

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



كلية العلوم
قسم الرياضيات

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Inégalités fractionnaires de type Newton à un
paramètre

Option : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Par : LAHIOUEL ASMA

Encadrée par : Dr. NASRI NASSIMA

M.C.A

U. SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : Dr. KHENNICHE GHANIA

M.C.A

U. SKIKDA

Examineur: Dr. BOUZETTOUTA LAMINE

M.C.A

U. SKIKDA

Année universitaire : 2023/2024



Remerciement

*T*out d'abord, nous remercions Allah Tout-Puissant, qui nous a inspiré la patience et la volonté de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier mon encadreur, le Dr Nassima Nasri, pour le soutien et les précieux conseils qu'elle m'a apportés. Merci beaucoup.

Je remercie aussi le Pr Badreddine Meftah et le Dr Fatima Aissaoui pour leurs précieux conseils.

Je tiens également à exprimer mes remerciements au présidente du comité d'évaluation, le Dr Ghania Khenniche, ainsi qu'à l'examinateur Dr Lamine Bouzettouta, pour avoir examiné et évalué ce travail.

En conclusion, je remercie chaleureusement tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire, sans oublier tous les enseignants du département de mathématiques de l'Université de Skikda.

A,





Dédicaces

Avec amour et respect, je dédie ce travail :

À l'homme, le précieux don d'Allah, à qui je dois ma vie et mon succès, ainsi que tout mon respect mon cher père Salim.

À ce que j'ai de plus cher au monde, celle qui m'a bercé, élevé et qui n'a jamais cessé de formuler des prières à mon égard, ma chère mère Fatiha.

À mes chères sœurs, Khadidja et Halima, ainsi qu'à mes chers frères, Mohamed et Imed, pour leur soutien constant et leurs encouragements.

À la joie et au bonheur de la famille : Aroua, Alaa, Ishak, Yahya, Illef, Batoul, Kïnan et Iyes.

À toute ma famille et à mes amis.

A,



Abstract

In this dissertation, we will focus on the study of real and fractional integral inequalities.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity.

In the second chapter, we quote some results already known in the literature.

While the last chapter will be entirely devoted for some new fractional parameterized Simpson-type inequalities for functions whose first derivatives are preinvex.

We mention that these results are submitted for possible publication[44].

Key words:

Simpson type inequality, Riemann-Liouville integral operators, Hölder inequality, power-mean inequality, preinvex functions, s-convex functions, special functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales réelles et fractionnaires.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la convexité classique et généralisée.

Dans le deuxième chapitre, nous citons quelques résultats déjà connus dans la littérature.

Alors que le dernier chapitre sera entièrement consacré à quelques nouvelles inégalités fractionnaires paramétrées de type Simpson pour les fonction dont les dérivées premières sont préinvexes.

Nous mentionnons que ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication [44].

Mots clés :

Inégalité de type Simpson, opérateur intégrale de Riemann-Liouville, inégalité de Hölder, inégalité des moyennes d'ordre q , fonctions préinvexes, fonctions s -convexes, fonctions spéciales.

ملخص

في هاته المذكرة، سوف نركز على دراسة المتراجحات التكاملية الحقيقية والكسرية .

في الفصل الأول، نذكر بعض تعريفات التحذب الكلاسيكي والمعمم.

في الفصل الثاني، سنذكر بعض النتائج المعروفة بالفعل في الأدب. بينما سيخصص الفصل الأخير بالكامل لبعض متراجحات سمبسون ذات العلامات الكسرية الجديدة للدوال التي تكون مشتقاتها الأولى ذات تحذب معمم.

نذكر أن هذه النتائج مقدمة للنشر المحتمل [44] .

كلمات مفتاحية:

المتراجحات من نوع سمبسون، تكامل ريمان ليوفيل، متراجحة هولدر، متراجحة القيمة الوسطى من الدرجة ك، دوال ذات تحذب المعمم، الدوال س المحدبة، الدوال الخاصة.

Table des matières

1	Préliminaires	5
1.1	Convexité classique et convexité généralisée	5
1.1.1	Convexité classique	5
1.1.2	Convexité généralisée	6
1.2	Quelques classes de fonctions	7
1.3	Quelques fonctions spéciales	8
1.3.1	Fonction gamma	8
1.3.2	Fonction bêta	9
1.3.3	Fonction bêta incomplète	9
1.3.4	Fonction hypergéométrique	9
1.4	Calcul fractionnaire	9
1.4.1	Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	10
1.5	Quelques inégalités intégrales importantes	10
1.5.1	Inégalité de Hölder	10
1.5.2	Inégalité des moyens d'ordre q	10
1.6	Quelques identités intégrales importantes	11
2	Inégalités intégrales de type Simpson faisant intervenir quatre points	14
2.1	Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s -convexes	14
2.2	Inégalités intégrales paramétrées de type Simpson pour les fonctions différentielles s -convexes	16
2.3	Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont fortement s -convexes	18

2.4	Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont préquasiinvexes	20
2.5	Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont (s, m) -préinvexes	21
2.6	Inégalités intégrales fractionnaires de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées sont s -convexes	23
2.7	Inégalités intégrales fractionnaires paramétrées de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées sont convexes	24
3	Inégalités fractionnaires paramétrées de type Newton pour les fonctions différentiables préinvexes	27

Introduction

Les inégalités intégrales constituent un domaine d'étude fascinant et solide au sein du vaste domaine de l'analyse mathématique. Elles représentent un outil puissant très sollicité dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences [13, 28, 29, 37, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51], ainsi que dans l'estimation d'erreur de différentes quadratures en analyse numérique [7, 16, 20, 23, 24, 25, 26, 33, 36, 55].

Le calcul fractionnaire est la branche la plus efficace de l'analyse mathématique qui traite le problème des intégrales et des dérivées d'ordres non entier. Dans ces dernières décennies plusieurs travaux traitons les inégalités intégrales sont apparus dans la littérature [3, 9, 12, 27, 30, 31, 32, 34, 35, 39, 42, 56].

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Simpson et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et de convexité généralisée pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire ainsi que quelques identités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type Simpson dans ces nouveaux résultats sont soumis pour éventuelle publication [44].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques types de convexité classique et généralisée, quelques classes de fonctions, certaines fonctions spéciales ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité on peut consulter [52].

1.1 Convexité classique et convexité généralisée

1.1.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 ([52]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$, est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)y \in I.$$

Définition 1.1.2 ([52]) *Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.3 ([6]) *Une fonction positive $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ est dite*

s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.4 ([1]) Une fonction $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fortement s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ et $c > 0$, si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y) - ct(1 - t)(x - y)^2$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.5 ([57]) Une fonction $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite m -convexe où $m \in (0, 1]$, si

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.6 ([58]) Une fonction $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite étendu (s, m) -convexe où $s, m \in (0, 1]$, si

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^s f(x) + m(1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0, b]$ et $t \in [0, 1]$.

1.1.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de la convexité classique introduite par Hanson [14].

Définition 1.1.7 ([59]) Un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ est dit invexe au point x par rapport à $\eta : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, si

$$x + t\eta(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.8 ([59]) Une fonction $f : K \subset (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *préinvexe par rapport à η* , si

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.9 ([53]) Une fonction $f : K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *préquasiinvexe par rapport à η* , si

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq \max\{f(y), f(x)\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.10 ([19]) Une fonction $f : K \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *s -préinvexe au second sens par rapport à η* , pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^s f(x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.11 ([18]) Une fonction $f : K \subset [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *m -préinvexe par rapport à η* , où $b^* > 0$ et $m \in (0, 1]$, si

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)f(x) + mt f\left(\frac{y}{m}\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Définition 1.1.12 ([22]) Une fonction $f : K \subset [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *(s, m) -préinvexe par rapport à η* , où $b^* > 0$ et $s, m \in (0, 1]$, si

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^s f(x) + mt^s f\left(\frac{y}{m}\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

1.2 Quelques classes de fonctions

Nous rappelons ici, les définitions d'une fonction bornée et d'une fonction lipschitzienne.

