

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلية العلوم

قسم الرياضيات

N° : U.S/F.S/D.M/...../2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Etude mathématique d'un système de type Timoshenko

Option : ANEDP

Par :

Lekhel Nesrine & Bettien Hassina

Encadré par : F.Saci

M.C.B Univ. SKIKDA

Devant le jury :

Président : H. Atoui

Examineur : A. Lakhdari

M.C.B U. SKIKDA

M.C.A ESTI ANNABA

Année : 2021/2022

REMERCIEMENTS:

Tout d'abord, nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience de mener à bien notre Master.

Nous tiendrons à exprimer notre profonde gratitude et sincères remerciements à Mr **Fateh saci**, qui nous a encadrée, tout au long de ce mémoire de fin d'études.

On le remercie vivement pour sa précieuse présence assistance, disponibilité et hospitalité.

Nous adressons tout particulièrement nos remerciements aux Membres de jury Mr **Halim Atoui & A.Lakhdari**.

Enfin, nous remercions chaleureusement l'ensemble de nos enseignants au département de Mathématiques, qui nous'ont accompagnés et oriente durant notre cursus de formation.

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة إلى نبي الرحمة و نور العالمين سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم

إلى نبع الحنان و مرسى الأمان إلى صاحبة القلب ناصع البياض أمي الحبيبة

إلى من حصد الأشواك على دربي إلى من أحمل أسهمه بكل شر أبي العزيز

إلى سندي و ملاذي جد الله و والدي أختي مريم و مريم و أخي جمال

إلى بنات أختي يارا و ديمه و ابن أخي مرسيه

إلى من جعلتهم الحياة أختي و أخوتي إلى كل من و سعتهم ذاكرتي و ملأ تسعهم مذكرتي إلى من

سأفقدهم ... و أتمنى أن يفقدوني قسم الرياضيات أساتذة و طلابا.

نسرهن لكل

إهداء

قال تعالى : قل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك و لا يطيب النهار إلا بطاعتك و لا تطيب اللحظات
إلا بذكرك .. و لا تطيب الآخرة إلا بجاورك .. و لا تطيب الجنة إلا برفيتك

الله جل جلاله

إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة .. و نصح الأمة .. إلى نبي الرحمة و نور العالمين
سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم

إلى النبيوع الذي لا يمل من العطا إلى من حاكت سعادتني بخيوط منسوجة من قلبها
إلى من سعت و شقت لأعمى بالراحة و الهنا إلى التي لم تبخل بشي من أجل دفعي في
طريق النجاح إلى من علمتني ان أمرتني سلم الحياة بحكمة و صبر إلى و اللذي العزيزة

إلى من يذكرهم القلب قبل أن يتكلم القلم، إلى من قاسموني حلوة الحياة اخواتي
واخواتي سماح، روفية، مهدي، حمزة، سلسبيل واولادهم احمد الخليل، يحي بايزيد

إلى رفيق دربي و سندي إلى شريك الحياة و جلع الثبات د. عبد العالي

إلى كل من لم يذكرهم قلبي، أقول لهم جلدتكم و لم يبعد عن القلب حنكم، وأنتم في

الفواد حضور

حسنة بطين

Résumé

Dans ce travail on présente une étude d'un système hyperbolique de type Timoshenko, dont on discute une étude mathématique concernant l'existence et l'unicité de la solution, ainsi que la méthode des multiplicateurs afin d'aboutir un résultat de stabilité.

Mots-clés : Mécanique appliquée, Thermoélasticité, Système de Timoshenko, Stabilité exponentielle.

Abstract

In this work we consider a Timoshenko type system, for which we prove the existence and uniqueness of the solution. Furthermore, the multiplier method was used in order to establish a result on the exponential stability of the energy.

Key-words : Applied mechanics, Thermoelasticity, Timoshenko system, Exponential stability.

ملخص

في هذا العمل نقدم دراسة لجملة معادلات تيموشينكو التي تمثل مجموعة من المعادلات الزائدية، حيث نقوم بدراسة رياضية حول وجود ووحدانية الحل، وللحصول على مبرهنة لاستقرار الأسي للطاقة، نقدم دراسة تحليلية لطريقة المضاعفات.

الكلمات المفتاحية: الإستقرار الأسي، جملة معادلات تيموشينكو، الميكانيكا التطبيقية، مسائل الحرارة و التمدد.

TABLE DES MATIÈRES

1	Notions fonctionnelles	4
1.1	Espace de Sobolev	5
1.1.1	Les espaces $L^p(\Omega)$	5
1.1.2	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ et H^m	5
1.2	Rappel de quelques inégalités	7
1.3	Quelques notions sur les opérateurs	9
1.4	Rappels sur la théorie des semi-groupes	10
1.4.1	Théorème de Lumer-Phillips	12
1.5	Stabilité	12
2	Existence et l'unicité de la solution	15
2.1	Modélisation mathématique	16
2.2	Existence et unicité de la solution	18
3	La stabilisation	22
3.1	Introduction	23
3.2	Energie du système	24
3.3	Stabilité exponentielle	25

3.4 Stabilité polynomiale	32
Bibliographie	35

INTRODUCTION

Une modélisation mathématique décrivant la vibration transversale d'une poutre a été publié avant tout un siècle, et précisément en 1921, ce modèle issu de la mécanique appliquée est gouverné par les équations du système suivant :

$$\begin{cases} \rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t) & (0.1) \\ \rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t) & (0.2) \end{cases}$$

où

t et x désignent respectivement le temps et la distance le long de la ligne moyenne de la poutre dans son état d'équilibre. La fonction φ signifie le déplacement transversal de la poutre, et la fonction ψ représente la rotation des fibres verticales de la poutre (l'angle de rotation du filament de la poutre), ρ est la densité de la masse du matériau. De plus, les notations M , S , A et I représente respectivement, le moment de flexion, la force de cisaillement, l'aire de la section transversale, et le second moment de la section transversale de la poutre.

