

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université du 20 Août 1955 Skikda
Faculté de Technologie
Département de Génie Electrique



N° d'ordre : D012126007D

Thème

Contribution à l'identification et l'estimation des systèmes d'ordre fractionnaire

Par

Yamina Ali Larnene

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Sciences

Spécialité : Electronique

Option : Traitement du signal

Soutenue publiquement devant le jury

Président du jury	El Hadi Guechi	Professeur	Université de Skikda
Rapporteur	Samir Ladaci	Professeur	École National Polytechnique d'Alger
Co-Rapporteur	Aissa Belmeguenai	Professeur	Université de Skikda
Examineur	Tahar Bensouici	MCA	Université de Constantine1
Examineur	Yahia Kourd	Professeur	Université de Souk Ahras

Année universitaire 2025-2026

Dédicaces

À mes très chers parents

À mes frères et sœurs

À mes nièces et à mes neveux

À ma grande famille

À toutes les personnes qui m'aiment et qui m'ont donné la force de continuer...

Remerciements

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la volonté et le courage d'achever cette thèse de doctorat.

Cette thèse est le résultat d'un effort de plusieurs années de travail sous la direction du Monsieur Professeur Samir Ladaci de l'École polytechnique d'Alger. Je voudrais lui adresser mes sincères remerciements non seulement pour sa compétence scientifique, sa disponibilité, sa gentillesse mais aussi pour sa tolérance et sa patience.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Aïssa Belmequeni pour sa disponibilité et ses encouragements, qui m'ont permis d'achever cette thèse, ainsi que pour avoir accepté d'être mon co-encadreur. Grâce à lui, j'ai pu m'inscrire à l'Université de Skikda.

Je souhaiterais également adresser mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur El Hadi Guechi, de l'Université du 20 Août 1955 de Skikda, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger ma thèse de doctorat en sciences. Mes remerciements vont également au Monsieur Tahar Bensouici MCA de l'Université du Mentouri de Constantine 1, au Monsieur Yahia Kourd Professeur de l'Université du Souk Ahras, d'avoir accepté de lire et d'évaluer ma thèse.

J'adresse un grand merci à tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin durant ces années de recherche et d'études.

Résumé

L'identification des systèmes par modèle non entier a été initiée dans les années 1990, et de nombreux résultats ont été obtenus depuis. Néanmoins, la plupart de ces résultats utilisent des méthodes appartenant à la famille des méthodes à erreur de prédiction, qui sont des méthodes classiques basées sur la régression linéaire et qui permettent d'estimer les paramètres du système. Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux précédemment réalisés dans ce domaine de recherche. L'objectif de cette thèse est l'identification et l'estimation des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'identification d'un modèle linéaire formulé à partir d'une équation différentielle fractionnaire modèle ($H_{n_1 n_2}$). L'étude s'appuie également sur une structure à blocs orientée de type Hammerstein, combinant une dynamique linéaire fractionnaire et une non-linéarité statique, dans laquelle les paramètres du système fractionnaire ainsi que ceux du bloc non linéaire sont estimés simultanément. Ces approches développées reposent sur la représentation en régression linéaire des équations différentielles fractionnaires, utilisant la méthode à erreur de prédiction fondée sur les moindres carrés récursifs. Dans ce contexte, nous avons aussi proposé et développé un modèle de suspension semi-actif à base de fluide électrorhéologique (ER) d'ordre fractionnaire basé sur une représentation en espace d'état, offrant un cadre plus flexible et représentatif pour améliorer le processus d'identification et d'analyse du système. Les résultats de simulation montrent l'efficacité de cette approche.

Mots-clés : Identification, Modélisation, Systèmes d'ordre fractionnaire, Calcul fractionnaire, Estimation, Identification en temps réel

Abstract

The identification of systems based on non-integer models began in the 1990s, and significant progress has been made since. However, the majority of these results are obtained using prediction-error methods, which are classical techniques grounded in linear regression, these methods enable the estimation of the system parameters. Nevertheless, the majority of these studies utilize prediction-error-based methods, which are classical linear regression techniques enabling the estimation of system parameters. The objective of this thesis is the identification and estimation of linear and nonlinear fractional-order systems. More specifically, we focus on the identification of a linear model formulated from a fractional differential equation of the

model ($H_{n_1 n_2}$) type. The study also relies on a block-oriented Hammerstein structure, combining a fractional linear dynamic with a static nonlinearity, in which the parameters of both the fractional system and the nonlinear block are estimated simultaneously. These approaches are built upon the linear regression formulation of fractional differential equations, utilizing the prediction-error method founded on recursive least squares. In this context, we also proposed and developed a fractional-order semi-active suspension model based on electrorheological (ER) fluid and formulated in a state-space representation. This model provides a more flexible and representative framework for improving the system identification and analysis process. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Identification, Modeling, Fractional Order Systems, Fractional Calculus, Estimation, Real-time identification.

ملخص

بدأ تحديد الأنظمة باستخدام النماذج ذات الرتبة الكسرية في التسعينيات، وقد تم تحقيق العديد من النتائج منذ ذلك الحين. ومع ذلك، فإن معظم هذه النتائج تعتمد على أساليب من عائلة طرق خطأ التنبؤ، وهي تقنيات كلاسيكية مبنية على الانحدار الخطي وتسمح بتقدير معاملات النظام. تأتي هذه الدراسة في إطار استكمال الأعمال المنجزة سابقاً في هذا المجال البحثي. و تهدف إلى تحديد وتقدير الأنظمة الخطية وغير الخطية ذات الرتبة الكسرية مع التركيز بشكل خاص على تحديد نموذج ($H_{n_1 n_2}$). تستند هذه الدراسة كذلك إلى نموذج Hammerstein الذي يجمع بين جزء ديناميكي خطي كسري و جزء لاخطي ساكن، حيث يتم تقدير معاملات النظام الكسري و معاملات الجزء الغير الخطي بشكل متزامن. وتعتمد هذه الأساليب المطورة على تمثيل المعادلات التفاضلية الكسرية باستخدام الانحدار الخطي، مع استعمال طريقة خطأ التنبؤ القائمة على المربعات الصغرى المتكررة. في هذا السياق، قمنا أيضاً باقتراح وتطوير نموذج تعليق شبه نشط ذو سائل كهرو-ريولوجي من الرتبة الكسرية مستنداً إلى تمثيل فضاء الحالة. ويوفر هذا النموذج إطاراً أكثر مرونة وتمثيلاً لتحسين عملية تحديد وتحليل النظام. تؤكد نتائج المحاكاة فعالية الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: التعرف، النمذجة، الأنظمة ذات الرتب الكسرية، الحساب الكسري، التقدير، التعرف في الزمن الحقيقي.

Liste des travaux scientifiques réalisés

Publication internationale

Ali Larnene Y., Ladaci S., Belmeguenai A., " Fractional-order model-based robust identification for a vehicle semi-active electro-rheological suspension system ", International Journal of Advanced Mechatronic Systems, vol.11, No.2, p.111-119,2024.

DOI : 10.1504/IJAMECHS.2024.139173

Publication nationale

Ali Larnene Y., Ladaci S., Belmeguenai A., " RLS-based Identification of fractional order $H_{n_1n_2}$ system using the Singularity Function approximation ". Algerian Journal of Signals and Systems, Algerian Journal of Signals and Systems, vol.5, No.4, p.197-202, 2020.

DOI : 10.51485/ajss. v5i4.117

Conférences internationales

Ali Larnene Y., Ladaci S., Belmeguenai A., " Recursive Identification of Fractional order Hammertein system ". In: 4th International Conference on Advanced Engineering in Process Intelligence (ICAEPI2023), Special Session on 'Fractional order Systems and Control Design and Application for processes of petroleum industry', 28-30 November, Skikda-Algeria, 2023.

Table de matières

Introduction générale.....	1
1 Principes fondamentaux du calcul fractionnaire.....	5
1.1 Introduction	5
1.2 Bases théoriques des intégrales et dérivées fractionnaires	5
1.2.1 Outils mathématiques de base	5
1.2.1.1 La Fonction Gamma	6
1.2.1.2 Fonction Bêta.....	6
1.2.1.3 Fonction Mittag-leffler	7
1.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire	9
1.3.1 Définitions en calcul fractionnaire	9
1.3.2 Formule d'intégrale de Cauchy d'ordre fractionnaire	10
1.3.2.1 Formule d'intégrale Cauchy	10
1.3.2.2 Formule de dérivée et d'intégrale d'ordre fractionnaire pour des fonctions usuelles 10	
1.4 Définitions Grünwald-Letnikov	12
1.4.1 Calcul des dérivées d'ordre élevé	12
1.4.2 Calcul fractionnaire de Grünwald-Letnikov	12
1.5 Définition de Riemann-Liouville.....	13
1.5.1 Intégrale d'ordre élevé	13
1.5.2 Définition d'ordre Fractionnaire de Riemann-Liouville.....	14
1.6 Définition de Caputo	15
1.7 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	16
1.7.1 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	16
1.7.2 Représentation des systèmes fractionnaires	17
1.7.3 Equation différentielle fractionnaire	17
1.7.3.1 Analyse dans le domaine temporel des systèmes d'ordre fractionnaire.....	18
1.7.3.2 Exemples illustratifs	19
1.7.4 Présentation fractionnaire dans l'espace d'état	21
1.7.4.1 Représentations des systèmes SISO dans l'espace d'état	24

1.7.5	Critère de stabilité pour les systèmes d'ordre fractionnaire.....	25
1.7.5.1	Contrôlabilité et observabilité	27
1.7.5.2	Critère de contrôlabilité	27
1.8	Méthodes d'approximation analogique appliquées aux opérateurs d'ordre fractionnaire.....	27
1.8.1	Méthode d'Oustaloup	28
1.8.1.1	Exemple représentatif de la mise en œuvre d'un dérivateur d'ordre fractionnaire	28
1.8.2	Méthode de Charef : Fonction de Singularité	29
1.8.2.1	Approximation des systèmes du premier ordre	29
1.8.2.2	L'algorithme récursif pour les pôles et zéros à puissance fractionnaire	31
1.8.2.3	Système du second ordre	32
1.8.3	Exemples illustratifs	34
1.8.4	Approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.....	37
1.8.5	Approximation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire.....	39
1.9	Méthodes de discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire	41
1.10	Conclusions	43
2	Identification des systèmes.....	44
2.1	Introduction	44
2.2	Identifiabilité	45
2.3	Le processus d'identification	46
2.4	Techniques d'identification des systèmes	49
2.4.1	Méthodes d'identification du modèle non paramétrique	49
2.4.2	Méthodes d'identification du modèle paramétrique.....	49
2.4.2.1	Méthodes paramétriques graphiques	49
2.4.2.2	Méthodes statistiques.....	49
2.4.3	Différentes Structure des modèles paramétriques	50
2.4.3.1	Modèle ARX.....	50
2.4.3.2	Modèle ARMAX	51
2.4.3.3	Modèle OE.....	51
2.4.3.4	Modèle BJ.....	52
2.5	Identification basée sur l'erreur de sortie	53
2.6	Identification basée sur l'erreur de prédiction	54

2.7	Estimateur de moindre carrée	55
2.8	Algorithme Moindres Carrés Récursifs (RLS).....	58
2.8.1	L'algorithme RLS avec facteur doublé.....	58
2.9	Les systèmes non linéaires	59
2.9.1	Les séries de Volterra.....	59
2.9.2	Les structures blocs orientés	60
2.9.2.1	Le modèle Hammerstein.....	60
2.9.2.2	Le modèle Wiener	61
2.9.2.3	Le modèle Hammerstein-Wiener.....	61
2.9.2.4	Le modèle Wiener-Hammerstein.....	62
2.10	Conclusion.....	63
3	Identification des systèmes d'ordre fractionnaire	64
3.1	Introduction	64
3.2	Modèle fractionnaire $H_{n_1 n_2}$	65
3.3	Identification du système fractionnaire $H_{n_1 n_2}$	66
3.4	Choix du signal d'excitation.....	67
3.5	Identification sans bruit du modèle fractionnaire du modèle $H_{n_1 n_2}$	67
3.6	Discussion des résultats	70
3.7	Modèle du système de Hammerstein d'ordre fractionnaire	70
3.8	Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire	71
3.9	Identification de modèle proposé système de Hammerstein d'ordre fractionnaire....	72
3.10	Discussion des résultats	74
3.11	Conclusion	76
4	Identification par modèle fractionnaire d'un système Electromécanique	77
4.1	Introduction	77
4.2	Etat de l'art sur les systèmes de suspension semi active (ER).....	78
4.3	Système de suspension semi-active pour véhicule	80
4.4	Description du modèle quart de véhicule	82
4.5	Modélisation proposée d'un système d'ordre fractionnaire	87

4.6	Simulation du système d'ordre fractionnaire	88
4.6.1	Validation du modèle dans le cas idéal	88
4.6.2	Test de robustesse.....	90
4.7	Discussion des résultats de simulation	91
4.8	Conclusion	92
	Conclusion générale et perspectives	93
	Références.....	95

Liste des figures

Figure 1.1 Fonction Gamma.....	8
Figure 1.2 L'intégration fractionnaire d'ordre α de la fonction échelon	11
Figure 1.3 Influence du paramètre α sur la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire.	20
Figure 1.4 Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (1.56)	21
Figure 1.5 Influence de l'ordre de dérivation sur les zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre	26
Figure 1.6 Diagramme de bode du dérivateur $s^{0.5}$	29
Figure 1.7 Diagramme de Bode du modèle (1.74) avec une pente présentant une pente de -20γ dB/dec	30
Figure 1.8 Réponses indicielles du système entier 1 ^{er} ordre et le système fractionnaire pour .	35
Figure 1.9 Réponses indicielles du système entier 2 ^{ème} ordre et le système fractionnaire pour	36
Figure 2.1 Identification par analyse du comportement entréesortie	44
Figure 2.2 Identification de type paramétrique	45
Figure 2.3 Schéma de la procédure générale d'identification des systèmes [81]	48
Figure 2.4 Représentation en blocs de la structure AutoRegressive	50
Figure 2.5 Représentation en blocs de la structure ARMAX.....	51
Figure 2.6 Représentation en blocs de la structure OE	52
Figure 2.7 Représentation en blocs de la structure BJ	53
Figure 2.8 Principe d'identification fondé sur l'erreur de sortie	53
Figure 2.9 Principe d'identification fondé sur l'erreur de sortie	54
Figure 2.10 Modèle Hammerstein.....	60
Figure 2.11 Modèle Wiener	61
Figure 2.12 Modèle Hammerstein-Wiener.....	62
Figure 2.13 Modèle Wiener-Hammerstein.....	62
Figure 3.1 Schéma bloc du système non entier	65
Figure 3.2 Signal d'excitation PRBS	68
Figure 3.3 Sortie mesurée et modèle estimé par la méthode RLS	68
Figure 3.4 L'erreur entre la sortie du modèle estimé et celle du système réel.....	69

Figure 3.5 Configuration du modèle de Hammerstein	70
Figure 3.6 La sortie mesurée et la sortie du modèle estimé	74
Figure 3.7 Variation temporelle du paramètre b_0	75
Figure 3.8 Variation temporelle du paramètre a_1	75
Figure 3.9 Variation temporelle du paramètre α	76
Figure 4.1 Système de suspension semi-active électro-rhéologique	77
Figure 4.2 Modèle suspension semi-active quart de voiture	83
Figure 4.3 Schéma de principe du banc d'essai d'un système de suspension semi active.....	84
Figure 4.4 Diagramme de bode du système de suspension semi active (ER)	87
Figure 4.5 L'accélération de la masse suspendue \ddot{z}_s	89
Figure 4.6 L'accélération de la masse non suspendue \ddot{z}_{us}	90

Liste des Tableaux

Tableau 3.1 Identification sans bruit du Modèle ($H_{n_1 n_2}$)	69
Tableau 4.1 Valeurs des paramètres du modèle quart de véhicule équipé d'un amortisseur ER	82
Tableau 4.2 Critère d'erreur quadratique en fonction de l'ordre fractionnaire dans des conditions de conduite bruitées et perturbées	91

Liste des abréviations

SISO: Single input –Single output

BIBO : Bounded Input- Bounded Output.

LTI : Linear Time Invariant : Linéaire invariant dans le temps.

MIMO : Multi Input Multi Output : Plusieurs entrée plusieurs sorties.

FPP: Pole Power Fractional.

FPZ: Fractional Pole Zero.

FDE: Fractional Differential Equation

ARX: AutoRegressive with eXogenous inputs: Autorégressif à entrées exogènes.

ARMAX: AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs: Autorégressif à moyenne mobile et entrées exogènes.

OE: Output Error: Modèle à erreur de sortie.

BJ:Box-Jenkins.

RLS: Recursive Least Squares.

ER: électro-rhéologique.

Introduction générale

C'est en 1695 que la théorie du calcul fractionnaire a été mentionnée pour la première fois dans la correspondance entre L'Hôpital et Leibniz, lorsque ceux-ci ont abordé la question de l'interprétation d'une dérivée d'ordre $(1/2)$. Au 19-ème siècle, Liouville et Riemann ont formulé une définition cohérente de la dérivée d'ordre fractionnaire, ces recherches ont initié la théorie de la dérivation et de l'intégration fractionnaires, domaine qui a connu une expansion marquée à partir de la seconde moitié du siècle [1-3].

Les modèles non entiers sont aujourd'hui largement utilisés pour caractériser le comportement dynamique de nombreux systèmes physiques, mettant en évidence leur potentiel significatif pour améliorer la précision des modèles pour divers domaines d'application, notamment les processus électrochimiques [4-7], les matériaux viscoélastiques [8- 14], la robotique et la modélisation d'environnement[15-20], le domaine de l'automatique pour la commande robuste telle que le contrôleur d'ordre fractionnaire CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) constitue une approche avancée du contrôle robuste basée sur le calcul fractionnaire. Cette méthode permet de concevoir des contrôleurs dont l'ordre n'est pas nécessairement entier, offrant ainsi une plus grande flexibilité pour s'adapter aux incertitudes et aux variations des systèmes dynamiques [21], la commande $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire avec différentes stratégies d'ajustement, l'utilisation d'un contrôleur $PI^\lambda D^\mu$, qui se distingue par l'emploi d'intégrateurs et de différenciateurs non entiers pour une plus grande précision. [22-23].

Dans le traitement du signal, l'utilisation des opérateurs d'ordre fractionnaire a donné naissance à plusieurs nouveaux concepts tels que les filtres dits fractionnaires. Ces filtres offrent une précision accrue dans la résolution fréquentielle [24,25]. Le calcul fractionnel améliore le traitement du signal en permettant des représentations flexibles de signaux complexes. Il permet notamment d'améliorer le débruitage des signaux et des images [26-32]. Dans le domaine de la bio-ingénierie, des modèles fractionnaires ont été introduits pour modéliser l'effet des cellules cancéreuses sur les cellules immunitaires [33,34]. Et également appliqués en économie [35-38].

Par ailleurs, l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire constitue un domaine de recherche actif et complexe, contrairement aux systèmes d'ordre entier. L'ordre non entier

introduit des complexités supplémentaires dans la relation entre les données expérimentales et les paramètres du modèle.

