

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Cycles limites d'une classe d'équations différentielles du deuxième ordre

Option : COSD

Par :

Ikram Bariout

Encadré par : **A. Boulfoul**

M.C.A U. SKIKDA

Devant le jury :

Président : A. Lallouche

M.C.B U. SKIKDA

Examineur : N. Debz

M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022

REMERCIEMENT

Mes remerciements vont en premier lieu à **"Allah"** Dieu le tout puissant qui m'a donné la santé, la force et la volonté d'accomplir ce travail.

En second lieu, Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon encadreur **Dr. Boufoul Amel**, pour ses orientations et son enthousiasme envers notre travail, pour son grand soutien scientifique et morale, pour ses précieux conseils qui m'ont permis de ramener bien ce travail.

Je tiens à remercier aux Docteurs **A. Lallouche** et **N. Debz** qui m'ont fait l'honneur d'avoir acceptées la lourde tâche de lire, évaluer et juger ce mémoire.

J'adresse mes remerciements à notre chef département **Mr. L. Bouzettouta** pour sa gentillesse et sa disponibilité pendant notre cycle de l'étude cette année.

Veillez accepter ce travail, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance.

Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse au nombre maximal de cycle limite d'une équation différentielle du deuxième ordre.

Nous utilisons une méthode de perturbation nommée: la Méthode de moyennisation " Averaging Method " pour chercher ce nombre.

Mots-clés: Équation différentielle - Cycle limite - Méthode de moyennisation - Théorème de Descartes.

Abstract

In this research work, we are interested in the maximum number of limit cycles of a second order differential equation.

We will use a perturbation method which is called "Averaging Method" to find this number.

Keywords: Differential equation - Limit cycle - Averaging method - Theorem the Descartes.

ملخص

في هذه الأطروحة، سوف نهتم بالعدد الأقصى لدورات الحد لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية سوف نستعمل نظرية الذبذبة يطلق عليها إسم " نظرية المتوسطة " للعثور على هذا الرقم. الكلمات المفتاحية: معادلة تفاضلية - دورة الحد - طريقة المتوسطة - نظرية ديكرت.

TABLE DES MATIÈRES

1	Notions préliminaires	3
1.1	Équations différentielles	3
1.2	Système d'équations différentielles	3
1.3	Portrait de phase planaire	4
1.4	Solutions périodiques	4
1.5	Cycles limites	5
1.5.1	Classification des cycles limites	5
1.6	Perturbations régulières	7
1.7	Perturbations singulières	7
1.8	Méthode de moyennisation	7
2	Cycles limites de l'équation de Mathieu modifiée	8
2.1	Introduction	8
2.2	Théorie de moyennisation du premier ordre	9
2.2.1	Théorème de Descartes	9
2.3	Étude d'une équation différentielle du deuxième ordre	11
3	Cycles limites d'une équation différentielle du deuxième ordre	19
3.1	Introduction	19
3.2	Théorie de moyennisation du deuxième ordre	19
3.3	Application de la méthode de moyennisation à une autre classe d'équation de Mathieu	21

Conclusion	27
Bibliographie	28

Les équations différentielles sont apparues pour la première fois vers la fin du 17^{ème} siècle dans les travaux d'Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi comme un outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions.

Dans ce travail nous allons utiliser une étude qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes.

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et des cycles limites des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels planaires polynomiaux.

En 1881, Poincaré a défini la notion de cycle limite d'un système différentiel planaire comme une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système différentiel. Et il a défini la notion de centre d'un système différentiel planaire réel, c-à-d d'un point d'équilibre isolé ayant un voisinage remplie d'orbites périodiques [5].

En générale, chercher le nombre de solutions périodiques est un problème difficile et

souvent impossible, ce problème est connu sous le nom de deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert. En utilisant la méthode de moyennisation, on réduit ce problème difficile des équations différentielles non linéaires [7] à la recherche des racines d'un système algébrique. La méthode de moyennisation (Averaging Theory) est utilisée pour déterminer le nombre maximal de cycle limite d'un système différentiel plan polynomial. L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin du 18^{ème} siècle avec les travaux de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'une équation différentielle du second ordre qui s'appelle l'équation de Mathieu [3] modifiée de la forme :

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x = 0; \quad m \in \mathbb{N}.$$

Notre mémoire est structurée en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les généralités des systèmes dynamiques avec un rappel sur les perturbations (régulières et singulières).

Le deuxième chapitre, contient l'étude du nombre maximal de cycle limite d'une équation différentielle du deuxième ordre par la méthode de moyennisation.

