وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة
كلـــــــية العلـــــوم
قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/2021/2022.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

STABILITE EXPONENTIELLE DES POUTRES LAMINEES AVEC GLISSEMENT INTERFACIAL

Option: Analyse Fonctionnelle Appliquée

Par :

CHERIBET *Hadjar*

LANANI *Riane*

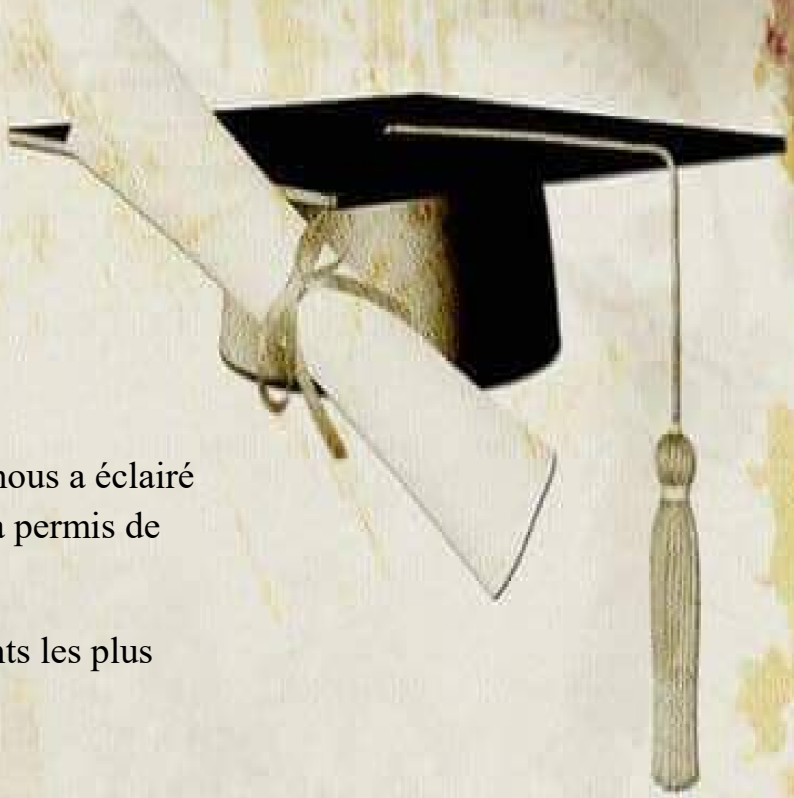
Encadré par: GHENNAM Karima M.C.B U. SKIKDA

Devant le jury:

Présidente: HEBHOUB Fahima M.C.A U. SKIKDA

Examinateur : FOUGHALI Fouzia M.C.B U. SKIKDA

Année : 2021/2022



REMERCIEMENTS

On tient tout d'abord à remercier Allah qui nous a éclairé tout au long de notre chemin et qui nous a permis de réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus chaleureux à notre encadreuse:

Dr. Ghennam Karima

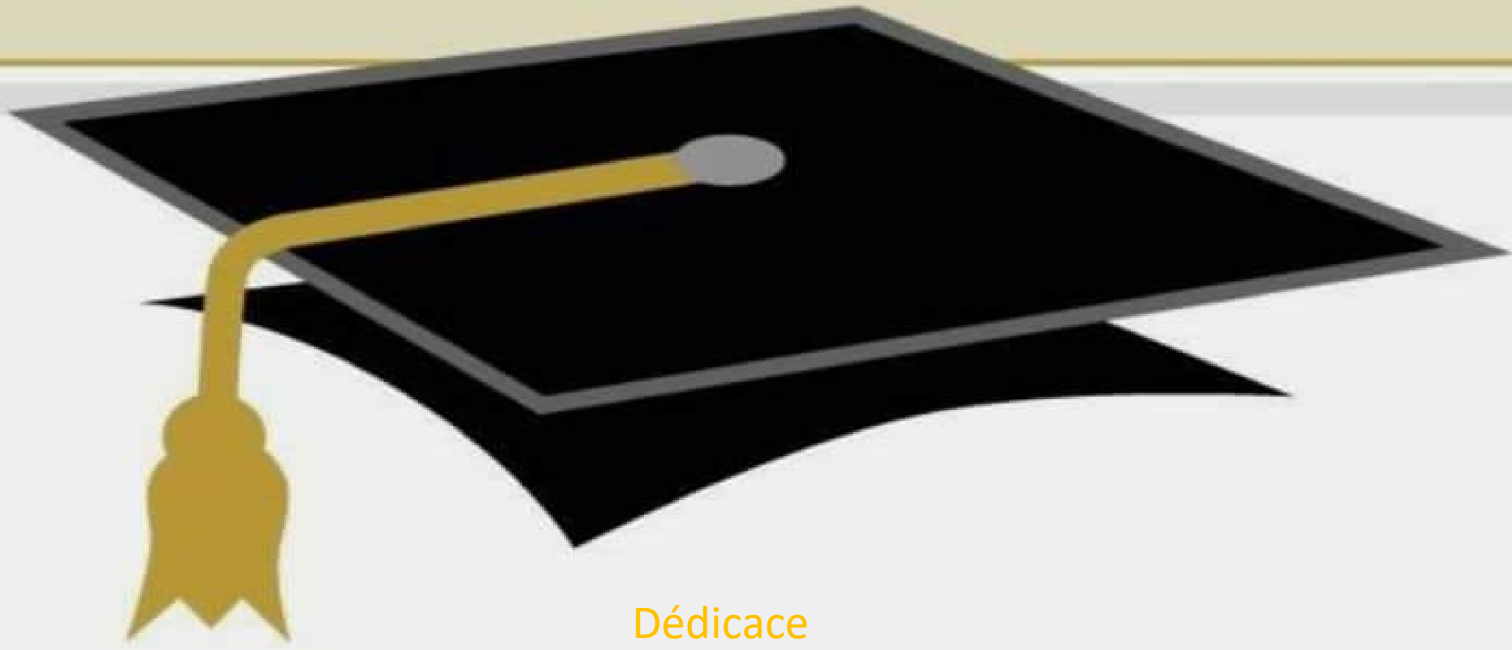
qui a dirigé ce travail, pour ses précieux conseils et son suivi au cours de ce travail.

A la présidente de notre jury: Dr HabhoubFahima

Ainsi que l'examinatrice: Dr. Foughali Fouzia

Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin, enseignants et étudiants, à la réalisation de ce mémoire.

A tout le corps enseignant du département de mathématiques pour l'enseignement reçu.



Dédicace

Du profond de mon cœur, je dédie ce modeste travail à:

* Mon très cher père Rezki *

Mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, il m'a motivé dans mes études. Qu'Allah le garde pour nous.

*Ma très cher mère Boughagha Zoulikha

La lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur. Qu'Allah lui procure santé et longue vie .

