule :

$$u(t) = e^{At}u_0.$$

Mais dans le cas où A est non borné, alors A est non Lipchitzienne, donc on peut pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipchitz-Picard.

L'idée serait de définir pour une classe d'opérateurs non nécessairement bornés un objet mathématique qui donne l'existence et l'unicité.

La théorie des semi groupes d'opérateurs linéaires trouve dans les espaces de Banach une résolution dans le cas où A est non borné.

Cette théorie est devenue un objet important, en mathématiques, dans l'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles, ainsi que dans d'autres domaines scientifiques ( physiques et mécaniques). Cette théorie a commencé au début de 19 ème siècle.

Aujourd'hui, les semi groupes sont présents dans la majorité des disciplines mathématique on trouve plusieurs applications de cette théorie non seulement au domaines classiques comme la théorie des EDP ou la théorie des processus stochastiques mais elles deviennent un outil très puissant dans la résolution des équation intégraux-différentielles et des équations différentielles fonctionnelles issues de la mécanique quantique et aussi dans la théorie du contrôle en dimension infinie.

Le présent cours se décompose de trois chapitres. chaque chapitre est composé de plusieurs sections.

Dans le premier chapitre, on trouve une étude générale des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornées dans un $\mathbb{C}$-espace de Banach avec quelques propriétés, ainsi la notion de générateur infinitésimale voir des résultats liant ces deux notions : des conditions (nécessaires et suffisantes) pour qu'un opérateur linéaire génère un semi groupe, comme les théorèmes de Hille-Yoshida et Lumer-Phillips qui jouent un rôle important pour l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, On donne des théorèmes d'existences et l'unicité des solutions pour le problème de Cauchy abstrait.

Et une partie d'application qui constitue le troisième chapitre, dans le quel on étudie l'existence et l'unicité de quelques problème mathématiques par la théorie de semi groupe.

CHAPITRE 1

# Semi-Groupe d'opérateur linéaire

## Sommaire



Dans ce chapitre, on donne des définitions et propriétés générale des fonctions abstraites et de semi groupe d'opérateurs linéaires bornés et son générateur infinitésimal. On cite aussi les théorèmes fondamentaux de la caractérisation du générateur infinitésimal d'un $C_0$-semi groupe (Hille Yosida et Lumer Phillips).

## 1.1 Les fonctions abstraites

**Définition 1.1** On appele fonction abtraite tout fonction d*éfinir sur* $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans un espace de Banach.

Soit $X$ un espace de Banach.

Soit $f:[a,b]\longrightarrow X$ une fonction abstraite et soit $t_0\in[a,b]$.

### 1.1.1 La continuité et la dérivabilité d'une fonction abstraite

**Définition 1.2 (Continuité d'une fonction abstraite)**

**1.** On dit que la fonction $f$ est continue en $t_0$ si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall t\in[a,b]:|t-t_0|<\delta\Longrightarrow\|f(t)-f(t_0)\|_X<\varepsilon.$$

**2.** On dit que la fonction $f$ est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en chaque point de $[a,b]$.

**Définition 1.3 (Dérivabilité d'une fonction abstraite)**

**1**. On dit que la fonction $f$ est dérivable en $t_0$ si :

$$\exists l\in X \text{ telle que : } \lim_{t\longrightarrow t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}-l=0.$$

L'élément $l$ appartenant à $X$ est noté $f'(t_0)$.

**2**. On dit que la fonction $f$ est dérivable sur $[a,b]$, si elle est dérivable en tout point de $[a,b]$.

**3**. La fonction $t\mapsto f'(t)$ définit de $[a,b]$ dans $X$ est notée $f'$ est appelée la dérivée de $f$.

**4**. On définit de manière analogue les fonctions numériques de dérivées d'ordre supérieur $f^{(k)}$.

**Remarque 1.1** La continuité et la dérivabilité des fonctions abstraites ont les mêmes propriétés que la continuité et la dérivabilité des fonction usuelles.

**Définition 1.4** Soit $X$, $Y$ et $Z$ des espaces de Banach. On dit qu'il existe un produit à droite (repectivement : à gauche) de $X$ par $Y$ à valeurs dans $Z$ s'il existe une fonction $(x, y) \mapsto xy \in Z$ (repectivement : une fonction $(x, y) \mapsto yx \in Z$) telque

$$\|xy\|_Z \leq \|x\|_X \|y\|_Y \quad (\text{repectivement : } \|yx\|_Z \leq \|x\|_X \|y\|_Y).$$

**Cas particulier des fonctions opératorielle**

Soit $X$ un espqce de Banach.

**Définition 1.5** Soit $A(t)$ une fonction opératorielle : $I \subset \mathbb{R} \mapsto L(X)$. On dit que $A(t)$ est fortement continue si pour tout $x \in X$, la fonction $A(t)x$ est continue.

**Définition 1.6** Soit $A(t)$ une fonction opératorielle : $I \subset \mathbb{R} \mapsto L(X)$. On dit que $A(t)$ est fortement dérivable. si pour tout $x \in X$, la fonction $A(t)x$ est dérivable.

**Remarque 1.2** Soient $X, Y$ deux espaces de Banach, $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ une fonction opératorielle. On dira que $f(t)$ e

**Remarque 1.3** La continuité implique la continuité forte.

**Proposition 1.1** *Soit $A(t)$ une fonction opératorielle. Si $A^{-1}(t_0)$ existe et bornée alors il existe un voisinage de $t_0$ dans lequel $A^{-1}(t_0)$ existe et est borné. De plus $A^{-1}$est continu en $t_0$.*

**Proposition 1.2** *Soit $A(t)$ une fonction opératorielle. Si $A(t)$ est fortement dérivable en $t_0$ et $A^{-1}(t)$ est existe et borné sur $[0, T]$ alors $A^{-1}$ est fortement dérivable.*

### 1.1.2 Intégration des fonctions abstraites

**Définition 1.7** Soit $f(t) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ est dit fortement dérivable si :**Intégrale de Riemann d'une fonction abstraite** :Soit $f : [a, b] \longrightarrow X$ une fonction abstaite.

On divise l'intervalle $[a, b]$ par les points $a = t_0 < t_1 < ... < t_N$ dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]_{i=0,...,N}$ on choisit un nombre $\delta_i$ et on considère la somme :

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(\delta_i) \triangle t_i,$$

cette somme appartient à $X$.

Pour chaque $N$, on pose $\delta_N = \max \triangle t_i$ et :

$$S_N = \sum_{i=1}^{N-1} f(\delta_i) \triangle t_i.$$

On dit que $f$ est integrable au sens de Rieman sur l'intervalle $[a, b]$ et cette limite sera noté $\int_a^b f(t)\, dt$ si : $S_N \longrightarrow I$ quand $\delta_i \longrightarrow 0$ (independent des $\delta_i$), $(I \in X)$ par rapport à la norme

de $X$.

**Propriétés de l'intégrale de Rieman :**

**1.** $\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X\, dt.$

**2.** $\int_a^b \lambda f(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt.$

**3.** $\int_a^b (f(t) + g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt.$

**Le cas des fonctions opérationnelles :**

$X$ et $Y$ deux espaces de Banach.

$$A(t) : [0,T] \longrightarrow L(X,Y)$$
$$t \longrightarrow A(t) .$$

**Définition 1.8** La fonction $A$ est dite **fortement continue** en $t_0 \in [0,T]$ si :

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_Y = 0, \ \ \forall x \in X.$$

**Définition 1.9** La fonction $A$ est dite **uniformément continue** en $t_0$ si :

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \|A(t) - A(t_0)\|_{L(X,Y)} = 0.$$

**Définition 1.10** $A : [0,T] \longrightarrow L(X,Y)$ est dite **fortement dérivable** si la fonction $B_x : t \longrightarrow A(t)x$ est dérivable pour $x$.

**Propriétés de l'intégrale de Riemann dans la cas des fonctions opérationnelles :**

**1.** $A : [0,T] \longrightarrow L(X,Y), \ \ \forall x \in X : \int_0^T A(t)xdt = \int_0^T A(t)dtx.$

**2.** $A : [0,T] \longrightarrow L(X,Y)$, $B \in (L,Z) : \int_0^T BA(t)dt = B\int_0^T A(t)dt.$

**3.** de la même manière : $\int_0^T A(t)Bdt = \int_0^T A(t)dt.B.$

Avec : $A : [0,T] \longrightarrow L(X,Y)$, $B \in L(Z,X)$.

**Remarque 1.4**

Ces propriétés restent vraies dans le cas des fonctions abstraites en générale, soit $f : [a,b] \longrightarrow X$, espace $X$ un espace de Banach , et est défini un produit à droite de $Y$ et $X$ à valeurs dans un espace de Banach $Z$, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)ydt = \int_a^b f(t)dty, \ \ \forall y \in Y.$$

## 1.2 Définitions et propriétés générales d'un Semi-Groupe

Soit $X$ un espace de Banach.

**Définition 1.11** Une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'élément de $\mathcal{L}(X)$ pour tout $t \geq 0$ forme un Semi-Groupe sur $X$ s'il vérifie les conditions suivantes :

1. $S(0) = I$ ($I$ est l'opérateur Identique).
2. $S(t+s) = S(t) \circ S(s), \forall t, s \geq 0.$

**Définition 1.12** Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un Semi-Groupe sur $X$.
1. On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un Semi-Groupe uniformement continue s'il vérifie :

$$\lim_{t \overset{\geq}{\to} 0} \|S(t) - I\| = 0.$$

2. On dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un Semi-Groupe fortement continue ou un Semi-Groupe de classe $C_0$ ou un $C_0-$Semi-Groupe s'il vérifie :

$$\lim_{t \to 0} \|S(t)x - x\| = 0, \ \forall x \in X.$$

**Exemple 1.1** Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que $\left(e^{At}\right)_{t\geq 0}$ est un Semi-Groupe uniformement continue d'opérateure linéaire bornée sur $X$.

On définit $S(t)$ pour tout $t \geq 0$ comme suit :

$$\begin{aligned} S(t) : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto S(t)x = e^{At}x. \end{aligned}$$

On sait que :

$$\left(\begin{array}{c}\{S(t)\}_{t\geq 0} \text{ est un Semi-Groupe} \\ \text{uniformement continue}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall t \geq 0 : S(t) \in \mathcal{L}(X) \\ 2)\ S(0) = I \\ 3)\ S(t+s) = S(t)\,S(s)\,,\ \forall t,s \geq 0. \\ 4)\ \lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} \|S(t) - I\| = 0. \end{cases}$$

1) Montrons que : pour tout $t \geq 0 : S(t) \in \mathcal{L}(X)$

Soit $t \geq 0$. On a :

$$(S(t) \in \mathcal{L}(X)) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ S(t) \text{ est linéaire} \\ 2)\ S(t) \text{ est borné.} \end{cases}$$

a) Montrons que $S(t)$ est linéaire :

On a

$$(S(t) \text{ est linéaire}) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c}\forall x,y \in X;\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{k} \\ S(t)(\alpha x + \beta y) = \alpha S(t)\,x + \beta S(t)\,y\end{array}\right).$$

Soient $x,y \in X$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{k}$, on a :

$$\begin{aligned} S(t)(\alpha x + \beta y) &= e^{At}(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha e^{At} x + \beta e^{At} y \\ &= \alpha S(t)\,x + \beta S(t)\,y. \end{aligned}$$

Alors

$$S(t)(\alpha x + \beta y) = \alpha S(t)\,x + \beta S(t)\,y.$$

Donc $S(t)$ est linéaire.

b) Montrons que $S(t)$ est borné

On sait que

$$(S(t)\ \text{borné}) \Longleftrightarrow (\exists C > 0;\ \forall x \in X : \|S(t)x\| \leq C\|x\|)$$

On a :

$$S(t) = e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Donc

$$\|S(t)\| = \left\|e^{At}\right\| = \left\|\sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{\|A^n t^n\|}{n!} \tag{1.1}$$

Mais on a :

$$\|A^n t^n\| \leq \|A^n\| t^n \leq t^n \|A\|^n.$$

Donc

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\|A^n t^n\|}{n!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}.$$

On sait que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} = e^{t\|A\|}.$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\|A^n t^n\|}{n!} \leq e^{t\|A\|}. \tag{1.2}$$

Mais $A \in \mathcal{L}(X)$, donc $A$ est borné, alors

$$\exists k > 0 : \|A\| \leq k.$$

Donc :

$$t\|A\| \leq tk \text{ car } t \geq 0.$$

Alors :

$$\left(e^{t\|A\|} \leq e^{tk}\right). \tag{1.3}$$

De (1.1), (1.2)et (1.3) on trouve que :

$$\|S(t)\| \leq e^{kt}.$$

Il suffit de prendre $C = e^{kt}$, donc : $S(t)$ est borné.