Le troisième chapitre, on utilise la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordres pour chercher le nombre maximal de cycle limite d'une autre équation différentielle du deuxième ordre.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre contient un rappel des notions générales qui nous aiderons à comprendre ce mémoire, nous commençons par définir les équations différentielles, système d'équations différentiels, portrait de phase planaire, solutions périodiques. On présente aussi la notion d'un cycle limite et on introduira un rappel sur les perturbations régulières et les perturbations singulières avec un aperçu sur la méthode de moyennisation.

1.1 Équations différentielles

Définition 1.1

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation entre la variable réelle t et une fonction inconnue $t \mapsto y(t)$ et ses dérivées $y', y'', \dots, y^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0. \quad (1.1)$$

1.2 Système d'équations différentielles

Définition 1.2

On appelle système différentiel tout système de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = X'(t) = F(X(t)). \quad (1.2)$$

avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

où f_i sont des fonctions de la variable t définies et continues sur un ouvert E de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^n .

1.3 Portrait de phase planaire

Définition 1.3

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.4)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Le portrait de phase est l'ensemble des orbites qui représentent les solutions du système (1.4) dans l'espace des phases ainsi que ces points critiques qui sont considérés comme des solutions constantes. Le plan (xoy) est appelé plan de phase.

1.4 Solutions périodiques

Définition 1.4

On appelle solution périodique toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (1.4), telle qu'il existe un nombre T , vérifiant :

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x). \quad (1.5)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifié la formule précédente (1.5) est appelé période.

Remarques 1.1

- Toute solution périodique ce correspond à une courbe fermée dans l'espace des phases.

- Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

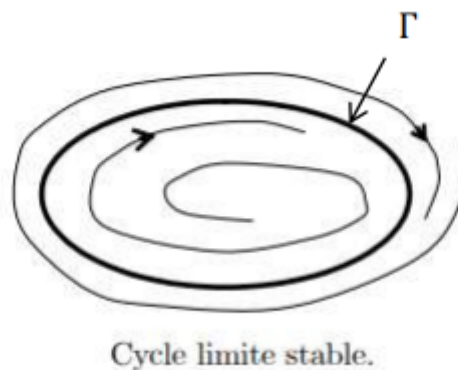
1.5 Cycles limites

Définition 1.5

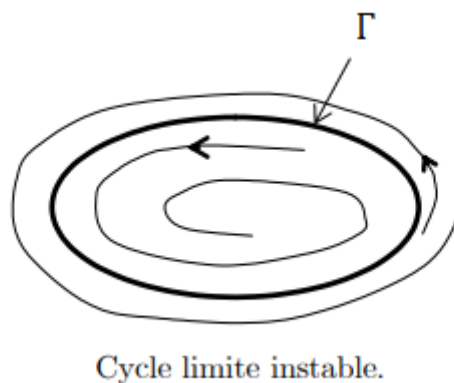
Un cycle limite $\Gamma(t)$ est une orbite périodique isolée. Ceci signifie que les trajectoires proches ne sont pas fermées mais elles spiralent en approchant ou en s'éloignant du cycle limite. De plus aucun point d'équilibre n'est sur $\Gamma(t)$.

1.5.1 Classification des cycles limites

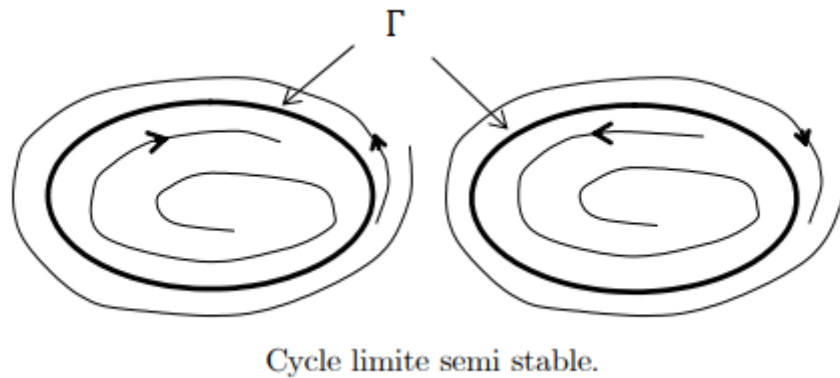
1. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de Γ , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle est stable.



2. Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de Γ pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle est instable.



3. S'il existe dans son voisinage des trajectoires convergentes et d'autres divergentes, le cycle limite est semi-stable.