Définition 1.2.1 ([5]) *On dit que f est bornée sur $[a, b]$, s'il existe m et M deux constantes réelles telles que pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.2.2 ([5]) *On dit que f est lipschitzienne de rapport L sur $[a, b]$, si pour tout $x, y \in [a, b]$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

1.3 Quelques fonctions spéciales

1.3.1 Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs

Définition 1.3.1 ([54]) *Pour tout nombre complexe z tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.3.1 *Pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(z) = (z - 1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (z - 1)$.*

Remarque 1.3.2 *Une propriété importante de la fonction gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), z > 0.$$

1.3.2 Fonction bêta

Définition 1.3.2 ([54]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par :*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Remarque 1.3.3 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante :*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.3.3 Fonction bêta incomplète

Définition 1.3.3 ([54]) *La fonction bêta incomplète est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives et $\alpha \in (0, 1)$ par :*

$$B_\alpha(x, y) = \int_0^\alpha t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

1.3.4 Fonction hypergéométrique

Définition 1.3.4 ([54]) *La fonction hypergéométrique est définie pour $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ et $|z| < 1$, comme suit :*

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt,$$

où $B(., .)$ est la fonction bêta.

1.4 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un para-

doxe ...". Il a fallu attendre les années **1990** pour voir apparaître les premières conséquences utiles. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est due à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre **1832** et **1837**. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories ont fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc . Cette théorie n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs vu l'ampleur de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil et en mécanique.

1.4.1 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1 ([40]) *Soit $f \in L^1[a, b]$, les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $I_{a^+}^\alpha f(x)$ et $I_{b^-}^\alpha f(x)$ d'ordre $\alpha > 0$, où $a \geq 0$ est définie par*

$$I_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

et

$$I_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b,$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ est la fonction gamma d'Euler.

1.5 Quelques inégalités intégrales importantes

1.5.1 Inégalité de Hölder

Théorème 1.5.1 ([41]) *Soit $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont des fonctions réelles définies sur $[a, b]$, et si de plus $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.5.2 Inégalité des moyens d'ordre q

Théorème 1.5.2 ([8]) *Soient $x = (x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ et $p = (p_i)_{i=1,2,\dots,n}$ deux strictement positives n -uplet et soit $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés*

par \mathbf{p} est définie par

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n p_k} \sum_{i=1}^n p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \right)^{\sum_{k=1}^n p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$, on a

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

Remarque 1.5.1 La version intégrale du Théorème 1.5.2 est : pour $q \geq 1$ et si $|f|$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.6 Quelques identités intégrales importantes

Dans cette section, nous exposerons certaines identités établies dans les papiers [2, 10, 15, 17, 21, 43], qui représentent des résultats cruciaux dans l'étude des inégalités intégrales.

Lemme 1.6.1 ([17]) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ dont $f' \in L^1[a, b]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \\ &= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{3}{8}\right) f' \left((1-t)a + t\frac{2a+b}{3} \right) dt \right. \\ & \quad + \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f' \left((1-t)\frac{2a+b}{3} + t\frac{a+2b}{3} \right) dt \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left(t - \frac{5}{8}\right) f' \left((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb \right) dt \right) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Lemme 1.6.2 ([21]) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ dont $f' \in L^1[a, b]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \\ &= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 \left(t - \frac{3}{2+2\theta}\right) f' \left((1-t)a + t\frac{2a+b}{3} \right) dt \right. \\ & \quad + \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) f' \left((1-t)\frac{2a+b}{3} + t\frac{a+2b}{3} \right) dt \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left(t - \frac{2\theta-1}{2+2\theta}\right) f' \left((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb \right) dt \right) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $\theta \in]0, +\infty[$.

Lemme 1.6.3 ([15]) Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f' est absolument continue et $f'' \in L^1[a, b]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{54} \int_0^1 t(1-t) \left[f''\left(\frac{2+t}{3}a + \frac{1-t}{3}b\right) + f''\left(\frac{1+t}{3}a + \frac{2-t}{3}b\right) + f''\left(\frac{t}{3}a + \frac{3-t}{3}b\right) \right] dt \end{aligned}$$

est satisfaite.

Lemme 1.6.4 ([10]) Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} F(a, b, f) &= \frac{\eta^2(b, a)}{54} \int_0^1 t(1-t) \left\{ f''\left(a + \frac{1-t}{3}\eta(b, a)\right) \right. \\ & \quad \left. + f''\left(a + \frac{2-t}{3}\eta(b, a)\right) + f''\left(a + \frac{3-t}{3}\eta(b, a)\right) \right\} dt \end{aligned}$$

est satisfaite, où

$$\begin{aligned} F(a, b, f) &= \frac{1}{6} \left(f(a) + 2f\left(a + \frac{\eta(b, a)}{3}\right) + 2f\left(a + \frac{2\eta(b, a)}{3}\right) + f(a + \eta(b, a)) \right) \\ & \quad - \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(x) dx. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lemme 1.6.5 ([2]) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ dont $f' \in L^1[a, b]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{3^{1-\alpha}(b-a)^\alpha} \mathcal{S}_\alpha \\ &= \frac{b-a}{36} \left(\int_0^1 (4t^\alpha - 2) f' \left((1-t)a + t\frac{2a+b}{3} \right) dt \right. \\ & \quad - \int_0^1 (1-t)^\alpha f' \left((1-t)\frac{2a+b}{3} + t\frac{a+b}{2} \right) dt \\ & \quad + \int_0^1 t^\alpha f' \left((1-t)\frac{a+b}{2} + t\frac{a+2b}{3} \right) dt \\ & \quad \left. - \int_0^1 (4(1-t)^\alpha - 2) f' \left((1-t)\frac{a+2b}{3} + tb \right) dt \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où

$$\mathcal{S}_\alpha = I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^-}^\alpha f(a) + 2^{\alpha-1} I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2^{\alpha-1} I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha f(b). \quad (1.2)$$

Lemme 1.6.6 ([43]) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° , $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$ dont $f' \in L^1[a, b]$, alors l'identité

$$\begin{aligned} & \frac{2mf(a) + (3-2m)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2m)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2mf(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \mathcal{Q}(a, b, f) \\ &= \frac{b-a}{9} \left(\int_0^1 (\kappa^\alpha - m) f' \left((1-\kappa)a + \kappa\frac{2a+b}{3} \right) d\kappa \right. \\ & \quad - \int_0^1 \left((1-\kappa)^\alpha - \frac{1}{2} \right) f' \left((1-\kappa)\frac{2a+b}{3} + \kappa\frac{a+2b}{3} \right) d\kappa \\ & \quad \left. + \int_0^1 (\kappa^\alpha - (1-m)) f' \left((1-\kappa)\frac{a+2b}{3} + \kappa b \right) d\kappa \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $m \in [0, 1]$ et

$$\mathcal{Q}(a, b, f) = I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^-}^\alpha f(a) + I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^+}^\alpha f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + I_b^\alpha f\left(\frac{a+2b}{3}\right). \quad (1.3)$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Simpson faisant intervenir quatre points

Dans ce chapitre nous exposerons différents résultats sans démonstration concernant la deuxième formule des inégalités de type Simpson pour différentes classes de fonctions, dans le cas usuel et fractionnaire.

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées premières sont s -convexes

Dans le papier [17], Laribi et Meftah ont établi certaines inégalités de type Simpson basées sur l'identité du Lemme 1.6.1.

Théorème 2.1.1 *Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9(s+1)(s+2)} \left(\left(2 \left(\frac{5}{8}\right)^{s+2} + \frac{3s-2}{8} \right) (|f'(a)| + |f'(b)|) \right. \\ & \quad \left. + \left(\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{s+2} \right) \left(\frac{1}{2}\right)^{s+1} + \frac{9s+2}{8} \right) (|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)| + |f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)|) \right) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Théorème 2.1.2 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|^q$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(\frac{2a+b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{|f'(\frac{2a+b}{3})|^q + |f'(\frac{a+2b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\frac{a+2b}{3})|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 2.1.3 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|^q$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9} \left(\frac{2}{(s+1)(s+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{17}{64} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\left(\frac{5}{8} \right)^{s+2} + \frac{3s-2}{16} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\left(\frac{3}{8} \right)^{s+2} + \frac{5s+2}{16} \right) |f'(\frac{2a+b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{s}{4} + \left(\frac{1}{2} \right)^{s+2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|f'(\frac{2a+b}{3})|^q + |f'(\frac{a+2b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{17}{64} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\left(\frac{3}{8} \right)^{s+2} + \frac{5s+2}{16} \right) |f'(\frac{a+2b}{3})|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\left(\frac{5}{8} \right)^{s+2} + \frac{3s-2}{16} \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $q \geq 1$.