Il est à noter qu'une poutre désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses, et que le système de Timoshenko est un cas particulier de celui

de Bresse en négligeant le déplacement longitudinal et certaines constantes. En outre, Les relations contrainte-déformation pour le comportement élastique de la poutre sont données par :

$$\begin{cases} M(x, t) = EI\psi_x(x, t) & (0.3) \\ S(x, t) = KAG(\varphi_x + \psi)(x, t) & (0.4) \end{cases}$$

où E représente le module de Young, G le module de rigidité, et K le facteur de forme (cisaillement).

En prenant en compte le couplage des équations (0.1)-(0.2) et (0.3)-(0.4), Timoshenko [14] a établi les équations aux dérivées partielles suivantes pour les vibrations mécaniques dans le plan de la poutre sans la présence de n'importe quel mécanisme dissipatif

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - K(\phi_x + \psi) = 0 & (0.5) \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + K(\phi_x + \psi) = 0 & (0.6) \end{cases}$$

en posant $\rho_1 = \rho A$, $K = KGA$, $\rho_2 = \rho l$ et $b = EI$. La stabilité des systèmes de type Timoshenko dans des domaines bornés a reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et plusieurs de résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique de l'énergie ont été établis. Généralement, trois types de mécanismes dissipatifs ont été considérés :

- (a) La dissipation par frottement, obtenue en introduisant un amortissement par frottement qui peut agir sur la frontière ou dans un voisinage de la frontière.
- (b) La dissipation thermique, qui est obtenue par la condition de la chaleur en considérant la loi de Fourier ou celle de Cattaneo.
- (c) La dissipation viscoélastique donnée par les effets de mémoires.

Dans le premier chapitre de ce travail on donne quelques notions et outils fondamentaux tels que les espaces, les théorèmes et les inégalités qu'on aura besoin dans les différentes études ultérieures.

Ensuite, le second chapitre est consacré à l'étude d'un système d'équations hyperbolique de type Timoshenko dont l'objectif est de prouver le caractère bien posé du problème.

Finalement, dans le troisième chapitre, on applique la méthode des multiplicateurs afin de prouver la stabilité exponentielle du problème de Timoshenko suivant

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, T) & (0.7) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, T) & (0.8) \end{cases}$$

avec les conditions initiales est les conditions aux bords

$$\begin{aligned} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0 \\ \varphi(., 0) = \varphi_0; \varphi_t(., 0) = \varphi_1, \psi(., 0) = \psi_0, \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L) \end{aligned}$$

CHAPITRE

1

NOTIONS FONCTIONNELLES

Contents

1.1	Espace de Sobolev	5
1.1.1	Les espaces $L^p(\Omega)$	5
1.1.2	Les espaces de Sobolev $W^{m,p}$ et H^m	5
1.2	Rappel de quelques inégalités	7
1.3	Quelques notions sur les opérateurs	9
1.4	Rappels sur la théorie des semi-groupes	10
1.4.1	Théorème de Lumer-Phillips	12
1.5	Stabilité	12

Dans ce chapitre nous rappelons quelques espaces fonctionnelles \mathbf{W}^p et certaines inégalités dans ces espaces qu'on utilisera ultérieurement. De plus, nous donnons brièvement quelques définitions et théorèmes très utiles pour la suite de ce travail. Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

1.1 Espace de Sobolev

1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables telles que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ si } 1 \leq p < +\infty \text{ et } \sup |f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty\}$$

Théorème 1.1.1. *Les espaces $L^p(\Omega)$, munis des normes suivantes*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p \leq +\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^\infty} = \sup_{\Omega} |f(x)|$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1.1. *Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

1.1.2 Les espaces de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}$ et H^m

Définition 1.1.2. *Étant donné un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p \leq \infty$, on définit par récurrence l'espace :*

$$\mathbf{W}^{m,p}(I) = \{u \in \mathbf{W}^{m-1,p}(I), \quad u' \in \mathbf{W}^{m-1,p}(I)\}.$$

On pose :

$$H^m(I) = \mathbf{W}^{m,2}(I).$$

On vérifie aisément que $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}(\mathbf{I})$ si et seulement s'ils existe m fonctions $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m \in L^p(\mathbf{I})$ telles que :

$$\int \mathbf{u} D^j \varphi = (-1)^j \int \mathbf{g}_j \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbf{I}), \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

où $D^j \varphi$ désigne la dérivée à l'ordre j de φ , lorsque $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,p}(\mathbf{I})$, on peut donc considérer les dérivées successives $\mathbf{u}' = \mathbf{g}_1, (\mathbf{u}')' = \mathbf{g}_2, \dots$ jusqu'à l'ordre m , on les note $D\mathbf{u}, D^2\mathbf{u}, \dots, D^m\mathbf{u}$. l'espace $\mathbf{W}^{m,p}$ est muni de la norme :

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{W}^{m,p}} = \| \mathbf{u} \|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \| D^\alpha \mathbf{u} \|_{L^p} .$$

et l'espace \mathbf{H}^m est muni du produit scalaire :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v}).$$

Théorème 1.1.2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $m \in \mathbb{N}$. L'espace $\mathbf{H}^m(\Omega)$ muni du produit scalaire précédent est un espace de Hilbert séparable.

Dans le cas où $m = 1$ on utilise la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ tel que } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega \right\} .$$

On note généralement par \mathbf{H} un espace de Hilbert, et par \mathbf{H}' son dual.

Théorème 1.1.3. (*Lax-Milgram [9]*) Soit $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in \mathbf{H}'$ il existe $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \varphi, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}$$

de plus, si a est symétrique, alors \mathbf{u} est caractérisée par la propriété

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H} \text{ et } \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \varphi, \mathbf{u} \rangle = \text{Min} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \varphi, \mathbf{v} \rangle \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H} .$$

1.2 Rappel de quelques inégalités

Dans cette section, nous allons donner une série d'inégalités importantes qui sont d'une grande utilité dans la suite de ce travail.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Lemme 1.2.1. [5] Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) , alors

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$$

Inégalité de Poincaré

Lemme 1.2.2. [5] Supposons que I est un intervalle borné, alors il existe une constant C (dépendant de $|I| < \infty$) telle que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(I)} \leq C \|\mathbf{u}'\|_{L^p(I)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(I)$$

Autrement dit, sur $\mathbf{W}_0^{1,p}$ la quantité $\|\cdot\|_{L^p(I)}$ est une norme équivalente à la norme de $\mathbf{W}^{1,p}$.