Exemple 1.1

Soit l'équation différentielle

$$x''^2 + (x^2 + x'^2 - 1)x' + x = 0.$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, l'équation s'écrit :

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - 1)\sin^2 \theta \\ \theta' = -1 - (r^2 - 1)\sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Une solution particulière est donnée par

$$r = 1, \quad \theta = -t,$$

correspond à un cycle limite, $x = \cos t, y = -\sin t$. De plus on a

$$r' > 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$r' < 0, \quad r > 1,$$

alors ce cycle limite est stable.

Remarque 1.2

Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

1.6 Perturbations régulières

Définition 1.6

$\mathcal{P}(u, \varepsilon)$ est un problème régulier (ou problème de perturbation régulière) si sa solution $\mathcal{U}(x, \varepsilon)$ admet une série asymptotique de puissance de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$ et si de plus $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}(x, \varepsilon) = \mathcal{U}_0$ où \mathcal{U}_0 est la solution du problème réduit $\mathcal{P}(u, 0)$.

1.7 Perturbations singulières

Définition 1.7

$\mathcal{P}(u, \varepsilon)$ est un problème singulier (ou problème de perturbation singulière) si sa solution $\mathcal{U}(x, \varepsilon)$ n'admet pas une série asymptotique de puissance de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$ ou bien si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}(x, \varepsilon) \neq \mathcal{U}_0$.

1.8 Méthode de moyennisation

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations singulières utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Son idée de base peut être datée de la fin du 18^{ème} siècle, quand en 1788, Lagrange a formulé le problème des trois corps gravitationnels comme une perturbation du problème à deux corps. Aucune preuve rigoureuse de sa validité a été donnée, jusqu'à ce que Fatou a donné la preuve de la validité asymptotique de la méthode en 1928. Après des recherches systématiques faites par Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky... etc. Dans les années 1930, la méthode de moyennisation devient peu à peu l'une des méthodes classiques qui donne des conditions pour lesquelles les points singulières du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Elle consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome.

CHAPITRE 2

CYCLES LIMITES DE L'ÉQUATION DE MATHIEU

MODIFIÉE

2.1 Introduction

La méthode de moyennisation joue un rôle important dans la recherche des cycles limites des systèmes dynamiques, cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel autonome moyenné.

Le modèle mathématique le plus simple d'un système dynamique excité dépendant d'un paramètre c'est l'équation de Mathieu

$$\ddot{x} + b(1 + \cos t)x = 0.$$

De nombreux auteurs se sont intéressés à étudier l'équation de Mathieu modifiée de cette forme :

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x = 0; \quad m \in N$$

Dans ce chapitre, on va traiter cette équation.

2.2 Théorie de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.1

On considère l'équation différentielle non autonome sous la forme :

$$\chi(r, \theta) = \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + \varepsilon^2 R(r, \theta, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ et $F : D \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $R : D \times S^1(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont des fonctions continues, 2π -périodique par rapport à θ et D est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

La fonction moyennée $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ associée au système (2.1) est définie par :

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta.$$

On rappelle que si $r(r_0, \theta)$ est la solution du champ vectoriel $\chi(r, \theta)$ tel que $r(r_0, 0) = r_0$.

Alors on a

$$r(r_0, 2\pi) - r_0 = \varepsilon f(r) + o(\varepsilon^2).$$

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les racines simples positives de la fonction moyennée $f(r)$ fournissent des cycles limites du champ vectoriel $\chi(r, \theta)$. Pour étudier les racines simples positives de la fonction $f(r)$ on appliquera le théorème de Descartes.

2.2.1 Théorème de Descartes

Considérons le polynôme réel $p(r) = a_{i_1} r^{i_1} + a_{i_2} r^{i_2} + \dots + a_{i_n} r^{i_n}$ avec $0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n$ et $a_{i_j} \neq 0$ constantes réelles pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Quand $a_{i_j} a_{i_{j+1}} < 0$, de dire que a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ ont une variation de signe, si le nombre de variations de signes sur m , alors $p(r)$ a au plus m racines réelles positives.

De plus, il est toujours possible de choisir les coefficients de $p(r)$ de telle sorte que $p(r)$ ait exactement $(n - 1)$ racines réelles positives.

Preuve Voir [2]

Application au théorème 2.1

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(y^3 - y). \end{cases} \quad (2.2)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, le système perturbé (2.2) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (-1 + r^2 \theta) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon (\cos \theta \sin - r^2 (\cos \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin)). \end{cases} \quad (2.3)$$

On sait que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(\varepsilon^3) \text{ si } |x| < 1. \quad (2.4)$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.5)$$

De (2.1) on obtient

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{T} \int_0^T F_1(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (r^2 \cos^2 \theta + 1 - r^2) d\theta \\ &= \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les cycles limites possibles pour l'équation (2.6) sont donnés par les racines positives de l'équation

$$F_{10}(r) = \frac{-1}{8} r (3r^2 - 4) = 0. \quad (2.7)$$

On a

$$F_{10}(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{2}{3} \sqrt{3} > 0,$$

et

$$F'_{10}(r) = \frac{-9}{8}r^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow F'_{10}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème 2.1 le système (2.2) possède un seul cycle limite, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit.