Toute ma famille

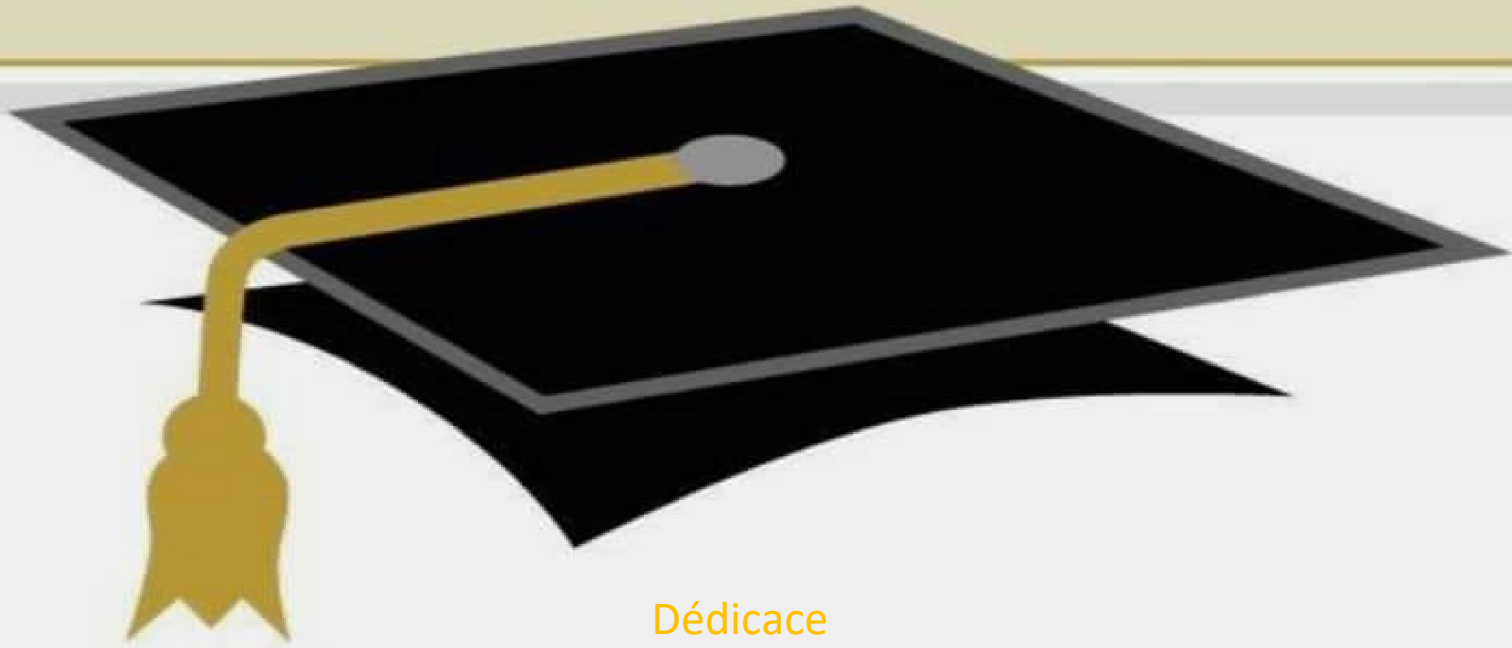
Mes soeurs: Iman, Roukia, Hadil, Asma et son mari et son fils Chahine

Mon cher frère: Oussama.

Mes amies : Bayoud Halla, Tamine Marwa, Rania Djekrif, Sassane Lamia, FEKRACHE MERIEM, Louriagh Amira,Karbouche Besma, Bouacha Sara

Ma chère binôme: Lanani Riane.

A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment



Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

*Mon très cher père Abdalaziz *

Pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'accordé.

Qu'allah le garde pour nous.

*Ma très cher mère Kalfa Sahel Linda *

Pour son amour, ses encouragements et ses sacrifices. Qu'Allah lui procure bonne santé et longue vie.

Mon très cher mari: Boukadoum Abdelfeta

Qui m'a soutenue tous au long de ce projet .qui m'a aidé dans les moments difficils

A mes grands parantes: Boujemea, Messaoud, Yamina et Khadra

Mes soeur: Kaouther et Soundous

Mes fréres: Mohamed Chawki et Lokman

Mes amies: Boulbit Mona, Mechri Nassima, BoulbitChahinaze et Zaouache Widjedan

Ma chère binôme : Cheribet Hadjar.

Par: LananiRiane

Abstract

In this manuscript we are interested in the studying the exponentielle stability of laminated beams with interfacial slip, with a unique dissipation, we discuss the regularity of the solution using the theory of semi-groups, in addition, to studying the stabilization using the energy theory which is based on the construction of a new functional equivalent to energy functional called Lyapunov functional.

Key words: Laminated beams, interfacial slip, damping, exponential stability, Lyapunov functional.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude de la stabilité d'un système élastique modélisant des poutres laminées avec glissement inter-facial. Nous discutons la régularité da la solution en utilisant la théorie des semi-groupes et nous étudions la stabilité par la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une nouvelle fonctionnelle équivalente à la fonction énergie appelée Fonctionnelle de Lyapunov.

Mots clés: Poutres laminées, glissement inter-facial, amortissement, stabilité exponentielle, Fonctionnelle de Lyapunov.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة نظام مرن للحزم المغلفة مع انزلاق بيني . برهنا الحل باستخدام شبه المجموعة. وبرهنا الاستقرار باستعمال نظرية الطاقة التي تعتمد على بناء دالة جديدة تسمى دالة ليابونوف .

كلمات مفتاحية: لحزم مغلفة ، انزلاق بيني، التخميد اللاصق، الاستقرارالاسي، دالة ليابونوف.

Table des matières

Introduction **6**

1 Notions préliminaires **10**

1.1 Espace de Hilbert 10

1.2 Quelques inégalités utiles 10

1.2.1 Inégalité de Young 11

1.2.2 Inégalité de Poincaré 11

1.2.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz 11

1.3 Quelques théorèmes utiles 11

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida[4] 11

1.3.2 Théorème de Lax-Milgram [4] 11

2 Position du problème et sa régularité **13**

2.1 Position du problème [2] 13

2.2 L'existence et l'unicité de la solution 14

3 Stabilité exponentielle **17**

3.1 L'énergie du système 17

3.2 Les fonctionnelle de la fonction de Lyapunov 18

3.3 Résultat de stabilité 23

Bibliographie **27**

Introduction

En mécanique, les mouvements vibratoires sont souvent nocives à la structure. Pour cela, des amortissement de différents types ont été élaborés et incorporés directement dans le système, sur la frontière. Par exemple, les amortissement de type friction, thermique ou viscoélastique. Ainsi, dans les application il est crucial que la stabilisation se produit très rapidement, afin d'empêcher les dommages possibles de la structures ou de son fonctionnement.

Dans [7] hansen et Spies ont dérivée un modèle pour une structure de deux poutres identiques d'épaisseur uniforme avec une couche adhésive (d'épaisseur et de masse négligeables), colle les deux surface adjacentes de manière à permettre un glissement tant qu'elles sont en contact continu l'une avec l'autre. la couche adhésive produit une force de rappel supposé proportionnelle à la quantité de glissement. Le modèle obtenu est appelé poutres lamellaires et est donné par :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + G(\psi - w_x)_x = 0, \\ I_\rho(3s_{tt} - \psi_{tt}) - D(3s_{xx} - \psi_{xx}) - G(\psi - w_x) = 0, \\ 3I_\rho s_{tt} - 3Ds_{xx} + 3G(\psi - w_x) + 4\gamma s + 4\beta s_t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

oú $w = w(x,t)$ est le déplacement transversal,

$\psi = \psi(x,t)$ est l'angle de rotation,

$s = s(x,t)$ est proportionnel à la quantité de glissement le long de l'interface.

Les paramètre positif ρ, I_ρ, G, D et γ sont le moment d'inertie de la masse volumique, la rigidité de cisaillement, la rigidité à la flexion et la rigidité adhésive, respectivement le paramètre non-négatif β est appelé amortissement adhésif ou structurel à l'interface.

Les équations de ce système sont du à la théorie des faisceaux de Timoshenko.

De plus, la troisième équation dans (2) est couplée aux deux premières décrivant la dyna-

mique du glissement inter-facial et elle contient l'amortissement de frottement interne $\beta > 0$. Il est essentiel de noter que lorsque $s \equiv 0$ on obtient le système standard de Timoshinko, voir [**?**] et [14].

Lo et Tatar [9] ont considéré (1) avec un amortissement de frottement supplémentaire (w_t) dans la première équation et ont obtenu un résultat de stabilité exponentielle. Dans le même article, ils ont considéré (1) (avec $d = 1$) en présence de deux amortissements viscoélastique, soit :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + G(\psi - w_x)_x + G\displaystyle\int_0^t h(t-r)w_{xx}(r)dr = 0, \\ I_\rho(3s_{tt} - \psi_{tt}) - (3s - \psi)_{xx} - G(\psi - w_x) + \displaystyle\int_0^t h(t-r)(3s-\psi)_{xx}(r)dr = 0, \\ 3I_\rho s_{tt} - 3Ds_{xx} + 3G(\psi - w_x) + 4\gamma s + 4\beta s_t = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où la fonction de relaxation satisfait $\xi = 1 - \displaystyle\int_0^\infty h(r)dr > 0$ et ont obtenu une stabilité exponentielle à condition que la stabilité fournie $1 - \xi$ en soit suffisant. Précédemment dans [10], ils ont considéré (3) sans amortissement viscoélastique dans la première équation et ont obtenu un résultat de décroissance exponentielle à condition que $I_\rho = \dfrac{\rho}{G}$ et G satisfaisaient certaines hypothèses. Nous renvoyons le lecteur au [5],[6], [8], [11], [12], [13], [15] et les références qui sont citées pour quelques autres résultats.