L'identification des systèmes par modèle non entier a été initiée dans les années 1990. Depuis les premières études sur l'identification de systèmes à modèles non entiers dans le domaine temporel [39-45] que fréquentiel [46-49]. Plusieurs systèmes ont été développés pour le contrôle par ordre fractionnaire, couvrant des aspects tels que l'analyse de stabilité, l'analyse du domaine temporel, et l'utilisation de l'analyse fréquentielle et de l'espace d'états est répandue. Néanmoins, La plupart des méthodes relèvent des approches fondées sur l'erreur de prédiction (PEM), basées sur la minimisation de l'erreur d'estimation, avec des ordres de dérivation connus ou inconnus.

L'identification des systèmes d'ordre fractionnaire, qu'ils soient linéaires ou non linéaires, fait l'objet d'un intérêt grandissant dans la communauté scientifique, en raison de leur capacité à modéliser plus fidèlement les phénomènes dynamiques complexes. De nombreux travaux se sont particulièrement concentrés sur les systèmes linéaires [50-55], tandis que les systèmes non linéaires, bien que mentionnés dans certaines contributions [43, 44, 56-58] restent relativement moins explorés et constituent encore un champ de recherche en développement.

Récemment, ce sujet a reçu d'énormes contributions et est devenu un outil puissant et largement utilisé en automatique. Il est reconnu que la modélisation et l'identification d'un système dynamique complexe constituent des étapes cruciales pour la simulation, la conception du contrôle, un ensemble de méthodes a été développé pour l'identification des modèles linéaires. Ainsi, l'identification des systèmes non linéaires attire un intérêt important, demeurant un champ de recherche ouvert, sans cadre théorique général disponible à ce jour.

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à l'identification des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire pour des applications de contrôle, de supervision ou de commande de processus industriel. Le premier système étudié, considère en particulier l'identification d'un modèle représenté par des équations différentielles d'ordre fractionnaire (FDE) en estimant les paramètres du système des ordres non entiers à partir de données temporelles, en particulier ce modèle de type $H_{n_1 n_2}$. Le système Hammerstein qui a reçu beaucoup d'intérêt dans la littérature spécialisée, est considéré aussi dans cette étude. Il est constitué d'un bloc dynamique non linéaire en série avec un bloc dynamique linéaire. Ayant pour but la modélisation et l'identification de systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire, nous

avons utilisé une méthode récurrente pour estimer les paramètres de la partie linéaire et de la partie non linéaire du modèle.

Dans le cadre de cette thèse, nous allons aussi proposer un modèle d'ordre fractionnaire pour caractériser un système de suspension semi-active à fluide rhéologique, développé et identifié pour un quart de véhicule équipé d'un amortisseur électro-rhéologique (ER). Ce système présente un comportement non linéaire, car son comportement dépend de relations non proportionnelles entre excitation et réponse, et parce que la variation de viscosité avec le champ électrique suit une loi non linéaire. Le but de cette étude est d'arriver à une meilleure représentation des dynamiques de ce système de suspension comparativement au modèle d'ordre entier utilisé actuellement.

Objectifs et contribution de la thèse

Les systèmes d'ordre fractionnaire peuvent mieux représenter la dynamique des nombreux systèmes physique et électromécanique comparativement aux modèles d'ordre entier. En particulier dans le cas où le comportement du système présente des propriétés de mémoire et d'hérédité.

L'objectif principal de cette thèse est la modélisation et l'identification de divers processus en utilisant des modèles d'ordre fractionnaire. En effet, l'utilisation du calcul fractionnaire permet de prendre en compte des dynamiques complexes caractérisées par une certaine mémoire ce qui contribue à améliorer l'efficacité, la robustesse ainsi que les performances du système face aux différentes perturbations temporelles. Bien que les avantages de l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire soient importants, nous visons à obtenir un modèle exploitable dans un contexte de commande et de supervision.

Structure de la thèse

Le manuscrit se compose de quatre chapitres, organisés de la manière suivante :

Chapitre 1: Il présente les concepts de base de la théorie des opérateurs fractionnaires nécessaires à la compréhension des chapitres ultérieurs, ainsi que les différents outils mathématiques pour le calcul d'ordre fractionnaire. Tout d'abord, les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, leurs propriétés et leurs transformées de Laplace sont exposées. L'accent est mis sur les systèmes fondamentaux d'ordre fractionnaire, incluant les notions de base sur leur représentation via des équations différentielles d'ordre fractionnaire, la résolution de ces

équations et leurs propriétés, ainsi que leur représentation dans l'espace d'état. Enfin, les techniques d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire par des méthodes fréquentielles et par des fonctions rationnelles sont présentées et implémentées.

Chapitre 2: Est consacré à la présentation des principaux aspects de l'identification des systèmes, et définit les méthodes classiques d'identification récursive fondées sur le principe des moindres carrés. Une attention particulière est apportée à l'algorithme RLS avec facteur d'oubli, cette méthode est en effet fondamentale pour la compréhension des algorithmes d'identification récursives.

Chapitre 3 : Ce chapitre est structuré en deux parties, la première est dédiée à l'identification et à l'estimation d'un modèle linéaire représenté par une équation différentielle dans le domaine temporelle. Pour ce modèle, noté $H_{n_1 n_2}$, la méthode d'identification est basée sur la méthode de singularité de Charef, les résultats obtenus nécessitent des recherches plus approfondies. La seconde partie porte sur la modélisation et l'identification d'un système non linéaire d'ordre fractionnaire, fondée sur le modèle de Hammerstein introduit au chapitre 2. La méthode récursive est utilisée afin d'estimer séparément les composantes linéaire et non linéaire du système, ce qui permet d'obtenir des résultats plus précis d'identification.

Le quatrième chapitre est consacré à l'application de la méthode d'identification proposée à un système de suspension électrorhéologique (ER) semi-actif, intégrant de manière dynamique un amortisseur non linéaire ER. Un modèle fractionnaire est développé, l'étude s'appuie sur la formulation classique du modèle quart de véhicule pour un système de suspension semi-actif à fluide électrorhéologique (ER).

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés et suggère les perspectives futures pour la suite de ce travail de recherche.

Chapitre 1

1 Principes fondamentaux du calcul fractionnaire

1.1 Introduction

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont fait l'objet d'un intérêt croissant dans les sciences appliquées et l'ingénierie. La complexité analytique liée à ces fonctions a limité leur étude théorique, ce qui a conduit au développement et à l'usage généralisé de méthodes numériques et d'approximations pour leur modélisation, leur analyse et leur mise en œuvre. Cependant, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits à l'aide de modèles d'ordre fractionnaire. Ce qui rend le calcul d'ordre fractionnaire nécessaire pour les expliquer. Ce chapitre présente les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaire au développement des chapitres suivants. Il couvre les définitions, les principales propriétés et les méthodes d'approximation de ces opérateurs, en introduisant d'abord les outils mathématiques fondamentaux.

1.2 Bases théoriques des intégrales et dérivées fractionnaires

1.2.1 Outils mathématiques de base

Au début de cette section, afin de faciliter la compréhension des intégrales et dérivées fractionnaires et de fournir des outils pour résoudre les problèmes de calcul fractionnaires, nous présentons les principaux outils mathématiques qui seront utilisés tout au long du chapitre. Il s'agit des fonctions Gamma, Beta et Mittag-Leffler

1.2.1.1 La Fonction Gamma

La fonction gamma notée $\Gamma(z)$ constitue une généralisation de la fonction factorielle aux les nombres complexe. Elle est définie, pour tout nombre complexe (z) dont la partie réelle est positive, par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{z-1} du \quad , \forall z \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Pour les valeurs complexes de z , la partie réelle doit être positive pour obtenir la valeur finie de z , la fonction Gamma a la propriété suivante :

La fonction Gamma est liée à la factorielle par cette relation :

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (1.2)$$

Pour un entier naturel $n \geq 1$ Autrement dit, si n est un entier positif :

$$\Gamma(n) = (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 \quad (1.3)$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence.

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.4)$$

Cette relation montre que $\Gamma(z)$ est une extension naturelle de la factorielle pour les nombres non entiers.

Pour $n = 1$, $\Gamma(1) = 0! = 1$, la fonction Gamma peut être étendue à tous les nombres complexes sauf les entiers négatifs et zéro, où elle présente des pôles.

1.2.1.2 Fonction Bêta

La fonction bêta notée $\mathcal{B}(p, q)$ est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{B}(p, q) = \int_0^1 (1 - u)^{p-1} u^{q-1} du, \quad p, q \in \mathbb{R}_+ \quad (1.5)$$

La relation entre la fonction Bêta et Gamma est donnée par la relation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q), \quad p, q \in \mathbb{R}_+ \quad (1.6)$$

1.2.1.3 Fonction Mittag-leffler

La fonction de Mittag-Leffler, essentielle en calcul fractionnaire, constitue une généralisation de la fonction exponentielle. La version à deux paramètres de cette fonction est définie par la relation suivante :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1.7)$$

La fonction à un seul paramètre est définie comme suit :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (1.8)$$

Clairement,

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z) \quad (1.9)$$

Lorsque $\beta = 1$ la fonction $E_{\alpha, 1}(z)$ est souvent utilisée dans le cadre des équations différentielles fractionnaires.

Par exemple, variation du deuxième paramètre dans l'équation (1.7) donne :

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.10)$$

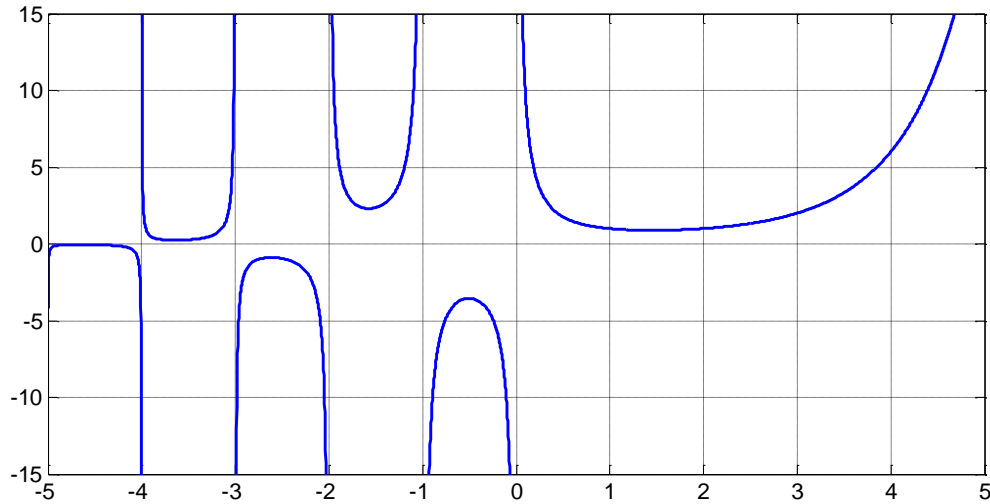


Figure 1.1 Fonction Gamma

Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, la fonction de Mittag-Leffler devient une fonction exponentielle classique.

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{\Gamma(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dans le cas généralisé :

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right) \quad (1.13)$$

De plus, la variation du premier paramètre de dans l'équation (1.7) donne :

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (1.14)$$

$$E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (1.15)$$

La fonction de fonction de Mittag-Leffler joue un rôle important dans de nombreux domaines, notamment en théorie des équations différentielles fractionnaires et dans l'étude des processus aléatoires anormaux ou non locaux.

1.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire

1.3.1 Définitions en calcul fractionnaire

Un opérateur fractionnaire est un concept en mathématiques, plus précisément en analyse fractionnaire. L'opérateur intégral-différentiel ${}_t D_t^\alpha$, souvent noté comme (1.16), est une généralisation des opérations de dérivation et d'intégration à des ordres non entiers, et il est défini en fonction du paramètre α , qui peut prendre différentes valeurs comme suit [59] :

$${}_t D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ f(t) & \alpha = 0 \\ \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Où α est l'ordre de l'opération, généralement nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, t_0 et t sont les limites de l'opération.

Voici les propriétés de cet opérateur intégral-différentiel ${}_t D_t^\alpha$ pour différents cas de α comment évaluer l'ordre fractionnaire dérivée ou intégrale de la fonction originale $f(t)$.

- Lorsque $\alpha \geq 0$ l'opérateur ${}_t D_t^\alpha$ correspond à une dérivation fractionnaire.
- Si $\alpha = 0$, l'opérateur fractionnaire devient l'opérateur identité. Si $\alpha < 0$, l'intégrale d'ordre $(-\alpha)$ est appliquée à la fonction.

- Si α est un nombre complexe, sa partie réelle détermine si des actions différentielles ou intégrales sont effectuées.

1.3.2 Formule d'intégrale de Cauchy d'ordre fractionnaire

1.3.2.1 Formule d'intégrale Cauchy

La formule fondamentale en analyse complexe de l'intégrale de Cauchy, s'écrit comme suit :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_c \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{n+1}} d\tau \quad (1.17)$$

Avec c un contour fermé qui entoure les pôles de la fonction $f(t)$. Si n est remplacé par un nombre non entier α il y aura une singularité isolée en $\tau = t$. Cette singularité peut être supprimée lors du calcul d'intégrales sur un chemin fermé. La formule peut donc être étendue pour traiter les dérivées d'ordre fractionnaire.

Définition 1.1: La formule intégrale de Cauchy d'ordre fractionnaire α est définie comme :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi j} \oint_c \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha+1}} d\tau \quad (1.18)$$

Où l'ordre α peut être de n'importe quel nombre réel positif. La dérivée d'ordre α d'une fonction $f(t)$ par rapport à t peut être calculée. Il peut également être démontré avec la formule de Cauchy que si α n'est pas un entier, la formule ci-dessus est toujours valide.

1.3.2.2 Formule de dérivée et d'intégrale d'ordre fractionnaire pour des fonctions usuelles

Les dérivées d'ordre entier n des fonctions sinus et cosinus sont montrées ci-dessous :

$$\frac{d^n}{dt^n} [\sin(at)] = a^n \sin\left(at + \frac{n\pi}{2}\right), \frac{d^n}{dt^n} [\cos(at)] = a^n \cos\left(at + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (1.19)$$

Lorsque on remplace n par un nombre réel α , les formules ci-dessus restent valable.

Par conséquent, les dérivées et l'intégrale d'ordre fractionnaire peuvent être exprimées comme suit :

$$\mathcal{D}_t^\alpha [\sin (at)] = a^\alpha \sin \left(at + \frac{\alpha\pi}{2} \right), \mathcal{D}_t^\alpha [\cos (at)] = a^\alpha \cos \left(at + \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (1.20)$$

De plus, la dérivée d'ordre n de la fonction t^m peut être obtenue comme suit :

$$\frac{d^n}{dt^n} t^m = m(m-1) \dots (m-n+1)t^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!} t^{m-n} \quad (1.21)$$

Ce qui peut être généralisé au cas d'ordre fractionnaire

$$\mathcal{D}_t^\alpha t^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha}, \alpha > -1 \quad (1.22)$$

La figure (1.2) ci-dessous représente l'intégration non entière pour la fonction échelon pour différentes valeurs de α .

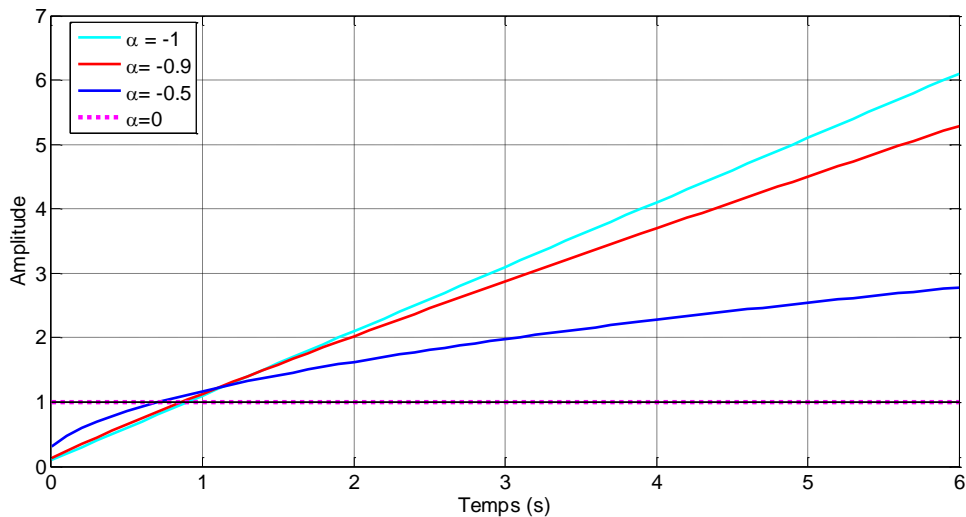


Figure 1.2 L'intégration fractionnaire d'ordre α de la fonction échelon

Dans [1], des formules de dérivée d'ordre fractionnaire pour des fonctions plus couramment utilisées sont présentées.

1.4 Définitions Grünwald-Letnikov

1.4.1 Calcul des dérivées d'ordre élevé

Avant de présenter la définition de Grünwald-Letnikov de la dérivée d'ordre fractionnaire, on définit d'abord la première dérivée.

Dérivée d'ordre 1 (ou première dérivée) :

$$\frac{d^1}{dt^1} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t) - f(t - h)] \quad (1.23)$$

Dérivée d'ordre 2 (ou la deuxième dérivée) :

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)] \quad (1.24)$$

En appliquant plusieurs fois la méthode, on peut obtenir la dérivée d'ordre n .

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad (1.25)$$

L'expression binomiale définie comme suit :

$$(1 - z)^n = \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} z^j = \sum_{j=1}^n (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j \quad (1.26)$$

La formule des coefficients binomiaux, aussi appelée formule du binôme.

$$(-j)^j \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (1.27)$$

1.4.2 Calcul fractionnaire de Grünwald-Letnikov

La définition ci-dessus, pour les non-entiers α , la difficulté réside dans le fait que l'expression binomiale n'est plus une somme finie, mais une somme infinie de la forme :

$$(1 - z)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-j)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^\alpha z^j \quad (1.28)$$

Par conséquent, les coefficients binomiaux étendus peuvent être écrits comme suit :

$$w_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (1.29)$$

Supposons que, lorsque $t \leq t_0$, la fonction $y(t) = 0$, par conséquent une somme finie peut être utilisée pour se rapproche de l'infini, et la définition de Grünwald-Letnikov peut être introduite.

Théorème 1.1 : *La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov est définie par la limite suivante :*

$${}_{t_0}^{GL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.30)$$

Où $\lfloor \cdot \rfloor$ signifie la partie entière du nombre., h est la période d'échantillonnage.

Avec $w_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ représente les coefficients coefficient binomial de $(1-z)^\alpha$

Les coefficients peuvent obtenus de manière récursive à partir de cette relation :

$$w_0^{(\alpha)} = 1, w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, j = 1, 2 \dots \quad (1.31)$$

Lorsque on base sur la définition (1.29) la différentiation fractionnaire peut être facilement calculée à partir de l'équation suivante :

$${}_{t_0}^{GL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \approx \frac{1}{h^\alpha} f(t-jh) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} w_j^\alpha f(t-jh) \quad (1.32)$$

La définition de G-L de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme suit :

$${}_{t_0}^{GL}I_t^\alpha f(t) = {}_{t_0}^{GL}\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{-\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.33)$$

1.5 Définition de Riemann-Liouville

1.5.1 Intégrale d'ordre élevé

Considérons d'abord les intégrales d'ordre entier. Il est évident que l'intégrale du premier ordre de la fonction $f(\tau)$ peut être exprimée comme suit :

$$\frac{d^{-1}}{dt^{-1}} f(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \quad (1.34)$$

On peut également voir que l'intégrale du second ordre peut être écrite comme :

$$\frac{d^{-2}}{dt^{-2}} f(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau dt = \int_{t_0}^t f(\tau)(t - \tau) d\tau \quad (1.35)$$

De même, l'intégrale d'ordre n peut être évaluée à partir de :

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} f(t) = \underbrace{\int \dots \int_{t_0}^t}_{n} f(\tau) \underbrace{d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad (1.36)$$

1.5.2 Définition d'ordre Fractionnaire de Riemann-Liouville

Si on remplace le nombre entier $(-n)$ par nombre réel $(-\alpha)$, l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville peut être définie comme suit :

Définition 1.2

L'intégrale de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)$ est définie comme suit :

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - \tau)^{\alpha-1} * f(t) \quad (1.37)$$

(*) représente le produit de convolution.