Remarque 1.2.1. L'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie de son domaine de définition. En fait, ces estimations sont d'une grande importance pour le calcul des variations.

Inégalité de Young

Théorème 1.2.1. [5] Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \geq 0$ et \mathbf{p}, \mathbf{q} deux nombres réels conjugués dans l'intervalle $]1, \infty[$, c'est à dire $\frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}} = 1$, alors pour tout $\eta > 0$

$$\mathbf{ab} \leq \eta \mathbf{a}^{\mathbf{p}} + C_{\eta} \mathbf{b}^{\mathbf{q}},$$

$$\text{où } C_{\eta} = \frac{1}{\mathbf{q}(\eta \mathbf{p})^{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}}}.$$

Remarque 1.2.2. pour $\mathbf{p} = \mathbf{q} = 2, 1$ l'inégalité précédente s'écrit sous la forme suivante

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}.$$

Inégalité de Hölder

Lemme 1.2.3. [5] Soient \mathbf{p} et \mathbf{q} deux nombres réels conjugués appartenant à $]1, +\infty[$.

Alors, pour tous $\mathbf{f} \in L^{\mathbf{p}}(\Omega)$ et $\mathbf{g} \in L^{\mathbf{q}}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \left(\int_{\Omega} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^{\mathbf{p}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}} \left(\int_{\Omega} |\mathbf{g}(\mathbf{x})|^{\mathbf{q}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{\mathbf{q}}}$$

Remarque 1.2.3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas où $\mathbf{p} = 2$ et $\mathbf{q} = 2$.

Inégalités intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales largement utilisées dans la stabilisation des systèmes d'évolution dissipatifs et aussi non dissipatifs. En effet, plusieurs résultats concernant l'estimation de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur les lemmes suivants :

Lemme 1.2.4. [13] Soient $\mathbf{E} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et

$\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :

$\phi(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$. Supposant qu'il existe $\mathbf{p} \geq 0$ et $\mathbf{d} > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) \mathbf{E}^{p+1} dt \leq \frac{1}{\mathbf{d}} \mathbf{E}^{\mathbf{p}}(0) \mathbf{E}(s), \quad \forall s > 0.$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}(t) \leq \mathbf{E}(0) e^{1-d\phi(t)}, \quad \forall t > 0 \text{ si } \mathbf{p} = 0 \\ \mathbf{E}(t) \leq \mathbf{E}(0) \left(\frac{1 + \mathbf{p}}{1 + \mathbf{p}d\phi(t)} \right)^{\frac{1}{\mathbf{p}}}, \quad \forall t > 0 \text{ si } \mathbf{p} > 0, \end{array} \right.$$

dans le cas particulier où $\phi(t) = t$ on déduit les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } E(t) &\leq E(0)e^{1-dt}, \quad \forall t > 0, \text{ si } p = 0 \\ \text{b) } E(t) &\leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0, \text{ si } p > 0, \end{aligned}$$

appelées respectivement, estimation exponentielle [8] et estimation polynomiale[10].

Lemme 1.2.5 (8). Soit $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue (décroissante) vérifiant

$$\int_s^{+\infty} \phi(E(t))dt \leq \frac{1}{d}E(s), \quad \forall s > 0,$$

où d est un réel strictement positif et $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\phi(0) = 0$. Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que

$$E(t) \leq \phi^{-1} \left(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t} \right), \quad \forall t > t_0,$$

où $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\phi(t)} dt, \quad \forall s > 0.$$

1.3 Quelques notions sur les opérateurs

Définition 1.3.1 (4). un opérateur linéaire sur un espace X est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans X , ($D(A)$ s'appelle le domaine de l'opérateur A).

Définition 1.3.2 (4). Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur non borné sur H de domaine $D(A)$.

On dit que A est monotone (ou accréatif) si

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in D(A),$$

A est dissipatif si

$$\langle Au, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A),$$

on dit que \mathbf{A} est **maximal monotone** si de plus

$$\text{Im}(\text{Id} + \mathbf{A}) = \mathbf{H}$$

ce qui veut dire

$$\forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}, \exists \mathbf{u} \in D(\mathbf{A}) : \mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

Proposition 1.3.1. *Soit A un opérateur monotone maximal, alors*

1. $D(\mathbf{A})$ est dense en \mathbf{H} ,
2. A est un opérateur fermé,
3. Pour chaque $\lambda > 0$, $(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})$ est bijective de $D(\mathbf{A})$ sur \mathbf{H} , et l'opérateur $(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})^{-1}$ est borné avec $\|(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \leq 1$.

Définition 1.3.3. *Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit A un opérateur linéaire de $D(A)$, sous-espace vectoriel de \mathbf{H} , \mathbf{A} est maximal monotone ssi*

- (1) Pour tout x dans $D(A)$, $\langle \mathbf{A}x, x \rangle \geq 0$
- (2) $I+A$ est surjectif de $D(A)$ sur H .

Définition 1.3.4. *Soit $A : D(A) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ un opérateur linéaire non-borné.*

On dit que A est dissipatif si

$$\langle \mathbf{A}v, v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in D(\mathbf{A}),$$

A est maximal $I_m(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{H}$ c'est à dire

$$\forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}, \exists \mathbf{u} \in D(\mathbf{A}) \text{ tel que } \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

1.4 Rappels sur la théorie des semi-groupes

Soit \mathbf{H} un espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée $\|\cdot\|$, et soit $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ un opérateur linéaire non-borné.