Théorème 2.1.4 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ de plus s'il existe deux constantes $-\infty < m < M < +\infty$ telle que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{25}{576} (b-a) (M-m) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Théorème 2.1.5 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ de plus si f' est L -Lipschitzienne sur $[a, b]$, alors l'inégalité

$$\left| \frac{1}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq \frac{41(b-a)^2}{1728} L$$

est satisfaite.

2.2 Inégalités intégrales paramétrées de type Simpson pour les fonctions différentielles s -convexes

Inspirés par le papier [17], Mahmoudi et Meftah [21], ont généralisé les résultats de ce dernier, en adoptant une nouvelle identité paramétrée donnée par le Lemme 1.6.2, dont les résultats sont les suivants.

Théorème 2.2.1 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9(s+1)(s+2)} \left(\left(\frac{3s+4-2\theta}{2+2\theta} + 2 \left(\frac{2\theta-1}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) (|f'(a)| + |f'(b)|) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{3\theta s + (2\theta-4)}{2+2\theta} + \left(\frac{1}{2} \right)^{s+1} + 2 \left(\frac{3}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) (|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)| + |f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)|) \right) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout nombre strictement positif θ .

Théorème 2.2.2 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|^q$ est s -convexe au second sens pour un certain

nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{18(p+1)^{p+1}} \left(\left(\frac{3^{p+1} + (2\theta-1)^{p+1}}{2(1+\theta)^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(\frac{2a+b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{|f'(\frac{2a+b}{3})|^q + |f'(\frac{a+2b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3^{p+1} + (2\theta-1)^{p+1}}{2(1+\theta)^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\frac{a+2b}{3})|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout nombre strictement positif θ , où $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 2.2.3 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $0 \leq a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ et $|f'|^q$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{b-a}{9((s+1)(s+2))^{\frac{1}{q}}} \left(\left(\frac{9+(2\theta-1)^2}{8(1+\theta)^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{3s+4-2\theta}{2+2\theta} + 2 \left(\frac{2\theta-1}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) |f'(a)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{(2\theta-1)s+(2\theta-4)}{2+2\theta} + 2 \left(\frac{3}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) |f'(\frac{2a+b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left(2s + \left(\frac{1}{2} \right)^{s-1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|f'(\frac{2a+b}{3})|^q + |f'(\frac{a+2b}{3})|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{9+(2\theta-1)^2}{8(1+\theta)^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{(2\theta-1)s+(2\theta-4)}{2+2\theta} + 2 \left(\frac{3}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) |f'(\frac{a+2b}{3})|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{3s+4-2\theta}{2+2\theta} + 2 \left(\frac{2\theta-1}{2+2\theta} \right)^{s+2} \right) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout nombre strictement positif θ , où $q \geq 1$.

Sur la base de la même identité Boutelhig et al. [4], ont obtenu de nouveaux résultats concernant les cas où les dérivées premières sont bornées ainsi que lipschitziennes.

Théorème 2.2.4 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ de plus s'il existe deux constantes $-\infty < m < M < +\infty$ telle que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{5\theta^2 - 2\theta + 11}{72(1+\theta)^2} (b-a) (M - m) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Théorème 2.2.5 Soit $f : [a, b] \subset I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $f' \in L^1[a, b]$ de plus si f' est L -Lipschitzienne sur $[a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2+2\theta} \left(f(a) + \theta f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + \theta f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{648} \left(\frac{15\theta^2 - 6\theta + 33 + 6|9 - (2\theta - 1)^2|}{(1+\theta)^2} \right) L \end{aligned}$$

est satisfaite.

2.3 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont fortement s -convexes

Dans le papier [15], Hua et al. ont discuté les inégalités de type Simpson sous la contrainte de la s -convexité forte de la dérivée seconde, dont les résultats découle du Lemme 1.6.3.

Théorème 2.3.1 Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f' est absolument continue et $f'' \in L^1[a, b]$. Si $|f''|^q$ est fortement s -convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{6^{1/q}(b-a)^2}{324} \left\{ \left[\frac{(s-3)3^{s+2} + (s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s} |f''(a)|^q + \frac{1}{(s+2)(s+3)3^s} |f''(b)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{c(b-a)^2}{45} \right]^{1/q} + \left[\frac{(s-1)2^{s+2} + s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s} \left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q \right) - \frac{11c(b-a)^2}{270} \right]^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{1}{(s+2)(s+3)3^s} |f''(a)|^q + \frac{(s-3)3^{s+2} + (s+7)2^{s+2}}{(s+1)(s+2)(s+3)3^s} |f''(b)|^q - \frac{c(b-a)^2}{45} \right]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $q \geq 1$ et $s \in (0, 1]$.

Théorème 2.3.2 Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f' est absolument continue et

$f'' \in L^1 [a, b]$. Si $|f''|^q$ est fortement s -convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{54} \left[B\left(\frac{2q-1}{q-1}, \frac{2q-1}{q-1}\right) \right]^{1-1/q} \left[\frac{1}{3^s(s+1)} \right]^{1/q} \\ & \quad \times \left\{ \left[\left(3^{s+1} - 2^{s+1} \right) |f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \frac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54} \right]^{1/q} \right. \\ & \quad + \left[\left(2^{s+1} - 1 \right) \left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q \right) - \frac{13c(b-a)^2(s+1)3^s}{54} \right]^{1/q} \\ & \quad \left. + \left[|f''(a)|^q + \left(3^{s+1} - 2^{s+1} \right) |f''(b)|^q - \frac{7c(b-a)^2(s+1)3^s}{54} \right]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $q > 1$ et $s \in (0, 1]$. $B(., .)$ est la fonction bêta.

Théorème 2.3.3 Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f' est absolument continue et $f'' \in L^1 [a, b]$. Si $|f''|^q$ est fortement s -convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{54} \left[\frac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)} \right]^{1-1/q} \left[\frac{1}{(s+1)(s+2)3^s} \right]^{1/q} \\ & \quad \times \left\{ \left[\left((s-1)3^{s+1} + 2^{s+2} \right) |f''(a)|^q + |f''(b)|^q - \frac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \right. \\ & \quad + \left[\left(2^{s+1}s + 1 \right) |f''(a)|^q + \left(2^{s+2} - s - 3 \right) |f''(b)|^q - \frac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \\ & \quad \left. + \left[(s+1) |f''(a)|^q + \left(3^{s+2} - 2^{s+1}(s+4) \right) |f''(b)|^q - \frac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

est satisfaite pour tout $q > 1$ et $s \in (0, 1]$.

Théorème 2.3.4 Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f' est absolument continue et

$f'' \in L^1 [a, b]$. Si $|f''|^q$ est fortement s -convexe sur $[a, b]$ pour $q > 1$ et $s \in (0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{54} \left[\frac{(q-1)^2}{(2q-1)(3q-2)} \right]^{1-1/q} \left[\frac{1}{(s+1)(s+2)3^s} \right]^{1/q} \\ & \quad \times \left\{ \left[\left(3^{s+2} - (s+4)2^{s+1} \right) |f''(a)|^q + (s+1) |f''(b)|^q - \frac{9c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \right. \\ & \quad \times \left[\left(2^{s+2} - s - 3 \right) |f''(a)|^q + \left(2^{s+1}s + 1 \right) |f''(b)|^q - \frac{13c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \\ & \quad \left. + \left[|f''(a)|^q + \left((s-1)3^{s+1} + 2^{s+2} \right) |f''(b)|^q - \frac{5c(b-a)^2(s+1)(s+2)3^s}{108} \right]^{1/q} \right\} \end{aligned}$$

est satisfaite.

2.4 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont préquasiinvexes

Chiheb et al. [10], ont étudié les inégalités de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes jouissent de la préquasiinvexité et ont élaboré les résultats suivant par le biais du Lemme 1.6.4.

Théorème 2.4.1 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|$ est préquasiinvexe, alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |F(a, b, f)| & \leq \frac{\eta^2(b, a)}{324} \left(\left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right|, |f''(a)| \right\} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right|, \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right| \right\} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\max \left\{ |f''(b)|, \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right| \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1).

Théorème 2.4.2 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|^q$ est préquasiinvexe où $q > 1$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
& |F(a, b, f)| \\
& \leq \frac{\eta^2(b, a)}{54} (B(p+1, p+1))^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q, |f''(a)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q, \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\max \left\{ |f''(b)|^q, \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1) et $B(., .)$ est la fonction bêta.