Dans ce travail nous étudions le système suivant :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + G(\psi - w_x)_x = 0, \\ I_\rho(3s_{tt} - \psi_{tt}) - D(3s_{xx} - \psi_{xx}) - G(\psi - w_x) = 0, \\ 3I_\rho s_{tt} - 3Ds_{xx} + 3G(\psi - w_x) + 4\gamma s + 4\beta s_t = 0, \\ w(0,t) = \psi_x(0,t) = s_x(0,t) = w_x(1,t) = \psi(1,t) = s(1,t) = 0, & t > 0, \\ s(x,0) = s_0, s_t(x,0) = s_1, & x \in (0,1), \\ w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \psi(x,0) = \psi_0, \psi_t(x,0) = \psi_1, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3}$$

et nous montrons qu'il est exponentiellement stable si est seulement si les vitesses de propagations sont égales, c'est à dire :

$$\frac{G}{\rho} = \frac{D}{I_\rho}$$

Notant que tout au long de ce mémoire nous utilisons la norme suivante :

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 uvdx \qquad ; \qquad \| u \|^2 = \int_0^1 |u|^2 dx$$

où $\langle ., .\rangle$ et $\| . \|^2$ sont respectivement le produit scalaire et la norme sur $L^2(0,1)$, de plus, nous utilisons c pour désigner une constante positive générique.

Ce travail se compose de trois chapitre :

Dans le premier chapitre, nous présentons des définitions et des théorèmes très utiles.

Quand au deuxième chapitre, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solutions du système considéré.

Enfin dans le dernier chapitre, nous utilisons la méthode des multiplicateurs pour prouver notre résultat de stabilité exponentielle.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les espaces de Sobolev et les résultats de quelques inégalités, qu'on utilisera ultérieurement. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et quelques lemmes qui nous seront très utiles pour la suite de notre travail.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1. *[4]*

Soit Ω un ouvert de $\Re^n$, on définit l'espace de Sobolev :

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ tel que } \int_\Omega |f| d\Omega < +\infty\}.$$

Définition 1.2. *[4]*

Soit Ω un ouvert de $\Re^n$, on définit l'espace de Hilbert :

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ tel que } \int_\Omega |f|^2 d\Omega < +\infty\}.$$

Définition 1.3. *[4]*

Soit Ω un intervalle de $\Re^n$, on définit l'espace de Hilbert :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad tel\ que \quad u' \in L^2(\Omega)\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \quad tel\ que \quad u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}.$$

1.2 Quelques inégalités utiles

Soit Ω un intervalle de $\Re$.

1.2.1 Inégalité de Young

Soient p et q deux réels vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors :

$$\forall (f,g)\in (L^p(\Omega)\times L^q(\Omega))^2, \forall \varepsilon>0, \int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\varepsilon}{p}\int_\Omega |f^p|dx + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}}\int_\Omega |g^q|dx.$$

Si $p=q=2$ on a :

$$\forall (f,g)\in (L^p(\Omega))^2, \forall \varepsilon>0, \int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |f^2|dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega |g^2|dx.$$

1.2.2 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un domaine borné de $\Re$, alors il existe une constante positive c telle que :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\|u'\|_{L^2(\Omega)}, \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

1.2.3 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f et g deux fonctions dans $L^2(\Omega)$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \left(\int_\Omega |f|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |g|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 Quelques théorèmes utiles

1.3.1 Théorème de Hille-Yosida[4]

Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0\in D(A)$ il existe une fonctionnnelle $u\in C^1([0,+\infty[;H)\cap([0,+\infty[;D(A))$ unique tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}+Au=0 & \text{sur} \quad [0,+\infty[, \\ u(0)=u_0 & \text{(donnée initiale).}\end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)|\leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = Au(t)\leq |Au_0| \quad \forall t\geq 0.$$

1.3.2 Théorème de Lax-Milgram [4]

Définition 1.4. *Soit $a: E\times E\to \Re$ une forme bilinéaire, on dit que :*

• *a est continue sur E s'il existe une constante c_a telle que*

$$\forall x,y\in E, \quad |a(x,y)|\leq c_a||x||_E||y||_E,$$

- *a est cœrcive s'il existe une constante α_a telle que*

$$\forall x \in E \quad \alpha_a ||x||_E^2 \leq a(x,x),$$

- *a est symétrique si*

$$\forall y \in E \quad a(y,x) = a(x,y);$$

Théorème 1.1. *Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $f \in H^{'}$, il existe u unique tel que :*

$$a(u,v) = (f,v) \qquad\qquad v \in H.$$

Chapitre 2

Position du problème et sa régularité

Dans ce chapitre nous définissons le problème à étudier, puis par la théorie des semi-groupes nous démontrons l'existence et l'unicité.

2.1 Position du problème [2]

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \rho w_{tt} + G(\psi - w_x)_x = 0, & dans (0,1)\times(0,\infty), \\ I_\rho(3s_{tt} - \psi_{tt}) - D(3s_{xx} - \psi_{xx}) - G(\psi - w_x) = 0, & dans (0,1)\times(0,\infty), \\ 3I_\rho s_{tt} - 3Ds_{xx} + 3G(\psi - w_x) + 4\gamma s + 4\beta s_t = 0, & dans (0,1)\times(0,\infty), \\ w(0,t) = \psi_x(0,t) = s_x(0,t) = w_x(1,t) = 0 = \psi(1,t) = s(1,t), & t > 0, \\ s(x,0) = s_0, s_t(x,0) = s_1, & x \in (0,1), \\ w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \psi(x,0) = \psi_0, \psi_t(x,0) = \psi_1, & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.1}$$

Où

$D, G, I_\rho, \rho, \gamma, \beta$ sont des constantes positives.

$w = w(x,t)$ est le déplacement transversal,

$\psi = \psi(x,t)$ est l'angle de rotation,

$s = (x,t)$ est proportionnel à la quantité de glissement le long de l'interface,

2.2 L'existence et l'unicité de la solution

Dans cette section, on va utiliser le théorème de Hille-yosida pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (2.1)
Soit l'espace de Hilbert suivant :

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)]^3,$$

l'espace $\mathcal{H}$ est muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle \phi, \bar{\phi} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 [\rho u \bar{u} + D\xi_x \bar{\xi_x} + I_\rho v \bar{v} + 3Ds_x \bar{s_x} + 3I_\rho z \bar{z} \\ + G\langle 3s - \xi - w_x, 3\bar{s} - \bar{\xi} - \bar{w_x} \rangle] dx\end{aligned} \tag{2.2}$$

telle que $\phi = (w, u, \xi, v, s, z,)^t$ et $\bar{\phi} = (\bar{w}, \bar{u}, \bar{\xi}, \bar{v}, \bar{s}, \bar{z})^t$
Ainsi le système(2.1) peut etre réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\phi_t = \mathcal{A}\phi(t), t > 0, \\ \phi(0) = \phi_0 = (w_0, w_1, 3s_0 - \psi_0, 3s_1 - \psi_1, s_0, s_1)^T, \end{cases} \tag{2.3}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{A}\phi = \begin{pmatrix} u \\ -\dfrac{G}{\rho}(3s - \xi - w_x)_x \\ \dfrac{1}{I_\rho}(D\xi_{xx} + G(3s - \xi - w_x)) \\ \dfrac{1}{I_\rho}(Ds_{xx} - G(3s - \xi - w_x) - \dfrac{4\gamma}{3}s - \dfrac{4\beta}{3}s_t \end{pmatrix},$$