Comme $S(t)$ est linéaire et borné, alors $S(t) \in \mathcal{L}(X)$.

2) Montrons que : $S(0) = I$.

On a :

$$S(t) = e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!} = I + \sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$$

Alors

$$S(0) = I + \sum_{n\geq 0} \frac{A^n 0^n}{n!} = I.$$

Donc

$$S(0) = I.$$

3) Montrons que : $S(t+s) = S(t)S(s), \ \forall t, s \geq 0$.

Soient $t, s \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} S(t+s) &= e^{A(t+s)} \\ &= e^{At+As} \\ &= e^{At}e^{As} \\ &= S(t)S(s). \end{aligned}$$

4) Montrons que : $\lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} \|S(t) - I\| = 0$

On a :

$$\begin{aligned}
\|S(t)-I\| &= \left\|e^{At}-I\right\| \\
&= \left\|I+\sum_{n\geq 1}\frac{A^n t^n}{n!}-I\right\| \\
&= \left\|\sum_{n\geq 1}\frac{A^n t^n}{n!}\right\| \\
&\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\|A^n\| t^n}{n!} \\
&\leq \sum_{n\geq 1}\frac{\|A\|^n t^n}{n!}
\end{aligned}$$

et on a :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\|A^n\| t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{\|A^n\| t^n}{n!}-1=e^{t\|A\|}-1.$$

Alors :

$$\|S(t)-I\|\leq e^{t\|A\|}-1.$$

Passant à la limite quand $t\to 0^+$ on a :

$$\lim_{t\overset{\geq}{\to}0}\|S(t)-I\|\leq \lim_{t\overset{\geq}{\to}0}\left(e^{t\|A\|}-1\right).$$

Comme $A$ est borné, alors

$$\lim_{t\overset{\geq}{\to}0}\left(e^{t\|A\|}-1\right)=0$$

Donc :

$$\lim_{t\overset{\geq}{\to}0}\|S(t)-I\|\leq 0. \tag{1.4}$$

Mais $\|S(t)-I\|\geq 0$, donc :

$$\lim_{t\overset{\geq}{\to}0}\|S(t)-I\|\geq 0. \tag{1.5}$$

De (1.4)et (1.5) on trouve que : $\lim\limits_{t\overset{\geq}{\to}0} \|S(t) - I\| = 0$.

Alors : $(S(t))_{t\geq 0} = \left(e^{At}\right)_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformement continue.

**Exemple 1.2 (Semi Groupe de translation)** Soit $X = L^2(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}$ . On définit $S(t)$ sur $X$ pour tout $t \geq 0$ comme suit :

$$S(t)\,u(x) = u(x+t) \text{ pour tout } u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continue.

On a : $X = L^2(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}$. On sait que :

$$\left(\begin{array}{c}\{S(t)\}_{t\geq 0} \text{ est un Semi-Groupe} \\ \text{fortement continue}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall t \geq 0 : S(t) \in \mathcal{L}(X) \\ 2)\ S(0) = I \\ 3)\ S(t+s) = S(t)\,S(s)\,,\ \forall t, s \geq 0 \\ 4)\ \lim\limits_{t\overset{\geq}{\to}0} \|S(t)\,u - u\| = 0,\ \forall u \in X. \end{cases}$$

1) Montrons que : $\forall t \geq 0 : S(t) \in \mathcal{L}(X)$

Soit $t \geq 0$. On a :

$$(S(t) \in \mathcal{L}(X)) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ S(t) \text{ est linéaire} \\ 2)\ S(t) \text{ est borné.} \end{cases}$$

a) Montrons que $S(t)$ est linéaire :

On a :

$$(S(t) \text{ est linéaire}) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall x, y \in X;\ \forall \alpha, \beta \in \Bbbk : \\ S(t)(\alpha u + \beta v) = \alpha S(t)\,u(x) + \beta S(t)\,v(y) \end{array}\right).$$

Soient $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ :

$$\begin{aligned} S(t)(\alpha u + \beta v)(x) &= (\alpha u + \beta v)(x + t) \\ &= \alpha u(x + t) + \beta v(x + t) \\ &= \alpha S(t) u(x) + \beta S(t) v(x). \\ &= (\alpha S(t) u + \beta S(t) v)(x) \end{aligned}$$

Alors

$$S(t)(\alpha u + \beta v) = \alpha S(t) u + \beta S(t) v$$

Donc $S(t)$ est linéaire.

b) Montrons que : $S(t)$ est borné.

On sait que :

$$(S(t) \text{ est borné}) \Longleftrightarrow (\exists c > 0;\ \forall u \in X : \|S(t) u\|_{L^2} \leq c \|u\|_{L^2}).$$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\|S(t) u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |S(t) u(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x + t)|^2 \, dx.$$

On prend le changement

$$y = x + t$$

Alors

$$dy = dx.$$

Donc, on trouve que :

$$\|S(t) u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^2 \, dy = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Donc
$$\|S(t)u\| = \|u\|.$$

Donc $S(t)$ est borné.

Comme $S(t)$ est linéaire et borné, alors $S(t) \in \mathcal{L}(X)$.

2) Montrons que : $S(0) = I$.

Soient $u \in L^2(\mathbb{R})$ , $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

On a : $S(t)u(x) = u(x+t)$.

Donc :
$$S(0)u(x) = u(x+0) = u(x).$$

Donc
$$S(0) = I.$$

3) Montrons que : $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Soient $t, s \in [0, +\infty[$, $u \in L^2(\mathbb{R})$et $x \in \mathbb{R}$ . On a :
$$S(t+s)u(x) = u(x+t+s) = u(x+s+t).$$

On pose $x + s = y$. Donc :
$$S(t+s)u(x) = u(y+t) = S(t)u(y),$$

et on a :
$$u(y) = u(x+s) = S(s)u(x).$$

Donc :
$$S(t+s)u(x) = S(t)S(s)u(x).$$

Alors :
$$S(t+s) = S(t)S(s).$$

4) Montrons que : $\lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} \|S(t) - I\| = 0.$

Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On a :

$$\|S(t)u - u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} |S(t)u(x) - u(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |u(x+t) - u(x)|^2 dx,$$

on sait que : $\overline{D(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$, donc : $\exists (u_n) \subset D(\Omega) : u_n \overset{L^2(\mathbb{R})}{\longrightarrow} u$ :

$$\begin{aligned} \|S(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|S(t)u - S(t)u_n + S(t)u_n - u_n + u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|S(t)u - S(t)u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|S(t)u_n - u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Mais : $\|S(t)u - S(t)u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|S(t)(u_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Donc on a :

$$\begin{aligned} \|S(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 2\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|S(t)u_n - u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ \|S(t)u_n - u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int\limits_{\mathbb{R}} |u_n(x+t) - u_n(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Comme $(u_n) \subset D(\Omega)$, alors : $\exists k_n$ compact tel que : $k_n = supp(u_n)$.

Donc :

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |u_n(x+t) - u_n(x)|^2 dx = \int\limits_{k_n} |u_n(x+t) - u_n(x)|^2 dx.$$

Donc on trouve que : $\lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} \|S(t)u - u\| = 0.$

Alors : $(S(t))_{t\geq 0} = \left(e^{At}\right)_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continue.mais $u_n \in D(\mathbb{R})$ donc :

$$|u_n(x+t) - u_n(x)|^2 \leq \sup |u_n(x+t) - u_n(x)|^2$$

Donc

$$\begin{aligned}\int\limits_{\text{supp } u_n} |u_n(x+t)-u_n(x)|^2 dx &\leq \int \sup_x |u_n(x+t)-u_n(x)|^2 dx \\ &\leq \sup_x |u_n(x+t)-u_n(x)|^2 \int\limits_{\text{supp } u_n} dx \\ &\leq \sup_x |u_n(x+t)-u_n(x)|^2 \, mes\left(_{\text{supp } u_n}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\|S(t)u_n - u_n\|^2 \leq mes\left(_{\text{supp } u_n}\right) \sup |u_n(x+t)-u_n(x)|^2$$

mais $u_n$ continue alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, t \ \ |x+t-x| < \delta \Longrightarrow |u_n(x+t)-u_n(x)| < \varepsilon$$

Donc

Soit

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{tq } t < \delta \Longrightarrow |u_n(x+t)-u_n(x)| < \varepsilon, \ \forall t, \forall x$$

On a

$$|u_n(x+t)-u_n(x)| < \varepsilon, \ \forall t, \forall x$$

Alors

$$|u_n(x+t)-u_n(x)|^2 < \varepsilon^2, \ \forall t, \forall x$$

Donc

$$\sup_x |u_n(x+t)-u_n(x)|^2 < \varepsilon^2$$

Alors

$$mes\left(_{\text{supp } u_n}\right) \sup |u_n(x+t)-u_n(x)| \leq \varepsilon^2 mes\left(_{\text{supp } u_n}\right)$$

Alors

$$\|S(t)u_n - u_n\| < \varepsilon^2 mes\left(_{\text{supp } u_n}\right)$$

Donc

Pour

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{tq } t < \delta \Longrightarrow \left\| u_n (x + t) - u_n (x) \right\|^2 < \varepsilon^2 mes \left( _{\text{supp } u_n} \right)$$

mais (1) et (2) on a

$$\left\| S (t) u_n - u \right\|^2 \leq 2 \left\| u_n - u \right\|^2 + \left\| S (t) u_n - u_n \right\|^2$$

Alors pour tout

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{tq } t < \delta \Longrightarrow \left\| S (t) u + u \right\|^2 < 2 \left\| u_n - u \right\|^2 + \varepsilon^2 mes \left( _{\text{supp } u_n} \right)$$

Alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| S (t) u_n - u \right\|^2 \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \left( 2 \left\| u_n - u \right\|^2 + \varepsilon^2 mes \left( _{\text{supp } u_n} \right) \right)$$

Alors

$$\left\| S (t) u_n - u \right\|^2 \leq \varepsilon^2 mes \left( _{\text{supp } u_n} \right).$$

Donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| S (t) u_n - u \right\|^2 = 0.$$

Donc

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \left\| S (t) u_n - u \right\| = 0.$$

Alors $(S (t))_{t>0}$ est un $C_0-$semi-groupe sur $L^2 (\mathbb{R})$.

### 1.2.1 Type d'un Semi-Groupe

**Définition 1.13** Soit $\{ S(t)\}_{t \geq 0}$ un $C_0$-Semi-Groupe, la borne inférieure $\overline{\omega}$ de l'ensemble des $\omega \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un nombre $M_\omega$ vérifiant : $\|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$ c'est à dire :

$$\overline{\omega} = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que : } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \in [0, +\infty[ \right\}$$

est appelé le type du Semi-Groupe $\{ S(t)\}_{t \geq 0}$.

**Remarque 1.5** 1) Si $\omega = 0$ (c-à-d $\|S(t)\| \leq M$), Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un Semi-Groupe uniformement borné.

2) Si $\omega = 0$ et $M = 1$(c-à-d $\|S(t)\| = 1$), Alors $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un Semi-Groupe de contraction.

**Proposition 1.3** *Soient* $\{\ S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* $C_0$*-Semi-Groupe sur* $X$ *et* $\overline{\omega}$ *son type, alors on a*

*1)* $\overline{\omega} = \lim \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$ *.*

*2)* $\rho(S(t)) = e^{\overline{\omega}t}$ *ou* $\rho(S(t))$ *est le rayon spectrale de l'opérateur* $S(t)$*.*

**Remarque 1.6** 1) Le type d'un $C_0$-Semi-Groupe est indépendant de choix de norme de l'oprateur.

2) La borne inférieure n'est pas nécessairement atteinte.

### 1.2.2 Propriété d'un $C_0-$Semi-Groupe

**Proposition 1.4** *Soit* $(S(t))_{t\geq 0}$ *un Semi-Groupe fortement continue sur* $X$*, Alors Pour tout* $x \in X$*, la fonction* $t \mapsto S(t)x$ *est continue ( à valeurs dans* $X$ *) sur* $[0, +\infty[$*.*

**Preuve.** Soit $t \geq 0$ et $x \in X$. On dit que l'application $t \longmapsto S(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$ si et seulement si :

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x \qquad \forall t, s \in [0, +\infty[ .$$

Soient $x \in X$ et $t, s \in [0, +\infty[$ .

1. **Premièrement** : Supposons que $s > t$ alors $s = t + h$ $\forall h > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)(S(h)x - x)\| \\ &\leq \|S(t)\| \, \|S(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|S(h)x - x\| \end{aligned}$$

Comme $T(t)$ est un $C_0-$Semi-Groupe alors $\|T(h)x - x\| \longrightarrow 0$ quand $h \xrightarrow{>} 0$.