Théorème 2.4.3 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|^q$ est préquasiinvexe pour $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
|F(a, b, f)| & \leq \frac{\eta^2(b, a)}{324} \left(\left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q, |f''(a)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\max \left\{ \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q, \left| f'' \left(a + \frac{1}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\max \left\{ |f''(b)|^q, \left| f'' \left(a + \frac{2}{3} \eta(b, a) \right) \right|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1).

2.5 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées secondes sont (s, m) -préinvexes

En s'appuyant sur l'identité du Lemme 1.6.4, Chiheb et al. [11] on introduit de nouvelles inégalités de type Simpson en jouant sur la classe de convexité parmi les résultats élaborés, on note :

Théorème 2.5.1 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable telle que f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|$ est (s, m) -préinvexe

pour certains nombres fixés $s, m \in]0, 1]$, alors l'inégalité suivante :

$$|F(a, b, f)| \leq \frac{\eta^2(b, a)}{54} \left(\frac{(2+2^{s+3}+3^{s+2})_s + (6+3 \times 2^{s+3} - 3^{s+3})}{3^s(s+1)(s+2)(s+3)} \right) \left(|f''(a)| + m \left| f''\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right)$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1).

Théorème 2.5.2 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|^q$ (s, m)-préinvexe pour certains nombres fixés $s, m \in]0, 1]$ où $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité :

$$\begin{aligned} & |F(a, b, f)| \\ & \leq \frac{\eta^2(b, a)}{54} (B(p+1, p+1))^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{(3^{s+1}-2^{s+1})|f''(a)|^q + m|f''(\frac{b}{m})|^q}{3^s(1+s)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{(2^{s+1}-1)(|f''(a)|^q + m|f''(\frac{b}{m})|^q)}{3^s(1+s)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f''(a)|^q + m(3^{s+1}-2^{s+1})|f''(\frac{b}{m})|^q}{3^s(1+s)} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1) et $B(., .)$ est la fonction bêta.

Théorème 2.5.3 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \subset]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que f' est absolument continue et f'' est intégrable sur $[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f''|^q$ (s, m)-préinvexe pour certains nombres fixés $s, m \in]0, 1]$ pour $q \geq 1$, alors l'inégalité

$$\begin{aligned} & |F(a, b, f)| \\ & \leq \frac{\eta^2(b, a)}{54 \times 6^{1-\frac{1}{q}}} \left(\left(\frac{(2^{s+2}+3^{s+2})_s + 7 \times 2^{s+2} - 3^{s+3}}{3^s(s+1)(s+2)(s+3)} |f''(a)|^q + \frac{m}{3^s(s+2)(s+3)} \left| f''\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{(2^{s+2}+1)_s + 5 - 2^{s+2}}{3^s(s+1)(s+2)(s+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(|f''(a)|^q + m \left| f''\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{3^s(s+2)(s+3)} |f''(a)|^q + m \frac{(2^{s+2}+3^{s+2})_s + 7 \times 2^{s+2} - 3^{s+3}}{3^s(s+1)(s+2)(s+3)} \left| f''\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $F(a, b, f)$ est définie dans (1.1).

2.6 Inégalités intégrales fractionnaires de type Simpson pour les fonctions dont les dérivées sont s -convexes

Bouhadjar et Meftah [2], ont traité l'inégalité de type Simpson via les opérateurs intégraux de Riemann-Liouville en utilisant l'identité donnée dans le lemme 1.6.5.

Théorème 2.6.1 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$, dont $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left(f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{3^{1-\alpha}(b-a)^\alpha} \mathcal{S}_\alpha \right| \\ & \leq \frac{b-a}{36} \left(\left(\frac{2}{s+1} \left(1 - 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{s+1} \right) + \mathcal{L}(s+1, \alpha+1) \right) (|f'(a)| + |f'(b)|) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{3(s+1)-2\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} + \frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{s+1-2\alpha}{\alpha}} \right) (|f'(\frac{2a+b}{3})| + |f'(\frac{a+2b}{3})|) \right. \\ & \quad \left. + 2B(s+1, \alpha+1) \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où

$$\mathcal{L}(x, y) = 4B_{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}(x, y) - 4B_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}(y, x), \quad (2.1)$$

\mathcal{S}_α est définie par (1.2) et $B(., .)$ est la fonction bêta.

Théorème 2.6.2 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $0 \leq a < b$, dont $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|^q$ est s -convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, alors l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{6} \left(f(a) + 2f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 2f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{3^{1-\alpha}(b-a)^\alpha} \mathcal{S}_\alpha \right| \\ & \leq \frac{b-a}{36} \left(\left(\frac{2^{p-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \left(B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{1}{p+1} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2, \frac{1}{2}\right) \right) \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left(\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(\frac{2a+b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+2b}{3})|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{p\alpha+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{|f'(\frac{2a+b}{3})|^q + |f'(\frac{a+b}{2})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(\frac{a+b}{2})|^q + |f'(\frac{a+2b}{3})|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où \mathcal{S}_α est définie par (1.2) et $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B(., .)$ et ${}_2F_1(., ., ., .)$

dont $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|$ est convexe, alors l'inégalité fractionnaire

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2mf(a) + (3-2m)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2m)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2mf(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \mathcal{Q}(a, b, f) \right| \\
\leq & \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{2-m(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + m^{1+\frac{1}{\alpha}} \frac{2\alpha}{\alpha+1} - m^{1+\frac{2}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+2} \right) |f'(a)| \right. \\
& + \left(\frac{8-(1+2m)(\alpha+2)}{4(\alpha+2)} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + m^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \frac{\alpha}{\alpha+2} \right) \left| f'\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right| \\
& + \left(\frac{8-(3-2m)(\alpha+1)(\alpha+2)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + (1-m)^{1+\frac{1}{\alpha}} \right) \frac{2\alpha}{\alpha+1} \right. \\
& \left. - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{2}{\alpha}} + (1-m)^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \frac{\alpha}{\alpha+2} \right) \left| f'\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right| \\
& \left. + \left(\frac{2-(1-m)(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} + (1-m)^{1+\frac{2}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+2} \right) |f'(b)| \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $\mathcal{Q}(a, b, f)$ est donnée par (1.3).

Théorème 2.7.2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $a < b$ dont $f' \in L^1[a, b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors l'inégalité fractionnaire

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2mf(a) + (3-2m)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2m)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2mf(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \mathcal{Q}(a, b, f) \right| \\
\leq & \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{m^{p+\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right)}{\alpha} + \frac{(1-m)^{p+1} \cdot {}_2F_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, 1, p+2; 1-m\right)}{\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right)}{2^{p+\frac{1}{\alpha}}\alpha} + \frac{{}_2F_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right)}{2^{p+1}\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)|^q + |f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \left(\frac{(1-m)^{p+\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right)}{\alpha} + \frac{m^{p+1} \cdot {}_2F_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}, 1, p+2; m\right)}{\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $\mathcal{Q}(a, b, f)$ est définie par (1.3) et $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B(., .)$ et ${}_2F_1(., ., ., .)$ représentent respectivement la fonction bêta et la fonction hypergéométrique.

Théorème 2.7.3 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$ avec $a < b$

dont $f' \in L^1 [a, b]$. Si $|f'|^q$ est convexe, alors l'inégalité fractionnaire

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2mf(a) + (3-2m)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2m)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2mf(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \mathcal{Q}(a, b, f) \right| \\
\leq & \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{1-m(\alpha+1)}{\alpha+1} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} m^{1+\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{2-m(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} m^{1+\frac{1}{\alpha}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\alpha}{\alpha+2} m^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(a)|^q + \left(\frac{2-m(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{\alpha+2} m^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \left| f' \left(\frac{2a+b}{3} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{2-\alpha}{4(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \left| f' \left(\frac{2a+b}{3} \right) \right|^q \right. \\
& \left. + \left(\frac{4-(\alpha+1)(\alpha+2)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{\alpha+2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \left| f' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{m(\alpha+1)-\alpha}{\alpha+1} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} (1-m)^{1+\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{2-(1-m)(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha(1-m)^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha(1-m)^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} \right) \left| f' \left(\frac{a+2b}{3} \right) \right|^q + \left(\frac{2-(1-m)(\alpha+2)}{2(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{\alpha+2} (1-m)^{1+\frac{2}{\alpha}} \right) \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $\mathcal{Q}(a, b, f)$ est définie par (1.3) et $q \geq 1$.