Où $u = w_t$, $\xi = 3s - \psi$, $v = \xi_t$, et $z = s_t$
Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donné par :

$$D(\mathcal{A}) := [H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1) \times H_0^1(0,1)]^3$$

Clairement, $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$. Ainsi nous obtenons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.1. *Soit $\phi_0 \in \mathcal{H}$, alors il existe une unique solution faible $\phi \in C(\Re^+, \mathcal{H})$ du problème (2.3). De plus, si $\phi_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $\phi \in C(\Re^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\Re^+, \mathcal{H})$.*

Preuve 2.1. *Nous allons montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone maximal. C'est à dire que A est dissipatif et $I - A$ est surjectif.*

1) A est dissipatif : Pour $\phi = (w, u, \xi, v, s, z) \in D(\mathcal{A})$, montrons que

$$\langle \mathcal{A}\phi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \tag{2.4}$$

Le calcul direct et le produit scalaire (2.2) donnent

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\phi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} = &-G\int_0^1 (3s - \xi - w_x)_x u dx + \int_0^1 v_x \xi_x dx + \int_0^1 (D\xi_{xx} + G(3s - \xi - w_x)dx \\ &+ 4\gamma \int_0^1 z s dx + 3D\int_0^1 z_x s_x dx + G\int_0^1 (3s - \xi - w_x)_t (3s - \xi - w_x)dx \\ &+ \int_0^1 (3Ds_{xx} - 3G(3s - \xi - w_x) - 4\gamma s - 4\beta s_t) z dx\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur (0,1) et en simplifiant les termes nous arrivons à

$$\langle \mathcal{A}\phi, \phi \rangle_{\mathcal{H}} = -4\beta \parallel s_t \parallel^2_{L^2}$$

ce qui prouve (2.4).

2) $I - \mathcal{A}$ est surjectif : Autrement dit, pour chaque $H = (h_1, ..., h_6)^T \in \mathcal{H}$, nous devons trouver $\phi = (w, u, \xi, v, s, z)^T \in D(\mathcal{A})$ satisfaisant$(I - \mathcal{A})\phi = H$ qui équivalent à :

$$\begin{cases} w - u = h_1 \in H_0^1(0,1), \\ u + \dfrac{G}{\rho}(3s - \xi - w_x)_x = h_2 \in L^2(0,1), \\ \xi - v = h_3 \in H_0^1(0,1), \\ v - \dfrac{1}{I_\rho}(D\xi_{xx} - G(3s - \xi - w_x)) = h_4 \in L^2(0,1), \\ s - z = h_5 \in H_0^1(0,1), \\ z - \dfrac{1}{I_\rho}(Ds_{xx} - G(3s - \xi - w_x) - \dfrac{4\gamma}{3}s - \dfrac{4\beta}{3}s_t) = h_6 \in L^2(0,1) \end{cases}$$

de $w - u = h_1$ et de $u + \dfrac{G}{\rho}(3s - \xi - w_x)_x = h_2$, nous obtenons

$$w - \frac{G}{\rho}w_{xx} = h \in L^2(0,1), ou \quad h = h_1 + h_2 - \frac{G}{\rho}\psi \tag{2.5}$$

nous reformulons (2.5) comme suit.

$$\langle w - \frac{G}{\rho}w_{xx}, k \rangle_{L^2} = \int_0^1 hk dx, \ \ pour\ tout \quad k \in H_0^1(0,1)$$

En intégrant par parties, nous arrivons à

$$\langle w, k \rangle_{L^2} + \frac{G}{\rho}\langle w_x, k_x \rangle_{L^2} = \int_0^1 hk dx, \ \ pour\ tout \quad k \in H_0^1(0,1) \tag{2.6}$$

Ainsi nous définissons le problème variationnelle

$\Upsilon(w,k) = T(k)$ *pour tous* $k \in H_0^1(0,1)$ *telles que*

$$\Upsilon : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \longrightarrow R, \quad \Upsilon(w,k) = (w,k) + \frac{G}{\rho}(w_x, k_x)$$

où $(.,.)$ *désigne le produit scalaire dans* $L^2(0,1)$ *et*

$$T : H_0^1(0,1) \longrightarrow R, \quad T(k) = (h,k)$$

il est facile de montrer que Υ *est continue et coercive et que la forme linéaire* T *est continue. En appliquant le lemme de Lax-Miligram, le problème* (2.6) *admet une unique solution* $w \in H_0^1(0,1)$ *pour tout* $k \in H_0^1(0,1)$.

Par la densité de $H_0^1(0,1)$ *dans* $L^2(0,1)$ *et en appliquant le théorème de Agmon-Douglis-Nirenbeg [3] nous trouvons que* $w \in H^2(0,1)$, *ainsi* $w \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$.

Maintenant à partir de :

$$\xi - v = h_3 \in H_0^1(0,1)$$

et de

$$v - \frac{1}{I_\rho}(D\xi_{xx} + G(3s - \xi - w_x)) = h_4 \in L^2(0,1);$$

nous obtenons

$$\xi - \frac{D}{I_\rho}\xi_{xx} = \hat{h} \in L^2(0,1), \ o \quad \hat{h} = h_3 + h_4 + \frac{1}{I_\rho}[G(\psi - w_x) - 4\beta s_t] \tag{2.7}$$

On peut reformer(2.7), *comme suit*

$$\langle \xi - \frac{D}{I_\rho}, \hat{k} \rangle_{L^2} = \int_0^1 \hat{h}\hat{k}dx, \ \textit{pour tout } \hat{k} \ \in H_0^1(0,1).$$

avec un raisonnement analogue à ce qui a été fait précédemment, nous aurons :

$$\xi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

ce qui implique

$$s, \psi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),$$

Notons que $w - u = h_1 \in H_0^1$ *implique* $u \in H_0^1(0,1)$.

De la même manière, $\xi - v = h_3 \in H_0^1(0,1)$ *impliques* $v \in H_0^1(0,1)$.

Et d'après $v = (3s - \psi)_t \in H_0^1(0,1), s_t, \psi_t \in H_0^1$.

Finalement $(w, u, \xi, v, s, z) \in D(\mathcal{A})$.

Donc l'opérateur $I - A$ *est un surjectif.*

A *dissipatif et* $I - A$ *surjectif. Alors d'après le théorème de Hille-Yosida, le problème* (2.3) *admet une solution unique.*

Chapitre 3

Stabilité exponentielle

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode de multiplicateur pour démontrer la stabilité exponentielle du système (2.1), le principe de cette méthode est de construire une nouvelle fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, équivalente à l'énergie classique et qui décroit exponentiellement.

3.1 L'énergie du système

Lemme 3.1. *L'énergie définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2}[\rho \parallel w_t \parallel^2 + I_\rho \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 + D \parallel 3s_x - \psi_x \parallel^2,$$
$$+ G \parallel \psi - w_x \parallel^2 + 3I_\rho \parallel s_t \parallel^2 + 3 \parallel Ds_x \parallel^2 + 4\gamma \parallel s \parallel^2], \ t \geq 0, \tag{3.1}$$

satisfait

$$\frac{d}{dt}E(t) = -4\beta \parallel s_t \parallel^2 \leq 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.2}$$