Définition 1.4.1. *Une famille $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus est dite semi-groupe fortement continu (ou \mathbf{C}_0 - semi-groupe) sur H si elle satisfait les propriétés suivantes :*

- i) $S(0) = Id$,
- ii) $S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0$,
- iii) Pour chaque $x \in H$, $S(\cdot)x$ est continue sur $[0, +\infty[$. i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0.$$

Définition 1.4.2. un semi groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ est dit :

- Uniformément exponentiellement stable s'il existe $\epsilon > 0$ telle que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\epsilon t} \|T(t)\| = 0.$$

- Uniformement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0.$$

- Fortement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0 \quad x \in X.$$

- Faiblement stable si :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle T(t)x, x' \rangle = 0 \quad x \in X \quad x' \in X'.$$

Théorème 1.4.1. (Hille-Yosida) Un opérateur linéaire (non borné) A est générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction $T(t), t \geq 0$ si et seulement si :

1. A est fermé et $D(\bar{A}) = X$.
2. l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ et por tout $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Il est á noter que le théorème de hille-Yosida est un théorème abstrait de la théorie des opérateurs linéaire qui permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème d'évolution.

Il est à souligner qu'on peut encore interpréter ce théorème comme suit

Théorème 1.4.2. (Hille-Yosida) *Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction*

$$u \in C^1([0, +\infty]; H) \cap C([0, +\infty]; D(A)),$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & (\text{donnée initiale}). \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

1.4.1 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.4.3. [10] *Soit $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ un opérateur linéaire défini sur un sous-espace linéaire $D(A)$ de l'espace de Banach X , et $D(A)$ domaine dense dans X , alors A génère un C_0 semi-groupe de contractions sur X si et seulement si*

- (i) A est dissipatif.
- (ii) il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda I - A$ est surjectif

Remarque 1.4.1. *la deuxième condition du théorème de Lumer-Phillips veut dire que l'opérateur A est maximal.*

1.5 Stabilité

Présentons d'abord les concepts de base de stabilité

Définition 1.5.1. [14] *(système autonomes et non autonomes) Le système non linéaire*

$$x = f(x, t)$$

est dit autonome si \mathbf{f} ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire si l'équation d'état du système peut s'écrire $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sinon, le système est appelé non autonome.

Définition 1.5.2. Un état \mathbf{x}^* est un état d'équilibre (ou point d'équilibre) du système si une fois que $\mathbf{x}(t)$ est égal à \mathbf{x}^* , il reste à \mathbf{x}^* pour tout le temps future. Mathématiquement, cela signifie que le vecteur constant \mathbf{x}^* satisfait $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ les point d'équilibre peuvent être trouvés en résolvant les équations algébriques non linéaires.

Définition 1.5.3. [8] (Stabilité au sens de Lyapunov) Le point d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est

— Stable si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il ya $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

— Instable s'il n'est pas stable.

— asymptotique stable s'il est stable et of put être choisi tel que.

$$\|\mathbf{x}(0)\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Définition 1.5.4. [14] (stabilité exponentiel) Un point d'équilibre $\mathbf{0}$ est exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α et λ tel que

$$\forall t > 0, \quad \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}.$$

Notez que la stabilité exponentielle implique une stabilité asymptotique. Mais la stabilité asymptotique ne garantit pas une stabilité exponentielle.

Définition 1.5.5. [14] A une fonction continue scalaire $v(\mathbf{x})$ est dite localement définie positive si $v(\mathbf{0}) = 0$ et dans une boule B_{R_0}

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow v(\mathbf{x}) > 0,$$

si $v(\mathbf{0}) = 0$ et que la propriété ci-dessus s'applique à tout l'espace d'état, alors $v(\mathbf{x})$ est dit globalement positif défini.

Définition 1.5.6. [8] Soit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un point d'équilibre et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$V(\mathbf{0}) = 0 \text{ et } V(\mathbf{x}) > 0 \text{ dans } D - \{\mathbf{0}\}.$$

$$V(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ dans } D.$$

Alors, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est stable, de plus si

$$V'(\mathbf{x}) < 0 \text{ dans } D - \{\mathbf{0}\},$$

alors $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est asymptotiquement stable.

CHAPITRE

2

EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION

Contents

2.1	Modélisation mathématique	16
2.2	Existence et unicité de la solution	18

2.1 Modélisation mathématique

Dans cette section on introduit un préambule mécanique contenant un petit aperçu sur la théorie de la thermoélasticité classique, où on présente une modélisation mathématique d'un phénomène issu de la mécanique qui est gouverné par le système de Timoshenko. Ce dernier s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps solides élastiques et vice-versa, où les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques, mais également des variations de la température. Les processus thermoélastiques ne sont pas totalement réversibles. Si la partie élastique peut être récupérée, attendu que les déformations causées par la chaleur sont réversibles théoriquement (par refroidissement), la partie thermique peut être perdue à jamais. De point de vue physique ce phénomène caractérise la dissipation d'énergie durant les transferts thermiques, où la chaleur se diffuse des zones les plus chaudes aux zones les plus froides de sorte qu'il faut une intervention externe pour ramener le système à ses conditions thermiques initiales (état initial).

La formulation des équations décrivant le comportement thermoélastique d'un corps élastique thermiquement conducteur est très compliquée, car elle fait appel à beaucoup de lois, principes et caractéristiques physiques du matériau. En générale, dans la modélisation mathématique des phénomènes issus de la mécanique appliquée, et plus précisément de la thermoélasticité, il existe deux grandes approches selon le phénomène même, la première est classique où elle fait intervenir la loi de Fourier. L'équation de conservation de la quantité de mouvement qui décrit les déformations du corps et l'équation de conservation de l'énergie s'écrivent comme suit

$$\rho \mathbf{u}_{tt} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{f} \quad (2.1)$$

et

$$\mathbf{e}_t = \operatorname{tr}(\mathbf{S} \mathbf{F}_t) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{g} \quad (2.2)$$

ou

ρ la densité,

\mathbf{S} le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff,

\mathbf{e} l'énergie interne,

$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$ le tenseur de gradient de déformation,

\mathbf{q} le flux de chaleur,

\mathbf{f} la force externe du corps,

\mathbf{g} l'apport de chaleur externe.