Chapitre 3

Inégalités fractionnaires paramétrées de type Newton pour les fonctions différentiables préinvexes

Dans ce chapitre nous présenterons de nouveaux résultats concernant les inégalités fractionnaires de type Newton également connues sous le nom de seconde formule de Simpson qui sont soumis pour une éventuelle publication [44]. Nos résultats reposent essentiellement sur l'identité du lemme suivant.

Lemme 3.0.1 *Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, a + \eta(b, a)]$ avec $\eta(b, a) > 0$ et $f' \in L^1[a, a + \eta(b, a)]$, alors pour tout $\alpha > 0$ et $\xi \in [0, 1]$ l'identité suivante est vraie*

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \\ = & \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\int_0^1 (\kappa^\alpha - \xi) f' \left(a + \frac{\kappa}{3} \eta(b, a) \right) d\kappa \right. \\ & - \int_0^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right) f' \left(a + \frac{2-\kappa}{3} \eta(b, a) \right) d\kappa \\ & \left. + \int_0^1 (\xi - (1 - \kappa)^\alpha) f' \left(a + \frac{2+\kappa}{3} \eta(b, a) \right) d\kappa \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) &= \frac{1}{3} \left(\xi f(a) + \frac{3-2\xi}{2} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b, a)\right) \right) \\ &\quad + \frac{3-2\xi}{2} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b, a)\right) + \xi f(a + \eta(b, a)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(a, b, f) &= I_{\left(a+\frac{1}{3}\eta(b,a)\right)^-}^\alpha f(a) + I_{\left(a+\frac{1}{3}\eta(b,a)\right)^+}^\alpha f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b, a)\right) \\ &\quad + I_{\left(a+\frac{2}{3}\eta(b,a)\right)^+}^\alpha f(a + \eta(b, a)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Preuve. Soit

$$I = I_1 - I_2 + I_3, \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (\kappa^\alpha - \xi) f'\left(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a)\right) d\kappa, \\ I_2 &= \int_0^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right) f'\left(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b, a)\right) d\kappa, \\ I_3 &= \int_0^1 (\xi - (1-\kappa)^\alpha) f'\left(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b, a)\right) d\kappa. \end{aligned}$$

En intégrant par parties I_1 , on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{\eta(b,a)} (\kappa^\alpha - \xi) f\left(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a)\right) \Big|_{\kappa=0}^{\kappa=1} \\ &\quad - \frac{3\alpha}{\eta(b,a)} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} f\left(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a)\right) d\kappa \\ &= \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b, a)\right) + \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a) \\ &\quad - \frac{3\alpha}{\eta(b,a)} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} f\left(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a)\right) d\kappa \\ &= \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b, a)\right) + \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a) \\ &\quad - \frac{3^{\alpha+1}\alpha}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} \int_a^{a+\frac{1}{3}\eta(b,a)} (u-a)^{\alpha-1} f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a) \\
&\quad - \frac{3^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} I_{\left(a+\frac{1}{3}\eta(b,a)\right)^-}^{\alpha} f(a).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{3}{\eta(b,a)} \left(\kappa^{\alpha} - \frac{1}{2}\right) f\left(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b,a)\right) \Big|_{\kappa=0}^{\kappa=1} \\
&\quad + \frac{3\alpha}{\eta(b,a)} \int_0^1 \kappa^{\alpha-1} f\left(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b,a)\right) d\kappa \\
&= -\frac{3}{2\eta(b,a)} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) - \frac{3}{2\eta(b,a)} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) \\
&\quad + \frac{3^{\alpha+1}\alpha}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} \int_{a+\frac{1}{3}\eta(b,a)}^{a+\frac{2}{3}\eta(b,a)} \left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a) - u\right)^{\alpha-1} f(u) du \\
&= -\frac{3}{2\eta(b,a)} f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) - \frac{3}{2\eta(b,a)} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) \\
&\quad + \frac{3^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} I_{\left(a+\frac{1}{3}\eta(b,a)\right)^+}^{\alpha} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

et

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{3}{\eta(b,a)} (\xi - (1-\kappa)^{\alpha}) f\left(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b,a)\right) \Big|_{\kappa=0}^{\kappa=1} \\
&\quad - \frac{3\alpha}{\eta(b,a)} \int_0^1 (1-\kappa)^{\alpha-1} f\left(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b,a)\right) d\kappa \\
&= \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a + \eta(b,a)) + \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) \\
&\quad - \frac{3\alpha}{\eta(b,a)} \int_0^1 (1-\kappa)^{\alpha-1} f\left(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b,a)\right) d\kappa \\
&= \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a + \eta(b,a)) + \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) \\
&\quad - \frac{3^{\alpha+1}\alpha}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} \int_{a+\frac{2}{3}\eta(b,a)}^{a+\eta(b,a)} (a + \eta(b,a) - u)^{\alpha-1} f(u) du \\
&= \frac{3\xi}{\eta(b,a)} f(a + \eta(b,a)) + \frac{3(1-\xi)}{\eta(b,a)} f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) \\
&\quad - \frac{3^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha+1}(b,a)} I_{\left(a+\frac{2}{3}\eta(b,a)\right)^+}^{\alpha} f(a + \eta(b,a)).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En substituant (3.5)-(3.7) dans (3.4), puis en multipliant l'identité résultante par $\frac{\eta(b,a)}{9}$, on aboutit au résultat désiré. ■

Notre premier résultat concerne les fonctions dont la valeur absolue de la première dérivée est préinvexe.

Théorème 3.0.1 *Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, a + \eta(b, a)]$ avec $\eta(b, a) > 0$ et $f' \in L^1[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f'|$ est préinvexe, alors*

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\frac{30+11\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(a)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{30+7\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{2\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(b)| \right) \end{aligned}$$

est satisfaite.

Preuve. A partir du Lemme 3.0.1, les propriétés de la valeur absolue et la préinvexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| |f'(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a))| d\kappa \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| |f'(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b, a))| d\kappa \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| |f'(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b, a))| d\kappa \right) \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \left(\left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) |f'(a)| + \frac{\kappa}{3} |f'(b)| \right) d\kappa \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| \left(\left(1 - \frac{2-\kappa}{3}\right) |f'(a)| + \frac{2-\kappa}{3} |f'(b)| \right) d\kappa \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \left(\left(1 - \frac{2+\kappa}{3}\right) |f'(a)| + \left(\frac{2+\kappa}{3}\right) |f'(b)| \right) d\kappa \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) d\kappa + \int_0^1 \left|\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right| \left(1 - \frac{2-\kappa}{3}\right) d\kappa \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \left(1 - \frac{2+\kappa}{3}\right) d\kappa \right) |f'(a)| \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 \left|\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa + \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \frac{\kappa}{3} d\kappa \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \frac{2+\kappa}{3} d\kappa \right) |f'(b)| \right). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\psi_1(\alpha, \xi) &= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) d\kappa = \int_0^1 |(1-\kappa)^\alpha - \xi| \frac{2+\kappa}{3} d\kappa, \\
\psi_2(\alpha, \xi) &= \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \left(1 - \frac{2+\kappa}{3}\right) d\kappa = \int_0^1 |\xi - \kappa^\alpha| \frac{\kappa}{3} d\kappa, \\
\mathcal{L}_1(\alpha) &= \int_0^1 \left|\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right| \left(1 - \frac{2-\kappa}{3}\right) d\kappa
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}_2(\alpha) = \int_0^1 \left|\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa.$$