Preuve 3.1. *En multipliant la première équation du système (2.1) par w_t, la deuxième par $(3s_t - \psi_t)$ et la troisième par s_t, en intégrant sur(0.1) et en utilisant l'intégration par partie et les conditions aux limite, nous trouvons*

$$\rho \int_0^1 w_{tt} w_t dx + G \int_0^1 (\psi - w_x)_x w_t dx = \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt} \parallel w_t \parallel^2 - G < w_{tx}, \psi - w_x >= 0. \tag{3.3}$$

$$I_\rho \int_0^1 (3s_{tt} - \psi_{tt})(3s_t - \psi_t)dx - D \int_0^1 (3s_{xx} - \psi_{xx})(3s_t - \psi_t)dx - G \int_0^1 (\psi - w_x)(3s_t - \psi)dx$$
$$= \frac{I_\rho}{2}\frac{d}{dt} \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 + \frac{D}{2}\frac{d}{dt} \parallel 3s_x - \psi_x \parallel^2 - G < \psi - w_x, 3s_t - \psi_t >= 0 \tag{3.4}$$

$$3I_\rho\int_0^1 s_{tt}s_t dx - 3D\int_0^1 s_{xx}s_t dx + 3G\int_0^1(\psi - w_x)s_t dx + 4\int_0^1 \gamma s s_t dx + 4\int_0^1 \beta s_t s_t dx$$
$$= \frac{3I_\rho}{2}\frac{d}{dt}\parallel s_t \parallel^2 + \frac{3D}{2}\frac{d}{dt}\parallel s_x \parallel^2 + 3G < s_t, \psi - w_x > + \frac{2\gamma\rho}{2}\frac{d}{dt}\parallel s \parallel^2 + 4\beta \parallel s_t \parallel^2 = 0, \quad (3.5)$$

la combinaison de(3.3)-(3.5) et l'utilisation de

$$-G\langle w_{tx}, \psi - w_x\rangle - G\langle \psi - w_x, 3s_t - \psi_x\rangle = \frac{G}{2}\frac{d}{dt}\parallel \psi - w_x \parallel^2 - 3G\langle s_t, \psi - w_x\rangle,$$

donne (2.3)

3.2 Les fonctionnelle de la fonction de Lyapunov

Lemme 3.2. *Soit la fonctionnelle :*

$$F_1(t) := 3I_\rho < s_t, s > + 2\beta \parallel s \parallel^2 - 3\rho < \bar{w}_t, s >, \ t \geq 0, \quad (3.6)$$

et soit (w, ψ, s) solution de(2.1). Alors pour tout $\varepsilon_1 \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -3D \parallel s_x \parallel^2 - 4\gamma \parallel s \parallel^2 + \varepsilon_1 \parallel w_t \parallel^2 + c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\parallel s_t \parallel^2, \ t \geq 0, \quad (3.7)$$

où $\bar{w}_t = \int_0^x w_t(y)dy$.

Preuve 3.2. *En dérivant $F_1(t)$*

$$\frac{d}{dt}\Big(F_1(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(3I_\rho\langle s_t, s\rangle + 2\beta \parallel s \parallel^2 - 3\rho\langle \bar{w}_t, s\rangle\Big).$$

nous trouvons

$$F_1'(t) = 3I_\rho\int_0^1 s_{tt}s dx + 3I_\rho\int_0^1 s_t^2 dx + 2\beta\int_0^1 s^2 dx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_{tt}s dx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_t s_t dx.$$

En utilisant la troisième équation du système(2.1),

$$3I_\rho s_{tt} = 3Ds_{xx} - 3G(\psi - w_x) - 4\gamma s - 4\beta s_t.$$

nous obtenons

$$F_1'(t) = \int_0^1\Big[3Ds_{xx}s - 3G(\psi - w_x)s - 4\gamma s^2 - 4\beta s_t s\Big]dx + 3I_\rho\int_0^1 s_t^2 dx$$
$$+ 4\beta\int_0^1 s_t s dx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_{tt}s dx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_t s dx.$$

Soit $\bar{w_{tt}} = \int_0^x w_{tt}(y)dy$.
À partir de la première équation du système (2.1) *nous trouvons*

$$w_{tt}(y) = \frac{G}{\rho}(\psi - w_y),$$

et en intégrant par partie nous arrivons à

$$\begin{aligned}
F_1'(t) &= 3D\int_0^1 s_{xx}sdx - 3G\int_0^1(\psi - w_x)sdx - 4\gamma\int_0^1 s^2dx - 4\beta\int_0^1 s_tsdx \\
&+ 3I_\rho\int_0^1 s_t^2dx + 4\beta\int_0^1 s_tsdx - 3\rho\int_0^1 \bar{w_{tt}}sdx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_ts_tdx \\
&= 3D\int_0^1 s_{xx}sdx - 3G\int_0^1(\psi - w_x)sdx - 4\gamma\int_0^1 s^2dx + 3I_\rho\int_0^1 s_t^2dx \\
&- 3\rho\int_0^1\left(\int_0^x -\frac{G}{\rho}(\psi - w_y)_ydy\right)sdx - 3\rho\int_0^1 \bar{w}_ts_tdx \\
&= -3D \parallel s_x \parallel^2 -3G\langle\psi - w_x, s\rangle - 4\gamma \parallel s \parallel^2 +3I_\rho \parallel s_t \parallel^2 \\
&+ 3G\langle\psi - w_x, s\rangle - 3\rho\langle\bar{w}_t, s_t\rangle.
\end{aligned}$$

En fin

$$F_1'(t) = -3D \parallel s_x \parallel^2 -4\gamma \parallel s \parallel^2 +3I_\rho \parallel s_t \parallel^2 -3\rho\langle\bar{w}_t, s_t\rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Young et Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$3\rho < \bar{w}_t, s_t > \leq \varepsilon_1 \parallel w_t \parallel^2 + \frac{9\rho^2}{4\varepsilon_1} \parallel s_t \parallel^2 . \tag{3.8}$$

Ce qui donne (3.7)

Lemme 3.3. *Supposons* $\frac{G}{\rho} = \frac{D}{I_\rho}$. *Alors pour toute solution* (w, ψ, s), *de* (2.1) *la dérivée de la fonctionnelle*

$$F_2(t) = -3\rho D < w_t, s_x > +3I\rho G < \psi - w_x, s_t >,\ t \geq 0,$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_2 > 0$, *l'estimation*

$$\frac{d}{dt}F_2(t) \leq -G^2 \parallel \psi - w_x \parallel^2 +\varepsilon_2 \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 +c \parallel s_x \parallel^2 +c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \parallel s_t \parallel^2,\ t \geq 0. \tag{3.9}$$

Preuve 3.3. *La dérivée de* $F_2(t)$ *:*

$$\frac{d}{dt}\Big(F_2(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(-3\rho D\langle w_t, s_x\rangle + 3I_\rho G\langle\psi - w_x, s_t\rangle\Big).$$

est

$$\begin{aligned}
F_2'(t) &= -3\rho D\int_0^1 w_{tt}s_xdx - 3\rho D\int_0^1 w_ts_{xt}dx \\
&+ 3I_\rho G\int_0^1(\psi - w_x)_ts_tdx + 3I_\rho G\int_0^1(\psi - w_x)s_{tt}dx.
\end{aligned}$$

En utilisant la première et la troisième équation du système(2.1)

$$\rho w_{tt} = -G(\psi - w_x)_x$$

$$3I_\rho s_{tt} = 3Ds_{xx} - 3G(\psi - w_x) - 4\gamma s - 4\beta s_t.$$

En intégrant par partie sur (0.1) et en gardant à l'esprit la relation $\frac{G}{\rho} = \frac{D}{I_\rho}$ *nous trouvons*

$$\begin{aligned} F_2'(t) = &-3DG\int(\psi - w_x)s_{xx}dx - 3\rho D\int_0^1 w_t s_{xt}dx + 3I_\rho G\int_0^1 w_t s_t dx \\ &+ 3I_\rho G\int_0^1 w_t s_t dx + 3I_\rho GD\int_0^1(\psi - w_x)s_{xx}dx - 3G^2\int_0^1(\psi - w_x)^2dx \\ &- 4\beta G\int(\psi - w_x)s_t dx - 4\gamma G\int_0^1(\psi - w_x)sdx. \end{aligned}$$

L'utilisation de $\psi_t = -(3s_t - \psi_t) + 3s_t$, *donne*

$$\begin{aligned} F_2'(t) = 3I_\rho G\int_0^1[-(3s_t - \psi_t) + 3s_t]s_t dx - 3G^2\int_0^1(\psi - w_x)^2dx \\ -4\beta G\int_0^1(\psi - w_x)s_t dx - 4\gamma G\int_0^1(\psi - w_x)sdx. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) = -3G^2 \parallel \psi - w_x \parallel^2 -4\gamma G\langle\psi - w_x, s\rangle - 4\beta G\langle\psi - w_x, s_t\rangle \\ +9I_\rho G \parallel s_t \parallel^2 -3I_\rho G\langle 3s_t - \psi_t, s_t\rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par l'inégalité de Young et Poincaré nous obtenons

$$-4\gamma G\langle\psi - w_x, s\rangle \leq G \parallel \psi - w_x \parallel^2 +4\gamma^2 G \parallel s_x \parallel^2, \tag{3.11}$$

$$-4\beta G\langle\psi - w_x, s_t\rangle \leq G \parallel \psi - w_x \parallel^2 +4\beta^2 G \parallel s_t \parallel^2, \tag{3.12}$$

$$-3I_\rho G\langle 3s_t - \psi, s_t\rangle \leq \varepsilon_2 \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 + \frac{9I_\rho^2 G^2}{4\varepsilon_2} \parallel s_t \parallel^2. \tag{3.13}$$

la combinaison de (3.10)-(3.13) donne (3.9).