Notons l'entropie par η et par

$$\psi = e - (\theta + T_0)\eta \quad (2.3)$$

l'énergie libre de Helmholtz

Dans ce cas classique on suppose que ψ , \mathbf{S} , η sont des fonctions de $(\nabla \mathbf{u}, \theta)$, c'est à dire :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla \mathbf{u})}(\nabla \mathbf{u}, \theta), \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial (\theta)}(\nabla \mathbf{u}, \theta) \quad (2.4)$$

et \mathbf{q} depend de $(\nabla \mathbf{u}, \theta, \nabla \theta)$

$$\mathbf{q}(\nabla \mathbf{u}, \theta, \nabla \theta) \leq \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

où lexemple adéquat est la loi de Fourier

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \nabla \theta, \quad (2.6)$$

avec $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\nabla \mathbf{u}, \theta, \nabla \theta)$ est le tenseur de conductivité thermique.

Alors, la loi de conservation de l'énergie (2.2) peut être réécrite sous la forme

$$(\theta + T_0) \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \theta_t - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nabla \mathbf{u} \partial \theta} \nabla \mathbf{u}_t \right] + \text{div} \mathbf{q} = \mathbf{g}, \quad (2.7)$$

Il est à noter que des conditions initiales et aux limites doivent être rajoutées pour que le problème soit bien posé. La deuxième approche qui est non classique consiste à utiliser la loi de Cattaneo

$$\tau \mathbf{q}_t + \mathbf{q} + \mathbf{k}(\nabla \mathbf{u}, \theta) \nabla \theta = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Au lieu de la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur, on souligne que dans (2.8)

$\tau > 0$ est le temps de relaxation. Dans ce cas ψ , \mathbf{S} , η sont des fonctions de $(\nabla, \theta, \mathbf{q})$, telles que

$$S(\nabla \mathbf{u}, \theta, \mathbf{q}) = \frac{\partial \psi}{\partial(\nabla \mathbf{u})}(\nabla \mathbf{u}, \theta, \mathbf{q}), \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial(\theta)}(\nabla \mathbf{u}, \theta, \mathbf{q}), \quad (2.9)$$

et la loi de conservation de l'énergie (2.2) peut être écrite comme suit

$$(\theta + T_0)\eta_t + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q}_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{g}, \quad (2.10)$$

ce qui est équivalent à

$$(\theta + T_0)[- \psi_{\theta\theta} - t_r(S_\theta \nabla \mathbf{u}_t)] + [\psi_{\mathbf{q}} - (\theta + T_0)\psi_{\theta\mathbf{q}}] \mathbf{q}_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{g}, \quad (2.11)$$

2.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, on présente une étude du système de Timoshenko concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution en utilisant la théorie du semi-groupe. Soit le modèle de poutre de Timoshenko suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = \mathbf{0}, \text{ dans } (0, L) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = \mathbf{0}, \text{ dans } (0, L) \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

ce système peut se réécrire sous la forme d'un problème d'évolution abstraite du premier ordre comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_t(t) = A\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où $\mathbf{u} := (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$ ce qu'on appelle souvent, le vecteur des variables conservatives.

$$\mathbf{u}_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T.$$

le problème (2.16) est dit problème abstrait de Cauchy associé à l'opérateur A .

On sait que :

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \varphi_{tt} \\ \psi_t \\ \psi_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_t \\ \psi \\ \psi_t \end{pmatrix},$$

alors, on peut écrire

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_t \\ \psi_t \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi) \end{pmatrix},$$

où l'opérateur \mathbf{A} est défini comme suit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} & -\frac{\gamma}{\rho_1}\varphi_{tt} & \frac{k}{\rho_1}\psi_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_d \\ -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x & \mathbf{0} & \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\mathbf{I}_d & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

pour le cadre fonctionnelle on introduit l'espace :

$$\mathbf{H} = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

où :

$$L_*^2(0, L) = \{\varphi \in L^2(0, L) : \int_0^L \varphi(x)dx = 0\},$$

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0,$$

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L),$$

$$L^2(0, L) = \{\int_0^1 \psi_x \leq +\infty\},$$

$$H_0^1(0, L) = \{\psi \in H^1(\Omega), \text{ tel que } \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(0, L) = \psi_1 \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

\mathbf{H} est un espace de Hilbert associé à la norme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 &= \|(\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &= \int_0^1 \{\rho_1 |\tilde{\varphi}|^2 + \rho_2 |\tilde{\psi}|^2 + b |\psi_x|^2 + k |\varphi_x + \psi^2|\} dx,\end{aligned}$$

d'où, on peut introduire le domaine de \mathbf{A} par

$$D(\mathbf{A}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H} / \varphi_1, \psi \in H^2(0, L), \tilde{\psi} \in H_0^1(0, L), \tilde{\varphi} \in H_*^1(0, L), \varphi_x \in H_0^1(0, L)\},$$

ce qui caractérise l'ensemble des \mathbf{u} qui satisfont les conditions aux limites.

Il n'est pas difficile de voir que \mathbf{A} est un opérateur dissipatif dans l'espace \mathbf{H} pour lequel $\mathbf{0} \in \rho(\mathbf{A})$, plus précisément

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}} &= \int_0^L \tilde{\varphi} \varphi dx + \frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x \tilde{\varphi} dx - \frac{\gamma}{\rho_1} \int_0^L \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} dx + \int_0^L \tilde{\psi} \psi dx \\ &+ \frac{b}{\rho_2} \int_0^L \psi_{xx} \tilde{\psi} dx - \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi) \tilde{\psi} dx, \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi^2 dx + \frac{1}{2} \frac{k}{\rho_1} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{\gamma}{\rho_1} \int_0^L \tilde{\varphi}^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi^2 dx \\ &+ \frac{b}{\rho_2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{k}{\rho_2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx.\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}} = -\gamma \int_0^L \tilde{\varphi}^2 dx \leq 0,$$

alors, on conclut que l'opérateur \mathbf{A} est dissipatif.