En outre, lorsque $0 < \alpha < 1$ et que l'instance de temps initiale $t_0 = 0$, la notation peut être simplifiée avec $\mathcal{D}^{-\alpha}$ et $f(t)$. La définition de Riemann-Liouville est la plus utilisée en calcul fractionnaire. Les indices des deux côtés de l'opérateur \mathcal{D} représentent les limites inférieure et supérieure de l'intégrale [60].

Les dérivées d'ordre fractionnaire ne peuvent pas être définies simplement en remplaçant $(-\alpha)$ par α , la définition doit être donnée en termes d'intégrales. Considérons maintenant la dérivée d'ordre β si que $n - 1 < \beta \leq n$.

Noté $n = [\beta]$. L'expression de la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville devient comme suit :

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[{}^{RL}\mathcal{D}_t^{-(n-\beta)} f(t) \right] \quad (1.38)$$

A partir de l'intégrale ci-dessus, les dérivées fractionnaires d'ordre Riemann-Liouville peut être aussi formulée comme suit.

Définition 1.3

Supposons que $n - 1 < \beta \leq n$, et notons $n = [\beta]$. La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire peut être exprimée par cette relation :

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\beta-n}} d\tau \quad (1.39)$$

Où le nombre entier n est tel que $n - 1 < \beta \leq n$.

1.6 Définition de Caputo

Dans les définitions de Grünwald Letnikov et Riemann Liouville des dérivées fractionnaires, la gestion des valeurs initiales non nulles de la fonction $f(t)$ peut poser certains défis, car ces définitions s'appuient souvent sur des intégrales ou des sommes qui prennent en compte les valeurs passées de la fonction. Cela peut influencer la façon dont les valeurs initiales (ou conditions initiales) affectent la dérivée fractionnaire de la fonction.

Dans les définitions de Grünwald Letnikov et Riemann Liouville présentées précédemment, les valeurs initiales non nulles de la fonction $f(t)$ ne sont pas traitées de manière satisfaisante. Par conséquent, dans la définition de Caputo des dérivées fractionnaires, l'un des principaux avantages est qu'elle permet de traiter de manière plus naturelle, les valeurs initiales non nulles de la fonction $f(t)$.

Définition 1.4

On définit la dérivée de Caputo d'ordre fractionnaire α de la manière suivante :

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(m+1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (1.40)$$

avec $\alpha = m + \gamma$, m est un nombre entier $0 < \alpha < 1$ de même, d'après la définition de Caputo, l'intégrale est décrite par cette définition.

Définition 1.5

Caputo a proposé une autre définition de la dérivée d'ordre fractionnaire, donnée par :

$${}^c_{t_0}\mathcal{D}_t^{-\gamma}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}} d\tau \quad (1.41)$$

1.7 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire sont présentées ci-dessous :

- 1- Lorsque $f(t)$ est une fonction analytique en t , alors sa dérivée fractionnaire ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ est une fonction analytique en t et en α .
- 2- Pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opérateur ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ coïncide avec la dérivée classique de n .
- 3- Pour $\alpha = 0$ l'opérateur ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$ correspond à l'opérateur identité : ${}_{t_0}\mathcal{D}_t^0 f(t) = f(t)$
- 4- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire constituent des opérations linéaires.:

$${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha [c f(t) + d y(t)] = c {}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) + d {}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha y(t)$$

- 5- La règle additive propre au semi-groupe

$${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha [{}_{t_0}\mathcal{D}_t^\beta f(t)] = {}_{t_0}\mathcal{D}_t^\beta [{}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)] = {}_{t_0}\mathcal{D}_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

1.7.1 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

La transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire α , n s'exprime s'exprime sous la condition suivante ($n - 1 < \alpha < n$) est donnée par :

$$\mathcal{L}[{}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f(t)] \quad (1.42)$$

D'après la définition de Riemann-Liouville, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire s'écrit :

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}_{t_0}^{RL\alpha} f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [\mathcal{D}_{t_0}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=t_0} \quad (1.43)$$

L'applicabilité pratique de cette transformée reste limitée en raison de l'absence d'interpénétration physique des valeurs initiales $[\mathcal{D}_{t_0}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=t_0}$ pour $k = 0 \dots (n-1)$.

D'après la définition de Caputo, la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α s'exprime par:

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}_{t_0}^C f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(t_0) \quad (1.44)$$

Cette transformation est largement utilisée en pratique en raison des valeurs initiales conventionnelles $f^{(k)}(t_0)$, pour $k = 0, 1, \dots (n-1)$. Alors, pour l'étude et l'analyse des systèmes, la définition de Caputo semble être la plus appropriée que les deux autres.

1.7.2 Représentation des systèmes fractionnaires

Dans cette section, nous exposons trois modes de représentation des systèmes à ordre non entier : les équations différentielles, la fonction de transfert et la représentation en espace d'état.

1.7.3 Equation différentielle fractionnaire

Plusieurs systèmes dynamiques peuvent être modélisés à l'aide d'équations différentielles comportant des dérivées d'ordre fractionnaire.

$$\begin{aligned} a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_2 \mathcal{D}^{\alpha_2} y(t) + a_1 \mathcal{D}^{\alpha_1} y(t) + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m \mathcal{D}^{\gamma_m} u(t) + \dots + b_1 \mathcal{D}^{\gamma_1} u(t) + b_0 \mathcal{D}^{\gamma_0} u(t) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Où :

$u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $(a_n, b_m) \in \mathbb{R}^2$ avec :

$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m$, (α_n, γ_m) sont les ordres de la dérivation ordonnés pour des raisons évidentes d'identifiabilité.

Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivés entières les ordres de la dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_n > \gamma_m$ pour que le système soit strictement propre.

Lorsque $\alpha_n = \gamma_m$ le système est juste propre.

L'application de la transformée de Laplace à l'équation différentielle (1.45), avec conditions initiales nulles, conduit aux modèles de fonction de transfert d'ordre fractionnaire entrée-sortie sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\gamma_m} + b_{m-1} s^{\gamma_{m-1}} \dots + b_1 s^{\gamma_1} + b_0 s^{\gamma_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (1.46)$$

Si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de l'ordre fondamental, avec $\alpha_n, \gamma_m = k\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on dit que le système est d'ordre commensurable, et l'équation (1.45) devient de la forme suivante :

$$\sum_{k=0}^n a_k \mathcal{D}^{k\alpha} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \mathcal{D}^{k\gamma} u(t) \quad (1.47)$$

Pour les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable, la fonction de transfert ci-dessus prend la forme suivante :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (1.48)$$

Cette expression peut être considérée comme une fonction pseudo-rationnelle $H(\lambda)$ pseudo-rationnelle de la variable $\lambda = s^\alpha$.

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k} \quad (1.49)$$

La fonction de transfert d'ordre fractionnaire introduit la notion de pôles et de zéros fractionnaires dans le plan complexe s , dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire commensurable (1.48).

1.7.3.1 Analyse dans le domaine temporel des systèmes d'ordre fractionnaire

La dynamique d'un système d'ordre fractionnaire peut être modélisée à l'aide d'une équation différentielle s'écrivant comme suit :

$$a_1 \mathcal{D}^{\alpha_1} x(t) + a_2 \mathcal{D}^{\alpha_2} x(t) + \dots + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} x(t) + a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} x(t) = \hat{u}(t) \quad (1.50)$$

Avec :

$$u(t) = b_1 \mathcal{D}^{\gamma_1} u(t) + b_2 \mathcal{D}^{\gamma_2} u(t) + \dots + b_m \mathcal{D}^{\gamma_m} u(t) \quad (1.51)$$

Où $\hat{u}(t)$ est composée de la combinaison linéaire d'un signal $u(t)$ et de ses dérivées d'ordre fractionnaire.

Supposons également que la fonction de sortie $x(t)$ a des conditions initiales nulles. Pour simplifier la présentation, supposons que $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{n-1} > \alpha_n > 0$.

Théorème 1.2:

La solution finale est obtenue à partir de l'équation (1.50)

$$x(t) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[\hat{u}(t) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{(t-t_0)}{h} \rfloor} w_j^{(\alpha_i)} x(t - jh) \right] \quad (1.52)$$

Proof : Considérons la définition de Grünwald-Letnikov dans (1.32). La forme discrète de celle-ci peut être réécrite comme suit :

$${}_{t_0} \mathcal{D}^{\alpha_i} x(t) \approx \frac{1}{h^{\alpha_i}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{(t-t_0)}{h} \rfloor} w_j^{(\alpha_i)} x(t - jh) = \frac{1}{h^{\alpha_i}} \left[x(t) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{(t-t_0)}{h} \rfloor} w_j^{(\alpha_i)} x(t - jh) \right] \quad (1.53)$$

Avec $w_j^{(\alpha_i)}$ peut être évalué de manière récursive à partir de la formule (1.31).

1.7.3.2 Exemples illustratifs

Des exemples illustratifs sont présentés pour implémenter la méthode de la solution d'équations différentielle par l'approximation Grünwald-Letnikov, on va considérer deux exemples de systèmes.

Exemple 1:

On considère un système d'ordre fractionnaire modélisé par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + x(t) = u(t) \quad (1.54)$$

La fonction de transfert associée au système s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \quad (1.55)$$

$u(t)$ est l'échelon unité.

La figure 1.3 présente la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire défini par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire (1.54), obtenue pour diverses valeurs du paramètre α

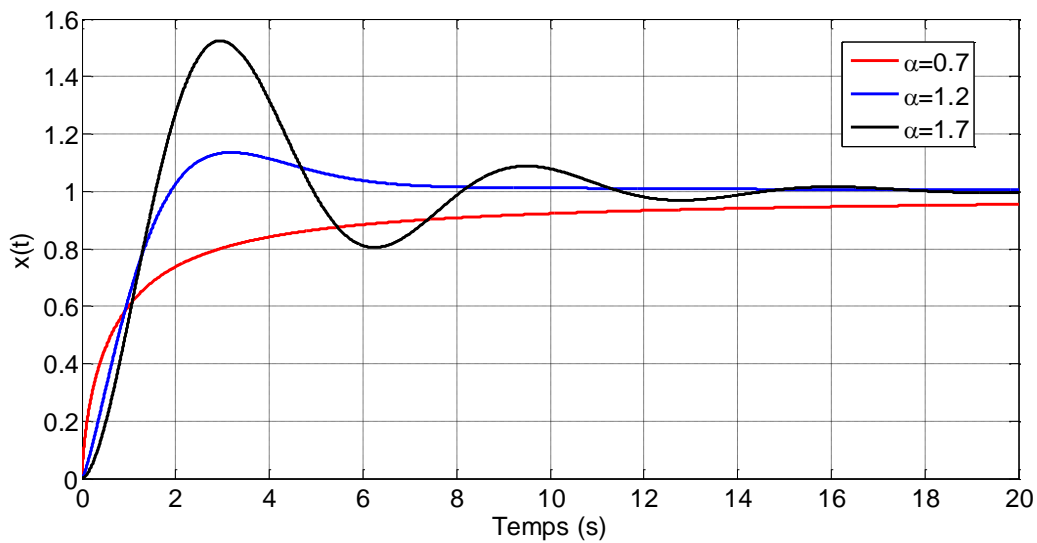


Figure 1.3 Influence du paramètre α sur la réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire.

Exemple 2 :

Considérons un système d'ordre fractionnaire décrit par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\frac{D^{2.13}x(t)}{dt^{2.13}} + 2.5 \frac{D^{1.36}x(t)}{dt^{1.36}} + 3.8 \frac{D^{0.75}x(t)}{dt^{0.75}} + 1.5x(t) = \frac{D^{1.05}u(t)}{dt^{1.05}} + 1.2 \frac{D^{0.62}u(t)}{dt^{0.62}} + u(t) \quad (1.56)$$

La fonction de transfert associée au système s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s^{1.05} + 1.2s^{0.62} + 1}{s^{2.13} + 2.5s^{1.36} + 3.8s^{0.75} + 1.5} \quad (1.57)$$

$u(t)$ représente l'échelon unité.

La réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire, modélisé par l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire, est présentée pour diverses valeurs des paramètres (α) et (γ) dans la figure (1.4).

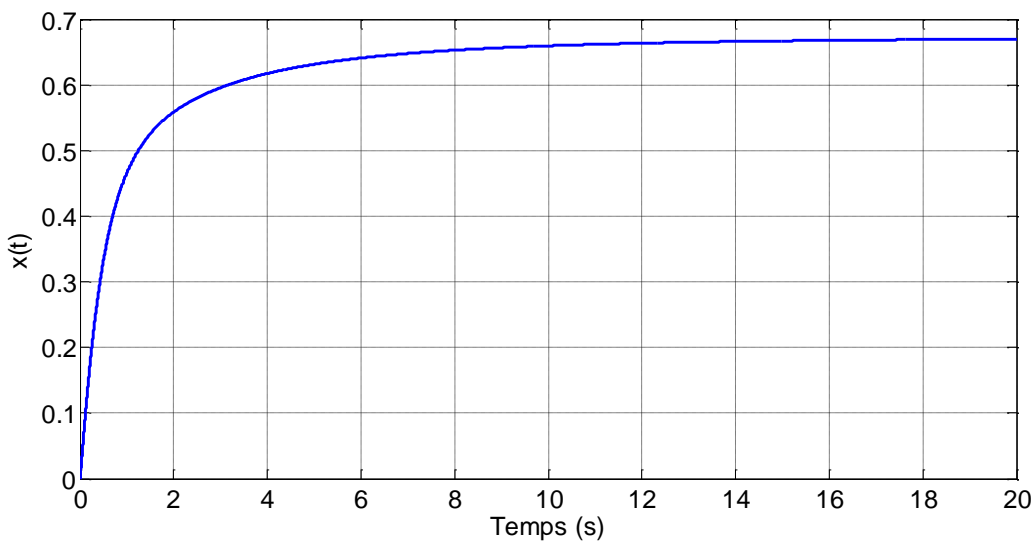


Figure 1.4 Réponse indicielle du système d'ordre fractionnaire de l'équation (1.56)

1.7.4 Présentation fractionnaire dans l'espace d'état

Le modèle généralisé d'espace d'états d'ordre fractionnaire à entrées multiples et sorties multiples (MIMO) peut être représenté comme suit :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.58)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.59)$$

Avec $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n]$ et que les ordres fractionnaires soient commensurables ou incommensurable. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ le vecteur d'entrée sous forme de colonne, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur colonne d'état, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ et le vecteur d'état en colonne, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ est la matrice d'entrée, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times l}$ désigne la matrice de transmission directe.

Dans l'analyse et la représentation en espace d'état, la notation précédente établit que la différentiation d'ordre fractionnaire \mathcal{D}^{α_i} est effectuée seulement sur l'élément x_i de l'état \mathbf{x} dans l'équation (1.58), où (1.58). On l'appelle l'équation d'état, de nature fractionnaire, est complétée par l'équation (1.59), qui définit la relation de sortie du système.

Dans un cas particulier, le modèle d'ordre fractionnaire décrit ci-dessus peut être ramené à une forme simplifiée.

$\alpha_i = \alpha, 1 \leq i \leq n$, l'équation d'état dans l'espace des états (1.58) devient :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.60)$$

L'application de la transformée de Laplace au système (1.60), en considérant la définition de Caputo de la dérivée fractionnaire, conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
s^\alpha \mathbf{X}(s) - s^{\alpha-1} x(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \Rightarrow \\
\begin{cases} \mathbf{X}(s) = (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} s^{\alpha-1} x(0) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} & \quad (1.61)
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

En supposant des conditions initiales nulles, c'est-à-dire $x(0) = 0$, la matrice identité permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \mathbf{X}(s) = (s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \quad (1.62)$$

D'où on obtient la matrice de transfert $\mathbf{G}(s)$ telle que :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.63)$$

Comme pour les systèmes d'ordre entier, la représentation d'un système d'ordre fractionnaire dans l'espace d'état peut admettre plusieurs formes équivalentes.

On définit \mathbf{I} comme la matrice identité de dimension $(n \times n)$, et $\mathbf{G}(s)$ comme une matrice de fonctions de transfert de dimension p ligne et l colonne, dont chaque élément est un rapport de polynômes en puissances entières s^α .

En conséquence de l'imposition $\alpha_i = \alpha$, la dynamique correspond désormais à celle d'un système d'ordre commensurable.

Considérons un système SISO dont la fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable est de la forme (1.48), avec $a_n = 1$ et $(m \leq n)$.

Le système d'état suivant, appelé forme canonique commandable, constitue une représentation équivalente de la fonction de transfert donnée par l'équation (1.48).

1.7.4.1 Représentations des systèmes SISO dans l'espace d'état

On considère un système SISO décrit par une fonction de transfert d'ordre fractionnaire commensurable, donnée par (1.48) avec $a_n = 1$ et ($m \leq n$), Le système d'état suivant, connu sous l'appellation de forme canonique commandable, constitue une représentation équivalente de la fonction de transfert donnée par l'équation (1.48).

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1.64)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-2} - b_n a_{n-2} \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (1.65)$$

Où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$

On peut aussi représenter (1.48) par la forme canonique observable suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (1.66)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$

1.7.5 Critère de stabilité pour les systèmes d'ordre fractionnaire

D'après la théorie de la stabilité des systèmes linéaires invariants dans le temps, un système est stable lorsque les racines de son polynôme caractéristique possèdent une partie réelle strictement négative, c'est-à-dire qu'elles sont situées dans la moitié gauche du plan complexe.

Dans le contexte des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, la stabilité est définie selon des critères distincts de ceux utilisés pour les systèmes d'ordre entier. Les systèmes fractionnaires peuvent, dans certains cas, posséder des racines à partie réelle positive, c'est-à-dire situées dans la moitié droite du plan complexe tout en restant stables. Par ailleurs, plusieurs auteurs ont montré, à l'aide de différentes méthodes, que pour les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable, la stabilité au sens entrée bornée-sortie bornée (BIBO) peut être analysée à l'aide d'une méthode complexe fondée sur le principe de l'argument des racines de l'équation caractéristique [62,63]. On peut alors exprimer la condition de stabilité de la façon suivante.

Théorème 1.3

La condition de stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable, décrit par l'équation (1.47) et dont la fonction de transfert correspond à l'équation (1.48), est vérifiée si et seulement si $|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Les λ_i ($1 < \lambda < n$) sont les racines du dénominateur de la fonction de transfert $P(s^\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i$ qui est un polynôme en s^α .

Théorème 1.4

Pour un système linéaire d'ordre fractionnaire $H(s)$ commensurable décrit par l'équation d'état (1.63), les valeurs P_i représentant les pôles du système sont obtenues comme solutions de l'équation suivante : $\det(s^\alpha \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

La stabilité au sens BIBO (Bounded Input–Bounded Output) est garantie si et seulement si l'ensemble des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} satisfait les conditions énoncées par le théorème de Matignon [64], soit.