Donc

$$\lim_{h \to 0} \|S(t+h)x - S(t)x\| = 0.$$

1. **Deuxièment** : supposons que $s < t$ alors on a $s = t - h$ tel que $h > 0$

$$\begin{aligned} \|S(t-h)x - S(t)x\| &= \|S(t-h)x - S(t-h+h)x\| \\ &= \|S(t-h)\left(x - S(h)x\right)\| \\ &\leq \|S(t-h)\| \, \|S(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \, \|S(h)x - x\| \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{h \to 0} \|S(t-h)x - S(t)x\| = 0$$

Par conséquent $t \longmapsto S(t)x$ est continue.

■

**Proposition 1.5** *Soit* $(S(t))_{t \geq 0}$ *un Semi-Groupe fortement continue sur* $X$*, Alors :*

$$\exists \omega \geq 0, \exists M \geq 1 \text{ tels que } \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

**Preuve de proposition :**

Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ est un $C_0-$semi groupe.

Montrons que : $\exists \omega \geq 0, \exists M \geq 1 : \|S(t)\| \leq Me^{\omega t};\ \forall t \geq 0$.

Soit $t \geq 0$, on a $[0,1] \cup ]1, +\infty[$, donc on distingue deux cas.

1) $S \in [0,1]$ :

On sait que $[0,1]$ est borné et la fonction $f : t \to S(t)x$ est continue pour $x \in X$.

On a : $f([0,1])$ est borné (l'image d'un borné par une application continue est borné) ; Donc

$$\forall y \in f([0,1]), \exists M_x > 0 : \|y\| \leq M_x.$$

Mais : $y \in f([0,1])$ Donc : $\exists t \in [0,1] : y = f(t) = S(t)x$.

Alors :

$$\forall t \in [0,1], \exists M_x > 0 : \|S(t)x\| \leq M_x.$$

On sait que :

$$(\|T_i\| \leq \infty, \forall i \in I) \Longrightarrow \left(\sup_i \|T_i\| < \infty\right).$$

D'après le théorème de Banach Steinhaus (Principe de la borne uniforme).

On trouve :

$$\forall t \in [0,1], \exists M > 0 : \|S(t)\| \leq M.$$

Mais : $S(0) = I$, donc : $\|S(0)\| = \|I\| = 1$, et comme $\|S(0)\| \leq M$, Alors : $M \geq 1$.

c-à-d :

$$\exists M \geq 1 : \|S(t)\| \leq M, \forall t \in [0,1].$$

On choisit $\omega = 0$.

2) Si $t \in ]1, +\infty[$:

On sait que : $t = [t] + r$ tel que : $[t] \in \mathbb{Z}$ (*partie entier de* $t$) et $r \in [0,1[$.

Mais : $t > 1$ donc $[t] \in \mathbb{N}^*$. Posons $[t] = n$.

Donc : $t = n + r$ tel que : $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0,1[$.

On a :

$$\|S(t)\| = \|S(n+r)\| = \|S(n)S(r)\|.$$

Mais : $n = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ fois}}$. Alors :

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(1 + 1 + ... + 1 + r)\| \\ &= \|S(1) S(1) ... S(1) S(r)\| \\ &= \|(S(1))^n S(r)\| \\ &\leq \|(S(1))^n\| \|S(r)\|. \end{aligned}$$

Mais :

$$\|(S(1))^n\| \leq \|S(1)\|^n.$$

Donc

$$\|S(t)\| \leq \|S(1)\|^n \|S(r)\|.$$

D'autre part, on a $1 \in [0, 1]$ et $r \in [0, 1[\subset [0, 1]$. Donc :

$$\exists M \geq 1 : \|S(r)\| \leq M,$$

et

$$\exists M' \geq 1 : \|S(1)\| \leq M'.$$

Alors :

$$\|S(t)\| \leq MM'^n \leq Me^{\ln M'^n} \leq Me^{n \ln M'}.$$

$(M' \geq 1 \Longrightarrow \ln M' \geq 0)$. On que :

$$\begin{aligned} ([t] \leq t) &\Longrightarrow (n \leq t) \\ &\Longrightarrow (n \ln M' \leq t \ln M'). \end{aligned}$$

Alors : $e^{n \ln M'} \leq e^{t \ln M'}$. Donc :

$$\|S(t)\| \leq Me^{t \ln M'}.$$

Posons : $\omega = \ln M'$ (On a $\omega \geq 0$ car $M' \geq 1$). Donc

$$\exists M \geq 1, \; \exists \omega \geq 0 : \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}; \; \forall t \geq 0.$$

## 1.3 Générateur infinitésimal d'un $C_0-$Semi-Groupe

**Définition 1.14** Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$Semi-Groupe, on appelle générateur infinitésimale du Semi-Groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ l'opérateur $(A, D(A))$ définie par :

$$D(A) = \left\{ x \in X \ : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\},$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

### 1.3.1 Propriétés d'un générateur infinitésimal d'un $C_0-$Semi-Groupe

**Théorème 1.1** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$ Semi-Groupe sur $X$ et $A$ le générateur infinitésimal du $(S(t))_{t\geq 0}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour tout $x \in X$, on a :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x.$$

2. *Pour tout $x \in X$ et tout $t > 0$ :*

$$\int_0^t S(s)x \, ds \ \in D(A) \ \text{et} \ A\left(\int_0^t S(s)x \, ds\right) = S(t)x - x.$$

3. *Si $x \in D(A)$ alors :*

$$S(t)x \in D(A) \ \text{et} \ \frac{d}{dt}S(t) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

4. *Si $x \in D(A)$ alors :*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\sigma)Ax \, d\sigma = \int_s^t AS(\sigma)x \, d\sigma.$$

**Preuve.** Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$ Semi-Groupe sur $X$ et $A$ le générateur infinitésimal du $(S(t))_{t\geq 0}$.

1. Montrons que pour toute $x \in X$ :

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\ ds = S(t)x$$

Soit $x \in X$, on a :

on définit la fonction $G$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} G & : & [0,\ +\infty] \longrightarrow X \\ t & \longmapsto & G(t)x = \displaystyle\int_0^t S(s)x\ ds \end{array}$$

car $t \longmapsto S\left(t\right)x$ est continue. On remarque : $G\left(0\right) = 0$,

$$G(0) = \int_0^0 S(s)x\ ds = 0$$

Comme l'application $t \longmapsto S(t)x$ est continue alors :

$$\frac{dG(t)}{dt}x = S(t)x.$$

Posons $\sigma = s - t$, Alors :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} S(s)x\ ds &= \int_t^0 S(s)x\ ds + \int_0^{t+h} S(s)x\ ds \\ &= -\int_0^t S(s)x\ ds + \int_0^{t+h} S(s)x\ ds \\ &= -G\left(t\right)x + G\left(t+h\right)x \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\ ds &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(G\left(t,h\right)x - G\left(t\right)x\right)\\
&= S(t)\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}G(h)\\
&= S(t)\lim_{h\to 0}\frac{G(h)-G(0)}{h}\\
&= \frac{dG\left(t\right)}{dt}x\\
&= S(t)x.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{t\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\ ds = S\left(t\right)x$. D'où la propriété (1).

2. Soients $x\in X$ et $t\geq 0$ : Montrons que :

$$\int_0^t S(s)x\ ds\ \in D\left(A\right)\ \text{ et } A\left(\int_0^t S(s)x\ ds\right) = S\left(t\right)x - x$$

Soient $x\in X$ et $t\geq 0$ Pour montrer que $\int_0^t S(s)x\ ds \in D\left(A\right)$ il suffit de montrer que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{S(t)\int_0^t S(s)x\ ds\ - \int_0^t S(s)x\ ds}{t}\ \text{existe}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{t\to 0}\frac{S(t)\int_0^t S(s)x\ ds\ - \int_0^t S(s)x\ ds}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t S(t+s)x\ ds\ - \frac{1}{t}\int_0^t S(s)x\ ds\right)
\end{aligned}$$

Posons $\sigma = t + s$ donc $d\sigma = ds$ et $\sigma \in [t, 2t]$ donc

$$L = \lim_{t \to 0} \left( \frac{1}{t} \int_{t}^{t+t} S(\sigma)x \ d\sigma \ - \frac{1}{t} \int_{0}^{0+t} S(s)xds \right)$$

D'après la propriété (1) on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{t}^{t+t} S(\sigma)x \ d\sigma \ = S(t)x \text{ et } \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{0}^{0+t} S(s)x \ ds \ = S(0)x = I(x) = x$$

Comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est une Semi-Groupe donc $L = S(t)x - x$ donc $L$ existe ce qui donne que :

$$\int_{0}^{t} S(s)x \ ds \ \in D(A)$$

de plus

$$A \left( \int_{0}^{t} S(s)x \ ds \right) = S(t)x - x$$

3. Montrons que : Si $x \in D(A)$ alors $S(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} S(t)\, x = AS(t)\, x = S(t)\, Ax.$$

On a $x \in D(A)$ : $(S(t)x \in D(A)) \Longleftrightarrow \left( \lim_{h \to 0} \frac{S(h)(S(t)x) - S(t)x}{h} \text{existe} \right)$.

Et on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{S(h)\,(S(t)x) - S(t)x}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{S(t)[S(h)x - x]}{h} \\ &= S(t) \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \\ &= S(t)Ax \end{aligned}$$

Donc la limite existe alors $S(t) \in D(A)$ de plus $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Maintenant on va montrer que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

On a :

$$A(S(t)x) = S(t)Ax$$

Alors il suffit de montrer que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x$$

On a :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \lim_{s \to t} \frac{S(s)x - S(t)x}{s-t}$$

Posons $h = s - t$ alors $s = t + h$ et quand $s \to t$ on a $h \to 0$, Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S(t)x &= \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\
&= AS(t)x
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

4. Montrons que : Si $x \in D(A)$ alors :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

On intègre sur $[s, t]$ on trouve que

$$\int_s^t \frac{d}{d\sigma}S(\sigma)x \, d\sigma = \int_s^t AS(\sigma)x \, d\sigma = \int_s^t S(\sigma)Ax \, d\sigma$$

Mais

$$\int_s^t \frac{d}{d\sigma}S(\sigma)x \, d\sigma = S(t)x - S(s)x$$

Donc

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\sigma)x \, d\sigma = \int_s^t S(\sigma)Ax \, d\sigma$$

■

**Théorème 1.2** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$Semi-Groupe sur $X$ et $A$ son Générateur infinitésimal alors $D(A)$ dense dans $X$ et $A$ est un opérateur non borné, fermé.*

**Preuve.** Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un $C_0$-Semi-Groupe et $A$ son Générateur infinitésimal.

1. Montrons que $D(A)$ dense dans $X$ : On sait que :

$$\begin{pmatrix} D(A) \text{ dense dans } X \\ c-\text{à}-d: \ \overline{D(A)} = X \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \forall x \in X : \exists (x_n) \subset D(A) \\ x_n \to x \text{ sur } X. \end{pmatrix}$$

Soit $x \in X$ on cherche un suite $(x_n)_n \subset D(A)$ tel que $x_n$ converge vers $x$ dans $X$.

On va utiliser les propriétés (1) et (2) du théorème précédente.

Soit $h > 0$ on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h S(s)x\ ds \ = T(0)x = x \text{ et } \int_0^h S(s)x\ ds \ \in D(A)$$

Posons $h = \frac{1}{n}$ quand $h$ tend vers 0 on a $\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc $n$ tend vers $+\infty$.

Donc on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h S(s)x\ ds \ = \lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}} S(s)x\ ds$$

On définit la suit $x_n$ comme suite $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} S(s)x\ ds$,

On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ et } (x_n)_n \subset D(A) \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc $\exists\ (x_n)_n \subset D(A)$ telles que $x_n$ converge vers $x$ dans $X$ donc $D(A)$ dense dans $X$.

2. Montrons que $A$ est fermé :

On sait que $A$ est fermé si est seulement si $\forall\, (x_n)_n \subset D\,(A) : x_n \to x$ et $Ax_n \to y \Longrightarrow (x \in D\,(A)\ \ et\ \ Ax = y)$

Soit $(x_n)_n \subset D(A)$ telles que $x_n$ converge vers $x$ dans $X$ et $Ax_n \longrightarrow y$, montrons que $x \in D(A)$ et $Ax = y$ .

Pour cela on va montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe et } Ax = y$$

On a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} Ax_n \ = y$ donc :

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \lim_{n\to+\infty} \frac{S(t)x_n - x_n}{t} = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x_n - x_n}{t}$$

Mais

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (x_n)_n \subset D(A)$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x_n \ - x_n}{t} = Ax_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{n\to+\infty} Ax_n \ = y \text{ existe.}$$

Donc $x \in D(A)$ et $Ax = y$ alors $A$ est fermé.