2.3 Étude d'une équation différentielle du deuxième ordre

Dans cette section, on va étudier par la méthode de moyennisation le nombre maximal de cycles limites à partir des solutions périodiques de l'équation suivante [1] :

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x = 0. \quad (2.8)$$

On écrit l'équation sous forme d'un système à deux équations différentielles.

On pose

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \Rightarrow \ddot{x} = \dot{y} \\ \dot{y} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x &= 0. \end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y). \end{cases}$$

Où $Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j$.

On écrit ce système en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; r > 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{xy - xy - \varepsilon y(1 + \cos^m \theta)Q(x, y)}{r} \\ &= \frac{-\varepsilon y(1 + \cos^m \theta) \sum_{i+j=0}^n a_{ij}x^i y^j}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\varepsilon r \sin \theta (1 + \cos^m \theta) \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^i \cos^i \theta r^j \sin^j \theta}{r} \\
 &= -\varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right). \\
 \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} &= \frac{xy' - yx'}{r^2} = \frac{-x^2 - \varepsilon x(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) - y^2}{r^2} \\
 &= -1 - \frac{\varepsilon x(1 + \cos^m \theta) \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j}{r^2} \\
 &= -1 - \frac{\varepsilon r \cos \theta (1 + \cos^m \theta) \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^i \cos^i \theta r^j \sin^j \theta}{r^2} \\
 &= -1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j-1} \left(\cos^{1+i} \theta \sin^j \theta + \cos^{1+m+i} \theta \sin^j \theta \right).
 \end{aligned}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) \\ \dot{\theta} &= -1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j-1} \left(\cos^{1+i} \theta \sin^j \theta + \cos^{1+m+i} \theta \sin^j \theta \right). \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right)}{-1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j-1} \left(\cos^{1+i} \theta \sin^j \theta + \cos^{1+m+i} \theta \sin^j \theta \right)} \\
 &= \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) \\
 &\quad \times \frac{1}{1 + \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j-1} \left(\cos^{1+i} \theta \sin^j \theta + \cos^{1+m+i} \theta \sin^j \theta \right)}
 \end{aligned}$$

D'après le développement de Taylor :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x^2), \quad |x| < 1.$$

En posant $x = \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j-1} \left(\cos^{1+i} \theta \sin^j \theta + \cos^{1+m+i} \theta \sin^j \theta \right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) [1 + o(\varepsilon^2)] \\
 &= \varepsilon \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) + o(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon F(r, \theta) + o(\varepsilon^2) \quad \text{où } 0 < \varepsilon \ll 1.
 \end{aligned}$$

On aura $F(r, \theta) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right)$,
cette expression détermine la fonction moyennée $f(r)$ définie par :

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta.$$

Nous considérons deux cas et quelques sous-cas afin d'étudier la fonction moyennée associée à l'équation différentielle (2.8).

Dans cette étude, nous utiliserons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad & \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^q \theta = 0 \quad \text{Si } (p \text{ ou } q) \text{ est impaire} \\
 \boxed{2} \quad & \int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q} \theta = \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\cdots(p+2)} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta d\theta \\
 \boxed{3} \quad & \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta d\theta = \frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} 2\pi
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

1^{er} cas : Soit m impair

❶ Si n est pair, on a

$$\begin{aligned}
 f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=1}^{n+1} a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i+2q-1=1}^{n+1} a_{i,2q-1} r^{i+2q-1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^i \theta \sin^{2q} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{2q} \theta \right) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+1+2q=3}^{n+1} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+1+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2\ell+2q=2}^n a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \frac{(2\ell+m)!!2\pi}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)!} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell-1)!!2\pi}{2^{\ell} \ell!} \right] \\
 &= \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \frac{(2\ell+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)! (2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \\
 &\quad + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2\ell-1)!!(2q-1)!!}{2^{\ell+q} \ell! (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^n A_k r^k.
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
 A_K &= a_{2\ell+1,2q-1} \frac{(2\ell+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)! (2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \\
 &\quad + a_{2\ell,2q-1} \frac{(2\ell-1)!!(2q-1)!!}{2^{\ell+q} \ell! (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)}.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation (2.8) peut avoir au plus $(n-1)$ cycles limites.