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.68)$$

L'équation est satisfaite pour $0 < \alpha < 2$, le système peuvent être déterminés à partir des pôles, $p_i = \lambda_i^{1/\alpha}$, λ_i représente les valeurs propres de la matrice A [65,63].

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable rationnel. $\alpha = \frac{1}{q}$ cette condition devient :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2q} \quad i = 1, 2 \dots n \quad (1.69)$$

Ainsi que n est le nombre maximal de pôles p_i .

La figure 1.5 illustre les zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable en fonction de l'ordre de dérivation.

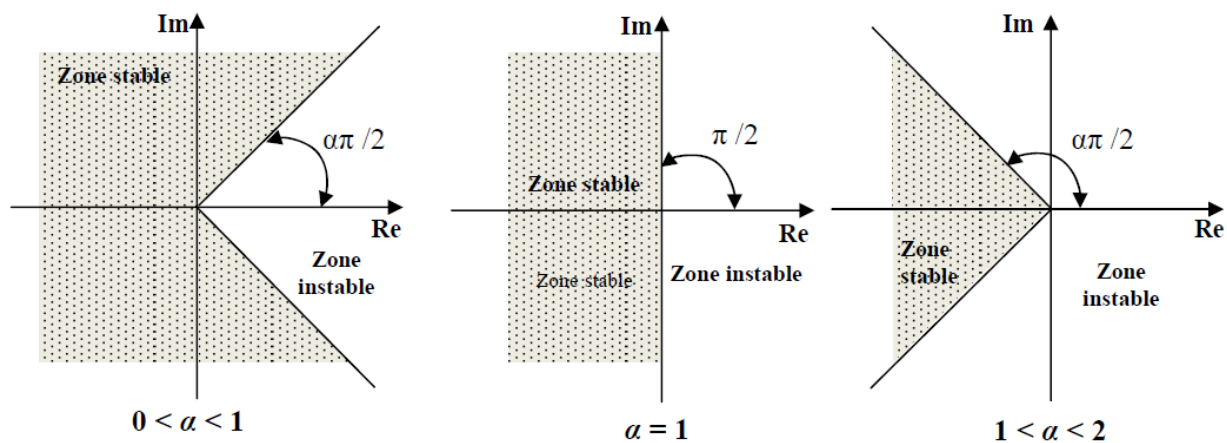


Figure 1.5 Influence de l'ordre de dérivation sur les zones de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire commensurable [72].

1.7.5.1 Contrôlabilité et observabilité

Dans l'analyse en espace d'état, la contrôlabilité et l'observabilité jouent un rôle central, et leur traitement pour les systèmes d'ordre fractionnaire commensurable a été traité dans la littérature [62,66-68]. Dans le cas considéré, les conditions de contrôlabilité et d'observabilité coïncident avec celles définies pour les systèmes linéaires d'ordre entier.

$$M_{com} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (1.70)$$

1.7.5.2 Critère de contrôlabilité

Un système d'ordre fractionnaire commensurable, défini par les équations d'état (1.58) et (1.59), est dit contrôlable si la matrice de contrôlabilité (1.68) possède un rang complet n , correspondant au nombre de variables d'état.

$$M_{obs} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

1.8 Méthodes d'approximation analogique appliquées aux opérateurs d'ordre fractionnaire

De nombreuses méthodes d'approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire ont été proposées dans la littérature dans la littérature, I. Petras et al. [69] présentent une étude complète des principales méthodes existantes.

Parmi les approches les plus couramment employées pour l'approximation analogique des opérateurs d'ordre fractionnaire figurent la méthode CFE (Continued Fraction Expansion), la méthode de Carlson, la méthode de Matsuda, la méthode d'Oustaloup et celle de Charef [70-72].

Les méthodes proposées par Oustaloup et Charef sont les plus largement employées dans la littérature, et feront l'objet d'une analyse approfondie dans ce chapitre.

1.8.1 Méthode d'Oustaloup

L'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire s^γ sur la bande de fréquences $[\omega_l, \omega_h]$, peut être réalisée grâce à la méthode d'Oustaloup, Cette méthode repose sur l'utilisation d'une fonction rationnelle caractérisée par une distribution récursive de zéros et de pôles d'ordre entier, définie comme suit [74,75] :

$$H_f(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (1.72)$$

Pour l'équation (1.72), (N) correspond à l'ordre d'approximation, avec les zéros, les pôles et le gain du filtre définis comme suit :

$$\omega'_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\gamma)}{2N+1}}, \quad \omega_k = \omega_b \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\gamma)}{2N+1}}, \quad K = \omega_h^\gamma \quad (1.73)$$

1.8.1.1 Exemple représentatif de la mise en œuvre d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

Considérons le dérivateur d'ordre fractionnaire représenté par la fonction de transfert suivante $H_D(s) = s^{0.5}$.

Ou la méthode d'Oustaloup est employée afin d'approximer cet opérateur par une fonction rationnelle définie sur une bande de fréquences déterminée $[\omega_l, \omega_h] = [0.001 \text{ rad/s}, 10000 \text{ rad/s}]$ avec $N=30$.

La figure (1.6) suivante illustre les tracés de Bode correspondant au dérivateur d'ordre fractionnaire et à sa fonction rationnelle d'approximation

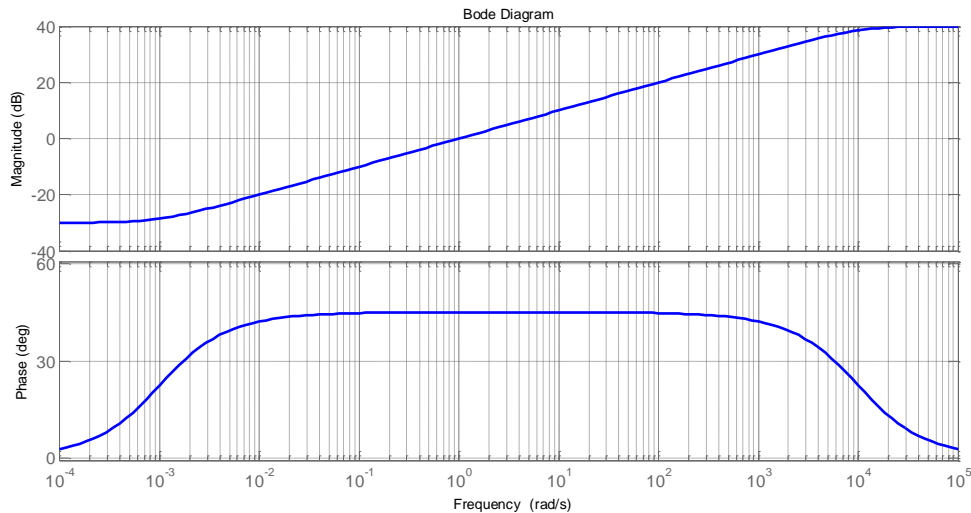


Figure 1.6 Diagramme de bode du dérivateur $s^{0.5}$

1.8.2 Méthode de Charef : Fonction de Singularité

Cette approche permet d'approximer l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire par une fonction rationnelle sur une bande de fréquences définie. L'intégrateur est, quant à lui, approché à l'aide de la technique du pôle à puissance fractionnaire (FPP) et le dérivateur par la technique du zéro à puissance fractionnaire (FPZ) [76,77].

L'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire de premier et deuxième ordre est présentée dans cette section.

1.8.2.1 Approximation des systèmes du premier ordre

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert FPP (Pole Power Fractional) suivante permet de modéliser un système fractionnaire du premier ordre (single fractional system) [71,77] :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\gamma} \quad (1.74)$$

Où $1/P_T$ est la constante de temps, et $0 < \gamma < 1$ est l'ordre non entier. Le diagramme de Bode de $H(s)$ montre que la ligne théorique de pente -20γ dB/dec est

approchée par une structure en zigzag composée de segments interconnectés dont les pentes alternent entre 0 dB/dec et -20 dB/dec, conformément à la figure (1.7). L'analyse des comportements asymptotiques, aux basses et aux hautes fréquences, de la fonction de transfert du modèle du premier ordre fractionnaire met en évidence que les premières et dernières singularités de l'approximation doivent nécessairement être des pôles. Par conséquent, l'expression de cette approximation peut être reformulée comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\gamma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (1.75)$$

En considérant que l'erreur entre la trajectoire en zigzag et la trajectoire souhaitée est donnée par γ (dB)

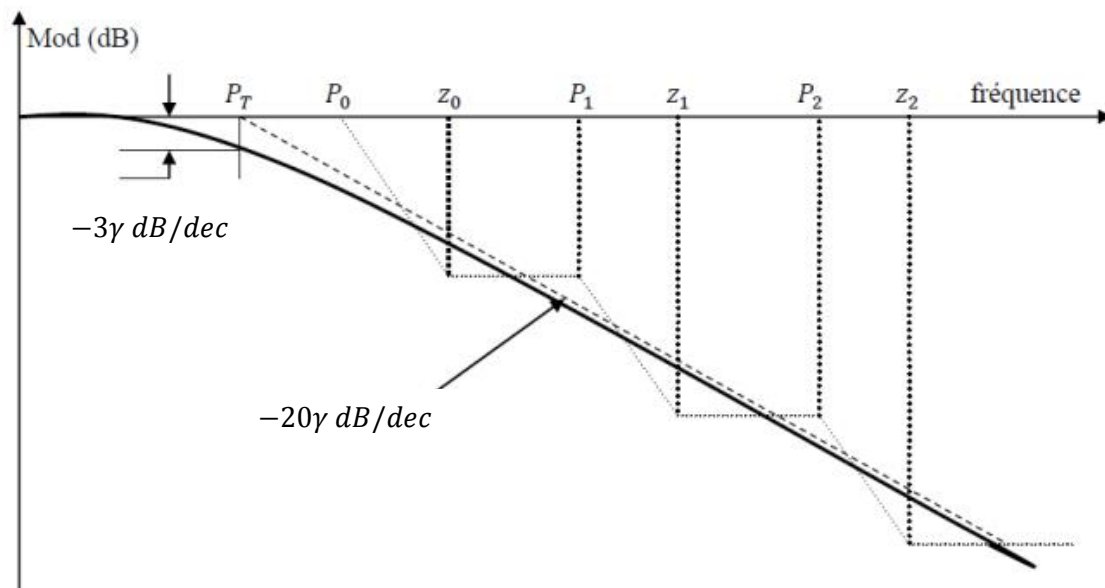


Figure 1.7 Diagramme de Bode du modèle (1.74) avec une pente présentant une pente de -20γ dB/dec et de son approximation des zigzags à -20 dB/dec et 0 dB/dec [71]

a et b sont désignés comme les rapports de position.

$$\frac{z_0}{P_0} = \frac{z_1}{P_1} \dots \dots \dots \frac{z_{N-1}}{P_{N-1}} = a, \frac{P_1}{z_0} = \frac{P_2}{z_1} \dots \dots \dots \frac{P_N}{z_{N-1}} = b \quad (1.77)$$

Où P_T cette valeur représente la fréquence correspondante à -3γ dB, P_0 singularité initiale qui est déterminée par y (dB) et P_N est singularité finale, déterminée par N .

En se référant à [77], les valeurs des pôles et des zéros de la fonction de singularité peuvent être déterminées, conformément aux relations suivantes :

$$P_1 = (ab)^i P_0, z_i = (ab)^i a P_0 \quad (1.78)$$

Pour $i=1,2,3,\dots$

Il en résulte que la fonction rationnelle approximée s'exprime sous la forme :

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\gamma} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (1.79)$$

$$N = \text{integer} \left(\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{P_0}\right)}{\log(ab)} \right) + 1 \quad (1.80)$$

Avec (ω_{max}) désignant la fréquence maximale de la bande de travail, les deux derniers pôles doivent satisfaire :

$$P_{N-1} < \omega_{max} < P_N$$

1.8.2.3 Système du second ordre

Considérons le système fractionnaire du second ordre décrit par :

$$F(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega} + 1\right)^\gamma} \quad (1.81)$$

Avec γ un nombre réel positif tel que $0 < \gamma < 1$, deux cas peuvent être identifiés :

- Le cas où $0 < \gamma < 0.5$

Dans cette situation, la fonction (1.81) peut être approchée par :

$$F_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega} + 1\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 2\beta\frac{s}{\omega} + 1\right)} \quad (1.82)$$

avec $\beta = \zeta^\gamma$ et $\eta = 1 - 2\gamma$, $F_e(s)$ peut aussi être approximée par :

$$F_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{\omega} + 1\right) \prod_{i=1}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 2\beta\frac{s}{\omega} + 1\right) \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (1.83)$$

Les points singuliers, pôles P_i et zéros z_i , sont donnés par :

$$P_i = (ab)^{i-1}az_1, \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots, N, z_i = (ab)^{i-1}z_1, \text{ pour } i=2\dots3,N-1 \quad (1.84a)$$

avec:

$$z_1 = \omega\sqrt{b}, a = 10^{\frac{y}{10(1-\eta)}} \quad (1.84b)$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10\eta}\right]}, \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.84c)$$

y est l'erreur tolérée en dB.

Pour un ordre d'approximation (N), en considérant la bande de fréquences de travail spécifiée par ω_{max} avec $p_{N-1} < \omega_{max} < p_N$, on obtient la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de } \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{P_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (1.85)$$

$F_e(s)$ peut s'écrire sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N+2$

$$F_e(s) = \frac{b_{m0}s^N + b_{m1}s^{N-1} + \dots + b_{mN}}{s^{N+2} + a_{m1}s^{N+1} + \dots + a_{mN+2}} \quad (1.86)$$

Où les coefficients b_{mi} et a_{mi} sont à calculés d'après les valeurs des P_i, z_i, β et ω

- Pour $0.5 < \gamma < 1$

Dans ce cas, la fonction (1.82) est approximée par :

$$F_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 2\beta\frac{s}{\omega} + 1\right)\left(\frac{s}{\omega} + 1\right)^\eta} \quad (1.87)$$

avec $\beta = \zeta^\gamma$ et $\eta = 2\gamma - 1$, on obtient les valeurs singulières suivantes:

$$P_i = (ab)^{i-1}P_1 \quad i = 1, 2, \dots, N, z_i = (ab)^{i-1}aP_1, i = 2, \dots, N - 1 \quad (1.88a)$$

où

$$P_1 = \omega\sqrt{b}, a = 10^{\frac{y}{10(1-\eta)}} \quad (1.88b)$$

$$b = 10^{\left[\frac{y}{10\eta}\right]}, \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (1.88c)$$

y est l'erreur tolérée en dB

$F_e(s)$ peut aussi se mettre sous la forme d'une fonction de transfert paramétrique (1.83).

1.8.3 Exemples illustratifs

Des exemples illustratifs sont présentés pour implémenter la méthode d'approximation de Charef, on va considérer deux modèles de systèmes

Exemple 1 :

La représentation en fonction de transfert $H(s)$ d'un système du premier ordre est formulé comme suit :

$$H(s) = \frac{1}{(0.2s+1)} \quad (1.89)$$

La représentation en fonction de transfert $H(s)$ d'un système du premier ordre fractionnaire est donné par :

$$H_\gamma(s) = \frac{1}{(0.2s+1)^\gamma} \quad (1.90)$$

L'approximation de Charef par une fonction rationnelle est effectuée pour différents cas de $(\gamma = 0.3, \gamma = 0.55, \gamma = 0.9)$

Les réponses indicielles des systèmes $H(s)$ entier et $H_\gamma(s)$ pour différents cas de m sont illustrées respectivement sur la figure 1.8

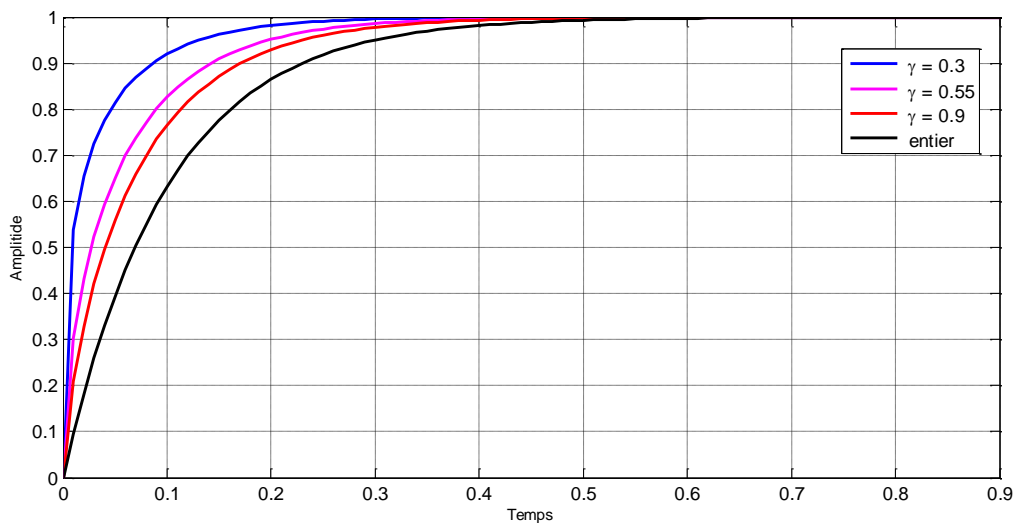


Figure 1.8 Réponses indicielles du système entier 1^{er} ordre et le système fractionnaire pour différentes valeurs de γ

Exemple 2 :

La représentation en fonction de transfert $H(s)$ d'un système du deuxième ordre est donné par :

$$H(s) = \frac{100}{(s^2 + 20s + 1)} \quad (1.91)$$

avec , $\omega = 10 \text{ rad/s}$, $\zeta = 1$

La représentation en fonction de transfert $H_\gamma(s)$ d'un système du deuxième ordre fractionnaire γ est donné par :

$$H_\gamma(s) = \frac{100}{(s^2 + 20s + 1)^\gamma} \quad (1.92)$$

L'approximation de Charef par une fonction rationnelle est effectuée pour différents cas de ($\gamma = 0.9, \gamma = 0.7, \gamma = 0.55$)

Les réponses indicielles des systèmes $H(s)$ entier et $H_\gamma(s)$ pour différents cas de γ sont illustrées respectivement sur la figure 1.9

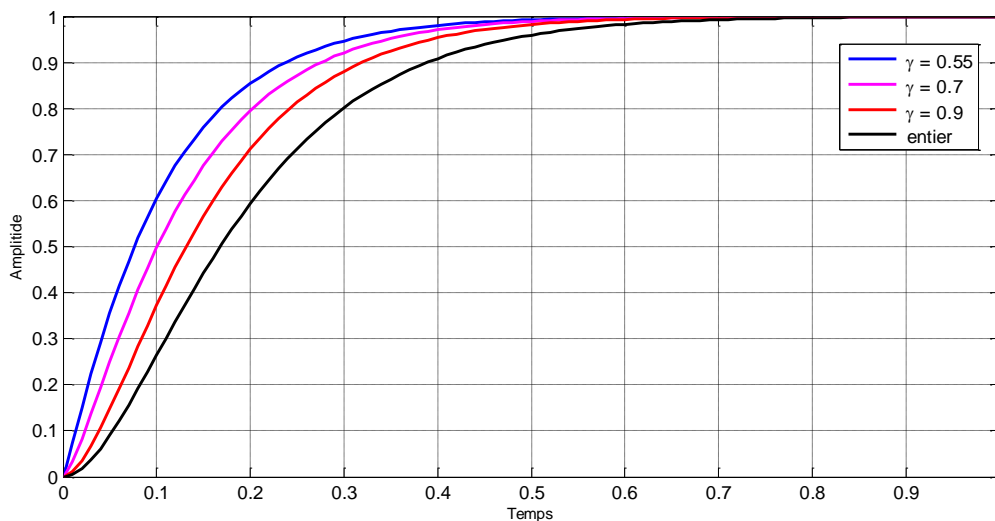


Figure 1.9 Réponses indicielles du système entier 2^{ème} ordre et le système fractionnaire pour différentes valeurs de γ

Les figures (1.8) et (1.9) présentent le gain obtenu sur le temps de montée pour chacun des deux exemples.