Lemme 3.4. *Supposons* $\frac{G}{\rho} = \frac{D}{I_\rho}$. *Alors pour toute solution* (w, ψ, s) *de* (2.1) *la dérivée de la fonctionnelle*

$$F_3(t) = -\rho D\langle 3s_x - \psi_x, w_t\rangle + 3I_\rho G\langle 3s - \psi, s_t\rangle - I_\rho G\langle 3s_t - \psi_t, w_x\rangle,\ t \geq 0,$$

satisfait, pour tout, $\varepsilon_2 > 0$, *l'estimation*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_3(t) \leq -\frac{DG}{2} \parallel 3s_x - \psi_x \parallel^2 +\varepsilon_2 \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 + c(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}) \parallel s_t \parallel^2 \\ +c \parallel s_x \parallel^2 + c \parallel \psi - w_x \parallel^2,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Preuve 3.4. *En différenciant $F_3(t)$, en utilisant la première et la troisième équation du système (2.1) et en intégrant par parties nous trouvons*

$$\begin{aligned}
F_3'(t) &= -\rho D\int_0^1 (3s_{xt}-\psi_{xt})w_t dx - \rho D\int_0^1 (3s_x-\psi_x)w_{tt}dx + 3I_\rho G\int_0^1 (3s_t-\psi_t)s_t dx\\
&+ 3I_\rho G\int_0^1 (3s-\psi)s_{tt}dx - I_\rho G\int_0^1 (3s_{tt}-\psi_{tt})w_x dx - I_\rho G\int_0^1 (3s_t-\psi_t)w_{xt}dx\\
&= -\rho D\int_0^1 (3s_{xt}-\psi_{xt})w_t dx - \rho D\int_0^1 (3s_x-\psi_x)\Big(-\frac{G}{\rho}(\psi-w_x)_x\Big)dx\\
&+ 3I_\rho G\int_0^1 (3s_t-\psi_t)s_t dx + 3GI_\rho\int_0^1 (3s-\psi)\Big(\frac{D}{I_\rho}s_{xx}-\frac{G}{I_\rho}(\psi-w_x)-\frac{4\gamma}{3I_\rho}s-\frac{4\beta}{3I_\rho}s_t\Big)dx\\
&- GI_\rho\int_0^1 (3s_{tt}-\psi_{tt})w_x dx + GI_\rho\int_0^1 (3s_{tt}-\psi_{tt})w_{xt}dx\\
&= -DG\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + 3I_\rho G\langle 3s_t-\psi_t, s_t\rangle - 3G^2\langle 3s-\psi,\psi-w_x\rangle\\
&- 4\gamma G\langle 3s-\psi, s\rangle - 4\beta G\langle 3s-\psi, s_t\rangle - G^2\langle\psi-w_x,w_x\rangle + (I_\rho G-\rho D)\langle 3s_{xt}-\psi_{xt}, w_t\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$w_x = -(\psi-w_x)+\psi, \tag{3.15}$$

$$w_x = -(\psi-w_x)-(3s-\psi)+3s, \tag{3.16}$$

et en considérant l'hypothèse $\dfrac{G}{\rho}=\dfrac{D}{I_\rho}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_3(t) &= -DG\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + 3I_\rho G\langle 3s_t-\psi_t, s_t\rangle - 2G^2\langle 3s-\psi,\psi-w_x\rangle\\
&-4\gamma G\langle 3s-\psi, s\rangle - 4\beta G\langle 3s-\psi, s_t\rangle + G^2\parallel\psi-w_x\parallel^2 - 3G^2\langle\psi-w_x,w_x\rangle,
\end{aligned}$$

l'estimation(3.14) est obtenu par les inégalités de Young et Poincaré.

Lemme 3.5. *Soit (w,ψ,s) solution du système (2.1). Alors la dérivée de la fonctionnelle*

$$F_4(t) = -3\rho\langle w_t, w\rangle - 3I_\rho\langle s_t,\psi\rangle - 6\beta\parallel s\parallel^2,\ t\geq 0,$$

satisfait, pour tout ε_2, $\varepsilon_3>0$, l'estimation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_4(t) \leq -3\rho\parallel w_t\parallel^2 + \varepsilon_2\parallel 3s_t-\psi_t\parallel^2 + \varepsilon_3\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + c\parallel\psi-w_x\parallel^2\\
+c\Big(1+\frac{1}{\varepsilon_3}\Big)\parallel s_x\parallel^2 + c\Big(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{1}{\varepsilon_3}\Big)\parallel s_t\parallel^2,\ t\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Preuve 3.5. *En différenciant $F_4(t)$*

$$\frac{d}{dt}\Big(F_4(t)\Big) = \frac{d}{dt}\Big(-3\rho\langle w_t,w\rangle - 3I_\rho\langle s_t,\psi\rangle - 6\beta\parallel s\parallel^2\Big),$$

nous obtenons

$$F_4'(t) = -3\rho\int_0^1 w_{tt}wdx - 3\rho\int_0^1 w_t^2dx - 3I_\rho\int_0^1 s_{tt}\psi dx - 3I_\rho\int_0^1 s_t\psi_t dx - 6\beta\int_0^1 2s_t s dx.$$

En utilisant la première et la troisième équation du système (2.1), et

$$\psi = -(-3s-\psi)+3s,\ \psi_x = -(3s_x-\psi_x)+3s_x,\ \psi_t = -(3s_t-\psi_t)+3s_t$$

et en intégrant par partie sur(0,1) :

$$\begin{aligned}
F_4'(t) &= -3\rho\int_0^1 -\frac{G}{\rho}(\psi-w_x)_x wdx - 3\rho\int_0^1 w_t^2dx - \int_0^1\Big[-3Ds_{xx}+3G(\psi-w_x)\\
&\quad +4\gamma s+4\beta s_t\Big]\psi dx - 3I_\rho\int_0^1 s_t\psi_t dx - 12\beta\int_0^1 s_t s dx\\
&= -3\rho\int_0^1\Big(-\frac{G}{\rho}(\psi-w_x)_x\Big)wdx - 3\rho\int_0^1 w_t^2dx - 3I_\rho\int_0^1\Big(\frac{D}{I_\rho}s_{xx}-\frac{G}{I_\rho}(\psi-w_x)\\
&\quad -\frac{4}{3I_\rho}\gamma s-\frac{4\beta}{3I_\rho}s_t\Big)\psi dx - 12\beta\int_0^1 ss_t - 3I_\rho\int_0^1 s_t\psi_t dx\\
&= -3G\int_0^1(\psi-w_x)w_t dx - 3\rho\int_0^1 w_t^2dx + 3D\int_0^x s_x\Big(-(3s_t-\psi_t)+3s_t\Big)dx\\
&\quad +3\int_0^1 G(\psi-w_x)\Big(-(3s-\psi)+3s\Big)dx + 4\gamma\int_0^1\Big(-(3s-\psi)+3s\Big)sdx\\
&\quad +4\beta\int_0^1\Big(-(3s-\psi)+3s\Big)s_t dx - 12\beta\int_0^1 s_t s dx - 3I_\rho\int_0^1\Big(-(3s_t-\psi_t)+3s_t\Big)s_t dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_4(t) &= -3\rho\parallel w_t\parallel^2 +3G\parallel\psi-w_x\parallel^2 -9I_\rho\parallel s_t\parallel^2 +9D\parallel s_x\parallel^2 +12\gamma\parallel s\parallel^2\\
&+3I_\rho\langle 3s_t-\psi_t,s_t\rangle - 3D\langle 3s_x-\psi_x,s_x\rangle - 4\gamma\langle 3s-\psi,s\rangle - 4\beta\langle 3s-\psi,s_t\rangle,\ t\geq 0. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et Poincaré, nous obtenons