■

**Théorème 1.3** ***(L'unicité de l'engendrement)*** *Soit $A$ un générateur infinitésimal d'un $C_0$-Semi-Groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ et soit $B$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-Semi-Groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, Si $A = B$ alors $S(t) = T(t)$ pour tout $t \geq 0$ .*

**Preuve.** Supposons $A = B$ et montrons que $S(t) = T(t)$, $\forall t \geq 0$.

Soit $s \geq 0$ on définit l'opérateur $H$ comme suit :

$$H(s) = T(s)S(t-s) \ \forall t \geq 0.$$

On a :

$$\frac{dH(s)}{ds} = \frac{d}{dt}[T(s)S(t-s)]$$

$$\frac{dH}{ds} = AT(s)S(t-s) - BS(t-s)T(s) = AT(s)S(t-s) - AS(t-s)T(s) = 0$$

Alors $\forall s \geq 0 : H(s) = c$ ($c$ est un constante) donc on peut écrire :

$$H(0) = H(t) \tag{1.6}$$

Mais on a :

$$H(0) = T(0)S(t) = S(t) \tag{1.7}$$

Et

$$H(t) = T(t)S(0) = T(t) \tag{1.8}$$

De $(2.3), (2.4)$ et $(2.5)$ on trouve que $S(t) = T(t)$. ■

**Proposition 1.6** *Soient $(S(t))_{t\geq 0}$ un Semi-Groupe de classe $C^0$ et $A : D(A) \subset X \to X$ le générateur infinitésimal. pour tout $x \in D(A)$ l'application $t \longmapsto S(t)x$ appartient à $C^1([0, +\infty[, X)$ et on a :*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad \forall x \in D(A), \forall\ t \geq 0.$$

**Théorème 1.4** *Soit $(A\ , D(A))$ le générateur infinitésimal d'un $C_0$-Semi-Groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ vérifié :*

$$\exists \omega \geq 0, \exists M \geq 1 \ \textit{tels que}\ \|S(t)\| \leq \ Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

*Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ on a $(A - cI, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-Semi-Groupe $(\ e^{-ct}S(t))_{t\geq 0}$ sur $X$ .*

**Preuve.** Soient $c \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ on pose $T(t) = e^{-ct}S(t)$ .

Premièrement : montrons que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-Semi-Groupe sur $X$ :

**i)** Montrons que $T(t) \in \mathcal{L}(X)$

La linéarite est évidente comme $T(t)$ est un Semi-Groupe, donc on va montre la bornitude :

Soit $x \in X$, on cherche $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\|S(t)x\| \leq c\,\|x\|$$

On a :

$$\|T(t)x\| = \left\|e^{-ct}S(t)x\right\| \leq e^{-ct}k\,\|x\|$$

Donc

$$\|T(t)x\| \leq c\,\|x\| \text{ avec } c = ke^{-ct}$$

Alors $T(t)$ est borné.

**ii)** On va vérifier les propriétés de $C_0-$Semi-Groupe :

On a $T(0) = e^0 S(0) = I$ .

Soient $s \geq 0$ et $x \in X$

$$\begin{aligned}
T(t+s) &= e^{-c(t+s)}S(t+s) \\
&= e^{-ct}S(t)[e^{-cs}S(s)] \\
&= e^{-ct}S(t)[T(s)] \\
&= T(t)[T(s)] \\
&= T(t) \circ T(s)
\end{aligned}$$

Montrons que $\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0$, $\forall x \in X$ :

Soit $x \in X$ :

$$\begin{aligned} \|T(t)x - x\| &= \left\|e^{-ct}S(t)x - x\right\| \\ &= \left\|e^{-ct}S(t)x - e^{-ct}x + e^{-ct}x - x\right\| \\ &\leq \left\|e^{-ct}(S(t)x - x)\right\| + \left\|(e^{-ct} - 1)x\right\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|T(t)x - x\| \leq e^{-ct}\|S(t)x - x\| + \left\|e^{-ct} - 1\right\| \|x\|$$

Passant par limite quand $t$ tend vers 0

$$\lim_{t\to 0}\|S(t)x - x\| \leq \lim_{t\to 0}\left(e^{-ct}\|S(t)x - x\|\right) + \lim_{t\to 0}\left\|e^{-ct} - 1\right\| \|x\|$$

Mais on a $(S(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-Semi-Groupe alors :

$$\lim_{t\to 0}\|S(t)x - x\| = 0$$

D'autre part

$$\lim_{t\to 0} e^{-ct} = 1$$

Alors

$$\lim_{t\to 0}\left(e^{-ct}\|T(t)x - x\|\right) = 0 \quad \forall x \in X$$

Donc

$$\lim_{t\to 0}\|T(t)x - x\| = 0 \; \forall x \in X$$

Donc $(T(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-Semi-Groupe sur $X$.

**iii)** Montrons que $(A - cI, D(A))$ est le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t\geq 0}$.

Soit $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-ct}S(t)x - e^{-ct}x + e^{-ct}x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{-ct}S(t)x - x}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{(e^{-ct} - 1)x}{t} \\ &= (A - cI)x \end{aligned}$$

Car

$$\lim_{t\to 0}\frac{(e^{-ct}-1)}{t}=(e^{-ct})'(0)=(-ce^{-ct})(0)=-c$$

D'où $((A-cI),D(A))$est le générateur infinitséimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ .

■

## 1.4 Transformation de Laplace d'un $C_0$-Semi-Groupe

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$semi groupe sur $X$ et $A$ son générateur infinitésimal, Désignons par $\Lambda_\omega=\{\lambda\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda\geq\omega,\ \forall\omega\geq 0\}$ .

**Définition 1.15** On définit l'application $R_\lambda$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} R_\lambda & : & X\longrightarrow X \\ x & \mapsto & R_\lambda(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt, \lambda\in\Lambda_\omega \end{array}$$

**Théorème 1.5** *Soient $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi groupe fortement continu et $A$ son générateur infinitésimal si $\lambda\in\Lambda_\omega$ alors l'application :*

$$\begin{array}{rcl} R_\lambda & : & X\longrightarrow X \\ x & \mapsto & R_\lambda(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt. \end{array}$$

*Définit un opérateur linéaire borné sur $X$ et on a :*

$$R_\lambda x=R(\lambda,A)x\ \forall x\in X$$

**Preuve.** Soit $\lambda\in\Lambda_\omega$

1- Montrone que $R_\lambda$ est un opérateur linéaire :

$$(R_\lambda \ linéaire) \Longleftrightarrow \left( \begin{array}{c} \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk \\ R_\lambda\left(\alpha x+\beta y\right) = \alpha R_\lambda x + \beta R_\lambda y \end{array} \right)$$

Soint $x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \Bbbk$, on a

$$\begin{aligned} R_\lambda\left(\alpha x+\beta y\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)\left(\alpha x+\beta y\right) dt \quad (S(t) \text{ linéaire}) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-\lambda t} S(t)\left(\alpha x\right) + e^{-\lambda t} S(t)\left(\beta y\right)\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\lambda t} S(t) x dt + \int_0^{+\infty} \beta e^{-\lambda t} S(t) y dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) y dt \\ &= \alpha R_\lambda\left(x\right) + \beta R_\lambda\left(y\right). \end{aligned}$$

donc $R_\lambda$est linéaire.

2- On va montrer maintenant la bornitude :

$(R_\lambda \ borné) \Longleftrightarrow \left(\exists c > 0, \forall x \in X : \|R_\lambda x\| \leq c \|x\|_X\right)$

Soit $x \in X$ :

On a

$$\|R_\lambda x\| = \left\| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x \ dt \right\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|S(t) x\ \| dt \leq M \ \ \|x\| \int_0^{+\infty} e^{(\omega-\lambda)t} \ dt \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)} \|x\|.$$

Alors

$$\|R_\lambda x\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \|x\|$$

On choisit $c = \frac{M}{(\lambda-\omega)} > 0$, alors $R_\lambda$ est borné et on a :

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

Maintenant on montre que $R_\lambda x = R(\lambda, A)x,\ \forall x \in X$ : c'est à dire montrons que $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ Pour cela on va prouver que :

$$R_\lambda\left[\left(\lambda I - A\right) x\right] = x,\ \forall x \in D(A) \text{ et } \left(\lambda I - A\right) R_\lambda x = x,\ \forall x \in X$$

Premièrement, on prouve que $R_\lambda\left(\lambda I-A\right)x=x,\,\forall x\in D(A)$.

Soit $x\in D(A)$ et soit $t\geq 0$ on a

$$R_\lambda\left(\lambda I-A\right)x=\lambda R_\lambda x-R_\lambda Ax=\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)Ax\ dt$$

Mais on a

$$S(t)Ax=\frac{d}{dt}S(t)x$$

Donc

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)Ax\ dt=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\left[\frac{d}{dt}S(t)x\right]dt$$

On utilise l'intégration par partie, on trouve que :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)Ax\ dt &= e^{-\lambda t}S(t)x\ ]_0^{+\infty}+\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt\\ &= -x+\lambda\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}S(t)x\ dt.\end{aligned}$$

Alors

$$R_\lambda\left(\lambda I-A\right)x=x,\ \forall x\in D(A)$$

Deuxièmet, on montre que :

$$R_\lambda\left(\lambda I-A\right)x=x,\ \forall x\in X$$

Soit $x\in X$ on a

$$\left(\lambda I-A\right)R_\lambda x=\lambda R_\lambda x-AR_\lambda x$$

Mais, on a

$$\begin{aligned} AR_\lambda x &= \lim_{h\to 0}\frac{S(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t+h)x\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)x\,dt\right] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\left[\frac{d}{dt}S(t)x\right]dt \\ &= -x+\lambda R_\lambda x. \end{aligned}$$

Donc

$$(\lambda I - A)\,R_\lambda x = x,\ \forall x\in X$$

Alors on trouve que :

$$R_\lambda x = R(\lambda, A)x,\ \forall x \in X$$

■

**Remarque 1.7** **i)** $\forall x \in D(A)$ on a $R_\lambda x \in D(A)$ de plus $AR_\lambda x = R_\lambda Ax$.

**ii)** $\exists \omega \geq 0, \exists M \geq 1$ telle que :$\Lambda_\omega \subset \rho(A)$.

**Définition 1.16** L'opérateur

$$\begin{aligned} R_\lambda \quad &: \quad X \to X \\ x \quad &\mapsto \quad R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)x\,dt \end{aligned}$$

s'appelle la transformé de Laplace du Semi -Groupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

**Théorème 1.6** *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$Semi-Groupe et $A$ sont générateur infinitésimal pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}\ n \in \mathbb{N}^*.$$

**Preuve.** Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Montrons que

$$\exists M \geq 1, \exists \omega \geq 0 : \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}$$

On a $(S(t))_{t\geq 0}$ un $C_0-$Semi-Groupe, alors :

$$\exists M \geq 1, \exists \omega \geq 0 : \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

D'aprés le théorème précédent on a : comme $\lambda \in \Lambda_\omega$ alors :

$$\lambda \in \rho(A) \text{ et } R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \; dt \quad \forall x \in X$$

De plus :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

Soit $x \in X$ on a Il est claire que :

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \; dt$$

donc

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = \frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x \; dt = -\int_0^{+\infty} te^{-\lambda t} S(t)x \; dt$$

Et par récurrence on peut montrer que :

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} S(t)x \; dt \; \forall x \in X, \; n \in \mathbb{N}^*$$

D'autre part nous avons

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \; x \quad \forall x \in X, \; n \in \mathbb{N}^*$$

Par suite on a

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^{+\infty} te^{-\lambda t} S(t)x \; dt, \; \forall x \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Donc

$$(R(\lambda, A))^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} S(t)x \, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c-à-d

$$(R(\lambda, A))^{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, A)^n\| &= \left\| \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} S(t)x \, dt \right\| \\
&\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(\lambda-\omega)t} S(t)x \, dt \\
&\leq \frac{M(n-1)}{(n-1)!(\lambda-\omega)}\|x\| \int_0^{+\infty} t^{(n-2)} e^{-(\lambda-\omega)t} S(t)x \, dt \\
&\leq \ ... \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}\|x\| \quad \forall x \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

On intègre par partie $n$ fois :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}\|x\|, \quad \forall x \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

■

## 1.5 L'approximation de Hille-Yosida

Soit $X$ un espace de Banach.