❷ Si n est impair, on a

$$\begin{aligned}
 f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=1}^{n+1} a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i+2q-1=1}^{n+1} a_{i,2q-1} r^{i+2q-1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^i \theta \sin^{2q} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{2q} \theta \right) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+1+2q=3}^n a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+1+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{2\ell+2q=2}^{n+1} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \Bigg] \\
 = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 & \left. + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \frac{(2\ell+m)!!2\pi}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)!} \right. \\
 & \left. + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell-1)!!2\pi}{2^{\ell}!} \right] \\
 = & \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \frac{(2\ell+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)! (2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \\
 & + \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2\ell-1)!!(2q-1)!!}{2^{\ell+q}\ell!(q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \\
 = & \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_k = & a_{2\ell+1,2q-1} \frac{(2\ell+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m+1}{2}} \left(\frac{2\ell+m+1}{2}\right)! (2q+2\ell+1)(2q+2\ell-1)\cdots(2\ell+3)} \\
 & + a_{2\ell,2q-1} \frac{(2\ell-1)!!(2q-1)!!}{2^{\ell+q}\ell!(q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)}.
 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation (2.8) peut avoir au plus $(n-1)$ cycles limites.

2^{ème} cas : Soit m pair

❶ Si n est pair, on a

$$\begin{aligned}
 f_3(r) & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=1}^{n+1} a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i+2q-1=1}^{n+1} a_{i,2q-1} r^{i+2q-1} \int_0^{2\pi} (\cos^i \theta \sin^{2q} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{2q} \theta) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+1+2q=3}^{n+1} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+1+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2\ell+2q=2}^n a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+2q=2}^{\frac{n+1-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2\ell+2q=2}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell-1)!!2\pi}{2^\ell \ell!} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell+m-1)!!2\pi}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2}\right)!} \right) \right] \\
 &= \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \left[\frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} + \frac{(2\ell+m-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2}\right)!} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} B_k r^{2k-1}.
 \end{aligned}$$

Où

$$B_k = a_{2\ell,2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \left[\frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} + \frac{(2\ell+m-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2}\right)!} \right].$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation (2.8) peut avoir au plus $\left(\frac{n-2}{2}\right)$ cycles limites.

② Si n est impair, on a

$$\begin{aligned}
 f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=1}^{n+1} a_{ij} r^{i+j} \left(\cos^i \theta \sin^{1+j} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{1+j} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i+2q-1=1}^{n+1} a_{i,2q-1} r^{i+2q-1} \int_0^{2\pi} \left(\cos^i \theta \sin^{2q} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{2q} \theta \right) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+1+2q=3}^n a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+1+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2\ell+2q=2}^{n+1} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2\ell+2q=2}^{\frac{n-1}{2}} a_{2\ell+1,2q-1} r^{2\ell+2q} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+1+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2\ell+2q=2}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\int_0^{2\pi} \cos^{2\ell} \theta \sin^{2q} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2\ell+m} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \left(\frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell-1)!!2\pi}{2^\ell \ell!} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(2q-1)!!}{(2q+2\ell)(2q+2\ell-2)\cdots(2\ell+2)} \frac{(2\ell+m-1)!!2\pi}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2} \right)!} \right) \right] \\
 &= \sum_{\ell+q=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2\ell,2q-1} r^{2\ell+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \left[\frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} + \frac{(2\ell+m-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2} \right)!} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \tilde{B}_k r^{2k-1}.
 \end{aligned}$$

Où

$$\tilde{B}_k = a_{2\ell, 2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+\ell)(q+\ell-1)\cdots(\ell+1)} \left[\frac{(2\ell-1)!!}{2^\ell \ell!} + \frac{(2\ell+m-1)!!}{2^{\frac{2\ell+m}{2}} \left(\frac{2\ell+m}{2}\right)!} \right].$$

D'après le théorème de Descartes, l'équation (2.8) peut avoir au plus $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ cycles limites.

CHAPITRE 3

CYCLES LIMITES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU DEUXIÈME ORDRE

3.1 Introduction

Ce chapitre est composé de deux parties : dans la première partie nous déterminons le nombre maximal de cycles limites d'un autre type d'équation différentielle du deuxième ordre par la méthode de moyennisation du premier ordre.

Dans la seconde partie nous déterminons le nombre maximal de cycles limites de la même équation différentielle par la méthode de moyennisation du deuxième ordre.