Par conséquent, d'après le théorème de Lumer-phillips, on peut conclure que \mathbf{A} est un gémérateur infinitesimal d'un semi-groupe \mathbf{C}_0 de contraction.

l'approximation des systèmes hyperboliques à l'aide de la théorie des semi-groupes nous assure le caractère bien posé du problème en utilisant le théorème célèbre suivant

Théorème 2.2.1. *Supposons que $\mathbf{u}_0 \in D(\mathbf{A})$, alors il existe une unique solution $\mathbf{u} = (\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi})$ au système (2.13) satisfaisant $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^+, D(\mathbf{A}) \cap C^1(\mathbb{R}^+), \mathbf{H})$*

Démonstration. [2]

On précise que l'idée principale de la preuve repose sur l'approche de semigroupe, ainsi que sur la théorie de la régularité des équations elliptiques afin d'assurer l'existence d'un unique

$\mathbf{u}_0 \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ tel que (2.16) est satisfait. Par conséquent, on peut aboutir à la maximalité de l'opérateur \mathbf{A} . □

CHAPITRE

3

LA STABILISATION

Contents

3.1	Introduction	23
3.2	Energie du système	24
3.3	Stabilité exponentielle	25
3.4	Stabilité polynomiale	32

3.1 Introduction

La dynamique des vibrations des poutres non-linéaires et linéaires a été un sujet de grand intérêt pendant de nombreuses décennies. Ces vibrations sont naturellement indésirables en raison de leur endommagement, pour cette raison les chercheurs ont proposé certaines manières et approches pour contourner le problème en rajoutant des différents types d'amortissement selon les propriétés physiques de la poutre (viscoélastique, frictionnelles, ...), ces dispositifs sont des amortisseurs internes et ou sur la frontière.

Au cours des dernières années, la stabilité des poutres élastiques, thermoélastiques et viscoélastiques de type Timoshenko, Bresse, Rayleigh et Euler-Bernoulli, et la stabilité des plaques vibrantes de différents types ont attiré beaucoup d'attention de beaucoup de chercheurs et ingénieurs.

L'étude de la stabilité a une importance majeure dans la théorie de la thermoélectricité, dont l'objectif est d'atténuer les vibrations par rétroaction (feedback). En effet la stabilisation consiste à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, ce qui détermine le comportement asymptotique de l'énergie qu'on note généralement par $E(t)$.

Il existe plusieurs types ou degrés de stabilité qu'on peut conclure à travers le calcul de la limite de l'énergie $E(t)$ lorsque t tend vers l'infini :

- La stabilité forte consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est à dire :

$$E(t) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty.$$

- La stabilité exponentielle représente la décroissance la plus rapide de l'énergie, c'est à dire pour des constantes positives c et δ :

$$E(t) \leq ce^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où c dépend des données initiales du problème.

- La stabilité polynomiale consiste à étudier des situations intermédiaires dans lesquelles

la décroissance n'est pas exponentielle, à titre d'exemple, on écrit :

$$E(t) \leq ct^{-\alpha}, \quad \forall t > 0,$$

où c et α sont deux constantes positives (c dépend des données initiales).

3.2 Energie du système

Afin de chercher la stabilité, il est indispensable de calculer l'énergie du problème de Timoshenko en prenant en compte toutes les conditions initiales et aux limites, et en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Soit le problème de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \varphi_t = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, & \text{dans } (0, L) \times (0, T) \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = 0, \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0 \\ \varphi(., 0) = \varphi_0; \varphi_t(., 0) = \varphi_1, \psi(., 0) = \psi_0, \psi_t(., 0) = \psi_1 \forall x \in (0, L) \end{cases} \quad (3.1)$$

où φ est le déplacement vertical, et ψ est la rotation des fibres dans le faisceau et $\rho_1, \rho_2, \gamma, b, k$ sont des constantes positives qui viennent des caractéristique physique de la poutre.

on pose : $\rho_1 = \rho_A, k = kGA, \rho_2 = \rho$ et $b = EL$

multipliant les deux premières équations du problème (3.1) par les fonctions tests φ_t et ψ_t respectivement, et on intègre par partie sur $(0, L)$ avec l'utilisation des condition aux limites, on obtient

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \gamma \int_0^L \varphi_t \varphi_t dx = 0 \\ \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \end{cases}$$

ce qu'on peut simplifier comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 + \gamma \int_0^L \varphi_t^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_t dx = 0 \\ \frac{1}{2} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 + \gamma \int_0^L \varphi_t^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_t dx = 0 \\ \frac{1}{2} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

la somme entre (3.2) et (3.3) nous donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + k (\varphi_x + \psi)^2) dx + \gamma \int_0^L \varphi_t^2 dx = 0 \quad (3.4)$$

ce qui nous permet de définir l'énergie naturelle de la solution du problème (3.1) par :

$$E(t) = \rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \quad (3.5)$$

avec

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^L |\varphi_t|^2 dx \leq 0, \forall t \geq 0.$$

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section on va étudier la stabilité exponentielle du système de type Timoshenko (3.1), en prenant le paramètre ou le nombre de stabilité $\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0$.

Proposition 3.3.1. *Le problème (3.1) est exponentiellement stable, tel que*

$$E(t) \leq \mu E(0) e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

avec μ et ω sont deux réels positifs.

Preuve

La preuve de la proposition **3.3.1**, sera donnée à travers deux lemmes successifs.