**Lemme 1.1** *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivant :*

1. *$A$ est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$ .*

*2. Il existe un* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *telle que* $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *nous avons :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

*Alors pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *nous avons :*

$$\begin{aligned} 1) \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x &= x, \ \forall x \in X \\ 2) \lim_{\lambda \to \infty} \lambda A R(\lambda, A)x &= Ax, \ \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

**Preuve.** Soient $A$ opérateur linéaire qui vérifier (1) et (2) du lemme et $\lambda \in \Lambda_\omega$

1- Montrons que :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X.$$

Soit $x \in X$ on a : $\overline{D(A)} = X$, c-à-d :

$$\exists\,(x_n) \subset D(A) : x_n \to x \text{ dans } X.$$

on a

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n + \lambda R(\lambda, A)x_n - x_n + x_n - x\| \\ &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n\| &= \|\lambda R(\lambda, A)\,(x - x_n)\| \\ &\leq \lambda\,\|R(\lambda, A)\|\,\|x - x_n\| \end{aligned}$$

Mais

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

Donc

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n\| \leq \frac{|\lambda|\,M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\,\|x_n - x\|.$$

Donc

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \left(\frac{|\lambda|\, M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right)\|x_n - x\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\|$$

On sait que

$$\forall x \in D(A) : AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$$

et

$$\forall x \in X : \lambda R(\lambda, A)x = x + AR(\lambda, A)x.$$

En effet : On a $(\lambda I - A)\, R(\lambda, A)x = x, \forall x \in X$ donc :

$$\lambda R(\lambda, A)x - AR(\lambda, A)\, x = x, \ \forall x \in X,$$

donc

$$\lambda R(\lambda, A)x = x + AR(\lambda, A)\, x = xR(\lambda, A)\, Ax, \ \forall x \in X,$$

on a

$$R(\lambda, A)\,(\lambda I - A)\, x = x, \forall x \in D(A)$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax &= x \\ \lambda R(\lambda, A)x &= R(\lambda, A)Ax + x, \forall x \in D(A) \end{aligned}$$

pour $x \in D(A) : x + AR(\lambda, A)x = x + R(\lambda, A)Ax.$

Donc $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax, \ \forall x \in D(A)$, et

$$\|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| = \|\lambda R(\lambda, A)x_n\| \leq \|R(\lambda, A)\| - \|Ax_n\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_n\|$$

Mais $x_n \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} x$ sur $X$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \left(\frac{|\lambda|\, M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right)\|x_n - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_n\|$$

Pour $\omega = n_0$

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \left(\frac{|\lambda|\, M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right)\|x_{n_0} - x\| + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_{n_0}\| \\
&\leq \left(\frac{|\lambda|\, M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right)\varepsilon + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_{n_0}\|
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\left(\frac{|\lambda|\, M + 1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\right)\varepsilon + \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_{n_0}\|\right)$$

Mais

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\|Ax_{n_0}\| = 0$$

car $\|Ax_{n_0}\|$ finie. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\frac{|\lambda|\, M + 1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}\right)\varepsilon &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Re}^2\lambda + \operatorname{Im}^2\lambda}M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} + 1\right)\varepsilon \\
&= \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda\sqrt{1 + \frac{\operatorname{Im}^2\lambda}{\operatorname{Re}^2\lambda}}M}{\operatorname{Re}\lambda\left(1 - \frac{\omega}{\operatorname{Re}\lambda}\right)} + 1\right)\varepsilon \\
&= (M+1)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq (M+1)\,\varepsilon \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

d'où

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = 0.$$

2- Montrons que : $\lim\limits_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\lambda AR(\lambda, A)x = Ax,\ \forall x \in D(A)$.

Soit $x \in D(A)$ : On a

$$R(\lambda, A)Ax = AR(\lambda, A)x$$

Donc :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} \lambda AR(\lambda, A)x.$$

d'après l'équation (1) on a :

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$$

Donc $\lim\limits_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} \lambda AR(\lambda, A)x = Ax$ d'où le résultat. ■

**Définition 1.17** 1- $\forall x \in D\left(A\right) : R\left(\lambda, A\right)Ax = AR\left(\lambda, A\right)x$.

2- La famille $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\omega} \in \mathcal{L}(X)$ où $A_\lambda = \lambda\ AR(\lambda, A)$ s'appelle l'approximation généralisé de yosida de l'opérateur $A$.

$$A_\lambda = \lambda\ AR(\lambda, A), \forall\lambda \in \Lambda_\omega.$$

**Remarque 1.8** $A_\lambda$ est un opéateur linéaire borné

En effet : Comme $A$ et $R\left(\lambda, A\right)$ sont linéaire alors : $\lambda\ AR(\lambda, A)$ est linéaire c-à-d $A$ est linéaire.

Montrons que : $A_\lambda$ est borné : on a :

$$\begin{aligned}
\lambda\ AR(\lambda, A) &= \lambda\ \left[\lambda I - \lambda I + A\right] R(\lambda, A) \\
&= \lambda\ \left[\lambda I - (\lambda I - A)\right] R(\lambda, A) \\
&= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I
\end{aligned}$$

Comme l'opération $R(\lambda, A)$ et $I$ sont linéaires Alors $\lambda\ AR(\lambda, A)$ est bornés.

Donc : $\lambda\ AR(\lambda, A) \in \mathcal{L}\left(X\right)$.

**Lemme 1.2** *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivants :*

**i)** *$A$ est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$ .*

**ii)** *Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$, telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Si $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisé de yosida de l'opérateur $A$ alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ nous avons :*

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq M^2 t e^{(\omega+\varepsilon)t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \ \ \forall x \in X \text{ et } t \geq 0.$$

**Preuve.** Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ posons

$$(A_\lambda)_\lambda = (\lambda AR(\lambda, A))_\lambda$$

Donc

$$A_\lambda = \lambda^2 AR(\lambda, A) - \lambda$$

Alors $(A_\lambda)_\lambda$ est une suite d'opérateur borné, donc on peut écrire $e^{tA_\lambda} = e^{t(\lambda^2 AR(\lambda,A)-\lambda)}$.

Alors

$$e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 AR(\lambda,A)} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R(\lambda, A)^k.$$

$$\begin{aligned}
\left\|e^{tA_\lambda}\right\| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \left\|R(\lambda, A)^k\right\|. \\
&\leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \frac{M}{(\lambda-\omega)^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \\
&\leq M e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}\right)^k}{k!}. \\
&\leq M e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}}.
\end{aligned}$$

Mais

$$M e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\omega}} = M e^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega} t} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} M e^{\omega t}.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \lambda_0 \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{N}, (\lambda \geq \lambda_0) \Rightarrow \left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq Me^{(\omega+\varepsilon)t}.$$

Soient $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega, t \geq 0$ et $x \in X$ étudient $\left(e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right)$

Posons

$$F(s) = e^{(t-s)A_\beta}e^{sA_\alpha}x.$$

Remarquons que

$$e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x = F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}F(s)\ ds$$

Mais on a

$$\frac{d}{ds}F(s) \ = e^{(t-s)A_\beta}e^{sA_\alpha}\left(A_\alpha x - A_\beta x\right)$$

Nous en déduisons que

$$\left\| e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x \right\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}F(s)\ ds \right\| \leq \int_0^t \left\| e^{(t-s)tA_\beta} \right\| \left\| e^{sA_\alpha} \right\| \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\|\ ds$$

Pour $\alpha, \beta > \lambda_0$, on a

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x \right\| &\leq \int_0^t Me^{(\omega+\varepsilon)(t-s)}Me^{(\omega+\varepsilon)t}\left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| ds \\ &\leq M^2te^{(\omega+\varepsilon)t}\left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\|\ \forall t \geq 0 \text{ et } x \in X \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.7** *Soient $A$ et $B$ deux opérateur définies sur $X$ :*

$$\textit{Si } A \subset B \textit{ et } \rho(A) \cap \rho(B) \neq \varnothing \textit{ alors } A = B$$

**Preuve.** On a $A \subset B$, donc pour montrer que $A = B$ il suffit de montrer que $B \subset A$.

Soit $x \in D(B)$ on a

$$\rho(A) \cap \rho(B) \neq \varnothing$$

Donc

$$\exists \lambda_0 : \lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$$

C'est à dire $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ et $(\lambda_0 I - B)^{-1}$ exist linéaire et borné .

Posons

$$y = (\lambda_0 I - B)\, x \text{ et } z = (\lambda_0 I - A)^{-1}\, y$$

Donc $z \in D(A)$,or

$$D(A) \subset D(B) \text{ et } D(A) \subset D(B)$$

Donc

$$z \in D(B) \text{ et } Bz = Az.$$

Nous avons

$$y = (\lambda_0 I - A)\, z = (\lambda_0 I - B)\, z$$

Donc

$$z = (\lambda_0 I - B)^{-1}\, y$$

Alors

$$z = (\lambda_0 I - B)^{-1}\, (\lambda_0 I - B)\, x = x$$

comme $z \in D(A)$ alors $x \in D(A)$.

Donc

$$D(B) \subset D(A)$$

Alors

$$A = B$$

■

## 1.6 Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 1.7** *Un opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-Groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si :*

**i)** *$A$ est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$.*

**ii)** *Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$, telle que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

**Preuve.** Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un semi-Groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ donc d'après le théorème (2.3) on a $A$ est un opérateur fermé et a domaine dense d'ou (i).

Et Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ donc d'aprés le théorème (2.5) on a $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et d'après le théorème (2.6) on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \; n \in \mathbb{N}^*$$

donc on obtient (ii).

Inversement, on suppose (i) et (ii) vérifier soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $T_\lambda(t) = \left(e^{tA_\lambda}\right)$ le Semi-Groupe uniformément continue engendré par $A_\lambda$.

Montrons que $S_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy , Soit $\alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ et soit $x \in D(A)$ et $t \geq 0$.

D'après le lemme (2.4) on a

$$\|S_\alpha(t)x - S_\beta(t)x\| \leq M^2 te^{(\omega+\varepsilon)t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \;\; \forall x \in X \; \forall t \geq 0$$

Et $\forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega$ et $x \in D(A)$

$$\|A_\alpha x - A_\beta x\| = \|A_\alpha x - Ax + Ax - A_\beta x\| \leq \|A_\alpha x - Ax\| + \|Ax - A_\beta x\|$$

D'après le lemme (2.3) on a

$$\|A_\alpha x - Ax\| + \|Ax - A_\beta x\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \alpha, \beta \to \infty$$

Donc

$$\|S_\alpha(t)x - S_\beta(t)x\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \alpha, \beta \to +\infty$$

Donc $(S_\lambda(t))_{t\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $X$, comme $X$ est un espace de Banach on a $(S_\lambda(t))_{t\geq 0}$ est convergente. alors $(S_\lambda(t))_{t\geq 0}$ est ponctuellement convergente sur $D(A)$, or $D(A)$ est dense dans $X$, de plus $\{e^{tA_\lambda}\}_\lambda$ est uniformément borné.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus $\{e^{tA_\lambda}\}_\lambda$ est ponctuellement convergente sur $X$.

La convergence de $\{e^{tA_\lambda}x\}_\lambda$ est uniforme sur $[0, T]$ $\forall T > 0$.

Posons $S(t)x = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$ on a $\{e^{tA_\lambda}x\}_\lambda$ converge uniformément sur chacun intervalle $[0, T]$ dans ce cas $S(t)x$ est une fonction continue c'est à dire $S(t)$ est fortement continue .

On a :

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{0A_\lambda}x = x \text{ donc } T(0) = I.$$

D'autre part on a :

$$S(t) \circ S(s)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}S(s)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x$$

Donc

$$S(t) \circ S(s) = S(t+s)$$

Donc $(S(t))_{t\geq 0}$ est un $C_0$-Semi-Groupe .

Soit $B$ le générateur infinitésimal de $T(t)$ nous avons $e^{tA_\lambda}x \longrightarrow T(t)x$ uniformément sur $[0, T]$ , $\forall T > 0$ dans ce cas $\{e^{tA_\lambda}x\}_\lambda$ est convergent alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\lim_{\lambda\to+\infty}(e^{tA_\lambda}x)\right) = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{d}{dt}(e^{tA_\lambda}x).$$

Soit $x \in D(A)$ on a :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty}(A_\lambda e^{tA_\lambda}x) = AS(t)x$$

D'autre part

$$\frac{d}{dt}\left(\lim_{\lambda \to +\infty}(e^{tA_\lambda}x)\right) = \frac{d}{dt}S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx$$

Donc $x \in D(B)$ et $Bx = Ax$ ce qui signifie que $A \subset B$.