1.8.4 Approximation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Dans le domaine des fréquences, la fonction de transfert de l'opérateur intégral fractionnaire peut être représentée par la fonction irrationnelle suivante [71]:

$$H_I(s) = \frac{1}{s^\alpha}, \text{ pour } 0 < \alpha < 1 \quad (1.93)$$

En considérant ($s = j\omega$) comme fréquence complexe et ($\alpha > 0$) tel que : $0 < \alpha < 1$.

Considérant une bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$, la modélisation de cet opérateur fractionnaire peut s'effectuer via un pôle à puissance fractionnaire (PPF) selon la formule suivante [77]:

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma} \quad (1.94)$$

Si on suppose que pour $[\omega_b, \omega_h]$, on a, $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma} = \frac{K_I \omega_c^\gamma}{s^\alpha} = \frac{1}{s^\alpha} = H_I(s) \quad (1.95)$$

Avec $K_I = 1/(\omega_c^\gamma)$ et ω_c est la fréquence de coupure du PPF est déterminée à partir de la fréquence basse ω_b par la relation $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\gamma}\right)} - 1}$ avec ε est l'erreur d'approximation maximale permise dans la bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$.

Pour modéliser le PPF de l'équation (1.94), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire en tant que système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [77], [76].

La méthode d'approximation consiste à représenter la pente -20γ dB/dec du diagramme de Bode du PPF par une série de segments en zigzag, alternant des pentes de -20γ dB/décade et de 0, ce qui se traduit par une alternance de pôles et de zéros positionnés sur l'axe réel négatif du plan (s), de façon à ce que :

$$P_0 < z_0 < P_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < P_N.$$

Par conséquent, l'approximation peut s'écrire comme suit :

$$H(s) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma} = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (1.96)$$

Les P_i et les z_i correspondent aux pôles et aux zéros de l'approximation. L'utilisation d'une méthode graphique [77] montre que ces pôles et zéros se répartissent selon une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation repose initialement sur une erreur d'approximation (γ) en dB et sur la détermination de la bande de fréquence concernée.

$$\omega_{max} = 100\omega_h.$$

Le nombre de pôles d'approximation (N) peut être déterminé par :

$$N = \text{Partie entière de } \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (1.97)$$

La disposition des singularités (pôles et zéros) est organisée selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$P_i = (ab)^i P_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.98a)$$

$$z_i = (ab)^i a P_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.98b)$$

Les coefficients a et b , désignés comme rapports de position, sont définis en fonction de (γ) et γ par les expressions suivantes :

$$a = 10^{\frac{\gamma}{10(1-\gamma)}}, b = 10^{\frac{\gamma}{10\gamma}} \quad (1.98c)$$

Le pôle initial (P_0) et le zéro initial (z_0) sont déterminés par [77]:

$$P_0 = \omega_c \sqrt{b}, z_0 = a P_0 \quad (1.98d)$$

Pour évaluer la contribution de chaque pôle au processus de relaxation, il convient de décomposer la fonction rationnelle en une somme de fonctions élémentaires, selon la forme suivante :

$$H(s) = K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i P_0}\right)} \quad (1.99)$$

Les coefficients (h_i), correspondant aux résidus, sont calculés selon la relation suivante :

$$h_i = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 + \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^i a P_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 + \frac{(ab)^j P_0}{(ab)^i P_0}\right)} = K_I \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1.100)$$

1.8.5 Approximation d'un dérivateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est, dans le domaine fréquentiel, représentée par la fonction irrationnelle suivante :

$$H_D(s) = s^\gamma, \quad \text{pour } 0 < \gamma < 1 \quad (1.101)$$

Avec $s = j\omega$ la fréquence complexe et m un nombre positif tel que $0 < \gamma < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, L'opérateur considéré peut-être modélisé au moyen d'un pôle à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [71,76] :

$$H(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma \quad (1.102)$$

Si on suppose que pour, $[\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

Sous l'hypothèse que $\omega \gg \omega_c$ pour $[\omega_b, \omega_h]$, il est possible d'écrire :

$$G(s) = K_D \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma = \frac{K_D}{\omega_c^\gamma} s^\gamma = G_D(s) \quad (103)$$

En posant $K_D = \omega_c^\gamma$, la fréquence de coupure ω_c du ZPF est obtenue à partir de la fréquence

basse ω_b par la relation suivante $\omega_c = \omega_b \sqrt{10^{\left(\frac{\varepsilon}{10\gamma}\right)} - 1}$.

Dans le but de modéliser le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (1.100), et ainsi le dérivateur d'ordre fractionnaire, en tant que système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle. Cette approximation repose sur la représentation de la pente de $(20\gamma \text{ dB/dec})$ dB/décade sur le diagramme de Bode du ZPF par une succession de segments en zigzag, alternant des pentes de (20) dB/décade et de (0) dB/décade, ce qui correspond à une alternance de pôles et de zéros positionnés sur l'axe réel négatif du plan (s), de manière à ce que [76] :

$$P_0 < z_0 < P_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < P_N$$

Par conséquent, l'approximation peut s'écrire comme suit :

$$H(s) = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (104)$$

L'application d'une méthode graphique simple [77] révèle que les pôles et les zéros de l'approximation se disposent selon une progression géométrique. La méthode graphique d'approximation commence par spécifier l'erreur d'approximation (γ) en dB et la bande de fréquence concernée $\omega_{max} = 100 \omega_h$.

Le nombre total de pôles d'approximation (N) peut être calculé selon :

$$N = \text{Partie entière de } \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (1.105)$$

Les singularités (pôles et zéros) sont arrangées selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (106a)$$

$$P_i = (ab)^i a z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (106b)$$

$$z_0 = \omega_c \sqrt{b}, P_0 = a \quad (106c)$$

En conséquence, la fonction rationnelle d'approximation dans la bande de fréquence considérée s'exprime comme suit :

$$H_D(s) = s^\gamma = K_D \left(1 + \frac{s}{\omega_c}\right)^\gamma \approx K_D \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (107)$$

Pour des considérations pratiques de mise en œuvre, $\left(\frac{H_D(s)}{s}\right)$ est développée sous forme de fonctions élémentaires, de manière à ce que :

$$\frac{H_D(s)}{s} = \frac{1}{s} K_D \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{s}{(ab)^i a z_0}\right)} \quad (108)$$

1.9 Méthodes de discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire

De manière générale, deux types de méthodes permettent de discrétiser les dérivées d'ordre fractionnaire, la discrétisation directe et la discrétisation indirecte.

Dans les méthodes de discrétisation indirecte, deux étapes sont requises d'abord l'approximation analogique du dérivateur ou de l'intégrateur, puis la discrétisation de la fonction de transfert ainsi obtenue en s . Les méthodes de discrétisation directe comprennent le développement en série directe de l'opérateur d'Euler, le développement fractionnaire continu de Tustin, ainsi que les approches fondées sur l'intégration numérique [78,79], pour l'obtention des modèles discrets des systèmes d'ordre fractionnaire, il est nécessaire d'utiliser des approximations directes des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. En appliquant cette démarche à l'équation (1.47) de $H(s)$, on peut exprimer la fonction de transfert discrète générale du système sous la forme

$$H(s) = \frac{b_m(\omega(z^{-1}))^{\gamma m} + b_{m-1}(\omega(z^{-1}))^{\gamma m-1} \dots b_1(\omega(z^{-1}))^1 + b_0(\omega(z^{-1}))^{\gamma_0}}{a_n(\omega(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1}(\omega(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1(\omega(z^{-1}))^{\alpha_1} + a_0(\omega(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (1.109)$$

Dans cette expression, $(w(z^{-1}))$ désigne l'équivalent discret de l'opérateur de Laplace (s), formulé en termes de la variable complexe (z) ou de l'opérateur de décalage z^{-1}

La discrétisation des systèmes fractionnaires s'effectue à l'aide de plusieurs types d'opérateurs, parmi lesquels Euler Grünwald, Tustin, Simpson et Al-Alaoui.

On rappelle que $s = j\omega$ correspond à la fréquence complexe, la variable $z = e^{(j\omega T)}$ est complexe, T désignant la période d'échantillonnage.

- **Euler (Grünwald) :**

Elle est formulée de la manière suivante :

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{1}{T}(1 - z^{-1})\right)^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots\right) \quad (1.110)$$

- **Tustin :**

Elle est formulée de la manière suivante :

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^\alpha = \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha (1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots) \quad (1.111)$$

- **Simpson :**

Elle est formulée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (w(z^{-1}))^\alpha &= \left(\frac{3}{T} \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})^\alpha}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha (1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots) \end{aligned} \quad (1.112)$$

- **Al Alaoui :**

Elle est formulée de la manière suivante :

$$(w(z^{-1}))^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{(1+z^{-1})^7}\right)^\alpha = \left(\frac{8}{7T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{8}{7}\alpha z^{-1} + \left(-\frac{24}{49}\alpha + \frac{32}{49}\alpha^2\right)z^{-2} + \dots\right) \quad (1.113)$$

Ces méthodes présentent la limitation d'aboutir à des modèles d'ordre élevé, ce qui complique leur utilisation pour des simulations en temps réel.

1.10 Conclusions

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions fondamentales du calcul d'ordre fractionnaire, en détaillant. L'étude a porté sur les fonctions spécifiques, les définitions et propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, ainsi que sur leur représentation et transformée de Laplace. Nous avons ensuite abordé l'approche numérique de Grünwald-Letnikov pour la dérivation et l'intégration fractionnaires, en vue de résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Deux représentations des systèmes à ordre non entier ont été discutées : par fonction de transfert et en espace d'état.

Puis on s'est intéressé aux méthodes d'approximation analogiques dans le domaine fréquentiel, en particulier les méthodes d'Oustaloup et de Charef, ont fait l'objet d'une attention particulière et ont été présentées en détail. La méthode de Charef, détaillée dans son intégralité, a été particulièrement mise en avant, étant actuellement l'approche la plus employée pour la simulation et pour l'approximation de l'intégrateur correspondant, par un modèle rationnel de dimension finie dans le but d'identifier et d'estimer les paramètres des systèmes d'ordre fractionnaire on la présenterais dans la suite de notre travail.

Chapitre 2

2 Identification des systèmes

2.1 Introduction

L'identification des systèmes est une discipline fondamentale de l'automatique et du traitement du signal consacrée à la construction des modèles mathématiques de systèmes dynamiques à partir de mesures expérimentales. Grâce à ces modèles, il est possible de prédire le comportement de systèmes physiques (mécaniques, électroniques, biologiques, etc.) sans connaissance détaillée de leur architecture interne, c'est par ce processus que se définissent la classe de modèles à utiliser et les valeurs des paramètres correspondants. Identifier un processus dynamique revient à construire un modèle qui, à partir des données expérimentales d'entrée et de sortie, restitue le comportement réel du système [80].

L'identification s'effectue le plus souvent en minimisant un critère de qualité représentant l'écart entre la réponse mesurée du processus et la réponse simulée du modèle pour un ensemble déterminé de sollicitations.

Différentes méthodes d'identification sont détaillées ci-après, chaque cas correspond le plus souvent à l'un des schémas présentés dans les figures (2.1) et (2.2)

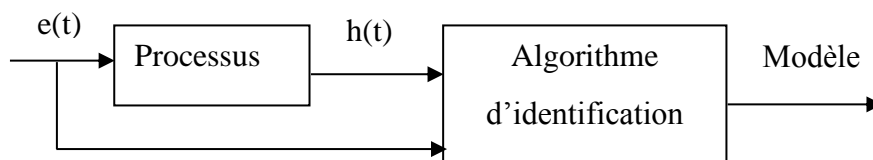


Figure 2.1 Identification par analyse du comportement entrée sortie

La détermination des paramètres d'un système à partir de l'observation de sa sortie, compte-tenu de l'entrée appliquée figure (2.2).

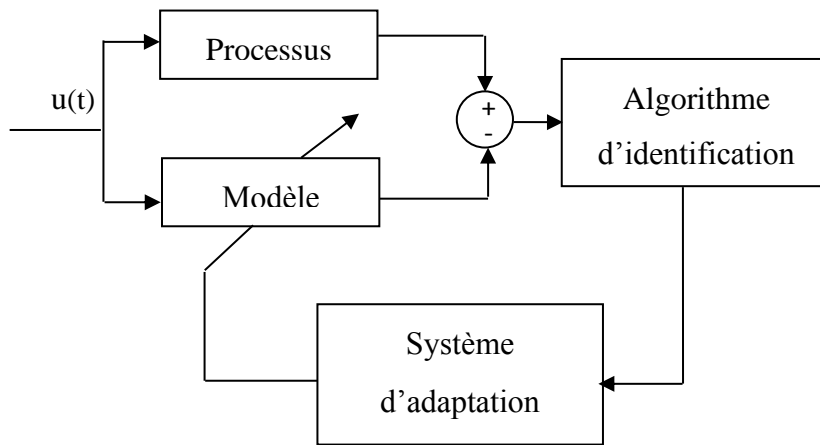


Figure 2.2 Identification de type paramétrique

Le rôle de l'algorithme adaptatif consiste à ajuster les paramètres du modèle prédictif à chaque échantillon, en se fondant sur les informations obtenues du système, afin que le modèle reproduise la relation entrée-sortie caractéristique.

2.2 Identifiabilité

L'identifiabilité est un concept fondamental dans les problèmes d'identification. En identification, l'identifiabilité garantit qu'à partir des données entrées-sorties, la procédure fournit des paramètres uniques et un modèle fidèle au comportement réel du système [81]. L'identifiabilité est principalement déterminée par deux éléments : le type et la complexité du modèle, d'une part, et la disponibilité des données d'autre part, ce qui amène à distinguer deux notions :

- **Identifiabilité a priori** : ou identifiabilité théorique, elle consiste à vérifier que la relation entrée-sortie de la structure est injective, condition nécessaire avant toute identification a posteriori.

- **Identifiabilité a posteriori** : également appelée identifiabilité pratique. Une fois que l'identifiabilité a priori est établie, l'objectif consiste à vérifier que la condition d'unicité de la solution du problème d'estimation est satisfaite à partir des mesures disponibles.

L'étude de l'identifiabilité d'un système repose sur deux étapes. La première fait appel à un signal test possédant une richesse d'information suffisante pour solliciter les différentes dynamiques du système considéré. Choisir ce type d'entrée renforce l'identifiabilité et implique qu'aucune trajectoire ne peut correspondre au même signal de commande qu'une autre trajectoire distincte. Dans la deuxième étape, on spécifie les conditions suffisantes assurant l'unicité de la représentation d'une réponse T , en considérant que la trajectoire du système est définie sur un intervalle de temps finie.

2.3 Le processus d'identification

L'identification consiste à déterminer expérimentalement le modèle dynamique d'un système en s'appuyant sur les relations mathématiques existant entre ses variables. La construction de ce type de modèle suit une procédure itérative en cinq phases [81],(voir la figure (2.3))

- **Extraction de données** : Cette étape consiste à mesurer les variables considérées comme caractéristiques du système. Ces variables incluent les variables externes influençant le système, les variables internes décrivant l'état du système, ainsi que les variables de sortie correspondant à la réponse du système. La présence de perturbations non mesurables, agissant sur le système en entrée ou en sortie, rend généralement le processus de modélisation plus complexe
- **Structure du modèle** : La définition de la structure du modèle joue un rôle central, étant donné qu'elle influence la classe dans laquelle on cherche à obtenir une description appropriée du système. À cette étape, il convient de considérer, les principaux éléments comprennent, la représentation du modèle (équation différentielle, espace d'état ou entrée-sortie), le paramétrage et l'ordre du modèle.
- **Critère d'identification** : Cela correspond à la spécification d'une fonction mathématique utilisée pour quantifier l'évaluation des performances du modèle estimé. La littérature présente différentes formes de critères d'identification, le plus répandu étant l'erreur quadratique moyenne entre la sortie prédite par le modèle estimé et la sortie observée.

- **Estimation du modèle** : L'algorithme permettant d'obtenir le modèle estimé, fondé sur la structure choisie et le critère d'identification retenu.
- **La validation du modèle** : Il représente aussi un aspect essentiel. Plusieurs tests de vérification, impliquant des procédures et signaux d'excitation variés, doivent être réalisés pour apprécier dans quelle mesure le modèle permet d'estimer correctement les sorties observées.

Initialement, on recueille les données, puis on choisit la structure du modèle et le critère d'ajustement, pour enfin retenir le modèle optimal. Si le premier modèle ne permet pas d'atteindre la précision souhaitée, Il faut revenir sur les étapes précédentes de la procédure afin de les réexaminer la procédure.

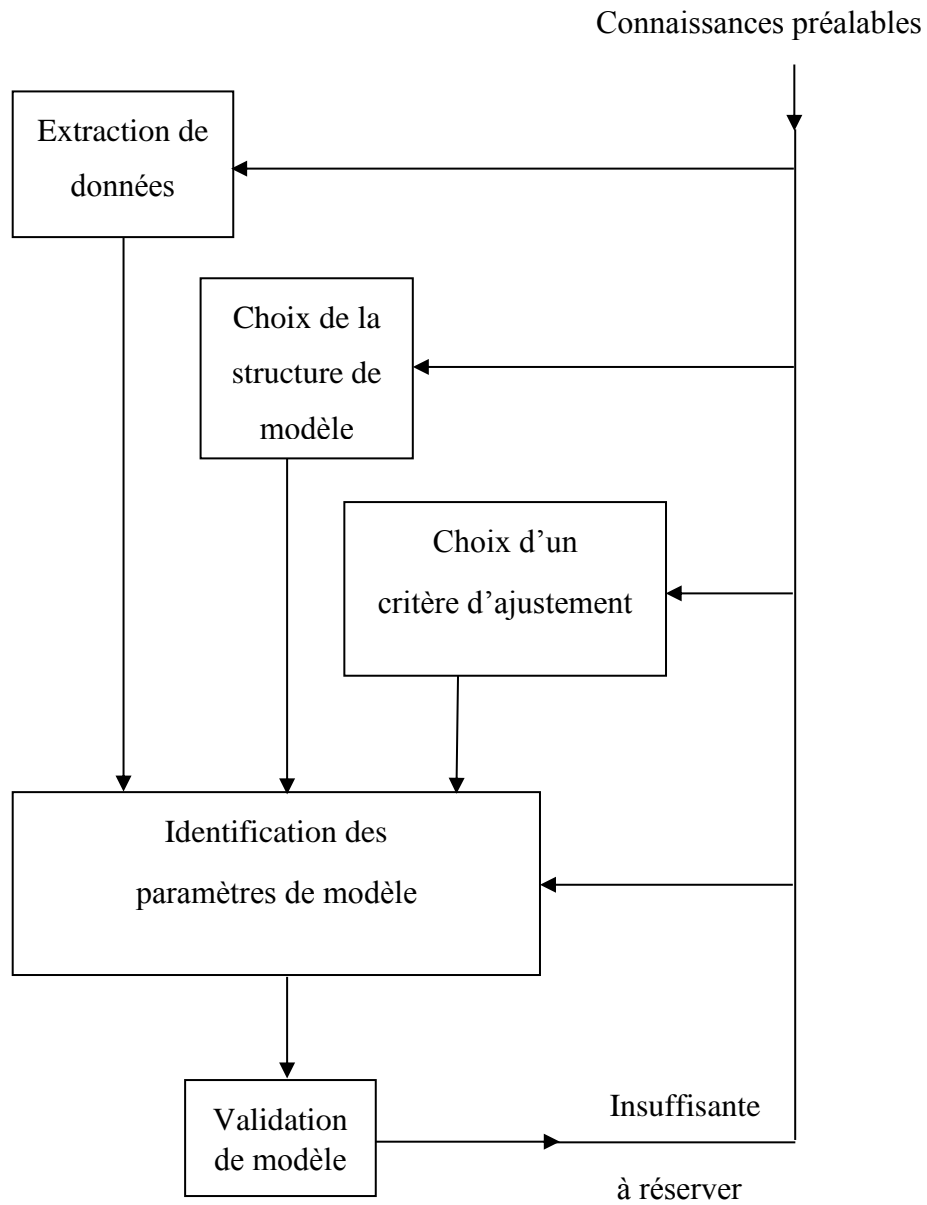


Figure 2.3 Schéma de la procédure générale d'identification des systèmes [81]

Identifier un système implique de choisir une architecture connectant l'entrée à la sortie, utilisée pour estimer les paramètres du modèle à partir des données mesurées.