3.2 Théorie de moyennisation du deuxième ordre

Théorème 3.1

Soit le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon). \quad (3.1)$$

Où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t . D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit $F_{10}, F_{20} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (3.2)$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) y_1(s, z) + F_2(s, z)] dz, \quad (3.3)$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, s) dt.$$

Supposons que :

- (i) Pour tout $\forall t \in \mathbb{R}, F_1 \in C^1, F_1, F_2, R$ et $D_x F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x . R est différentiable par rapport à ε .
- (ii) Pour $V \subset D$, un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n , et $\forall \varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que : $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) = 0$, et $\text{Det}(F'_{10} + \varepsilon F'_{20})(a) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T-périodique isolée $\varphi(0, \varepsilon)$ de l'équation (3.1) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \longrightarrow a$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Lemme 3.1

- Si F_{10} n'est pas identiquement nul, alors les racines simples positives de $F_{10} + \varepsilon F_{20}$ sont principalement les racines simples positives de F_{10} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du premier ordre.
- Si F_{10} est identiquement nul et F_{20} n'est pas identiquement nul, alors les racines simples positives de $F_{10} + \varepsilon F_{20}$ sont principalement les racines simples positives de F_{20} pour ε suffisamment petit. Dans ce cas, le résultat précédent fournit la théorie de la moyennée du second ordre.

3.3 Application de la méthode de moyennisation à une autre classe d'équation de Mathieu

1^{ère} ordre

Dans cette partie, nous étudions l'équation différentielle de la forme :

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) + x = 0, \quad (3.4)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) + x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Où } \varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

En passant au coordonnées polaires (r, θ) où :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; r > 0,$$

avec

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \end{cases} \\ \dot{r} &= \frac{xy - xy - \varepsilon y(1 + \sin^m \theta)\varphi(x)}{r} \\ &= \frac{-\varepsilon y(1 + \sin^m \theta) \sum_{i=0}^n a_i x^i}{r} \\ &= -\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta + \sin^{1+m} \theta) \cos^i \theta \\ &= -\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{-x^2 - \varepsilon x(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) - y^2}{r^2} \\
 &= -1 - \frac{\varepsilon x(1 + \sin^m \theta) \sum_{i=0}^n a_i x^i}{r^2} \\
 &= -1 - \frac{\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos \theta + \cos \theta \sin^m \theta) \cos^i \theta}{r} \\
 &= -1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta).
 \end{aligned}$$

Ce système devient :

$$\begin{cases}
 \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta). \\
 \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta).
 \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta)}{-1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta)} \\
 &= \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) \times \frac{1}{1 + \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta)}.
 \end{aligned}$$

D'après le développement de Taylor

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x^2), \quad |x| < 1.$$

En posant $x = \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta)$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) [1 + o(\varepsilon^2)] \\
 &= \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) + o(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon F(r, \theta) + o(\varepsilon^2) \quad \text{telle que } 0 < \varepsilon \ll 1.
 \end{aligned}$$

On aura $F(r, \theta) = \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta)$.

Nous utilisons les formules (2.9) du chapitre 2.

Nous considérons un seul cas.

Soit m impair, on a

$$\begin{aligned}
 f_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^n a_i r^i \int_0^{2\pi} (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2i+1=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+1} \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^{2i+1} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^{1+m} \theta \cos^{2i+1} \theta d\theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i} \left(\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos^{2i} \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^{1+m} \theta \cos^{2i} \theta d\theta \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i} \int_0^{2\pi} \sin^{1+m} \theta \cos^{2i} \theta d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2i)(2q+2i-2)\cdots(2i+2)} \frac{(2i-1)!! 2\pi}{2^i i!} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i} \frac{(2i-1)!! (2q-1)!!}{2^{q+i} i! (q+i)(q+i-1)\cdots(i+1)} \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} G_i r^{2i}.
 \end{aligned}$$

Où $G_i = a_{2i} \frac{(2i-1)!! (2q-1)!!}{2^{q+i} i! (q+i)(q+i-1)\cdots(i+1)}$.

D'après le théorème de Descartes, l'équation (3.4) peut avoir au plus $\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$ cycles limites.

2^{ème} ordre

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) + \varepsilon^2(1 + \sin^m \theta)P(x) + x = 0. \quad (3.5)$$

Où

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ P(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j. \end{cases}$$

On écrit cette équation sous forme d'un système à deux équations différentielles.