Et comme $B$ est le générateur infinitésimal de $T(t)$ :

$$\exists \omega^{'} \text{ tq } \{\lambda > \omega^{'}\} \subset \rho(B) \text{ et par hypothèse } \{\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

Dans ce cas

$$\forall \lambda > \max(\omega, \omega^{'}), \lambda \in \rho(B) \cap \rho(A)$$

Donc

$$\rho(B) \cap \rho(A) \neq \varnothing$$

D'après le proposition (2.5) $A = B$ donc $A$ est le générateur infinitésimal du $C_0-$Semi Groupe $(S(t))_{t \geq 0}$. ■

### 1.6.1 Théorème de Lumer- philips

#### Opérateurs dissipatif

**Définition 1.18** Soit $X$ un espace de Banache muni de la norme $\|.\|$ et soit $X^*$ l'espace dual du $X$. Posons :

$$F(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}.$$

On dit que l'opérateure $A : D(A) \subseteq X \to X$ est disspastif si pour tout $x \in X$, il existe $x^* \in F(x)$ tel que :

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

c-à-d :

$$(A \text{ est disspatif}) \Longleftrightarrow (\forall x \in X : \exists x^* \in F(x) : \operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0)$$

**Définition 1.19** Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans $X$, est dissipatif si :

$$\forall x \in D(A), \forall\ \lambda > 0 : \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$$

**Opérateurs m-dissipatifs**

**Définition 1.20** Soit $X$ un espace de Banach.

Un opérateur $A : D(A) \subseteq X \to X$, linéaire non borné dans $X$, est m-dissipatif si :

$i)$ $A$ est dissipatif.

$ii)$ $\forall f \in X, \forall\ \lambda > 0$, $\exists x \in D(A)$ telle que : $\lambda x - Ax = f$.

**Théorème 1.8** *Si $A$ est m-dissipatif, alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1}f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur $X$ vérifiant :*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Preuve.**

Soient $A$ un opérateur m-dissipatif c-à-d les deux conditions sont vérifies et $\lambda > 0$.

1- Montrons que : l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un invers :

c-à-d : on va prouver que $(\lambda I - A)$ est bijectif.

$$((\lambda I - A) \text{ est bijectif}) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\lambda I - A) \text{ est surjectif} \\ et \\ (\lambda I - A) \text{ est injectif} \end{cases}$$

Montrons que $(\lambda I - A)$ est injectif :

Comme $(\lambda I - A)$ est linéaire on montre que $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$. On sait que :

$$\ker(\lambda I - A) = \{x \in D(A) : (\lambda I - A)x = 0\}.$$

On a : $(\lambda I - A)(0) = 0$ alors : $0 \in \ker(\lambda I - A)$, donc

$$\{0\} \subset \ker(\lambda I - A) \tag{*}$$

Prouvons maintenant que :

$$\ker(\lambda I - A) \subset \{0\}$$

Soit $x \in \ker(\lambda I - A)$ donc : $x \in D(A) : (\lambda I - A)x = 0$. Mais $A$ est disspastif, donc :

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

Mais $(\lambda I - A)x = 0$, donc :

$$0 \geq \lambda \|x\|$$

et comme $\lambda > 0$ et $\|x\| \geq 0$ donc :

$$\lambda \|x\| \geq 0$$

Mais $\lambda > 0$ c-à-d $\lambda \neq 0$. Alors :

$$\|x\| = 0$$

D'où

$$x = 0.$$

Donc

$$\ker(\lambda I - A) \subset \{0\} \tag{**}$$

De $(*)$ et $(**)$ on a :

$$\ker(\lambda I - A) = \{0\}$$

c-à-d $(\lambda I - A)$ est injectif.

Montrons que $(\lambda I - A)$ est surjectif :

$$((\lambda I - A) \text{ est surjectif}) \Longleftrightarrow (\forall y \in X : \exists x \in D(A) : (\lambda I - A)x = y).$$

Soit $y \in X$, Comme $A$ est m-disspastif posons $f = y$

$$\exists x \in D(A) : \lambda x - Ax = y$$

Mais : $\lambda x - Ax = (\lambda I - A)x$ Alors $\exists x \in D(A) : (\lambda I - A)x = y$ c-à-d $(\lambda I - A)$ est surjectif.

Alors $(\lambda I - A)$ est bijectif c-à-d $(\lambda I - A)$ admet un inverse et on a :

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} : X &\longrightarrow D(A) \\ f &\longmapsto (\lambda I - A)^{-1} f \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall f \in X : (\lambda I - A)^{-1} f \in D(A).$$

Montrons que : $(\lambda I - A)^{-1}$ est linéaire borné sur $X$ avec $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}$ :

Comme $(\lambda I - A)$ est linéaire car $A$ linéaire alors $(\lambda I - A)^{-1}$ est linéaire.

Montrons que : $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné :

$$\left((\lambda I - A)^{-1} \text{ est borné}\right) \Longleftrightarrow \left(\exists c > 0 : \left\|(\lambda I - A)^{-1} f\right\| \leq c \|f\|, \forall f \in X\right)$$

Soit $f \in X$ alors :

$$\exists! x \in D(A) : (\lambda I - A)x = f$$

Donc :

$$\exists! x \in D(A) : (\lambda I - A)^{-1} x = f$$

Donc :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} f\right\| = \|x\|.$$

Mais $A$ est disspaostif et $x \in D(A)$. Alors :

$$\left\|\underbrace{(\lambda I - A)\,x}_{f}\right\| \geq \lambda \|x\|,$$

donc

$$\|f\| \geq \lambda \left\|(\lambda I - A)^{-1} f\right\|.$$

Donc

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} f\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|$$

Posons : $c = \frac{1}{\lambda}$ on trouve que : $(\lambda I - A)^{-1}$ est borné et on a :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

d'où le résultat. ■

**Théorème 1.9** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans $X$. L'opérateur $A$ est m-dissipatif si et seulement si*

$$\exists \lambda_0 > 0 \text{ tel que } \forall f \in X,\ \exists x \in D(A) \text{ vérifiant } \lambda_0 x - Ax = f.$$

**Preuve.**

Soit $A$ un opérateur linéaire non borné dissipatif.

Montrons que :

$$(A \text{ est m-dissipatif}) \Longleftrightarrow (\exists \lambda_0 > 0 : \forall f \in X,\ \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = f)$$

$(\Longrightarrow)$ Supposons que $A$ est m-dissipatif. c-à-d :

i) $A$ est dissipatif.

ii) $\forall f \in X, \forall\, \lambda > 0,\ \exists x \in D(A) :\ \lambda x - Ax = f.$

et on montre que : $\exists \lambda_0 > 0 : \forall f \in X,\ \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = f$

En prend $\lambda = \lambda_0$ dans $(ii)$ on a : $\exists \lambda_0 > 0 : \forall f \in X,\ \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = f$. D'où $(\Longrightarrow)$ est vérifie.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que : $\exists \lambda_0 > 0 : \forall f \in X,\ \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = f$ et on montre que : $A$ un opérateur m-dissipatif, c-à-d i) $A$ i) i) $A$ est dissipatif.

ii) $\forall f \in X, \forall\ \lambda > 0,\ \exists x \in D(A) :\ \lambda x - Ax = f.$

par hypothèse on a : $A$ est dissipatif.

Il suffit de montrer que :

$$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A) :\ \lambda x - Ax = f.$$

Soient $f \in X, \lambda > 0$, on cherche un $x \in D(A)$ tel que : $\lambda x - Ax = f$. Ce qui equivalent à :

$$\lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - Ax = f$$

c-à-d :

$$(\lambda_0 - \lambda) x + (\lambda_0 I - A) x = f$$

Ce qui equivalent à :

$$(\lambda_0 I - A) x = (\lambda - \lambda_0) x + f$$

D'après le théorème précédent on a : $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe est linéaire borné avec :

$$\left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Donc :

$$(\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 I - A) x = (\lambda_0 I - A)^{-1} [f + (\lambda_0 - \lambda) x]$$

Alors :

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1} [f + (\lambda_0 - \lambda) x]$$

On voit que $x$ est un point fixe de l'opérateur $H$ définit par :

$$\begin{aligned} H : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ f + (\lambda_0 - \lambda)\, x \right] \end{aligned}$$

pour $x$ est un solution de l'équation $\lambda x - Ax = f$ il suffit que : $x = Hx$, c-à-d $x$ est un point fixe de $H$.

Montrons que $H$ est contractante :

$$(H \text{ est contractante}) \Longleftrightarrow (\exists k \in \left]0,1\right[ : \|Hx_1 - Hx_2\| \leq k \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in X)$$

Soient $x_1, x_2 \in H$ on a :

$$\begin{aligned} \|Hx_1 - Hx_2\| &= \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \left[ f + (\lambda_0 - \lambda)\, x_1 \right] - (\lambda_0 I - A)^{-1} f + (\lambda_0 - \lambda)\, x_2 \right\| \\ &= \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} (\lambda_0 - \lambda) (x_1 - x_2) \right\| \\ &\leq \left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| |\lambda_0 - \lambda| \, \|x_1 - x_2\| . \end{aligned}$$

Mais : $\left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$. Donc

$$\left\| (\lambda_0 I - A)^{-1} \right\| |\lambda_0 - \lambda| \, \|x_1 - x_2\| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} \|x_1 - x_2\|$$

Alors :

$$\|Hx_1 - Hx_2\| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} \|x_1 - x_2\|$$

et comme $\frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} > 0$, pour que $H$ soit contractante il faut que : $\frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} < 1$ c-à-d $\lambda \in \left]0, 2\lambda_0\right[$.

Donc : pour tout $\lambda \in \left]0, 2\lambda_0\right[$ l'applicatipon $H$ est contractante.

Puisque $x$ est un point fixe de $H$, on trouve que pour tout $\lambda \in \left]0, 2\lambda_0\right[$ et $f \in X$ il existe un $x \in D(A)$ tel que

$$\lambda x - Ax = f.$$

On peut montrer de même façon que pour pour tout $\lambda \in \left]0, 2^n \lambda_0\right[$ et pour tout $n \geq 1$ l'applicatipon $H$ est contractante.

C-à-d

$$\forall n \geq 1, \forall \lambda \in \left]0, 2^n \lambda_0\right[, \forall f \in X, \exists x \in D\left(A\right) : \lambda x - Ax = f.$$

Quand $n$ tend vers $+\infty$, on a :

$$\forall \lambda \in \left]0, +\infty\right[, \forall f \in X, \exists x \in D\left(A\right) : \lambda x - Ax = f.$$

Donc l'opérateur $A$ est m-dissipatif. ■

**Théorème 1.10** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans $X$. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $(\lambda_0 I - A)$ est une bijection de $D(A)$ sur $X$ et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur $X$, alors $A$ est fermé, En particulier, si $A$ est m-dissipatif alors $A$ est fermé.*

**Théorème 1.11** *Soit $A$ un opérateur dissipatif à domaine dense sur $X$. Si $A$ est fermé et $A^*$ est dissipatif alors, $A$ est m-dissipatif.*

**Définition 1.21** On appelle opérateur m-accrétif un opérateur linéaire non borné tel que :

1. $\overline{D(A)} = X$.
2. l'opérateur $-A$ est m-dissipatif.

**Corollaire 1.1** *Soit $A$ un opérateur m-dissipatif. L'espace $(D(A), \|.\|_G)$ est un espace de Banach et $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$.*

**Définition 1.22** Soit $A$ un opérateur m-dissipatif dans $X$. La famille d'opérateurs $R(\lambda, A)$, $\lambda > 0$ définie par $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée résolvante de $A$. L'opérateur $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)$ est appelé "**approximation de Yosida**" de $A$.

**Remarque 1.9** Nous avons :

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda(A - \lambda I)R(\lambda, A) + \lambda^2 R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$$

L'opérateur $A$ est donc un opérateur borné dans $X$. De plus nous avons

$$A_\lambda x = \lambda R(\lambda, A)Ax \qquad \forall x \in D(A) \tag{1.3}$$

En effet, pour tout $x \in D(A)$, nous avons

$$\lambda R(\lambda, A)Ax \ = \lambda R(\lambda, A)(A - \lambda I)x + \lambda^2 R(\lambda, A) = -\lambda x + \lambda^2 R(\lambda, A)x = A_\lambda x$$

d'aprés l'identité ci-dessus

**Théorème 1.12** *Soit $A$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans $X$. Alors*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x \ - x\| = 0 \qquad \forall x \in X$$

*De plus*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|A_\lambda x \ - Ax\| = 0 \qquad \forall x \in D(A)$$

**Preuve.** Voir Equations d'évolution [page 8]. ■

**Remarque 1.10** Remarquons que le premier résultat du théorème signifie que $\lambda R(\lambda, A)$ est une approximation de l'identité. Le second signifie que $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une suite d'opérateurs bornés approchant $A$.

## 1.7 Les semi groupe dans un espace de Hilbert

Soit $H$ est un espace de Hilbert complexe.

**Définition 1.23** Soit $A$ un opérateur non borné dans $H$ de domaine $D(A)$.
1- On dit que $A$ est dissipatif si $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in D(A)$.
2- On dit que $A$ est conservatif si $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle = 0,\ \forall x \in D(A)$.
3- On dit que $A$ est accréatif si $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in D(A)$.

**Définition 1.24** Un semi groupe est dissipatif (resp. accréatif, resp. conservatif) si son générateur infinitisimal l'est.