2.4 Techniques d'identification des systèmes

Afin d'obtenir une connaissance quantitative approfondie du système, diverses méthodes d'identification ont vu le jour au cours des dernières années. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux procédés industriels.

2.4.1 Méthodes d'identification du modèle non paramétrique

Les diverses méthodes non paramétriques, (analyse fréquentielle, réponse indicielle, impulsionnelle) peuvent aider à choisir la structure du modèle dont cette dernière peut être déterminée, soit par corrélation, soit par la transformée de Fourier.

2.4.2 Méthodes d'identification du modèle paramétrique

Dans cette section, nous étudions les méthodes fondées sur le modèle paramétrique. Ce modèle vise à caractériser un système à partir d'un ensemble de paramètres à estimer, ce qui revient à déterminer le vecteur de paramètres correspondant. Ces approches sont couramment employées dans le domaine industriel pour l'identification des systèmes dynamiques. Deux principales catégories de méthodes peuvent être distinguées. D'une part, les méthodes paramétriques graphiques, et d'autre part, les méthodes paramétriques statistiques.

2.4.2.1 Méthodes paramétriques graphiques

L'objectif consiste à élaborer des modèles paramétriques à partir de modèles non paramétriques. En exploitant les réponses temporelles (notamment à un échelon) ou fréquentielles du système afin d'en déduire les paramètres caractéristiques. L'approche graphique est simple à réaliser et permet d'obtenir les différents paramètres constituant la fonction de transfert. Il existe plusieurs modèles de représentations graphique tels que le modèle de Broida, Strejc [82].

2.4.2.2 Méthodes statistiques

La disponibilité des calculateurs numériques permet désormais la mise en œuvre d'algorithmes d'estimation automatique des paramètres des modèles échantillonnés représentant les procédés étudiés. Le traitement des données d'entrée et de sortie peut être effectué afin d'extraire les informations nécessaires à l'identification et à l'analyse du comportement du système au moyen

d'algorithmes non récursifs (traitant un ensemble de données sur un intervalle de temps donné) ou récursifs (effectuant un traitement itératif des données). Ces approches se distinguent par leur capacité à opérer en temps réel tout en mobilisant des ressources de calcul limitées. En revanche, l'identification paramétrique statistique s'appuie généralement sur l'analyse de l'écart entre la sortie observée du procédé $y(t)$ et la sortie estimée $\hat{y}(t)$ par le modèle, cet écart étant communément désigné sous le terme d'erreur de prédiction.

2.4.3 Différentes Structure des modèles paramétriques

Pour les systèmes dynamiques, le bruit blanc peut influencer le comportement du système à plusieurs niveaux, donnant ainsi lieu à différentes structures de modèles.

2.4.3.1 Modèle ARX

La formulation du modèle ARX (AutoRegressivewithXogenous input) s'appuie sur l'équation aux différences suivante :

$$y(t) = -a_1y(t-1) - \dots - a_{n_a}y(t-n_a) + b_0u(t-d) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b-d) + e(t) \quad (2.1)$$

Graphiquement, elle s'exprime par la mise en série de deux filtres, conformément à la figure (2.4) présentée.

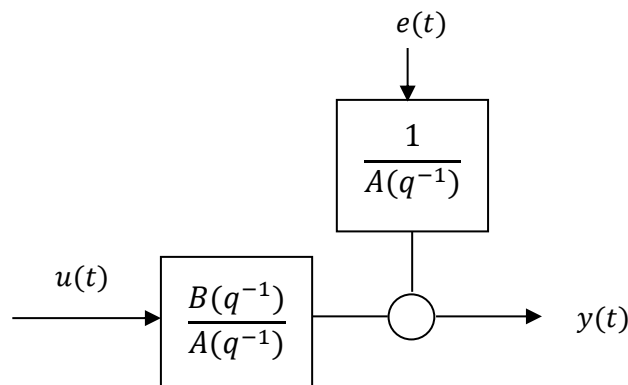


Figure 2.4 Représentation en blocs de la structure AutoRegressive

Dans la structure de modèle Auto Regressive, le bruit blanc est filtré par le polynôme $\frac{1}{A_1(q^{-1})}$.

L'équation aux différences montre que la sortie du système dépend linéairement des valeurs antérieures des entrées et des sorties, traduisant ainsi la relation dynamique qui lie ces variables.

2.4.3.2 Modèle ARMAX

La formulation du modèle ARMAX s'appuie sur l'équation aux différences suivante :

$$y(t) = -a_1y(t-1) - \dots - a_{n_a}y(t-n_a) + b_0u(t-d) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b-d) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{n_c}e(t-n_c) \quad (2.2)$$

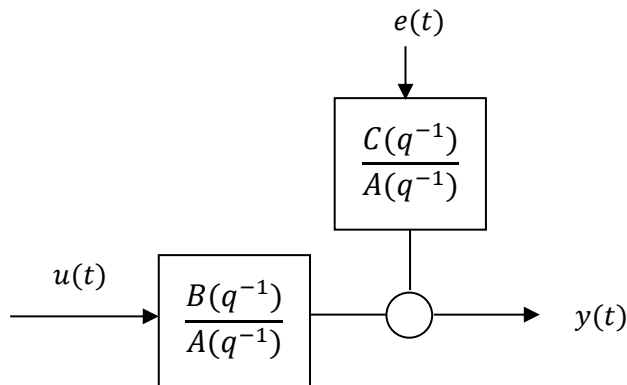


Figure 2.5 Représentation en blocs de la structure ARMAX

2.4.3.3 Modèle OE

La structure de modèle OE (Output Error) repose sur l'équation aux différences suivante :

$$y(t) = -f_1y(t-1) - \dots - f_{n_a}y(t-n_a) + b_0u(t-d) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b-d) + e(t) + f_1e(t-1) + \dots + f_{n_f}e(t-n_f) \quad (2.3)$$

Graphiquement, elle s'exprime à travers le diagramme figurant dans la figure 2.6

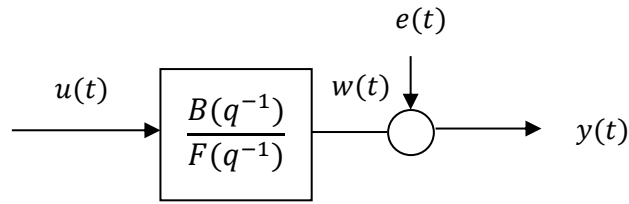


Figure 2.6 Représentation en blocs de la structure OE

$$\begin{cases} w(t) = -f_1 w(t-1) - \dots - f_{n_f} w(t-n_f) + b_0 u(t-d) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b-d) \\ y(t) = w(t) + e(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans le modèle OE, le bruit est modélisé de la manière la plus simple, sous la forme d'un bruit blanc ajouté à la sortie du système. La représentation graphique ainsi que le système d'équations (2.4) illustrent l'indépendance entre la dynamique du système et le bruit, tandis que l'équation aux différences (2.3) qui met en avant la difficulté d'estimation des paramètres.

2.4.3.4 Modèle BJ

La structure du modèle Box–Jenkins (BJ) repose sur l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} w(t) = -f_1 w(t-1) - \dots - f_{n_f} w(t-n_f) + b_0 u(t-d) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b-d) \\ v(t) = -d_1 v(t-1) - \dots - d_{n_d} v(t-n_d) + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c) \\ y(t) = w(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Graphiquement, elle s'exprime à travers le diagramme figurant dans la figure 2.7.

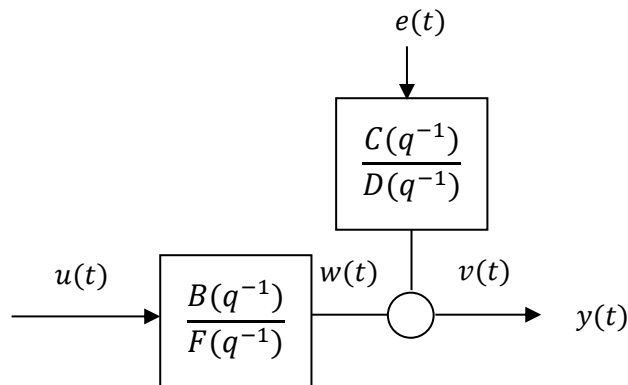


Figure 2.7 Représentation en blocs de la structure BJ

Le modèle de Box et Jenkins constitue une représentation particulièrement complète des systèmes dynamiques, intégrant un bruit coloré $v(t)$ tout en restant indépendant de la dynamique du système. La coloration du bruit blanc $e(t)$ est réalisée par le filtre $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$. Ici encore, le choix de ce modèle implique un plus grand nombre de paramètres à estimer et doit être motivé en comparaison d'un modèle plus simple, comme le modèle OE.

2.5 Identification basée sur l'erreur de sortie

Le fonctionnement de cette méthode d'identification est représenté schématiquement comme illustré dans la figure (2.8), le modèle dépend de (n) paramètres $\theta(i)$, i variant de 1 à n . Il s'agit alors de déterminer les valeurs de $\theta(i)$ qui minimisent le critère. Ce dernier est généralement choisi sous la forme $J = \sum \varepsilon^2(i)$.

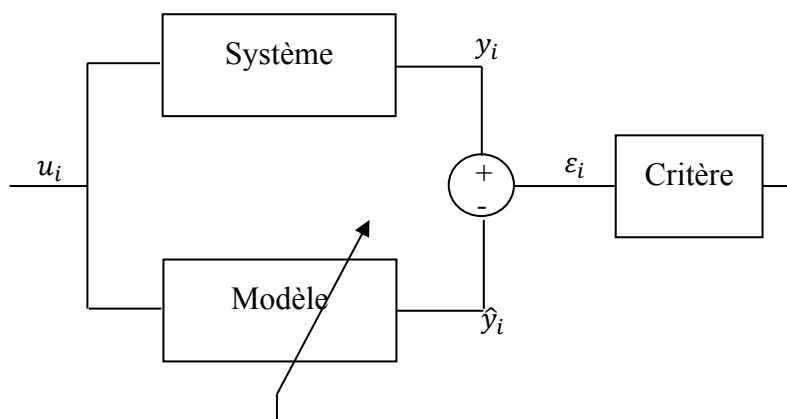


Figure 2.8 Principe d'identification fondé sur l'erreur de sortie

La recherche des paramètres optimaux $\hat{\theta}(i)$ se fait par programmation non linéaire. IL s'agit d'utiliser un algorithme qui à partir de paramètres non optimaux $\theta(i)$ et un critère J donne les paramètres $\hat{\theta}(i)$

De nombreux algorithmes ont été développés, parmi eux, les plus utilisés sont présentés ci-dessous :

- Gradient
- Quasi Newton
- Nelder et Mead
- Algorithmes génétiques

2.6 Identification basée sur l'erreur de prédiction

Dans ce cas, nous supposons que le modèle obtenu constitue un prédicteur, c'est-à-dire qu'il permet de calculer la sortie à l'instant i en fonction des entrées et des sorties réelles aux instants précédents $u(i-k)$ et $y(i-k)$.

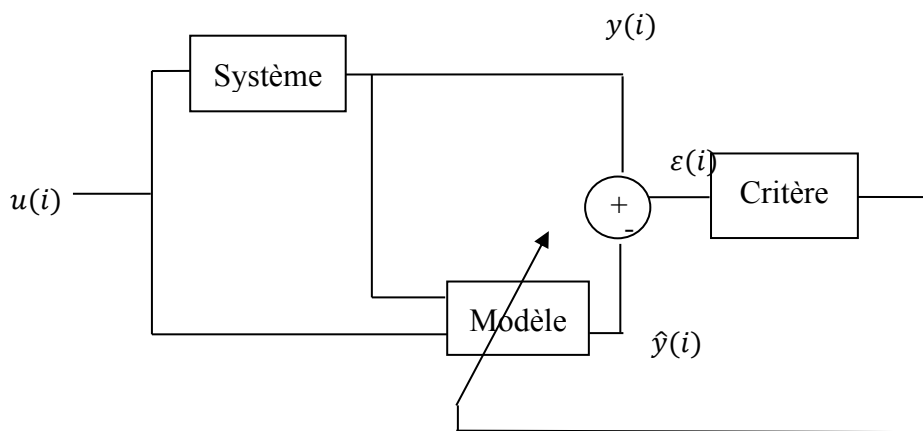


Figure 2.9 Principe d'identification fondé sur l'erreur de sortie

À titre d'exemple parmi ces méthodes les plus utilisées, on peut citer les algorithmes récursifs, à laquelle nous reviendrons par la suite.

2.7 Estimateur de moindre carrée

La méthode des moindres carrés, qui constitue le fondement de nombreuses approches d'identification et d'estimation de paramètres, repose sur la minimisation d'une fonction quadratique $V(\theta, t)$ définie comme suit (2.6) :

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \varepsilon^2(t) \quad (2.6)$$

Pour un processus LTI avec des perturbations $\varepsilon^2(t)$, la sortie du système $y(t)$ peut être exprimée sous la forme d'une régression linéaire de la manière suivante :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + \varepsilon(t) \quad (2.7)$$

Où :

$y(t)$: La sortie à l'instant t

$\varphi^T(t)$: Vecteur de régression contenant les entrées et sorties passées

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots y(t-n_a) \ u(t-1) \dots u(t-n_b-d)] \quad (2.8)$$

θ : vecteur de paramètres à estimer.

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_1 \dots b_{n_b}]^T \quad (2.9)$$

Critère des moindres carrés (2.9) consiste à réduire au minimum la somme des carrés des différences entre les données observées et les valeurs estimées :

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (y(i) - \varphi^T(t)\theta)^2 \quad (2.10)$$

On appelle erreur de prédiction l'écart entre la sortie réelle du système et celle estimée par le modèle.

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (2.11)$$

L'estimateur des moindres carrés (LS) est défini comme celui qui minimise la fonction de coût suivante :

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \varepsilon^2(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 \quad (2.12)$$

Dans le cadre d'une régression linéaire, cette propriété peut être réalisée au sens des moindres carrés par un estimateur $\hat{\theta}(t)$ qui minimise le critère quadratique (2.11), le minimum étant atteint pour :

Pour lequel l'erreur d'équation $\varepsilon(t/\hat{\theta})$ est définie par :

$$\varepsilon(t/\hat{\theta}) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (2.13)$$

$\hat{y}(t)$: est la sortie estimée.

On introduit les notations suivantes :

$$Y(t) = (y(1) \ y(2) \ \dots \ y(t))^T \quad (2.14)$$

$$E(t) = (\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \dots \ \varepsilon(t))^T \quad (2.15)$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(t) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$P(t) = \left(\Phi^T(t)\Phi(t) \right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^t \varphi(i)\varphi^T(i) \right)^{-1} \quad (2.17)$$

Par conséquent, l'estimateur des moindres carrés peut être représenté de la manière suivante :

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T(t)\Phi(t) \right)^{-1} \Phi^T(t)Y \quad (2.18)$$

À cet effet, il convient de remarquer que, lors de la réalisation d'une nouvelle acquisition, les matrices $\Phi^T(t)Y(t)$ s'expriment comme suit :

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi^T(t-1) \\ \varphi^T(t) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y(t-1) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

En substituant ces deux équations dans l'expression (2.19), il en résulte :

$$\hat{\theta}(t) = \left(\Phi^T(t-1)\Phi(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \right)^{-1} (\Phi(t-1)Y(t-1) + \varphi(t)y(t)) \quad (2.21)$$

Nous constatons que la matrice $\left(\Phi^T(t-1)\Phi(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \right)^{-1}$ est grande. Pour un grand nombre d'échantillons N , le calcul de l'inverse n'est pas approprié, on utilise alors la méthode récursive des moindres carrés. Cette équation implique toujours, à ce niveau, une inversion matricielle. Afin de réduire la complexité numérique de ce calcul, l'utilisation du lemme d'inversion matricielle permet de contourner cette difficulté.

Lemme 2.1

Soient A, B, C et D des matrices dont les dimensions permettent que le produit (BCD) ainsi que la somme $A + BCD$ soient correctement définis. En supposant de plus que A et C soient régulières. On utilise le lemme d'inversion matricielle, qui s'exprime de la manière suivante :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (2.23)$$

Preuve : par multiplication directe, on obtient que

$$\begin{aligned} & (A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}) \\ &= I + BCDA^{-1} - B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \\ & \quad - BCDA^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \\ &= I - BCDA^{-1} - BC(C^{-1} + DA^{-1}B)(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

2.8 Algorithme Moindres Carrés Récursifs (RLS)

Lors de l'application de ce lemme à :

$$P(t) = \left(\Phi^T(t)\Phi(t) \right)^{-1} = \left(\Phi^T(t-1)\Phi(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \right)^{-1}$$

La construction de la forme récursive de l'estimateur des moindres carrés s'avère aisée :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t) \quad (2.24a)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (2.24b)$$

$$K(t) = P(t)\varphi(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{1 + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (2.24c)$$

$$P(t) = P(t-1) - K(t)\varphi^T(t)P(t-1) \quad (2.25d)$$

Ce qui permet de démontrer que l'initialisation de l'algorithme d'adaptation paramétrique peut s'effectuer de la manière suivante:

$$\hat{\theta}(0) = 0, P(0) = \frac{1}{\delta} \quad (2.16)$$

avec $\delta = 0.01$ par exemple.

Cette méthode est fondamentale pour l'identification des systèmes dynamiques, et aussi sont utilisées en filtrage et en contrôle, les algorithmes récursifs offrent un compromis optimal entre précision et complexité calculatoire pour l'identification en temps réel.