$$3I_\rho\langle 3s_t-\psi_t,s_t\rangle \leq \varepsilon_2\parallel 3s_t-\psi_t\parallel^2 + \frac{9I_\rho^2}{4\varepsilon_2}\parallel s_t\parallel^2 \qquad (3.19)$$

$$-3D\langle 3s_x-\psi_x,s_x\rangle \leq \frac{\varepsilon_3}{3}\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + \frac{27D^2}{4\varepsilon_3}\parallel s_x\parallel^2, \qquad (3.20)$$

$$-4\gamma\langle 3s-\psi,s\rangle \leq \frac{\varepsilon_3}{3}\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + \frac{12\gamma^2}{\varepsilon_3}\parallel s_x\parallel_2, \qquad (3.21)$$

$$-4\beta\langle 3s-\psi,s_t\rangle \leq \frac{\varepsilon_3}{3}\parallel 3s_x-\psi_x\parallel^2 + \frac{12\beta^2}{\varepsilon_3}\parallel s_t\parallel^2. \qquad (3.22)$$

Substituant (3.19)-(3.22) dans (3.18), nous obtenons (3.17).

Lemme 3.6. *Soit (w, ψ, s) solution du système (2.1). Alors la dérivée le la fonctionnelle*

$$F_5(t) = -I_\rho \langle 3s - \psi, 3s_t - \psi_t \rangle, \quad t \geq 0,$$

satisfait l'estimation

$$\frac{d}{dt} F_5(t) \leq -I_\rho \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2 + c \parallel 3s_x - \psi_x \parallel^2 + c \parallel \psi - w_x \parallel^2, \quad t \geq 0. \tag{3.23}$$

Preuve 3.6. *Comme dans les lemme précédents, l'estimation (2.23) s'ensuit facilement grâce au système (2.1), l'inégalités de Young et Poincaré.*
Maintenant, nous énonçons et nous démontrons le résultat principal de ce travail.

3.3 Résultat de stabilité

On définit la fonctionnelle de Lyapunov L et ou montre qu'elle est équivalente à la fonctionnelle énergétique E

Théorème 3.1. *Supposons $\frac{G}{\rho} = \frac{D}{I_\rho}$. Alors il existe deux constantes positives a et b telles que l'énergie E(t) définie par (3.1) vérifie*

$$E(t) \leq a e^{-bt}, \quad t \geq 0. \tag{3.24}$$

Preuve 3.7. *On définit une fonctionnelle de Lyapunov*

$$L(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + F_4(t) + F_5(t). \tag{3.25}$$

Où $N, N_1, N_2, et N_3$ sont des constantes positives à choisir soigneusement plus tard.
1) Démontrons l'équivalence entre $L(t)$ et $E(t)$, soit

$$|L(t) - NE(t)| = N_1 F_1(t) + N_2 F_2(t) + N_3 F_3(t) + F_4(t) + F_5(t),$$

on pose $|G(t)| = |L(t) - NE(t)|$, alors

$$\begin{aligned}
|G(t)| \leq\ & |N_1(3I_\rho \int_0^1 s_t s dx + 2\beta \int_0^1 s^2 dx - 3\rho \int_0^1 \bar{w}_t s dx)| + |N_2(-3D\rho \int_0^1 w_t s_x dx \\
& + 3I_\rho G \int_0^1 (\psi - w_x) s_t dx)| + |N_3(-\rho D \int_0^1 (3s_x - \psi_x) w_t dx + 3I_\rho G \int_0^1 (3s - \psi) s_t dx \\
& - G I_\rho \int_0^1 (3s_t - \psi_t) w_x dx)| + | - 3\rho \int_0^1 w_t w dx - 3I_\rho \int_0^1 s_t \psi dx - 6\beta \int_0^1 s^2 dx| \\
& + | - I_\rho \int_0^1 (3s - \psi)(3s_t - \psi_t) dx|,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de young et cauchy-schwartz :

$$
\begin{aligned}
|G(t)| \leq{}& \frac{3N_1I_\rho}{2}\int_0^1|s_t|^2dx+\frac{1}{6N_1I_\rho}\int_0^1|s|^2dx+2\beta\int_0^1|s|^2dx+\frac{3N_1\rho}{2}\int_0^1|s|^2dx\\
&+\frac{1}{6N_1\rho}\int_0^1|w|^2dx+\frac{3N_2D\rho}{2}\int_0^1|w_t|^2dx+\frac{1}{6N_2D\rho}\int_0^1|s_x|^2dx\\
&+\frac{3N_2GI_\rho}{2}\int_0^1|\psi-w_x|^2dx+\frac{1}{6N_2I_\rho G}\int_0^1|s_t|^2dx+\frac{N_3\rho D}{2}\int_0^1|3s_x-\psi_x|^2dx\\
&+\frac{1}{2N_3\rho D}\int_0^1|w_t|^2dx+\frac{3N_3I_{\rho G}}{2}\int_0^1|3s-\psi|^2dx+\frac{1}{6N_3I_\rho G}\int_0^1|s_t|^2dx\\
&+\frac{I_\rho G}{2}\int_0^1|3s_t-\psi_t|^2dx+\frac{1}{2I_\rho G}\int_0^1|w_x|^2dx+\frac{3\rho}{2}\int_0^1|w_t|^2dx+\frac{1}{6\rho}\int_0^1|w|^2\\
&+\frac{3I_\rho}{2}\int_0^1|s_t|^2dx+\frac{1}{6I_\rho}\int_0^1|\psi|^2dx+6\beta\int_0^1|s|^2dx+\frac{I_\rho}{2}\int_0^1|3s-\psi|^2dx\\
&+\frac{1}{2I_\rho}\int_0^1|3s_t-\psi_t|^2dx\\
\leq{}&\left(\frac{3N_2\rho D}{2}+\frac{1}{2N_3\rho D}+\frac{3\rho}{2}\right)\int_0^1|w_t|^2dx+\left(\frac{N_3I_\rho G}{2}+\frac{1}{2I_\rho}\right)\int_0^1|3s_t-\psi_t|^2dx\\
&+\left(\frac{N_3D\rho}{2}\right)\int_0^1|3s_x-\psi_x|^2dx+\left(\frac{3N_2I_\rho G}{2}\right)\int_0^1|\psi-w_x|^2dx\\
&+\left(\frac{3N_1I_\rho}{2}+\frac{1}{6N_2I_\rho G}+\frac{1}{6N_3I_\rho G}+\frac{3I_\rho}{2}\right)\int_0^1|s_t|^2dx+\left(\frac{1}{6N_2\rho D}\right)\int_0^1|s_x|^2dx\\
&+\left(\frac{1}{6N_1I_\rho}+2N_1\beta+\frac{3N_1\rho}{2}-6\beta\right)\int_0^1|s|^2dx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|G(t)| \leq{}&\left(\frac{3N_2D}{2}+\frac{1}{2N_3D\rho^2}+\frac{3}{2}\right)\int_0^1|\rho w_t^2|dx+\left(\frac{N_3G}{2}+\frac{1}{2I_\rho^2}\right)\int_0^1|I_\rho(3s_t-\psi_t)^2|dx\\
&+\left(\frac{N_3\rho}{2}\right)\int_0^1|D(3s_x-\psi_x)^2|dx+\left(\frac{3N_2I_\rho}{2}\right)\int_0^1|G(\psi-w_x)^2|dx\\
&+\left(\frac{N_1}{6}+\frac{1}{2N_2I_\rho^2G}+\frac{1}{2N_3I_\rho^2G}+\frac{1}{2}\right)\int_0^1|3I_\rho s_t^2|dx+\left(\frac{1}{2N_2\rho D^2}\right)\int_0^1|3Ds_x^2|dx\\
&+\left(\frac{1}{24N_1I_\rho\gamma}+\frac{N_1\beta}{2\gamma}+\frac{3N_1\rho}{2\gamma}+\frac{3\beta}{2\gamma}\right)\int_0^1|4\gamma s^2|dx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|G(t)| \leq{}&\frac{c}{2}\int_0^1|\rho w_t^2|dx+\frac{c}{2}\int_0^1|I_\rho(3s_t-\psi_t)^2|dx+\frac{c}{2}\int_0^1|D(3s_x-\psi_x)^2|dx\\
&+\frac{c}{2}\int_0^1|G(\psi-w_x)^2|dx+\frac{c}{2}\int_0^1|3I_\rho s_t^2|dx+\frac{c}{2}\int_0^1|3Ds_x^2|dx+\frac{c}{2}\int_0^1|4\gamma s^2|dx,
\end{aligned}
$$