On calcule les intégrales, commençons d'abord par $\psi_2(\alpha, \xi)$:

$$\begin{aligned}
\psi_2(\alpha, \xi) &= \int_0^1 |\xi - \kappa^\alpha| \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \int_0^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} (\xi - \kappa^\alpha) \frac{\kappa}{3} d\kappa + \int_{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (\kappa^\alpha - \xi) \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \left[\frac{\xi \kappa^2}{6} - \frac{\kappa^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)} \right]_{\kappa=0}^{\kappa=\xi^{\frac{1}{\alpha}}} + \left[\frac{\kappa^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)} - \frac{\xi \kappa^2}{6} \right]_{\kappa=\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^{\kappa=1} \\
&= \frac{1}{3(\alpha+2)} - \frac{\xi}{6} + \frac{\alpha}{3(\alpha+2)} \xi^{1+\frac{2}{\alpha}}. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Calculons ψ_1 :

$$\begin{aligned}
\psi_1(\alpha, \xi) &= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) d\kappa \\
&= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| d\kappa - \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \int_0^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} (\xi - \kappa^\alpha) d\kappa + \int_{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (\kappa^\alpha - \xi) d\kappa - \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \left[\xi\kappa - \frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{\kappa=0}^{\kappa=\xi^{\frac{1}{\alpha}}} + \left[\frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \xi\kappa \right]_{\kappa=\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^{\kappa=1} - \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \frac{2\alpha+5}{3(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{5\xi}{6} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{1+\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{3(\alpha+2)} \xi^{1+\frac{2}{\alpha}}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Calculons $\mathcal{L}_2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\alpha) &= \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| d\kappa - \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} - \kappa^\alpha \right) d\kappa + \frac{2}{3} \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right) d\kappa \\
&\quad - \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} - \kappa^\alpha \right) \frac{\kappa}{3} d\kappa - \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right) \frac{\kappa}{3} d\kappa \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{\kappa=0}^{\kappa=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{2}{3} \left[\frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\kappa}{2} \right]_{\kappa=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^{\kappa=1} \\
&\quad - \left[\frac{\kappa^2}{12} - \frac{\kappa^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)} \right]_{\kappa=0}^{\kappa=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - \left[\frac{\kappa^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)} - \frac{\kappa^2}{12} \right]_{\kappa=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^{\kappa=1} \\
&= \frac{6-5\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Calculons $\mathcal{L}_1(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\alpha) &= \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \left(1 - \frac{2-\kappa}{3} \right) d\kappa \\
&= \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| d\kappa - \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa \\
&= \int_0^{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} - \kappa^\alpha \right) d\kappa + \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right) d\kappa - \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa \\
&= \left[\frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_{\kappa=0}^{\kappa=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}} + \left[\frac{\kappa^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\kappa}{2} \right]_{\kappa=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{\alpha}}}^{\kappa=1} - \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa \\
&= \frac{6-\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

En substituant (3.9)-(3.12) dans (3.8), nous obtenons le résultat souhaité. ■

Corollaire 3.0.1 Dans le Théorème 3.0.1, si on prend $\eta(b, a) = b - a$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2\xi)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2\xi f(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \Theta(a, b, f) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{30+11\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{30+7\alpha-3\alpha^2}{12(\alpha+1)(\alpha+2)} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{2\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(b)| \right),
\end{aligned}$$

où

$$\Theta(a, b, f) = I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^-}^\alpha f(a) + I_{\left(\frac{2a+b}{3}\right)^+}^\alpha f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + I_{\left(\frac{a+2b}{3}\right)^+}^\alpha f(b). \tag{3.13}$$

Corollaire 3.0.2 Dans le Théorème 3.0.1, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(a+\frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + (3-2\xi)f\left(a+\frac{2}{3}\eta(b,a)\right) + 2\xi f(a+\eta(b,a))}{6} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\
& \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\frac{45}{72} - \xi + \xi^2 \right) (|f'(a)| + |f'(b)|).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.3 Dans le Théorème 3.0.1, si on prend $\xi = \frac{3}{8}$, on obtient la seconde inégalité de Simpson

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_{\frac{3}{8}}(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\frac{42-5\alpha-15\alpha^2}{24(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(a)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{42-13\alpha-15\alpha^2}{24(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{3}{8}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{2\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(b)| \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.4 Dans le Corollaire 3.0.3, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)+3f(a+\frac{1}{3}\eta(b,a))+3f(a+\frac{2}{3}\eta(b,a))+f(a+\eta(b,a))}{8} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\ & \leq \frac{25\eta(b,a)}{576} (|f'(a)| + |f'(b)|). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.5 Dans le Corollaire 3.0.4, si on prend $\eta(b, a) = b - a$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)}{8} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(z) dz \right| \\ & \leq \frac{25(b-a)}{576} (|f'(a)| + |f'(b)|). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.6 Dans le Théorème 3.0.1, si on prend $\xi = \frac{39}{80}$, on obtient la seconde inégalité de Simpson corrigée

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_{\frac{39}{80}}(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\frac{366-131\alpha-177\alpha^2}{240(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{39}{80}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(a)| \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{366-211\alpha-177\alpha^2}{240(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{39}{80}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{2\alpha}{3(\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\alpha}{6(\alpha+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \right) |f'(b)| \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.7 Dans le Corollaire 3.0.6, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{13f(a)+27f(a+\frac{1}{3}\eta(b,a))+27f(a+\frac{2}{3}\eta(b,a))+13f(a+\eta(b,a))}{80} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\ & \leq \frac{2401\eta(b,a)}{57600} (|f'(a)| + |f'(b)|). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.8 Dans le Corollaire 3.0.7, si on prend $\eta(b, a) = b - a$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{13f(a) + 27f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 27f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 13f(b)}{80} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(z) dz \right| \\ & \leq \frac{2401(b-a)}{57600} (|f'(a)| + |f'(b)|). \end{aligned}$$

Le résultat suivant traite le cas où la première dérivée en valeur absolue à une certaine puissance $q > 1$, est préinvexe.

Théorème 3.0.2 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, a + \eta(b, a)]$ avec $\eta(b, a) > 0$ et $f' \in L^1[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f'|^q$ est préinvexe, alors

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{(1-\xi)^{1+p} {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1, p+2; 1-\xi\right)}{\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ & \quad \times \left(\left(\frac{5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{{}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right)}{\alpha 2^{1+p}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

est satisfaite, où $q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B(\cdot, \cdot)$ et ${}_2F_1(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ représentent respectivement la fonction bêta et la fonction hypergéométrique.

Preuve. A partir du Lemme 3.0.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la préinvexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left((1 - \frac{\kappa}{3}) |f'(a)|^q + \frac{\kappa}{3} |f'(b)|^q \right) d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left((1 - \frac{2-\kappa}{3}) |f'(a)|^q + \frac{2-\kappa}{3} |f'(b)|^q \right) d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 |\xi - (1 - \kappa)^\alpha|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left((1 - \frac{2+\kappa}{3}) |f'(a)|^q + \frac{2+\kappa}{3} |f'(b)|^q \right) d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{5}{6} |f'(a)|^q + \frac{1}{6} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2} |f'(a)|^q + \frac{1}{2} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 |\xi - (1 - \kappa)^\alpha|^p d\kappa \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{6} |f'(a)|^q + \frac{5}{6} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi|^p d\kappa = \int_0^1 |\xi - (1 - \kappa)^\alpha|^p d\kappa, \\
I_2 &= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}|^p d\kappa.
\end{aligned}$$

Calculons I_1 et I_2 , commençons d'abord par I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi|^p d\kappa \\
&= \int_0^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} (\xi - \kappa^\alpha)^p d\kappa + \int_{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (\kappa^\alpha - \xi)^p d\kappa.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} (\xi - \kappa^\alpha)^p d\kappa &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\xi u^p (\xi - u)^{\frac{1}{\alpha}-1} du \quad [u = \xi - \kappa^\alpha] \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (\xi x)^p (\xi - \xi x)^{\frac{1}{\alpha}-1} \xi dx \quad [u = \xi x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} \int_0^1 x^p (1-x)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(p+1, \frac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\xi^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (\kappa^\alpha - \xi)^p d\kappa &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{1-\xi} (1-\xi-u)^p (1-u)^{\frac{1}{\alpha}-1} du \quad [\kappa^\alpha = 1-u] \\
&= \frac{(1-\xi)^{p+1}}{\alpha} \int_0^1 (1-x)^p (1-(1-\xi)x)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \quad [u = (1-\xi)x] \\
&= \frac{(1-\xi)^{p+1}}{\alpha(p+1)} \frac{1}{B(1, p+1)} \int_0^1 (1-x)^p (1-(1-\xi)x)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{(1-\xi)^{1+p}}{\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; 1-\xi\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(p+1, \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{(1-\xi)^{1+p}}{\alpha(p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; 1-\xi\right).$$