2.8.1 L'algorithme RLS avec facteur doublé

La fonction de coût à minimiser à chaque instant t définie comme suit :

$$V(\theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} (y(i) - \varphi^T(i)\theta)^2 \quad (2.27)$$

λ : Facteur d'oubli ($0 < \lambda \leq 1$)

L'algorithme des moindres carrés récursifs (RLS) est mis en œuvre selon la formulation suivante :

1-Initialisation :

$$\hat{\theta}(0)=0, P(0) = cI \ (c \gg 1)$$

2-Mise à jour recursive des équations suivantes:

- Gain: $K(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}$ (2.28a)

- Erreur : $\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$ (2.28b)

- Paramètres : $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$ (2.28c)

- Covariance: $P(t) = \frac{1}{\lambda} [I - K(t)\varphi^T(t)]P(t-1)$ (2.28d)

2.9 Les systèmes non linéaires

Il existe de multiples approches pour décrire les systèmes non linéaires [83]. Dans cette section, nous examinerons plusieurs représentations non linéaires de processus dynamiques, en nous concentrant sur les modèles non linéaires simples adaptés aux schémas d'identification paramétrique.

2.9.1 Les séries de Volterra

Les séries de Volterra ont été utilisées pour la première fois par Nover Wiener pour analyser les systèmes non linéaires [84-87]. Ce modèle est défini comme étant une extension de la réponse impulsionnelle linéaire à une réponse non linéaire.

Le modèle de Volterra, classé parmi les modèles polynomiaux non récursifs, est caractérisé par la relation d'entrée à sortie suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_N=0}^{\infty} h_i(j_1, \dots, j_N) \prod_{l=1}^N u(t-j_l) \quad (2.29)$$

Dans laquelle u correspond à l'entrée, y à la sortie, et h_i au noyau de Volterra d'ordre N .

Les $j_l, l = 1, \dots, N$ sont des entiers. On peut interpréter un noyau d'ordre N comme la généralisation à l'ordre N de la réponse impulsionnelle, concept bien connu. Dans le cas des systèmes linéaires, le modèle tronqué à temps discret d'ordre N peut être exprimé comme suit :

$$y(t) = \sum_{i=1}^K \sum_{j_1=0}^K \sum_{j_2=0}^K \dots \sum_{j_N=0}^K h_i(j_1, \dots, j_N) \prod_{l=1}^N u(t - j_l) \quad (2.30)$$

2.9.2 Les structures blocs orientés

Le comportement d'un système non linéaire peut être représenté de manière relativement simple à l'aide de modèles composés de blocs orientés (ou structurés) [88]. Ces derniers se composent constitués Il comprend deux catégories de blocs élémentaires : des blocs linéaires dynamiques et des blocs non linéaires statiques, qui peuvent être combinés par interconnexion de différentes manières (soit en série, en parallèle ou en boucle fermée), de cela, ils peuvent décrire une large classe des systèmes non linéaires.

Dans ce qui suit, nous allons présenter certains modèles blocs orientés couramment utilisés. Dans la littérature, les modèles les plus étudiés incluent le modèle Hammerstein, le modèle Wiener, ainsi que les modèles combinés Hammerstein-Wiener et Wiener-Hammerstein [89].

2.9.2.1 Le modèle Hammerstein

Le modèle Hammerstein a été présenté pour la première fois en 1930 par le mathématicien allemand A. Ce modèle, classé parmi les modèles non linéaires à blocs orientés les plus simples et les plus utilisés, Il comprend un bloc non linéaire (NL) en série avec un bloc linéaire (L), comme illustré à la Figure 2.10. L'élément non linéaire peut prendre en compte les non-linéarités de l'actionneur et d'autres effets non linéaires placés à l'entrée du système [90].

Malgré leur simplicité, les modèles Hammerstein se sont avérés capables de décrire avec précision une grande variété des systèmes non linéaires dans divers domaines tels que les systèmes biologiques non linéaires [91], la commande prédictive [92], la modélisation des processus de transfert de chaleur [93, 94], le contrôle du carburant dans les moteurs [95],...etc

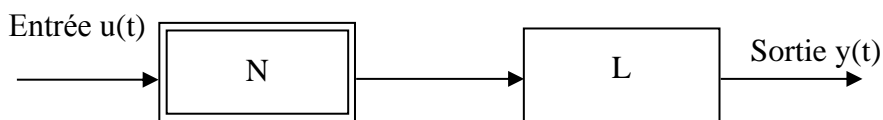


Figure 2.10 Modèle Hammerstein

Le système de Hammerstein est décrit par :

$u(t)$: signal d'entrée

$y(t)$: sortie du système.

la non-linéarité est souvent un polynomiale

$$N(u(t))=a_0 + a_1u(t) + a_2u(t)^2 + a_3u(t)^3 + \dots a_pu(t)^p \quad (2.31)$$

2.9.2.2 Le modèle Wiener

C'est en 1958 que N. Wiener a étudié pour la première fois le modèle qui porte son nom [96]. La configuration du modèle Wiener (L-NL), montrée à la figure (2.11), s'obtient en échangeant les positions du bloc linéaire et du bloc non linéaire dans le modèle Hammerstein [97]. Le signal d'entrée passe d'abord par le sous-système linéaire, produisant le signal de sortie intermédiaire qui est ensuite traité par le modèle non linéaire pour fournir le signal de sortie du modèle.

Ce modèle peut être utilisé pour la modélisation des systèmes linéaires avec des capteurs placés à la sortie.

Ils ont été utilisés pour modéliser les systèmes biologiques [14], la colonne de distillation [98], et le moteur à courant continu [99],...etc

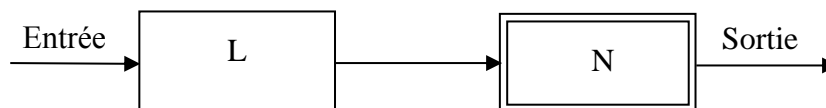


Figure 2.11 Modèle Wiener

2.9.2.3 Le modèle Hammerstein-Wiener

La combinaison en série d'un modèle de type Hammerstein et d'un modèle de type Wiener conduit à un modèle hybride, dénommé Hammerstein-Wiener, présenté à la figure 2.6. Il est constitué d'un bloc linéaire dynamique (L) inséré entre deux blocs non linéaires statiques.

Ces configurations présentent des capacités de modélisation plus élevées pour des systèmes complexes. Le modèle Hammerstein-Wiener se révèle bien adapté à représenter les systèmes dont les actionneurs et capteurs présentent des caractéristiques non linéaires.

Il a par ailleurs été employé avec succès pour décrire de nombreux processus technologiques tels que le bioréacteur de fermentation [100], le système musculaire squelettique [101], le procédé chimique [102], ... etc.

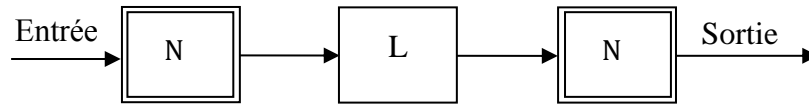


Figure 2.12 Modèle Hammerstein-Wiener

2.9.2.4 Le modèle Wiener-Hammerstein

La combinaison inverse conduit à ce qu'on appelle le modèle Wiener-Hammerstein illustré sur la figure (2.7).

Leurs applications réelles se trouvent principalement en biologie [103, 104] mais aussi dans la modélisation des amplificateurs de puissance [105].

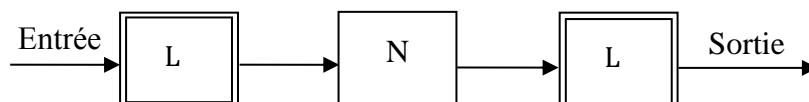


Figure 2.13 Modèle Wiener-Hammerstein

La flexibilité des structures blocs orientés repose sur les différents choix concernant la représentation des sous systèmes linéaires et non linéaires.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude théorique fondamentale sur l'identification des systèmes dynamiques, incluant les structures de modèles linéaires (ARX, ARMAX, OE, BJ) et les modèles non linéaires (séries de Volterra, modèles à blocs orientés). Ces méthodes offrent un cadre systématique pour l'identification. La méthode des moindres carrés récursifs a également été décrite dans le cadre de la minimisation de l'erreur de prédiction. C'est un algorithme d'identification adaptatif et en temps réel. Le chapitre suivant sera consacré à la problématique de l'identification et de l'estimation des systèmes d'ordre fractionnaire.

Chapitre 3

3 Identification des systèmes d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Le domaine de l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire représente un enjeu majeur pour l'analyse et la modélisation des systèmes dynamiques. Contrairement aux systèmes d'ordre entier, l'ordre non entier introduit des non-linéarités supplémentaires dans la relation entre les données expérimentales et les paramètres du modèle. Dans le domaine temporel, les méthodes d'identification des systèmes d'ordre non entier peuvent être classées selon la minimisation de l'erreur d'équation ou de l'erreur de sortie.

Les méthodes d'identification fondées sur la minimisation de l'erreur d'équation ont été développées dans le cadre de l'estimation des coefficients des équations différentielles d'ordre fractionnaire, en supposant que les ordres de dérivation sont connus. Ces méthodes reposent sur l'estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés. Au cours de ce chapitre, nous distinguons deux parties : la première est consacrée à la modélisation et à l'identification d'un système linéaire sous forme d'équation différentielle d'ordre fractionnaire, en utilisant l'approximation de singularité de Charef. Le deuxième système est non linéaire et structuré en blocs complexes définis par la séparation d'un comportement statique non linéaire et d'un comportement linéaire fractionnaire invariant dans le temps (LTI) au sein de différents blocs. L'interconnexion de ces blocs intègre le modèle de Hammerstein. L'estimation des paramètres, dans les deux cas, repose sur l'utilisation d'un algorithme récursif pour identifier les coefficients du modèle.

3.2 Modèle fractionnaire $H_{n_1 n_2}$

Considérons le modèle $H_{n_1 n_2}$ est définie par deux dérivatives m_1 et m_2 donné par cette équation différentielle [106,107] :

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{d^{m_1} y(t)}{dt^{m_1}} + \frac{d^{m_2} y(t)}{dt^{m_2}} = b_0 u(t) \tag{3.1}$$

tel que m_1 et m_2 l'ordre de dérivations fractionnaire tel que $m_1 < m_2$

$$\text{avec } \begin{cases} m_1 = n_1 \\ m_2 = n_1 + n_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$0 < n_1 < 1, 0 < n_2 < 1$$

La représentation d'état l'équation (3.3) représente la formulation correspondante de l'équation (3.1):

$$\begin{cases} \frac{d^{n_1} x_1(t)}{dt^{n_1}} = x_2(t) \\ \frac{d^{n_2} x_2(t)}{dt^{n_2}} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) \\ y(t) = b_0 u(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

Le schéma de bloc équiva--lent des équations d'état du modele $H_{n_1 n_2}$ est illustré sur la figure (3.1)

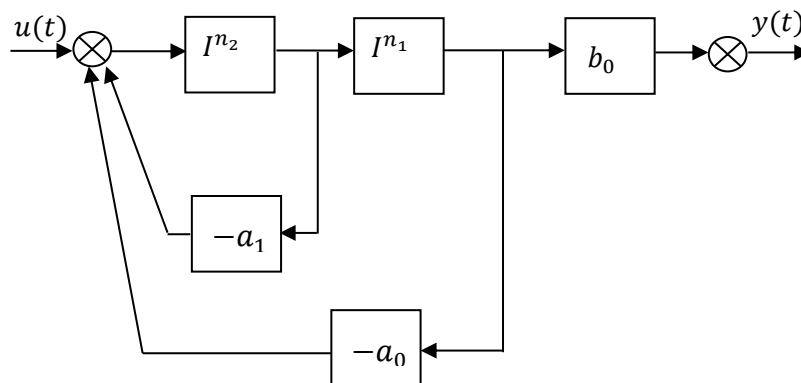


Figure 3.1 Schéma bloc du système non entier

3.3 Identification du système fractionnaire $H_{n_1 n_2}$

Dans cette exemple, l'objectif principale de ce travail est l'identification des paramètres a_0 , a_1, b_0 du model $H_{n_1 n_2}$. En utilisant l'algorithme RLS avec Facteur d'oubli pour l'estimation de ces paramètres [108].

On va trouver un modèle linéaire par rapport aux paramètres, basé sur une intégration répétée. À cet effet, le système fractionnaire du modèle $H_{n_1 n_2}$ peut être exprimé par :

$$D^{n_2}(y) + a_1 D^{n_1}(y) + a_0 y = b_0 u \quad (3.4)$$

Nous pouvons écrire :

$$D^{n_1+n_2}(y) + a_1 D^{n_1}(y) + a_0 y = b_0 u \quad (3.5)$$

Puis, en intégrant l'équation différentielle avec $\frac{1}{s^{(n_1+n_2)}}$, on obtenu :

$$I^{n_1+n_2}(D^{n_1+n_2}(y)) + a_1 I^{n_1+n_2}(D^{n_1}y(y)) + a_0 I^{n_1+n_2}(y) = b_0 I^{n_1+n_2}(u) \quad (3.6)$$

Où $I^{n_1+n_2}(D^{n_1+n_2}(y))$ représente l'intégration fractionnaire de $D^{n_1+n_2}(y)$ d'ordre $n_1 + n_2$.

Cela permet d'écrire :

$$I^n D^n(y) = y(t) \quad (3.7)$$

En utilisant la propriété de composition des opérateurs d'intégration itérée est donnée comme :

$$I^{n_1+n_2}(f) = I^{n_1}(I^{n_2}(f))$$

Par conséquent l'équation devient comme suit :

$$y + a_1 I^{n_2}(y) + a_0 I^{n_1+n_2}(y) = b_0 I^{n_1+n_2}(u) \quad (3.8)$$

La transformation matricielle correspondante de l'équation (3.8) est donnée par :

$$y(t) = [-I^{n_1+n_2}(y) \quad -I^{n_2}(y) \quad I^{n_1+n_2}(u)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

L'équation matricielle (3.9) peut être réécrite sous la forme de régression linéaire équation (3.10).

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (3.10)$$

Avec φ^T le vecteur de donnée.

$$\varphi(t)^T = [-I^{n_1+n_2}(y) - I^{n_2}(y) \ I^{n_1+n_2}(u)] \quad (3.11)$$

Selon $\theta = [a_0 \ a_1 \ b_0]$ est le vecteur des paramètres à identifier

avec

a_0, a_1, b_0 , sont les paramètres réels du système.

Où $I_{n_1+n_2}(D_{n_1+n_2}(y))$ traduit l'opération d'intégration fractionnaire de $D_{n_1+n_2}(y)$ d'ordre $n_1 + n_2$.

L'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire, telle que développée par Charef a été utilisée voir section (1.8.4), pour calculer les différentes intégrales de vecteur φ .

Considérer le système au repos à l'état initial représente une condition requise pour la méthode d'identification.

3.4 Choix du signal d'excitation

Le choix du signal d'excitation exerce une influence significative sur la qualité de l'estimation paramétrique. Il est nécessaire d'exciter le système sur toute sa plage fréquentielle tout en préservant son point de fonctionnement. Dans notre étude en choisi le signal PRBS.

3.5 Identification sans bruit du modèle fractionnaire du modèle

$$H_{n_1 n_2}$$

Dans cette partie, l'identification sans bruit du modèle ($H_{n_1 n_2}$) est étudiée en utilisant l'algorithme RLS avec facteur doublé, le modèle fractionnaire simulé a été obtenu en utilisant les paramètres suivants: $a_0=3, a_1=1, b_0=4, n_1=0.5, n_2=0.2$.

Les paramètres choisis doivent assurer la stabilité du système. La méthode de singularité de Charef est simulée dans une bande de fréquences $[w_b, w_h]$, avec $w_b=10^{-3}$ rds/s, et $w_h=103$ rd/s, avec une période d'échantillonnage $T_e=0.1$ s, le système est excité par un signal binaire pseudo-aléatoire, (PRBS) d'amplitude égal à 1 figure (3.1).

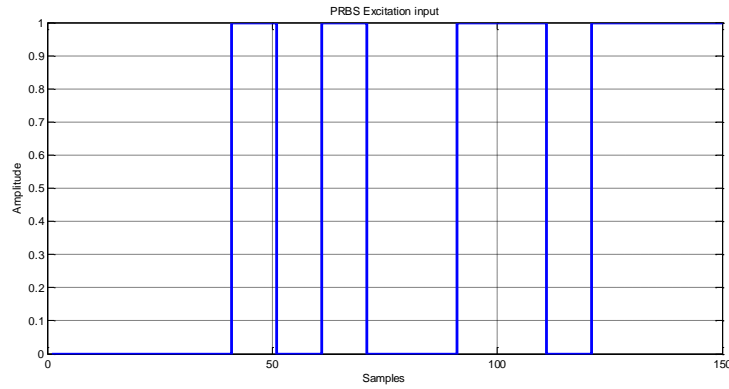


Figure 3.2 Signal d'excitation PRBS

Les données de mesure pour l'identification sont considérées à partir d'un signal généré (PRBS).

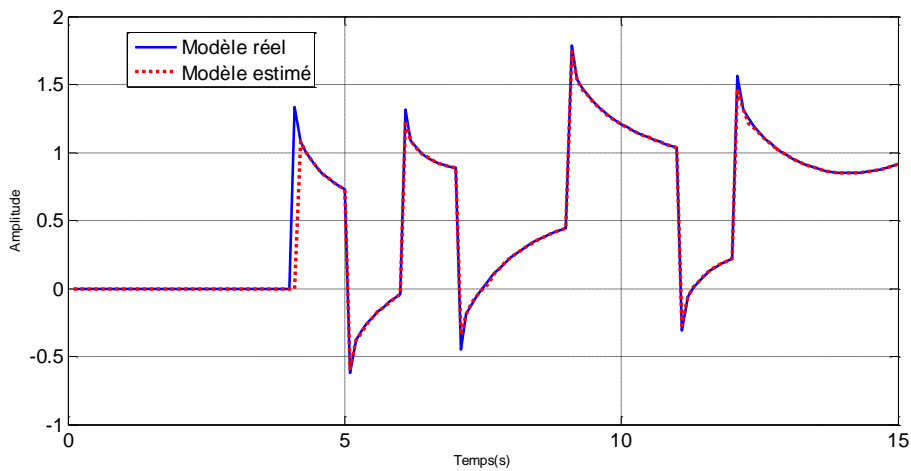


Figure 3.3 Sortie mesurée et modèle estimé par la méthode RLS

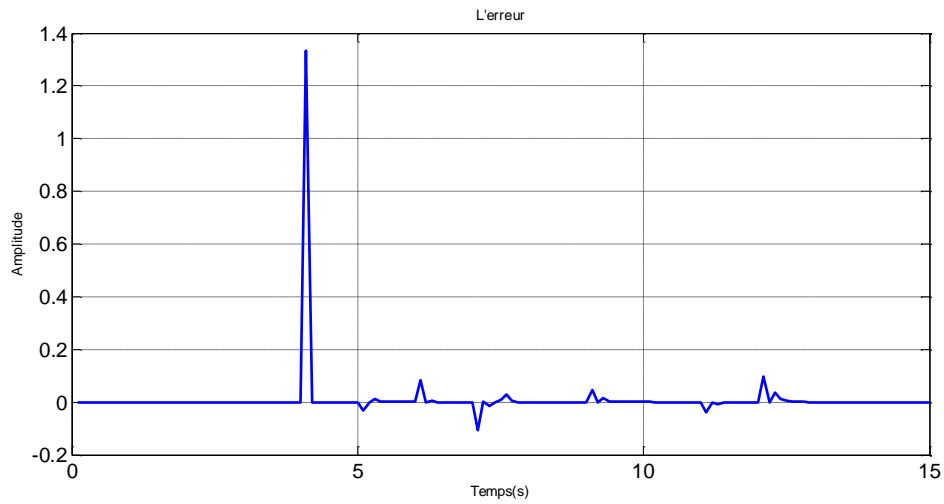


Figure 3.4 L'erreur entre la sortie du modèle estimé et celle du système réel.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 3.1 suivant :

Tableau 3.1 Identification sans bruit du Modèle ($H_{n_1 n_2}$)

Paramètres	a_0	a_1	b_0
Simulation	3	1	4
Estimation	0.0088	-0.8114	-2.1487
L'erreur quadratique	1.8132		

3.6 Discussion des résultats

La figure 3.3 illustre la sortie réelle du modèle ainsi que son estimation, avec une erreur résiduelle d'amplitude négligeable figure 3.4. Cependant, on observe que les paramètres estimés du modèle divergent des valeurs réelles du système tableau 3.1. Il est évident que les paramètres ne convergent pas vers les valeurs réelles du modèle, même si l'erreur entre le modèle estimé et le modèle réel tend vers zéro. Ce problème est fréquent dans les techniques d'identification et nécessite des recherches approfondies afin d'assurer une excitation suffisante du système.