On pose

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \dot{y} \\ \dot{y} + \varepsilon(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) + \varepsilon^2(1 + \sin^m \theta)P(x) + x &= 0.\end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) - \varepsilon^2(1 + \sin^m \theta)P(x). \end{cases}$$

On écrit ce système en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} ; r > 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{xy - xy - \varepsilon y(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) - \varepsilon^2 y(1 + \sin^m \theta)P(x)}{r} \\ &= \frac{-\varepsilon y(1 + \sin^m \theta) \sum_{i=0}^n a_i x^i - \varepsilon^2 y(1 + \sin^m \theta) \sum_{j=0}^n b_j x^j}{r} \\ &= \frac{-\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta \cdot r \sin \theta (1 + \sin^m \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j \cos^j \theta \cdot r \sin \theta (1 + \sin^m \theta)}{r} \\ &= -\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j (\sin \theta \cos^j \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^j \theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{-x^2 - \varepsilon x(1 + \sin^m \theta)\varphi(x) - \varepsilon^2 x(1 + \sin^m \theta)P(x) - y^2}{r^2} \\ &= -1 - \frac{\varepsilon x(1 + \sin^m \theta) \sum_{i=0}^n a_i x^i + \varepsilon^2 x(1 + \sin^m \theta) \sum_{j=0}^n b_j x^j}{r^2} \\ &= -1 - \frac{\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i \cos^i \theta r \cos \theta (1 + \sin^m \theta) + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j \cos^j \theta r \cos \theta (1 + \sin^m \theta)}{r^2} \\ &= -1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{1+j} \theta + \cos^{1+j} \theta \sin^m \theta).\end{aligned}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\sin \theta \cos^i \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^i \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j (\sin \theta \cos^j \theta + \sin^{1+m} \theta \cos^j \theta) . \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{1+j} \theta + \cos^{1+j} \theta \sin^m \theta) . \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{-\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta)}{-1 - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta) - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{1+j} \theta + \cos^{1+j} \theta \sin^m \theta)} \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta) \\ &\quad \times \left[1 - \left(\varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{1+i} \theta + \cos^{1+i} \theta \sin^m \theta) + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{1+j} \theta + \cos^{1+j} \theta \sin^m \theta) \right) \right] \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta) \\ &\quad - \varepsilon^2 \left[\sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) \times \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{i+1} \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^m \theta) \right] \\ &\quad - \varepsilon^3 \left[\sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) \times \sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{j+1} \theta + \cos^{j+1} \theta \sin^m \theta) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta) \times \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{i+1} \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^m \theta) \right] \\ &\quad - \varepsilon^4 \left[\sum_{j=0}^n b_j r^{j-1} (\cos^{j+1} \theta + \cos^{j+1} \theta \sin^m \theta) \times \sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta) \right] + o(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

Le système (3) est de la forme.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \left[\sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) \right] \varepsilon \\ &\quad + \left[\sum_{j=0}^n b_j r^j (\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^n a_i r^i (\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta) \times \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} (\cos^{i+1} \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^m \theta) \right] \varepsilon^2 + o(\varepsilon^3) \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + \varepsilon^3 R(t, r, \theta), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 F_1(r, \theta) &= \sum_{i=0}^n a_i r^i \left(\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta \right) \\
 F_2(r, \theta) &= \sum_{j=0}^n b_j r^j \left(\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta \right) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^n a_i r^i \left(\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta \right) \times \sum_{i=0}^n a_i r^{i-1} \left(\cos^{i+1} \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^m \theta \right).
 \end{aligned}$$

Donc nous allons appliqués le Théorème 3.1.

Pour passer au second ordre, il faut que $F_{10} \equiv 0$ ceci est équivalent $a_{2i} = 0 \quad \forall i$.

D'abord on calcule :

$$D_r F_1(\theta, r) \text{ et } y_1(\theta, r).$$

$$\text{On a } F_1(\theta, r) = \sum_{i=0}^n a_i r^i \left(\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta \right)$$

$$\begin{aligned}
 D_r F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^n i a_i r^{i-1} \left(\cos^i \theta \sin \theta + \cos^i \theta \sin^{1+m} \theta \right) \\
 D_r F_1(\theta, r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i+1) a_{2i+1} r^{2i} \left(\cos^{2i+1} \theta \sin \theta + \cos^{2i+1} \theta \sin^{1+m} \theta \right), \quad a_{2i} = 0 \quad \forall i.
 \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
 y_1(\theta, r) &= \int_0^\theta \sum_{i=0}^n a_i r^i \left(\cos^i s \sin s + \cos^i s \sin^{1+m} s \right) ds \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+1} \left[\int_0^\theta \cos^{2i+1} s \sin s ds + \int_0^\theta \cos^{2i+1} s \sin^{1+m} s ds \right], \quad a_{2i} = 0 \quad \forall i \\
 &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+1} \left[\frac{1 - \cos^{2i+2} \theta}{2i+2} + \sum_{k=0}^i C_n^k \frac{\sin^{2+m+k} \theta}{2+m+k} \right].
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous déterminons la fonction F_{20}