Calculons I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left| \kappa^\alpha - \frac{1}{2} \right|^p d\kappa \\
&= \int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} - \kappa^\alpha\right)^p d\kappa + \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right)^p d\kappa.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} - \kappa^\alpha\right)^p d\kappa &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} u^p \left(\frac{1}{2} - u\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} du \quad [u = \frac{1}{2} - \kappa^\alpha] \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x\right)^p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{2} dx \quad [u = \frac{1}{2}x] \\
&= \frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} \int_0^1 x^p (1-x)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} B\left(p+1, \frac{1}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}^1 \left(\kappa^\alpha - \frac{1}{2}\right)^p d\kappa &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - u\right)^p (1 - u)^{\frac{1}{\alpha}-1} du \quad [\kappa^\alpha = 1 - u] \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1 - x)\right)^p \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{1}{2} dx \quad [u = \frac{1}{2}x] \\
&= \frac{1}{\alpha 2^{p+1}} \int_0^1 (1 - x)^p \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{1}{\alpha 2^{p+1} (p+1)} \frac{1}{B(1, p+1)} \int_0^1 (1 - x)^p \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} dx \\
&= \frac{1}{\alpha 2^{p+1} (p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Alors

$$I_2 = \frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} B\left(p+1, \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha 2^{1+p} (p+1)} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right).$$

En substituant I_1 et I_2 dans (3.14), nous obtenons l'inégalité requise. ■

Corollaire 3.0.9 Dans le Théorème 3.0.2, si on prend $\eta(b, a) = b - a$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2\xi)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2\xi f(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \Theta(a, b, f) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{(1-\xi)^{1+p} \cdot {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; 1-\xi\right)}{\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \times \left(\left(\frac{5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{{}_2F_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right)}{\alpha 2^{1+p} (p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où $\Theta(a, b, f)$ est définie par (3.13).

Corollaire 3.0.10 Dans le Théorème 3.0.2, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) + 2\xi f(a+\eta(b,a))}{6} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\
& \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\frac{\xi^{p+1} + (1-\xi)^{1+p}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.11 Dans le Théorème 3.0.2, si nous utilisons l'inégalité discrète des moyenne d'ordre r i.e. $x^r + y^r \leq 2^{1-r} (x + y)^r$ pour $x, y \geq 0$ et $0 \leq r \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\
& \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(2 \left(\frac{\xi^{p+\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{(1-\xi)^{1+p} \cdot {}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1, p+2; 1-\xi\right)}{\alpha(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha 2^{p+\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, p+1\right) + \frac{{}_2F_1\left(1-\frac{1}{\alpha}, 1, p+2; \frac{1}{2}\right)}{\alpha 2^{1+p}(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.12 Dans le Corollaire 3.0.11, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) + 2\xi f(a+\eta(b,a))}{6} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\
& \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(2 \left(\frac{\xi^{p+1} + (1-\xi)^{1+p}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.0.3 Soit $f : [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, a + \eta(b, a)]$ avec $\eta(b, a) > 0$ et $f' \in L^1[a, a + \eta(b, a)]$. Si $|f'|^q$ est préinvexe, alors

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\
& \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\frac{1}{\alpha+1} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left((\psi_1(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_2(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\psi_2(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_1(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\mathcal{L}_1(\alpha) |f'(a)|^q + \mathcal{L}_2(\alpha) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

est satisfaite, où $q \geq 1$.

Preuve. A partir du Lemme 3.0.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q et de la préinvexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\
& \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| |f'(a + \frac{\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| |f'(a + \frac{2-\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| |f'(a + \frac{2+\kappa}{3}\eta(b, a))|^q d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \leq \frac{\eta(b, a)}{9} \left(\left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(|f'(a)|^q \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \left(1 - \frac{\kappa}{3}\right) d\kappa + |f'(b)|^q \int_0^1 |\kappa^\alpha - \xi| \frac{\kappa}{3} d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(|f'(a)|^q \int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| \left(1 - \frac{2-\kappa}{3}\right) d\kappa + |f'(b)|^q \int_0^1 |\kappa^\alpha - \frac{1}{2}| \frac{2-\kappa}{3} d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(|f'(a)|^q \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \left(1 - \frac{2+\kappa}{3}\right) d\kappa + |f'(b)|^q \int_0^1 |\xi - (1-\kappa)^\alpha| \frac{2+\kappa}{3} d\kappa \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\left(\frac{1}{\alpha+1} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left((\psi_1(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_2(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\psi_2(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_1(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\mathcal{L}_1(\alpha) |f'(a)|^q + \mathcal{L}_2(\alpha) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.9)-(3.12). La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.0.13 Dans le Théorème 3.0.3, si on prend $\eta(b, a) = b - a$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + (3-2\xi)f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + 2\xi f(b)}{6} - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \Theta(a, b, f) \right| \\
& \leq \frac{b-a}{9} \left(\left(\frac{1}{\alpha+1} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left((\psi_1(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_2(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\psi_2(\alpha, \xi) |f'(a)|^q + \psi_1(\alpha, \xi) |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\mathcal{L}_1(\alpha) |f'(a)|^q + \mathcal{L}_2(\alpha) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right),
\end{aligned}$$

où $\Theta(a, b, f)$ est définie par (3.13).

Corollaire 3.0.14 Dans le Théorème 3.0.3, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) + 2\xi f(a + \eta(b,a))}{6} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\
& \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(\frac{(1-\xi)^2 + \xi^2}{2} \left(\left(\frac{(7-15\xi+18\xi^2-2\xi^3)|f'(a)|^q + (2-3\xi+2\xi^3)|f'(b)|^q}{9((1-\xi)^2+\xi^2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{(2-3\xi+2\xi^3)|f'(a)|^q + (7-15\xi+18\xi^2-2\xi^3)|f'(b)|^q}{9((1-\xi)^2+\xi^2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.0.15 Dans le Théorème 3.0.3, si nous utilisons l'inégalité discrète des moyenne d'ordre q , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{S}_\xi(a, b, \eta, f) - \frac{3^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \mathcal{R}(a, b, f) \right| \\ & \leq \frac{\eta(b,a)}{9} \left(2 \left(\frac{1}{\alpha+1} - \xi + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \xi^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} (\psi_1(\alpha, \xi) + \psi_2(\alpha, \xi))^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\mathcal{L}_1(\alpha) |f'(a)|^q + \mathcal{L}_2(\alpha) |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right). \end{aligned}$$

Corollaire 3.0.16 Dans le Corollaire 3.0.15, si on prend $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2\xi f(a) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{1}{3}\eta(b,a)\right) + (3-2\xi)f\left(a + \frac{2}{3}\eta(b,a)\right) + 2\xi f(a+\eta(b,a))}{6} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(z) dz \right| \\ & \leq \frac{\eta(b,a)}{36} \left(4(1-\xi)^2 + 4\xi^2 + 1 \right) \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des inégalités de type $\frac{3}{8}$ -Simpson dite aussi inégalité de type Newton, et d'autre part essayer d'établir de nouvelles estimations concernant ce type d'inégalités.

La première partie représente un rappel de certaines classes de fonctions, fonctions spéciales, intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie, nous avons présenté certains résultats concernant les inégalités de type Simpson classique et fractionnaire via certains genres de convexités classiques et généralisées.

Tandis que la troisième partie a été dédiée entièrement à des nouveaux résultats que nous avons établis concernant les inégalités intégrales fractionnaires de type Simpson via la pré-convexité. Notons que ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Bibliographie

- [1] H. Angulo, J. Gimenez, A. M. Moros and K. Nikodem, On strongly h -convex functions. *Ann. Funct. Anal.* 2 (2011), no. 2, 85–91.
- [2] S. Bouhadjar and B. Meftah, Fractional Simpson like type inequalities for differentiable s -convex functions. *Jordan J. Math. Stat.* 16 (2023), no. 3, 563–584.
- [3] B. Bouharket, N. Azzouz and H. Budak, Hermite-Hadamard type inequalities for new conditions on h -convex functions via ψ -Hilfer integral operators. *Anal. Math. Phys.* 14 (2024), no. 2, Paper No. 35, 20 pp.
- [4] N. Boutelhig, B. Meftah, W. Saleh and A. Lakhdari, Parameterized Simpson-like inequalities for differentiable Bounded and Lipschitzian functions with application example from management science. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 19 (2023), no.1, 79-91.
- [5] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis. *Ann. of Math. (2)* 102 (1975), no. 1, 159–182.
- [6] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 23 (1978), no. 37, 13–20.
- [7] H. Budak, S. Khan, M. A. Ali and Y.-M. Chu, Refinements of quantum Hermite-Hadamard-type inequalities. *Open Math.* 19 (2021), no. 1, 724–734.
- [8] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. *Mathematics and its Applications (East European Series)*, 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.
- [9] J. Chen and X. Huang, Some new inequalities of Simpson’s type for s -convex functions via fractional integrals. *Filomat* 31 (2017), no. 15, 4989–4997.