Lemme 3.3.1. *Soit (φ, ψ) la solution du système (3.1), on définit la fonction $F_1(t)$ par :*

$$F_1(t) := \rho_1 \int_0^L \varphi_t(x, t) \left(\varphi(x, t) + \int_0^x \psi(s, t) ds \right) dx \quad (3.6)$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe deux constantes positives $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}$ telles que

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + C_{1,\delta} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{2,\delta} \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad (3.7)$$

Démonstration. Tout d'abord, nous utilisons le multiplicateur donné par :

$$p(x, t) = \varphi(x, t) + \int_0^x \psi(s, t) ds. \quad (3.8)$$

on multiplie la première équation du système (3.1) par $p(x, t)$, on aura

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} p dx - \kappa (\varphi_x + \psi) p|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) p_x dx + \gamma \int_0^L \varphi_t p dx = 0. \quad (3.9)$$

En utilisant $p_x = \varphi_x + \psi$ et les conditions aux limites associées au problème (3.1), on obtient

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} p dx + \kappa \int_0^L p_x^2 dx + \gamma \int_0^L \varphi_t p dx = 0. \quad (3.10)$$

on sait que

$$\varphi_{tt} p = \frac{d}{dt} [\varphi_t p] - \varphi_t p_t,$$

d'où, l'équation (3.10) devient :

$$\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t p dx = \rho_1 \int_0^L \varphi_t p_t dx - \gamma \int_0^L \varphi_t p dx. \quad (3.11)$$

l'application des inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré donne :

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t p dx &= \rho_1 \int_0^L \varphi_t p_t dx - \kappa \int_0^L p_x^2 dx - \gamma \int_0^L \varphi_t p dx \\ &\leq \rho_1 \int_0^L \varphi_t p_t dx - \kappa \int_0^L p_x^2 dx + \gamma \left(\int_0^L \varphi_t^2 dx \right)^2 \left(\int_0^L p^2 dx \right)^2 \\ &\leq \rho_1 \int_0^L \varphi_t p_t dx - \kappa \int_0^L p_x^2 dx + \gamma c_1 \left(\int_0^L \varphi_t^2 dx \right)^2 \left(\int_0^L p_x^2 dx \right)^2, \end{aligned}$$

on utilise maintenant l'inégalité de Poincaré, alors

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t p dx &\leq \rho_1 \int_0^L \varphi_t p_t dx - \kappa \int_0^L p_x^2 dx + \gamma c_1 \left(\int_0^L \varphi_t^2 dx \right)^2 \left(\int_0^L p_x^2 dx \right)^2 \\
 &\leq \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \frac{\gamma^2 c_1^2}{2\kappa} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx
 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t p dx &\leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \left(\rho_1 + \frac{d^2 c_1^2}{2\kappa} \right) \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
 &\quad + \underbrace{\rho_1 \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx}_{I(t)}.
 \end{aligned}$$

on pose $I(t) = \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^x \psi_t ds \right) dx$

d'après l'inégalité de Young, on écrit :

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_\delta \int_0^L \left(\int_0^x \psi_t ds \right)^2 dx \\
 &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_\delta \int_0^L \int_0^L \psi_t^2 ds dx \\
 &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + LC_\delta \int_0^L \psi_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t p dx &= -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \rho_1 \frac{d^2 c_1^2}{2\kappa} \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
 &\quad + \rho_1 \frac{\delta}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_1 L C_\delta \int_0^L \psi_t^2 dx \\
 &= -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + C_{1,\delta} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{2,\delta} \int_0^L \psi_t^2 dx
 \end{aligned}$$

où $C_{1,\delta} = d^2 c_1^2 / 2\kappa + \rho_1(1 + \delta/2)$ et $C_{2,\delta} = \rho_1 C_\delta$,

la preuve est terminée. □

Lemme 3.3.2. *considérant le fonctionnel*

$$F_2(t) := -\rho_2 \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx - \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx. \quad (3.12)$$

Supposant

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0, \quad (3.13)$$

alors

$$\frac{d}{dt} F_2(t) = -\rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx. \quad (3.14)$$

Démonstration. en multipliant l'équation (3.13) par $\mathbf{p}_x = \varphi_x + \psi$, nous obtenons

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \varphi_x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} (\varphi_x + \psi) dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx = 0. \quad (3.15)$$

la substitution des identités suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{tt} \varphi_x &= \frac{d}{dt} [\psi_t \varphi_x] - \psi_t \varphi_{tx}, \\ \psi_{tt} \psi &= \frac{d}{dt} \psi_t \psi - \psi_t^2. \end{aligned}$$

dans l'équation (3.15), nous mène à :

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx &= \rho_2 \int_0^L \psi_t \varphi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - b \int_0^L \psi_x (\varphi_x + \psi)_x dx. \end{aligned}$$

de la première équation du problème de Timoshenko (3.1), on écrit

$$(\varphi_x + \psi)_x = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt} + \frac{\gamma}{\kappa} \varphi_t$$

alors

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx &= \rho_2 \int_0^L \psi_t \varphi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \underbrace{\frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx}_{I_2(t)}. \end{aligned}$$

on simplifie la quantité

$$\begin{aligned} I_2(t) &= b\rho_1/k \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx \\ &= -\frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx + \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_{xt} dx \\ &= -\frac{b\rho_1}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx - \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{xt} \psi_t dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} F_2(t) &= \rho_2 \int_0^L \psi_t \varphi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \frac{b\rho_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{xt} \psi_t dx - \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \\ &= \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\kappa}{b} \right) \int_0^L \psi_t \varphi_{tx} dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'utilisation de l'hypothèse (3.9), nous mène à :

$$\frac{d}{dt} F_2(t) = -\rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx. \quad (3.16)$$

la preuve du lemme est achevée. \square

Maintenant, il nous reste de démontrer le résultat principale de cette section qui est la décroissance exponentielle pour la solution du système (3.1). On définit le fonctionnel

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + F_1(t) + F_2(t) + N_2 \rho_2 \int_0^L \psi \psi_t dx, \quad (3.17)$$

où N_1 et N_2 sont deux constantes positives, et $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont données aux deux lemmes précédents.

le but de ce qui suit est de vérifier que

$$\alpha_1 \mathcal{L}(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 \mathcal{L}(t)$$

où α_1 et α_2 sont deux constantes positives.