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} (D_r F_1(\theta, r) y_1(\theta, r) + F_2(\theta, r)) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i+1) a_{2i+1} r^{2i} \left(\cos^{2i+1} \theta \sin \theta + \cos^{2i+1} \theta \sin^{1+m} \theta \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2\ell+1} r^{2\ell+1} \left(\frac{1 - \cos^{2\ell+2} \theta}{2\ell+2} + \sum_{k=0}^i C_n^k \frac{\sin^{2+m+k} \theta}{2+m+k} \right) \right] d\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=0}^n b_j r^j \left(\cos^j \theta \sin \theta + \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta \right) \right. \\
 & - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+1} \left(\cos^{2i+1} \theta \sin \theta + \cos^{2i+1} \theta \sin^{1+m} \theta \right) \\
 & \left. \times \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2\ell+1} r^{2\ell} \left(\cos^{2\ell+2} \theta + \cos^{2\ell+2} \theta \sin^m \theta \right) \right] d\theta \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (2i+1) a_{2i+1} a_{2\ell+1} r^{2i+2\ell+1} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\ell+2} \left(\cos^{2i+1} \theta \left(\sin \theta + \sin^{1+m} \theta \right) \right. \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left. \cos^{2i+2\ell+3} \theta \left(\sin \theta + \sin^{1+m} \theta \right) \right) d\theta \right) \right. \\
 & + \sum_{k=0}^i C_n^k \frac{1}{2+m+k} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+1} \theta \left(\sin^{m+k+3} \theta + \sin^{2m+k+3} \theta \right) d\theta \\
 & + \sum_{j=0}^n b_j r^j \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \left(\sin \theta + \sin^{1+m} \theta \right) d\theta \\
 & \left. - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} a_{2\ell+1} r^{2i+2\ell+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2\ell+3} \theta \left(\sin \theta + 2 \sin^{m+1} \theta + \sin^{2m+1} \theta \right) d\theta \right].
 \end{aligned}$$

Nous utilisons les formules (2.9) du chapitre 2.

Nous considérons un seul cas.

Soit m impair, on a

$$\begin{aligned}
 F_{20}(r) & = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=0}^n b_j r^j \int_0^{2\pi} \cos^j \theta \sin^{1+m} \theta d\theta \right] \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2j} r^{2j} \int_0^{2\pi} \cos^{2j} \theta \sin^{1+m} \theta d\theta \right] \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2j} r^{2j} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2j)(2q+2j-2)\cdots(2j+2)} \frac{(2j-1)!! 2\pi}{2^j j!} \right] \\
 & = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{2j} r^{2j} \frac{(2j-1)!! (2q-1)!!}{2^{q+j} j! (q+j)(q+j-1)\cdots(j+1)} \\
 & = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} F_j r^{2j}.
 \end{aligned}$$

Où $F_j = b_{2j} \frac{(2j-1)!! (2q-1)!!}{2^{q+j} j! (q+j)(q+j-1)\cdots(j+1)}$.

D'après le théorème de Descartes, l'équation (3.5) peut avoir au plus $\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right)$ cycles limites.

CONCLUSION

Ce mémoire porte sur un aspect important de l'étude qualitative des systèmes différentielles planaires, à savoir les cycles limites. Ceci est justement fait l'objet de la deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert.

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode de moyennisation du premier ordre pour chercher le nombre maximal de cycles limites d'une équation différentielle du deuxième ordre.

Nous avons aussi la méthode de moyennisation du premier et deuxième ordres pour une autre classe d'équations différentielles du deuxième ordre.

- [1] T. Chen, J. Llibre, *Limit cycles of a second-order differential equation*, Applied Mathematics Letters 88 (2019) 111-117.
- [2] J. Llibre, R. Moeckel, C. Simó, *Central Configuration Periodic Orbits and Hamiltonian Systems*, in : Advanced courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser, 2015.
- [3] É. Mathieu, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, J. Math. Pures Appl.13 (1868) 137-203.
- [4] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer.
- [5] L.S. Pontrjagin, *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen*, Phys. Z. Sowjetunion 6 (1934) 25-28.
- [6] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, 1991.
- [7] M. Zamora, *A note on the periodic solutions of a Mathieu-Duffing type equations*, Math. Nachr. 290 (2017) 1113-1118.