**Théorème 1.13** *Soit $(S(t))$ un semi groupe de contraction de classe $C^0$ dans l'espace de Hilbert $H$, Alors : si $A$ est le générateur infinitisimal $(S(t))$ l'opérateur de $A$ est dissipatif (**i.e.** $A$ accréatif). Autrement dit :*
*un semi groupe de contraction de classe $C^0$ est dissipatif.*

**Preuve.** Soit $A$ le générateur de $C^0$ semi groupe de contraction.
On va montrer que $A$ est un dissipatif c-à-d :

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in D(A).$$

Soit $x \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle &= \operatorname{Re}\left\langle \lim_{t\to 0}\frac{S(t)x - x}{t}, x\right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, x\rangle
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, x\rangle &= \frac{1}{t}\operatorname{Re}\left(\langle S(t)x, x\rangle - \langle x, x\rangle\right) \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\|S(t)x\|\,\|x\| - \|x\|^2\right) \text{ (d'après l'inégalitédeCauchySchwartz)} \\
&\leq \frac{1}{t}\left(\|S(t)\|\,\|x\|\,\|x\| - \|x\|^2\right)
\end{aligned}$$

Comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi groupe de contraction alors :

$$\|S(t)\| \leq 1.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\operatorname{Re}\left(\langle S(t)x, x\rangle - \langle x, x\rangle\right) &\leq \frac{1}{t}\left(\|x\|^2 - \|x\|^2\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $t \to 0$ on trouve :

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$$

Donc $A$ est dissipatif c-à-d le semi groupe de contraction alors :

$$\|S(t)\| \leq 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, x\rangle &\leq \frac{1}{t}\left(\|x\|^2 - \|x\|\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans $H$, est dissipatif si et seulement si :

$$\forall x \in D(A) \qquad \langle Ax, x\rangle \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \qquad \mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \leq 0.$$

**Preuve.** Voir Equations d'évolution [page 9]. ■

**Théorème 1.14** *Si $A$ est m-dissipatif alors $D(A)$ est dense dans $H$.*

**Preuve.** Voir Equations d'évolution [page 10]. ■

**Définition 1.25** $A^*$ est l'adjoint de $A$ signifie que

$$\forall x, y \in H : \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

**Définition 1.26** Si $A : H \to H(A \in \mathcal{L}(H))$ $A$ est dit auto-adjoint si :

$$\forall x, y \in H : \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

**Définition 1.27** un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ de domaine dense dans $H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$.

**Corollaire 1.2** *Toujours dans le cadre hilbertien on a :*

**i)** *Si $(A, D(A))$ est dissipatif auto-adjoint à domaine dense alors il est m-dissipatif.*

**ii)** *Si $(A, D(A))$ est anti-adjoint dense alors il est m-dissipatif.*

**Théorème 1.15** *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = X$ alors $A$ est le générateur infinitésimal du $C_0-$Semi-Groupe de contraction si et seulement si :*

1. *$A$ est dissipatif.*

*2. Il existe $\lambda > 0$ tel que : $(\lambda I - A)$ est surjectif.*

**Preuve.** Supposons que $A$ est le générateur infinitésimal d'un Semi-Groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ ,donc :

$$\|T(t)\| \leq 1$$

Alors $\omega = 0$ et $M = 1$ donc $\Lambda_\omega = \{\lambda > 0\}$ .

Donc d'après le théorème de Hille-Yosida

$$\Lambda_\omega = [0, +\infty[\subset \rho(A)$$

C'est à dire : $\lambda \in [0\ , +\infty[$ on a $(\lambda I - A)^{-1}$ existe linéaire et borné, donc $(\lambda I - A)$ est bijectif alors il est surjectif d'où (2) . On a

$$\forall \lambda > 0 : \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n}\ , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Pour $n = 1$ on a

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Et pour $y \in X$ on a :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} y\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \|y\|$$

Comme $y \in X$ et $(\lambda I - A)$ est bijectif il existe $x \in D(A)$ avec $y = (\lambda I - A)\, x$ .

Alors

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\|$$

Alors

$$\|x\| \leq \frac{1}{\lambda} \|(\lambda I - A)\, x\|$$

Donc

$$\|(\lambda I - A)\, x\| \geq \lambda \|x\|$$

Donc $A$ est dissipatif alors (1) est vérifie.

Inversement, Supposons que (1) et (2) sont vérifie on a donc $A$ est dissipatif donc $(\lambda I - A)$ est injective et comme (2) vérifié alors $A$ est $m-$dissipatif donc $A$ est fermé et on a :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda} \forall \lambda > 0$$

donc $\omega = 0$ et $M = 1$.

Alors d'après Hille-Yosida on a $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$-Semi-Groupe de contraction.

- 

CHAPITRE 2

# Problème de Cauchy abstrait

## Sommaire



Dans ce chapitre, on présente des théorèmes d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy abstrait.

## 2.1 Equation d'évolution

Les équations d'évolution sont des équations qui s'écrivent sous la forme :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Où $u = u(t)$, $A : X \longrightarrow X$ est un opérateur d'un espace de Banach $X$ vers $X$, $x$ est la donnée initiale et $f$ est une application dans $X$.

**Définition 2.1** Le problème $(P_1)$ est appelé problème de Cauchy non homogène. Si $f = 0$, on a :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

C'est un problème de Cauchy homogène.

## 2.2 L'existence de la solution

**Théorème 2.1** *Soit $A$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach $X$. Si $A$ est un générateur infinitésimale d'un $C_0-$semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, alors le problème $(P_2)$ possède une solution unique $u(t) = T(t)u_0$.*

**Définition 2.2 (Solution forte)** une fonction $u$ est appelée solution forte du problème $(P_1)$ si :

1) $u \in C([0, +\infty[, D(A))$ c-à-d $u$ est une fonction continue à valeurs dans $D(A)$ par rapport à la norme du graphe.

2) $u \in C^1([0, +\infty[, X)$ c-à-d $u$ est continument dérivable tant que fonction à valeurs de$X$.

3) $\frac{du}{dt} = Au + f$ et $u(0) = u_0$ c-à-d $u$ vérifie l'équation et la condition initiale du problème$(P_1)$.

**Définition 2.3 (Solution faible)** On dit que $u$ est une solution faible du $(P_1)$ si $u \in C^0([0, +\infty[, X)$ il est existe une suite $(u_n)_n$ tel que :

$$(u_n)_n \subset C^0([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, X)$$

et

$$u_n \to u, \ \frac{du_n}{dt} - Au_n \to f$$

et

$$u_n(0) \to u_0.$$

**Remarque 2.1** Toute solution forte est une solution faible.

**Théorème 2.2** *Si $f \in C^1([0, +\infty[, X)$ et $A$ est un générateur infinitésimale d'un $C_0-$semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors, le problème $(P_1)$ admet une solution forte s'écrit par :*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

**Proposition 2.1** *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors pour tout $x \in X$, la fonction*

$$u : t \mapsto u(t) = T(t)x$$

*est l'unique solution généralisée du problème $(P_2)$.*

**Théorème 2.3** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, Soit $f \in L^1(0, T, X)$ continue sur $]0, T]$ et soit :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\ ds, \ 0 \leq t \leq T$$

*Le problème $(P_1)$ admet une solution $u$ sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des condition suivante est satisfaite :*

*i) $v(t)$ est continument différentiable sur $]0, T[$.*

*ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t)$ est continue sur $]0, T[$.*

*Si le problème $(P_1)$ admet une solution $u$ sur $[0, T[$ pour certains $x \in D(A)$, alors $v$ satisfait à la fois (i) et (ii).*

**Corollaire 2.1** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f(s)$ est continument différentiable sur $[0,T]$, alors le problème $(P_1)$ admet une solution $u$ sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$.*

**Corollaire 2.2** *Soit $A$ le générateur infinitésimal d'un $C_0-$semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, soit $f \in L^1(0,T,X)$ une fonction continue sur $]0,T[$. Si $f(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Af(t) \in L^1(0,T,X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème $(P_1)$ admet une solution $u$ sur $[0,T[$.*

## 2.3 L'unicité de la solution

**Théorème 2.4** *Si $A$ est un générateur infinitésimale d'un $C_0$-semi groupe $(s(t))_{t\geq 0}$ et si $u$ une solution forte du problème $(P_1)$, alors :*

$$u(t) = s(t)u_0 + \int_0^t s(t-s)f(s)ds.$$

## 2.4 Régularité des solutions

On constate que la régularité est étroitement liée au choix de la condition initiale on fonction du domaine $A$ de définition il est donc naturel de penser qu'en imposant plus de "régularité" a $u_0$ on obtienne plus de régularité sur les solutions.

Plus précisément, on définit par récurrence l'espace

$$D(A^k) = \left\{v \in D(A^{k-1}),\ Av \in D(A^{k-1})\right\},\ k \text{ entier} \geq 2.$$

on peut vérifier aisément que $D(A^k)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \left(A^j u; A^j v\right),$$

la norme correspondante est :

$$|u|_{D(A^k)} = \left( \sum_{j=0}^{k} \left| A^j u \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 2.5** *Si $u_0 \in D(A^k)$ avec $k \geq 2$. Alors la solution $u$ du problème $(P_2)$ est de classe $C^k\left([0;\infty[;X\right)$ et $C^{k-j}\left([0,+\infty[,D(A^j)\right)$. C'est à dire :*

$$u \in C^k\left([0,+\infty[,X\right) \cap C^{k-j}\left([0,+\infty[,D(A^j)\right), \ \textit{pour } j = 0,1,...,k.$$

# CHAPITRE 3
# Application du semi groupe

## Sommaire



Dans ce chapitre, on donne des applications de la théorie des semi groupes et l'étude du problème de Cauchy abstrait dans la résolution de quelques problèmes de mathématiques tel que l'équation des ondes,

## 3.1 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique de second ordre, elle joue un rôle fondamentale pour la description de l'équation de diffusion.

### 3.1.1 Position du problème

L'équation des ondes dont $v$ est une solution est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \triangle v = f, \quad \text{sur } \Omega \times [0,T], f \in L^2(\Omega) \\ v = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \\ v(x,0) = v_0, \quad \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega$ est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ lisse par morceaux, $v_0$ est une fonction donnée et $\Delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux variable de l'espace $x$ et $t$ est le variable de temps.

### 3.1.2 Existence et unicité

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur $(3.1)$.

**Théorème 3.1** ***(existence et unicité)*** *Si* $v_0 \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ *alors, il existe une solution unique de système* $(3.5)$ *avec*

$$v \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

**Preuve.** On va appliquer une conséquence du théorème de Hille-Yosida et la théorie du problème de Cauchy abstrait. On va transformer l'équation $(3.1)$ sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on montre que l'opérateur $A$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

**1) Conversion de l'équation** $(3.1)$ **vers le système de Cauchy abstrait.** Soient $t \geq 0$ et $x \in \Omega$. D'abord, on définit l'opérateur non borné $A$ comme suit :

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \triangle u \in L^2(\Omega)\right\}, \\ Au &= \triangle u,\ \forall u \in D(A). \end{aligned}$$

**2) La démonstration que $A$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.**

Maintenant, on applique le théorème du Lumer-Phillips sur l'espace $X = L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx,$$

Pour cela, on prouve que $A$ génère un $C_0-$semi groupe de contraction et $F \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Pour montre que $A$ est un générateur infinitésimal d'un $C_0-$semi groupe, on prouve que $A$ est un opérateur m-dissipatif c-à-d, on démontre que $A$ est maximal et dissipatif.

**Premièrement,** on montre que $A$ est dissipatif.

On sait que $A$ est dissipatif si pour tout $u \in D(A)$ on a :

$$\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Soient $u \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \triangle u, u\rangle_{L^2(\Omega)}, \\ &= \int_\Omega \triangle u(x)\, u(x)\, dx, \end{aligned}$$

et d'après la formule de Green, on obtient

$$\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} = -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \frac{\partial u(x)}{\partial v} u(x)\, d\sigma, \tag{3.2}$$

et comme $u \in H_0^1(\Omega)$, alors la formule (3.2) implique que

$$\begin{aligned}
\langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx \\
&= -\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla u(x) \, dx \\
&= -\int_{\Omega} [\nabla u(x)]^2 \, dx \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $u \in D(A)$. Alors, $A$ est disspatif.