On a la dérivée

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = N_1 \frac{d}{dt} E(t) + \frac{d}{dt} F_1(t) + \frac{d}{dt} F_2(t) + N_2 \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi \psi_t dx,$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -N_1 \gamma \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + C_{1,\delta} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{2,\delta} \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx + N_2 \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi \psi_t dx \\ &\leq - (N_1 \gamma - C_{1,\delta}) \int_0^L \varphi_t^2 dx - (\rho_2 - C_{2,\delta}) \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad + \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx + \underbrace{N_2 \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi \psi_t dx}_{I_3(t)}. \end{aligned}$$

on peut simplifier l'intégrale I_3 comme suit

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi \psi_t dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_t + \psi \psi_{tt} dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 + \psi \left(\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) \right) dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + b \int_0^L \psi \psi_{xx} dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \\ &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - (N_1 \gamma - C_{1,\delta}) \int_0^L \varphi_t^2 dx - (\rho_2 - C_{2,\delta}) \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \frac{b\gamma}{\kappa} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx + N_2 \left(\rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \right) \\
 &= - (N_1 \gamma - C_{1,\delta}) \int_0^L \varphi_t^2 dx - (\rho_2 - C_{2,\delta} - N_2 \rho_2) \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 &\quad + \frac{b\gamma}{\kappa} \underbrace{\int_0^L \psi_x \varphi_t dx}_{I_4(t)} - N_2 b \int_0^L \psi_x^2 dx - N_2 \kappa \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx}_{I_5(t)}.
 \end{aligned}$$

les inégalités de Hölder et Poincaré nous mène à

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^L \psi_x \varphi_t dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx
 \end{aligned}$$

de même on écrit

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \psi^2 dx \\
 &\leq \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{C_2}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx.
 \end{aligned}$$

d'où, on aura :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - [N_1 d - C_{1,\delta} - b\gamma/\kappa] \int_0^L \varphi_t^2 dx - [\rho_2 (1 - N_2) - C_{2,\delta}] \int_0^L \psi_t^2 dx \\
 &\quad - [N_2 b + N_2 \kappa C_2/2 - b\gamma/2\kappa] \int_0^L \psi_x^2 dx - [N_2 \kappa/2 - \kappa/2] \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx.
 \end{aligned}$$

pour N_1 et N_2 suffisamment grandes, on peut conclure qu'il existe $k_0 > 0$ tel que :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -k_0 E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -k_0 E(t) \\
 &\leq -k_0 \alpha_2 L(t),
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}'(t)}{\mathcal{L}(t)} &\leq -k_0\alpha_2 \\ \text{Alors } \int_0^L \frac{\mathcal{L}'(t)}{\mathcal{L}(t)} dt &\leq \int_0^L -k_0\alpha_2 dt \\ \text{C'est } - \text{ dire } \ln \mathcal{L} &\leq -k_0\alpha_2 t \\ \text{Ce que qu'on peut simplifier comme suite } \ln \mathcal{L} &\leq k e^{-k_0\alpha_2 t} \\ \text{d'o } \mathcal{L} &\leq k e^{-k_0\alpha_2 t} \\ \text{Alors } \frac{E(t)}{\alpha_2} &\leq k e^{-k_0\alpha_2 t}, \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$E(t) \leq k\alpha_2 e^{-k_0\alpha_2 t}.$$

3.4 Stabilité polynomiale

Il est à rappeler que l'objectif de la stabilisation est d'atténuer les vibrations afin de garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro de façons plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. En fait, Almeida Júnior et al [6] ont montré que le système (3.1) perd sa stabilité exponentielle dans le cas où le nombre $\chi \neq 0$, c'est la raison pour laquelle on cherche dans cette section d'introduire un résultat de stabilité de type différent pour le système (3.1).

Théorème 3.4.1. *Supposant que*

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \neq 0$$

alors le système (3.1) a une stabilité polynomiale tel que

$$\|e^{At} \mathbf{u}_0\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|\mathbf{u}_0\|_{D(A)} \quad (3.19)$$

De plus, le taux de décroissement est optimale.

Démonstration. La preuve de ce théorème repose sur l'utilisation des résultats de Borichev

et al [1] pour prouver l'estimation (3.19), et le travail de Almeida Júnior et al [6] pour le taux de décroissance d'ordre $t^{\frac{1}{2}}$.

□

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail on a introduit la théorie et l'approximation d'un système de type hyperbolique. En effet, une étude d'existence et unicité de la solution du problème est discutée en appliquant la théorie et les techniques des semi-groupes sur le système de Timoshenko, dont le théorème de Hille-Yosida donne une condition pour que ce problème soit bien posé. Ensuite, une étude de la stabilité uniforme (exponentielle, polynomiale) est élaborée à travers deux résultats essentiels concernant la stabilité exponentielle et la stabilité polynomiale afin de garantir un certain taux de décroissance de la solution du problème de Timoshenko vers zéro.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Borichev, Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*. Mathematische Annalen, 347(2), pp 455-478, 2009.
- [2] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [3] A. Soufyane, *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. Comptes Rendus de l'académie des sciences, Vol 328(8) : 731-734, 1999.
- [4] C.M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [5] D. Lie, *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*. ellipses, **2013**.
- [6] D.S. Almeida Júnior, M. L. Santos, J.E. Muñoz Rivera, *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*. Math. Meths. in the Appl. Sciencs, 2013.
- [7] J. E. Lagense, *Modeling analysis and control of thin plates*. Masson, 1998.
- [8] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke, *Global stability for damped Timoshenko systems*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 9 (6) (2003), 1625-1639.
- [9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle et applications*. Dunod, Paris, 1999.
- [10] L.I.Vrabie, *C_0 -semigroups and applications*. Elsevier, 2003.

- [11] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Volume 3, Hermann, 1961.
- [12] S.A. Messaoudi, M.I. Mustafa, *On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2009, 32(4) :454-469.
- [13] S. Jiang, R. Racke, *Evolution equation in thermoelasticity*. π Monographs and Surveys, Pure Appl. Math.112, Chapman & Hall, 2000.
- [14] S. Timoshenko, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, 41, pp 744-746, 1921.