ainsi, $\exists c>0$ *telle que*

$$
\begin{aligned}
|G(t)| \leq{}& c\int_0^1\frac{1}{2}|[\rho w_t^2+I_\rho(3s_t-\psi_t)^2+D(3s_x-\psi_x)^2+G(\psi-w_x)^2+3I_\rho s_t^2+3Ds_x^2\\
&+4\gamma s^2]|dx.
\end{aligned}
$$

C'est-à-dire

$$|G(t)| \leq c|E(t)|, \forall t \geq 0$$

$$|L(t) - NE(t)| \leq c|E(t)|$$

$$|L(t)| \leq N|E(t)| + c|E(t)|$$

$$|L(t)| \leq (N + c)|E(t)|$$

$$-(N + c)E(t) \leq L(t) \leq (N + c)E(t),$$

nous choisissons N assez grand et nous posons, $c_1 = -(N + c)$, $c_2 = (N + c)$, nous trouvons

$$c_1 E(t) \leq L(t) \leq c_2 E(t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.26}$$

donc $L(t)$ et $E(t)$ sont équivalentes.

2) Nous démontrons maintenant (3.24). Alors pour certains $c_1, c_2 > 0$, et en utilisant (3.2), (3.9), (3.11), (3.16), (3.25) et en prenant $\varepsilon_1 = \dfrac{2\rho}{N_1}, \varepsilon_3 = \dfrac{DG}{4}N_3$, nous arrivons à

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -\left[4\beta N - cN_1(1 + N_1) - c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)(N_2 + N_3) - c\left(N_3 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right] \parallel s_t \parallel^2 \\ & - 4\gamma N_1 \parallel s \parallel^2 - [3DN_1 - c(1 + N_2 + N_3)] \parallel s_x \parallel^2 - \rho \parallel w_t \parallel^2 \\ & - [G^2 N_2 - cN_3 - c] \parallel \psi - w_x \parallel^2 - \left[\frac{DG}{4}N_3 - c\right] \parallel 3s_x - \psi_x \parallel^2 \\ & - [I_\rho - \varepsilon_2(1 + N_2 + N_3)] \parallel 3s_t - \psi_t \parallel^2, \end{aligned}$$

nous choisissons N_3 suffisamment grand pour que

$$\frac{DG}{4}N_3 - c > 0,$$

et N_2 suffisamment grand pour que

$$G^2 N_2 - cN_3 - c > 0,$$

de mème, nous choisissons N_1 suffisamment grand pour que

$$3DN_1 - c(1 + N_2 + N_3) > 0.$$

Ensuite, nous choisissons ε_2 suffisamment petit pour que

$$I_\rho - \varepsilon_2(1 + N_2 + N_3) > 0$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$4\beta N - cN_1(1+N_1) - c\left(1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)(N_2+N_3) - c\left(N_3+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) > 0.$$

donc, certains $d > 0$

$$\begin{aligned} L'(t) \leq -d[\| s_t \|^2 + \| s \|^2 + \| s_x \|^2 + \| \psi - w_x \|^2 + \| 3s_x - \psi_x \|^2 + \| w_t \|^2 \\ + \| 3s_t - \psi_t \|^2], \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

En utilisant (3.1), (3.26) et (3.27), nous obtenons

$$L'(t) \leq -\lambda L(t), \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.28}$$

Une simple intégration de (3.28) sur $(0.t)$

$$\frac{L'(t)}{L(t)} \leq -\lambda$$

$$\int_0^t \frac{L'(t)}{L(t)} dt \leq \int_0^t -\lambda dt,$$

nous obtenons

$$\ln L(t) \leq -\lambda t + c,$$

d'où

$$L(t) \leq L(0)e^{-\lambda t}.$$

Comme $L(t)$ et $E(t)$ sont équivalentes, alors

$$c_1 E(t) \leq L(0)e^{-\lambda t}.$$

$$E(t) \leq \frac{L(0)}{c_1} e^{-\lambda t}.$$

En posant $a = \dfrac{L(0)}{c_1}$, nous trouvons

$$E(t) \leq ae^{-bt}, \quad t \geq 0.$$

Ce qui vérifier l'inégalité (3.24), d'où la démonstration du théorème 3.1.

Conclusion

Dans notre travail on a étudier la stabilité exponentielle des poutres laminées avec glissement inter-facial, on a prouver l'existence et l'unicité de la solution par la théorie des semi-groupes et la stabilité exponentielle, par rapport à un nombre de stabilité précis $\frac{G}{\rho} - \frac{D}{I_\rho} = 0.$

Bibliographie

[1] T. A. Apalara, *Uniform stability of a laminated beam with structural daming and second sound,* Z. Angew. Math. phys. 68 (2), 41 (2017).

[2] T. A. Apalara, *Exponential Stability of Laminated Beams,* Mechanics of Solids. 56 (1), 131-137 (2021).

[3] T. A. Apalara, C. A. Raposo *Exponential stability for laminated beams with a frictional damping,* Arch. Math. 114, 471-480(2020).

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Dunod, PARIS-France, (1999).

[5] X. G. Cao, D. Y. Liu, and G. Q. Xu, *Easy test of stabitity of laminated beams with structural damping and boundary feedback control,* J. Dyn. Control Syst. 13(3), 313-336(2007).

[6] B. Feng, *Well-posedness and exponential decay for laminated Timoshinko beams with time delays and boundary feedbacks,* Math. Meth. Appl. Sci. 41(3), 1162-1174(2018).

[7] S. W. Hansen and R. D. Spies, *Structural damping in laminated beams due to interfacialslip,* J. Sound Vib.

[8] A. Lo and N. E. Tatar, *Uniform stability of a laminated beam with structural memory,* Qual. Theory Dyn. Syst. 15(2), 517-540(2016).

[9] A. Lo and N. E. Tatar, *Exponential stabilization of a structure with interfacial slip,* Discr . contin. Dyn. Syst.-A36(11), 6285-6306(2016).

[10] A. Lo and N.E. Tatar, *stabilization of laminated beams with interfacial slip,*Electr. J. Diff. Equat. 2015(129), 1-14, (2015).

[11] M. I. Mustafa, *Boundary control of laminated beams with interfacial slip,* J. Math. Phys. 59 (5), 051508(2018).

[12] M. I. Mustafa, *On the stabilization of viscoelastic laminated beams with interfacial slip,* Z. Angew. math.Phys. 69(2), 33(2018).

[13] M. I. Mustafa, *Laminated Timoshinko beams with viscolastic damping,* J. Math. Anal. Appl. 466(1), 619-641(2018).

[14] C. A. Raoso, *Exponentiel stability for structure with interfacial slip and frictional damping,* Appl. Math. Lett. 53, 85-91 (2016).

[15] N. -E. Tatar, *stabilization of a lamineted beam with interfacial slip by boundary controls* Bound. value Probl. 2015(1), 169(2015)