**Deuxiément,** on montre que $A$ est maximal c-à-d on prouve que $I - A$ est surjectif c-à-d $(\mathrm{Im}(I - A) = X)$.

pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel corespondant au problème

$$-\triangle u + u = f, \text{ dans } \Omega, \tag{3.3}$$

et

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.4}$$

Dans ce but, en multipliant l'équation (3.3) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et en intégrant sur $\Omega$, en supposant que $u \in H^2(\Omega)$, alors

$$-\int_{\Omega} \triangle u v(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

d'après la formule de Green on trouve

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial v} v(x) \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

comme $v \in H_0^1(\Omega)$, alors l'égalité précédente nous donne

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

donc le problème variationnelle correspondant aux problème (1.4) et (1.5) est le suivant :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui satisfait $a(u,u) = L(v)$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, avec

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx \ , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_{\Omega} f(x)\, v(x)\, dx \ . \end{aligned}$$

Il est clair que $a(.,.)$ est une form bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. En effet, soit $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| dx + \int_{\Omega} |u(x)\, v(x)|\, dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Scwartz, on a

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \ ,$$

en utilisant l'inégalité de hölder on en déduit que

$$|a(u,v)| \leq \left( \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \ ,$$

et par suite

$$|a(u,v)| \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \, .$$

Montrons maintenant que $a(.,.)$ est coercive, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} (v(x))^2 dx \\ &= \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'autre part, $L$ est linéaire continu. En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \\ &= \int_{\Omega} |f(x) v(x)| dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Scwartz on obtient

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'où la continuité de $L$. Alors, touts les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, et par suite il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème variationnel. Et puisque $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega)$, alors $u \in D(A)$.

■

## 3.2 Equation des ondes

L'équation des ondes est une équation aux dérivées partielles hyperbolique de second ordre, elle joue un rôle fondamentale pour la description des ondes. Elle modélise la propagation d'une onde (électromagnétique, acoustique) dans un milieu élastique homogène.

### 3.2.1 Position du problème

L'équation des ondes dont $v$ est une solution est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \triangle v = f, \quad \text{sur } \Omega \times [0,T], \\ v = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0,T], \\ v(x,0) = v_0, \quad \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1, \quad \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\Omega$ est un sous-ensemble régulier de $\mathbb{R}^n$, $v_0, v_1$ sont des fonctions données et $\Delta = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ désigne le laplacien par rapport aux variable de l'espace $x$ et $t$ est le variable de temps.

### 3.2.2 Existence et unicité

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation des ondes $(3.5)$.

**Théorème 3.2** ***(existence et unicité)*** *Si* $v_0 \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ *alors, il existe une solution unique de système* $(3.5)$ *avec*

$$v \in C\left([0,T], H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^1(\Omega)\right) \cap C^2\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$

**Preuve.** On va appliquer une conséquence du théorème de Hille-Yosida et la théorie du problème de Cauchy abstrait. On va transformer l'équation $(3.5)$ sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait puis on montre que l'opérateur $A$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.

**1) Conversion de l'équation** $(3.5)$ **vers le système de Cauchy abstrait.**
Soient $t \geq 0$ et $x \in \Omega$. D'abord, on pose :

$$u_1 = v \text{ et } u_2 = \frac{\partial v}{\partial t}$$

et on remplace dans la première équation du système (3.5), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_2 = 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_1 = f, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1 + f, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on introduit la nouvelle variable suivant :

$$u = (u_1, u_2).$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + F, \\ u(0) = u_0 = (v_0, v_1), \end{cases} \tag{3.6}$$

tel que :

$$Au = (u_2, \Delta u_1) \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

avec le domaine de $A$ est donné par :

$$D(A) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega).$$

**2) La démonstration que $A$ est un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu.**

Maintenant, on applique le théorème du Lumer-Phillips sur l'espace $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2 dx,$$

où

$$u = (u_1, u_2) \ \ et \ v = (v_1, v_2) \, .$$

Pour cela, on prouve que $A$ génère un $C_0-$semi groupe de contraction et $F \in L^1 (0, T; L^1 (\Omega))$.

Pour montre que $A$ est un générateur infinitésimal d'un $C_0-$semi groupe, on prouve que $A$ est un opérateur m-dissipatif c-à-d, on démontre que $A$ est maximal et dissipatif.

**Premièrement,** on montre que $A$ est dissipatif.

On sait que $A$ est dissipatif si pour tout $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\|\lambda u - Au\| \geq \lambda \|u\| \, .$$

Soient $u \in D(A)$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda u - Au\|^2 &= \langle \lambda u - Au; \lambda u - Au \rangle \\ &= \langle \lambda u; \lambda u \rangle - \langle \lambda u; Au \rangle - \langle Au; \lambda u \rangle + \langle Au; Au \rangle \\ &= \|\lambda u\|^2 + \|Au\|^2 - 2 \langle Au; \lambda u \rangle \\ &= \|\lambda\|^2 \|u\|^2 + \|A\|^2 \|u\|^2 - 2\lambda \langle Au, u \rangle \, . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mais, on a :

$$\langle Au, u \rangle = \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx + \int_\Omega \triangle u_1 u_2 dx. \tag{3.8}$$

On applique la formule de Green sur la deuxième terme de l'équation (3.8), on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \triangle u_1 u_2 dx &= -\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_{\partial\Omega} \nabla u_1 u_2 \eta_1 (\xi) \, d\xi \\ &= -\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En substituant, l'équation (3.9) dans (3.8) , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_\Omega \nabla u_2 \nabla u_1 dx - \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En substituant (3.10) dans (3.7), on trouve :

$$\begin{aligned} \|\lambda u - Au\|^2 &= \|\lambda\|^2 \|u\|^2 + \|A\|^2 \|u\|^2 \\ &\geq \|\lambda\|^2 \|u\|^2, \end{aligned}$$

car $\|A\|^2 \|u\|^2 \geq 0$. Alors :

$$\|\lambda u - Au\| \geq \|\lambda\| \|u\|.$$

Donc, $A$ est dissipatif.

**Deuxiément,** on montre que $A$ est maximal c-à-d on prouve que $I - A$ est surjectif c-à-d $(\mathrm{Im}\,(I - A) = E)$.

Pour cela, soient $(f, g) \in E$ et $u \in D(A)$ telle que $(I - A)u = (f, g)$, alors

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f, \\ u_2 - \triangle u_1 = g. \end{cases} \tag{3.11}$$

En remplaçant $u_2 = u_1 - f$ dans la deuxième équation, on obtient :

$$u_1 - \triangle u_1 = f + g. \tag{3.12}$$

On multiple l'équations de (3.12) par $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et on intègre sur $\Omega$, on obtient :

$$\int_\Omega u_1 w dx - \int_\Omega \triangle u_1 w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx. \tag{3.13}$$

On applique la formule de Green sur l'équation (3.13), on trouve :

$$\int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx. \tag{3.14}$$

On définit sur $X = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]$ la forme bilinéaire $a : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u_1, w) = \int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx.$$

Et la forme linéaire $b : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$b(w) = \int_\Omega (fw + gw)\, dx.$$

Donc la résolution du système (3.11) est équivalente à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in X, \text{ telle que :} \\ a\left(u_1, w\right) = b\left(w\right), \quad \text{pour tout } w \in X. \end{cases} \tag{3.15}$$

Maintenant, pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de problème(3.15) , on utilise le théorème de Lax-Milgram. Alors pour cela, on prouve que :

- $X$ est une espace de Hilbert.

- La forme bilinéaire $a\left(.,.\right)$ est continue sur $X \times X$.

- La forme bilinéaire $a\left(.,.\right)$ est coercive sur $X$.

- La forme linéaire $b\left(.\right)$ est continue sur $X$.

Il est clair que $X$ est une espace de Hilbert.

★ **La continuité de la forme bilinéaire** $a$ :

On sait que $a$ est une forme bilinéaire continue sur $X \times X$ si et seulement s'il existe un $\alpha > 0$ telque :

$$\left|a\left(u_1, w\right)\right| \leq \alpha \left\|u_1\right\|_X \left\|w\right\|_X, \quad \text{pour tout } u_1, w \in X.$$

Soient $u_1, w \in X$, ona :

$$\begin{aligned} \left|a\left(u_1, w\right)\right| &= \left|\int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx\right| \\ &\leq \left|\int_\Omega u_1 w dx\right| + \left|\int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|u_1 w\right| dx + \int_\Omega \left|\nabla u_1 \nabla w\right| dx. \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} \left|a\left(u_1, w\right)\right| &\leq \left\|u_1\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|w\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\nabla u_1\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla w\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\|u_1\right\|_X \left\|w\right\|_X + \left\|u_1\right\|_X \left\|w\right\|_X \\ &\leq 2\left\|u_1\right\|_X \left\|w\right\|_X \end{aligned}$$

On prend $\alpha = 2 > 0$ alors, il existe $\alpha > 0$ telle que :

$$\left|a\left(u_1, w\right)\right| \leq \alpha \left\|u_1\right\|_X \left\|w\right\|_X.$$

Donc $a(.,.)$ est continue sur $X \times X$.

★ **La coercivité de la forme bilinéaire** $a$ :

On a $a(.,.)$ est coercive sur $X$, si et seulement s'il existe un $\beta > 0$ telque :

$$a(u_1, u_1) \geq \beta \|u_1\|_X^2, \quad \text{pour tout } u_1 \in X.$$

Soit $u_1 \in X$, on a :

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1) &= \int_\Omega (u_1)^2 \, dx + \int_\Omega (\nabla u_1)^2 \, dx \\ &= \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|u_1\|_X^2 \\ &\geq \|u_1\|_X^2 \end{aligned}$$

On prend $\beta = 1$ alors, il exist $\beta > 0$ telle que :

$$a(u_1, u_1) \geq \beta \|u_1\|_X^2.$$

Donc $a(.,.)$ est coercive sur $X$.

★ **La continuité de la forme linéaire** $b$ :

On a $b(.)$ est continue sur $X$, s'iln existe un $\gamma > 0$ telque :

$$|b(w)| \leq \gamma \|w\|_X, \quad \text{pour tout } w \in X.$$

Soit $w \in X$, on a :

$$\begin{aligned} |b(w)| &= \left| \int_\Omega (fw + gw) \, dx \right|, \\ &\leq \int_\Omega |fw| \, dx + \int_\Omega |gw| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} |b(w)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_X + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_X \\ &\leq \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \right) \|w\|_X \end{aligned}$$

On pend $\gamma = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right)$ alors, il existe $\gamma > 0$ telque :

$$|b(w)| \leq \gamma \|w\|_X .$$

Donc $b(.)$ est continue sur $X$.

D'après le théorème de Lax-Milgram il existe une solution unique $u_1 \in X$ telle que :

$$a(u_1, w) = b(w), \quad \forall w \in X.$$

★ **La régularité de la solution**

D'après l'équation $(3.14)$, On a :

$$\int_\Omega u_1 w dx + \int_\Omega \nabla u_1 \nabla w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx.$$

En utilisant une intégration par partie, on obtient :

$$\int_\Omega u_1 w dx - \int_\Omega \triangle u_1 w dx = \int_\Omega (fw + gw)\, dx.$$

Alors

$$\int_\Omega (u_1 - \triangle u_1 - f - g)\, w dx = 0,$$

tel que $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors

$$u_1 - \triangle u_1 - f - g = 0$$

donc

$$u_1 - \triangle u_1 = f + g.$$

Donc, il existe $u \in D(A)$ solution de $(I - A)\, u = (f, g)$ pour tout $(f, g) \in E$, c-à-d $\operatorname{Im}(I - A) = E$ alors $I - A$ est surjectif. Donc $A$ est maximal.

Comme $A$ est dissipatif et maximal alors l'opérateur $A$ est m-dissipatif. Et comme $D(A)$ dense dans $E$. Alors d'après le théorème de Lumer-Phillips $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$- semi groupe.

De théorème (2.2) on arrive à montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.5) qui donnée par :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

tel que $A$ est le générateur infinitésimal d'un $C_0$ -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t\ \geq 0}$.

■

# BIBLIOGRAPHIE


[1] R.Khemis, Cours de l'analyse fonctionnelle, l'université de 20 Aout 1955.

[2] Jean- Pierre Raymond*, équation d'évolution*, Université Paul Sabatier ,6-11.

[3] LUDOVIC DAN LEMLE, *Autour des propriétés des semi-groupe volume 31,* 99-145.

[4] A.pazy, Semigroupe of lineair operators and Applications to partial Differential Equations,Grivat Ram 91904 jerusalem Israel,100-109.

[5] Fanny Dardalhon,FedericoVerga, le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problème d'évolution semi-linéaires mémoire encadré par Florence Hubert 7 juin 2006, 43-59,8.

[6] A.Nouar, Cours de théorie spectral, l'université de 20 Aout 1955.

[7] Haim Brezis, ANALYSE FONCTIONNELLE théorie et applications $2^{ème}$ tirage, MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987, 20 et 116.

[8] Claudia NEGULESCU, Aspect mathématiques cours de master 2, 3.

[9] Eric Dumas et Romain joly, Cours de m2R l'université de Grenoble, 33.