- [10] T. Chiheb, N. Boumaza and B. Meftah, Some new Simpson-like type inequalities via prequasiinvexity. *Transylv. J. Math. Mech.* 12 (2020), no.1, 1-10.
- [11] T. Chiheb, B. Meftah, A. Moumen, M. B. Mesmouli and M. Bouye, Some Simpson-like Inequalities Involving the (\mathbf{s}, \mathbf{m}) -Preinvexity. *Symmetry*, 15 (2023), no. 12, 2178.
- [12] Z. Dahmani and N. Bedjaoui, Some generalized integral inequalities. *J. Adv. Res. Appl. Math.* 3 (2011), no. 4, 58–66.
- [13] D. Foukrach and B. Meftah, Some new generalized result of Gronwall-Bellman-Bihari type inequality with some singularity. *Filomat.* 34 (2020), no. 10, 3299–3310.
- [14] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.* 80 (1981), no. 2, 545–550.
- [15] J. Hua, B.-Y. Xi and F. Qi, Some new inequalities of Simpson type for strongly \mathbf{s} -convex functions. *Afr. Mat.* 26 (2015), no. 5-6, 741–752.
- [16] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* 34 (2007), 83–88.
- [17] N. Laribi and B. Meftah, $\mathbf{3}/\mathbf{8}$ -Simpson type inequalities for functions whose modulus of first derivatives and its \mathbf{q} -th powers are \mathbf{s} -convex in the second sense. *Jordan J. Math. Stat.* 16 (2023), no. 1, 79–98.
- [18] M. A. Latif and M. Shoaib, Hermite-Hadamard type integral inequalities for differentiable \mathbf{m} -preinvex and $(\mathbf{\alpha}, \mathbf{m})$ -preinvex functions. *J. Egyptian Math. Soc.* 23 (2015), no. 2, 236–241.
- [19] J.-Y. Li, On Hadamard-type inequalities for \mathbf{s} -preinvex functions. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)* 27(2010), no. 4, p. 003.
- [20] Y.-X. Li, M. A. Ali, H. Budak, M. Abbas and Y.-M. Chu, A new generalization of some quantum integral inequalities for quantum differentiable convex functions. *Adv. Difference Equ.* 2021, Paper No. 225, 15 pp.
- [21] L. Mahmoudi and B. Meftah, Parameterized Simpson-like inequalities for differential \mathbf{s} -convex functions. *Analysis*, 43 (2023), no. 1, 59-70.
- [22] B. Meftah, Hermite-Hadamard's inequalities for functions whose first derivatives are (\mathbf{s}, \mathbf{m}) -preinvex in the second sense, *Journal of New Theory*, 10 (2016), 54–65.
- [23] B. Meftah, Ostrowski inequalities for functions whose first derivatives are logarithmically preinvex. *Chin. J. Math. (N.Y.)* 2016, Art. ID 5292603, 10 pp.

- [24] B. Meftah, New Ostrowski's inequalities. *Rev. Colombiana Mat.* 51 (2017), no. 1, 57-69.
- [25] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for n -times differentiable mappings which are quasi-convex. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 32 (2017), no. 3, 319-327.
- [26] B. Meftah, Ostrowski inequality for functions whose first derivatives are s -preinvex in the second sense. *Khayyam J. Math.* 3 (2017), no. 1, 61-80.
- [27] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are s -preinvex in the second sense. *Int. J. of Anal. and App.* 15 (2017), no. 2, 146-154.
- [28] B. Meftah, On some Gamidov integral inequalities on time scales and applications. *Real Anal. Exchange.* 42 (2017), no. 2, 391-409.
- [29] B. Meftah, Some Gamidov Like Integral Inequalities on Time Scales and Applications. *Commun. Nonlinear Anal.* 3 (2017), no. 1, 23-33.
- [30] B. Meftah, Fractional Hermite-Hadamard type integral inequalities for functions whose modulus of derivatives are co-ordinated \log -preinvex. *Punjab Univ. J. Math. (Lahore).* 51 (2019), no. 2, 21-37.
- [31] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose certain power of modulus of the first derivatives are prequasiinvex via power mean inequality. *J. Appl. Anal.* 25 (2019), no 1, 83-90.
- [32] B. Meftah and A. Azaizia, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose first derivatives are MT -preinvex. *Revista De Matemáticas De la Universidad del Atlántico Páginas.* 6 (2019), no. 1, 33-43.
- [33] B. Meftah and A. Azaizia, Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are strongly β -convex. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* 39 (2019), no. 4, Mathematics, 126-147.
- [34] B. Meftah, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose modulus of the first derivatives are prequasiinvex. *J. Appl. Anal.* 25 (2019), no 2, 165-171.
- [35] B. Meftah, M. Merad, and A. Souahi, Fractional Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s -preinvex. *Extracta Math.* 34 (2019), no. 2, 285-301.
- [36] B. Meftah, M. Merad, N. Ouanas and A. Souahi, Some new Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose n^{th} derivatives are convex. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 23 (2019), no. 2, 163-178.

- [37] B. Meftah and D. Foukrach, Some new Gronwall–Bellman–Bihari type integral inequality associated with ψ -Hilfer fractional derivative. *Analysis*, 43(2), 117-127.
- [38] B. Meftah and D. Foukrach. Some new Gamidov type integral inequalities associated with ψ -fractional operators. *Real Anal. Exchange* 48 (2023), no. 2, 299–314.
- [39] M. Merad, B. Meftah and N. Ouanas, Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for n -times r -convex functions. *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 21 (2018), no. 2, 253-292.
- [40] S. K. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [41] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. *Mathematics and its Applications (East European Series)*, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [42] N. Nasri, F. Aissaoui, K. Bouhali, A. Frioui, B. Meftah, K. Zennir and T. Radwan, Fractional weighted midpoint-type inequalities for s -convex functions. *Symmetry*, 15 (2023),no. 3, 612.
- [43] N. Nasri, B. Meftah, A. Moumen and H. Saber, Fractional $3/8$ -Simpson type inequalities for differentiable convex functions. *AIMS Math.* 9 (2024), no. 3, 5349–5375.
- [44] N. Nasri, F. Aissaoui, A. Lahiouel and B. Meftah, Fractional parameterized newton type inequalities for differentiable preinvex functions. Submitted.
- [45] B. G. Pachpatte, On some generalizations of Bellman’s lemma. *J. Math. Anal. Appl.* 51 (1975), 141–150.
- [46] B. G. Pachpatte, On some new integral and integrodifferential inequalities in two independent variables and their applications. *J. Differential Equations* 33 (1979), no. 2, 249–272.
- [47] B. G. Pachpatte, On Opial-type integral inequalities. *J. Math. Anal. Appl.* 120 (1986), no. 2, 547–556.
- [48] B. G. Pachpatte, On a certain inequality arising in the theory of differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 182 (1994), no. 1, 143–157.
- [49] B. G. Pachpatte, On some new inequalities related to certain inequalities in the theory of differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 189 (1995), no. 1, 128–144.

- [50] B. G. Pachpatte, On some new inequalities similar to Hilbert's inequality. *J. Math. Anal. Appl.* 226 (1998), no. 1, 166–179.
- [51] B. G. Pachpatte, On some fundamental integral inequalities and their discrete analogues. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.* 2 (2001), no. 2, Article 15, 13 pp.
- [52] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. *Mathematics in Science and Engineering*, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
- [53] R. Pini, Invexity and generalized convexity. *Optimization* 22 (1991), no. 4, 513–525.
- [54] E. D. Rainville, *Special functions*. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.
- [55] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Özdemir, On new inequalities of Simpson's type for s -convex functions. *Comput. Math. Appl.* 60 (2010), no. 8, 2191–2199.
- [56] M. Z. Sarikaya, H. Budak and H. Usta, On generalized the conformable fractional calculus. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 9 (2019), no. 4, 792-799.
- [57] G. Toader, Some generalizations of the convexity. *Proceedings of the colloquium on approximation and optimization (Cluj-Napoca, 1985)*, 329–338, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1985.
- [58] B.-Y. Xi, Y. Wan and F. Qi, Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for extended (s, m) -convex functions. *Transylv. J. Math. Mech.* 5 (2013), no. 1, 69–84.
- [59] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. *J. Math. Anal. Appl.* 136 (1988), no. 1, 29–38.