3.7 Modèle du système de Hammerstein d'ordre fractionnaire

Dans cette partie le deuxième système simulé est un système non linéaire de Hammerstein d'ordre fractionnaire caractérisé par la figure (3.5) suivante :

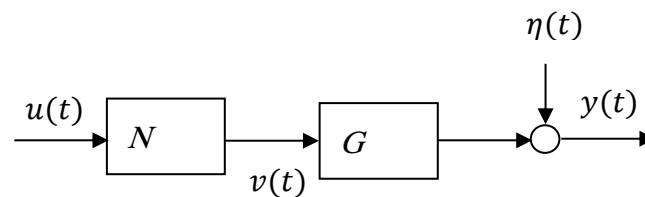


Figure 3.5 Configuration du modèle de Hammerstein

Le système se compose d'une partie statique non linéaire N connectée à une partie dynamique linéaire H . Le signal intermédiaire $v(t)$ résulte de la distorsion par une non-linéarité statique du signal d'entrée $u(t)$, lequel est filtré par un système linéaire.

Où $y(t)$ représente la sortie du système et $\eta(t)$ un bruit de perturbation. La partie non linéaire est une fonction de l'entrée $u(t)$, et l'on suppose que

$$\sup_{u(t)} |N(u(t))| < \infty \quad (3.12)$$

Cette condition n'est pas contraignante dès lors que seuls des systèmes stables sont considérés, supposons une stabilité BIBO (Entrée Bornée - Sortie Bornée). Si H est stable, $N(u(t))$ doit être bornée pour toute donnée d'entrée admissible afin d'assurer la stabilité du système complet.

Lorsque N est inconnue, elle peut être approchée par un développement polynomial [81].

$$v(t) = N(u(t)) = \sum_{k=1}^M \alpha_k u^k(t) \quad (3.13)$$

Où $M \in \mathbb{N}$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}$. La nature statique N de implique que $u(t)$ et $v(t)$ présentent des temps de transition identiques mais des amplitudes différentes. Cette hypothèse est conforme aux conventions des modèles de Hammerstein. Le signal virtuel $v(t)$, résultant de $N(u(t))$, est traité par la partie linéaire G qui peut être décrite par une équation différentielle, une fonction de transfert ou une représentation d'état. Dans ce travail, H est étendu à la classe des modèles linéaires fractionnaires.

$$a_0 y(t) + a_1 D^{n_{a_1}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_1 D^{n_{b_1}} v(t) + \dots + b_J D^{n_{b_J}} v(t) + \eta(t) \quad (3.14)$$

$\eta(t)$ est un bruit de perturbation.

Cette nouvelle classe de modèles inclut la classe des modèles linéaires entiers de Hammerstein.

3.8 Modélisation des système d'ordres fractionnaire

Considérons un système LTI monovariante (SISO), initialement au repos pour $t=0$.

Ce système H peut être décrit par l'équation différentielle :

$$a_1 D^{n_{a_1}} y(t) + \dots + a_L D^{n_{a_L}} y(t) = b_1 D^{n_{b_1}} v(t) + \dots + b_J D^{n_{b_J}} v(t) + \eta(t) \quad (3.15)$$

Où $a_0, \dots, a_L, b_1, \dots, b_J$ sont des coefficients réels, $u(t)$ et $y(t)$ représentant respectivement les signaux d'entrée et de sortie.

Ces coefficients sont différenciés à des ordres réels (entiers ou non entiers) n_{a_1}, \dots, n_{a_L} et n_{b_1}, \dots, n_{b_J}

Le système G étant initialement, en supposant le système au repos initial, les transformées de Laplace prennent la forme suivante : de $D^{n_{a_1}} y(t)$ et $D^{n_{b_1}} v(t)$ désignent respectivement $s^{n_{a_1}} Y(s)$ et $s^{n_{b_1}} V(s)$.

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (3.15), on obtient :

$$a_1 s^{n_{a_1}} Y(s) + \dots + a_L s^{n_{a_L}} Y(s) = b_1 s^{n_{b_1}} V(s) + \dots + b_J s^{n_{b_J}} V(s) + e(s) \quad (3.16)$$

La fonction de transfert G définit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{b_1 s^{n_{b1}} + \dots + b_J s^{n_{bJ}}}{a_1 s^{n_{a1}} + \dots + a_L s^{n_{aL}}} \quad (3.17)$$

Dans le cadre de l'analyse de stabilité BIBO (Entrée Bornée Sortie Bornée), des conditions suffisantes de stabilité sont données par :

$$\int_0^{\infty} |\{\mathcal{L}^{-1}G(s)\}| dt = k < +\infty \quad (1.18)$$

Où $G(s)$ correspond à la transformée de Laplace associée à la réponse impulsionnelle du système. La décomposition structurelle des systèmes non entiers permet de définir une condition de stabilité [62].

3.9 Identification de modèle proposé système de Hammerstein d'ordre fractionnaire

Considérons un système de Hammerstein fractionnaire en l'absence de perturbation, décrit par l'équation suivante [109]:

$$\begin{cases} G(s) = \frac{b_0}{1+a_1 s^{n_1}}, & 0 < n_1 < 1 \\ N(u(t)) = \alpha u(t) + u(t)^2 \end{cases} \quad (3.19)$$

Ce système admet également une représentation par équation différentielle d'ordre fractionnaire, caractéristique le système à ordre non entier sera comme suit :

$$D^{n_1}(y(t)) + \frac{1}{a_1} y(t) = \frac{b_0}{a_1} v(t) \quad (3.20)$$

avec:

$$v(t) = \alpha u(t) + u(t)^2 \quad (3.21)$$

Puis par intégration de l'équation différentielle avec l'opérateur $\frac{1}{s^{n_1}}$, on obtient :

$$y(t) = -\frac{1}{a_1} I^{n_1}(y(t)) + \frac{\alpha b_0}{a_1} I^{n_1}(u(t)) + \frac{b_0}{a_1} I^{n_1}(u(t)^2) \quad (3.22)$$

De façon similaire, la transformation matricielle correspondante de l'équation est donnée par :

$$y(t) = [-I^{n_1}(y(t)) I^{n_1}(u(t)) I^{n_1}(u(t)^2)] \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{\alpha b_0}{a_1} \\ \frac{b_0}{a_1} \end{bmatrix} = \varphi(t)^T \theta \quad (3.24)$$

φ définit par :

$$\varphi = [-I^{n_1}(y(t)) I^{n_1}(u(t)) I^{n_1}(u(t)^2)] \quad (3.25)$$

le vecteur θ est regroupant les paramètres à identifier.

$$\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{\alpha b_0}{a_1} & \frac{b_0}{a_1} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

On définit l'erreur comme la différence existante entre la sortie observée du système et la sortie estimée par le modèle.

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.27)$$

Considérant que :

$$\hat{y}(t) = \varphi(t)^T \hat{\theta}(t - 1) \quad (3.28)$$

$\hat{\theta}(t)$: vecteur des paramètres estimés

Du fait de la linéarité de la sortie du modèle vis-à-vis des paramètres, l'application de la méthode des Moindres Carrés Récursifs (RLS) à facteur doublé, s'avère appropriée pour leur identification. Pour estimer ces paramètres. Les intégrales fractionnaires on le calcule par l'approximation de Grünwald-Letnikov (voir section (1.4.2)).

3.10 Discussion des résultats

Cette section présente les résultats de simulation obtenus à l'aide de l'algorithme RLS avec facteur d'oubli, appliqué à l'identification d'un système de Hammerstein d'ordre fractionnaire.

Les paramètres du système, que nous allons choisir de manière à ce que le système soit stable, sont définis comme suit :

$$a_1 = 0.5, b_0 = 1, \alpha = 1, n_1 = 0.2,$$

On prend la fréquence d'échantillonnage $T_e=0.01s$, le système est excité par un signal PBRS.

Les résultats de simulation obtenus à l'aide de l'algorithme RLS sont illustrés dans les figures suivantes:

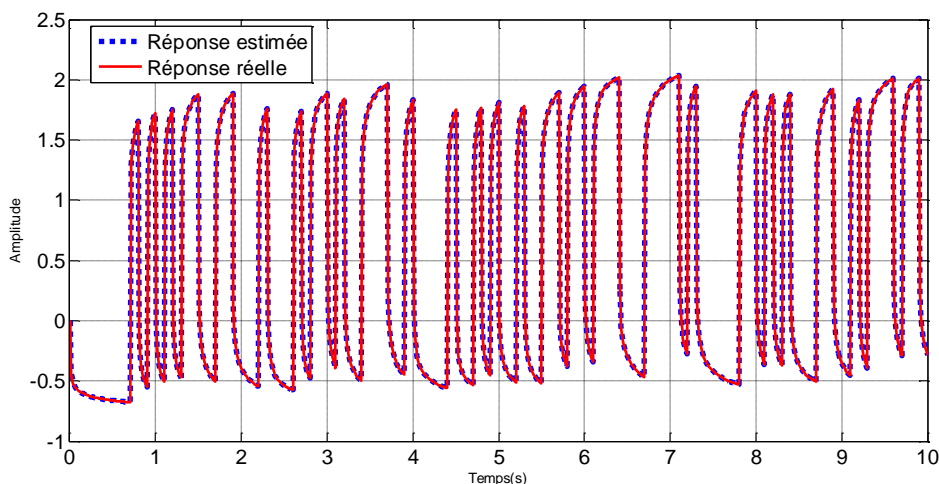


Figure 3.6 La sortie mesurée et la sortie du modèle estimé

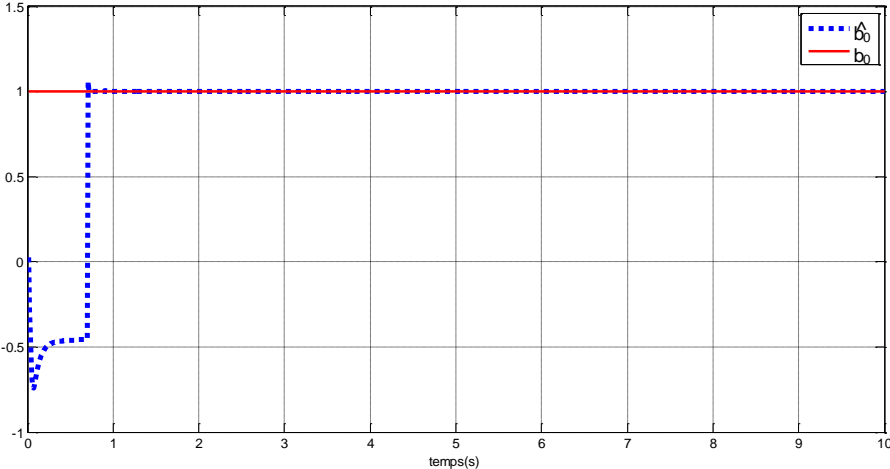


Figure 3.7 Variation temporelle du paramètre b_0

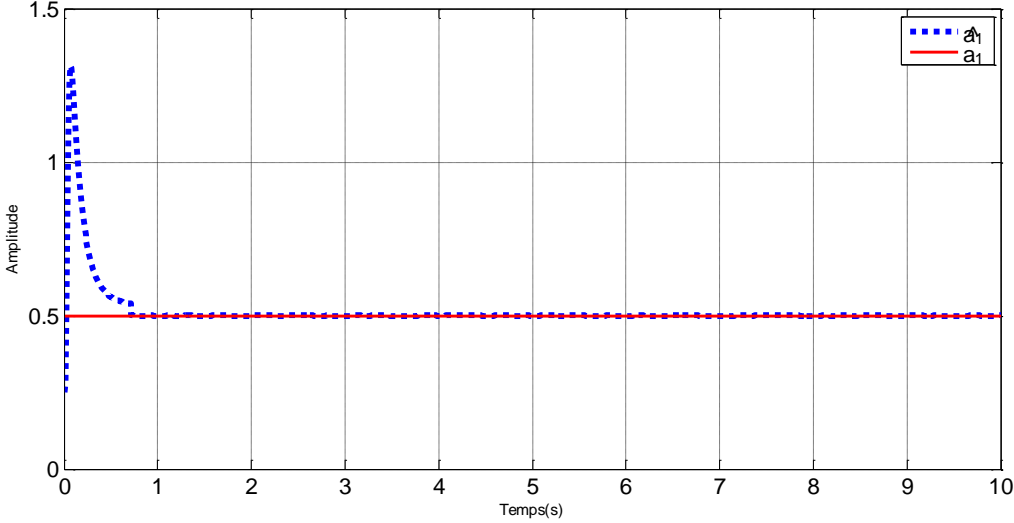


Figure 3.8 Variation temporelle du paramètre a_1

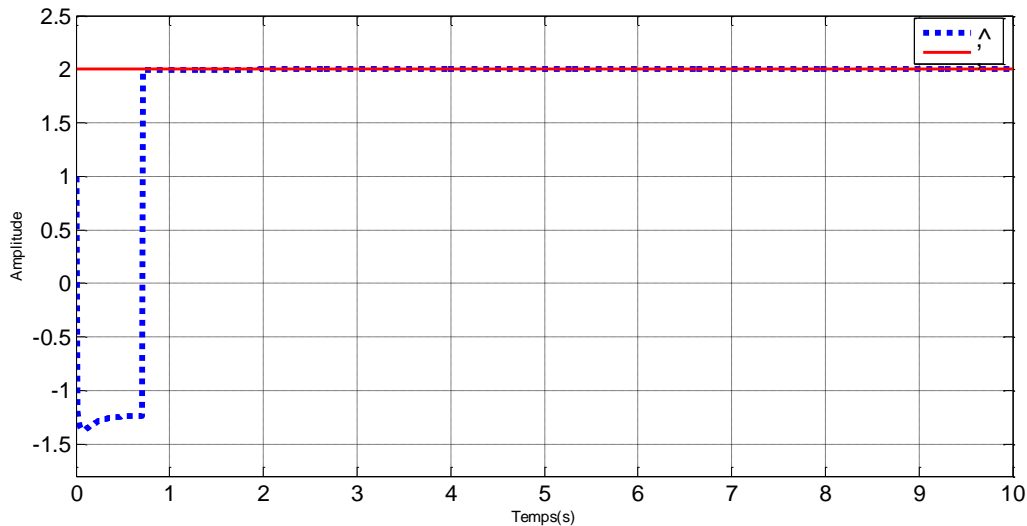


Figure 3.9 Variation temporelle du paramètre α

La figure 3.6 met en évidence les deux sorties, correspondant respectivement au système réel et au modèle simulé. On peut observer que les deux sorties présentent une grande similarité, la sortie du modèle reproduisant fidèlement celle du système réel. Les paramètres estimés (a_1 , b_0 , α) et les résultats relatifs au modèle sont illustrés dans les trois figures suivantes : figure 3.7, figure 3.8 et figure 3.9. Celles-ci permettent de constater que les paramètres estimés convergent vers les valeurs exactes du système réel.

3.11 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre porte sur une contribution à l'identification paramétrique des systèmes d'ordre fractionnaire. Le principe repose sur l'utilisation d'un algorithme récursif en ligne basé sur la méthode des moindres carrés récursifs (RLS) avec facteur d'oubli, appliquée à deux types de modèles fractionnaires. Le premier modèle considéré est le modèle $(H_{n_1 n_2})$. Dans cet exemple, la méthode de singularité de Charef est utilisée afin d'approximer les intégrales d'ordre fractionnaire. Les paramètres identifiés ne correspondent pas exactement à ceux du système physique. Le second modèle étudié est le modèle de Hammerstein d'ordre fractionnaire, pour lequel l'approximation de Grünwald-Letnikov est utilisée. Nous avons identifié non seulement les paramètres du modèle, mais également les coefficients du polynôme représentant la partie non linéaire du système. Les résultats obtenus par simulation sont satisfaisants.

Chapitre 4

4 Identification par modèle fractionnaire d'un système Electromécanique

4.1 Introduction

Les électromécaniques jouent un rôle important dans de nombreuses applications modernes, allant de l'ingénierie automobile à la robotique, en passant par les dispositifs industriels et les équipements domestiques. Leur intérêt réside dans leur capacité à convertir efficacement l'énergie électrique en mouvement mécanique. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au système de suspension semi-active à base de fluide électro-rhéologique (ER), comme illustré à la figure 4.1. Ces systèmes jouent un rôle fondamental dans l'amélioration des performances du véhicule, permettant d'adapter en temps réel la raideur et l'amortissement face aux irrégularités de la route.



Figure 4.1 Système de suspension semi-active électro-rhéologique

L'identification de ces systèmes constitue une étape cruciale pour comprendre leur comportement dynamique. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'identification du système de suspension d'ordre fractionnaire, qui est décrite par une représentation d'état développée dans [110].

4.2 Etat de l'art sur les systemes de suspension semi active (ER)

Les systèmes de suspension occupent une place essentielle dans l'amélioration des performances dynamiques du véhicule, en particulier en matière de confort de conduite et de tenue de route, constitue un enjeu majeur. Elle influence également les performances de freinage ainsi que la stabilité globale du véhicule en maintenant le confort des occupants du véhicule et en les isolant de manière satisfaisante des bruits routiers, les bosses et les vibrations. Le système de suspension est divisé en une partie de masse suspendue et une partie de masse non suspendue. Les suspensions semi-actives sont aujourd'hui de plus en plus utilisées dans l'industrie automobile en raison de leur efficacité. Tout en étant moins coûteuses et consommant moins d'énergie que les suspensions entièrement actives, de nombreuses études ont examiné les avantages comparatifs des éléments actifs et passifs (Savaresi et al. [111], Ikonen [112], Pham et al. [113], Theunissen et al. [114]. Une problématique majeure de ces applications inclut la dynamique et la conception de commande basée sur la modélisation, reposant sur un nombre réduit de capteurs, afin d'améliorer le confort du véhicule et la tenue de route [115].

Divers modèles ont été conçus en fonction des caractéristiques de l'amortisseur réglable présent dans chaque type de suspension semi-active, en employant plusieurs méthodologies présentant des niveaux variables de complexité et de précision. Les principaux modèles peuvent être classés en fonction de leurs caractéristiques statiques et dynamiques Stanway et al. [116], Lozoya-Santos et al. [117], Soong et al. [118].

Les systèmes de suspension permettent de réduire la charge d'impact transmise par la surface de la route au châssis, en transférant de manière fluide la force et le couple entre la carrosserie du véhicule et les roues Savaresi et al. [119]. En effet, ils exercent un impact majeur sur le confort de conduite, la stabilité et la sécurité du véhicule, tandis que leur qualité et leurs performances sont directement liées à la durée de vie des équipements Yang et al. [120].

L'assiette du véhicule varie en fonction des irrégularités de la route, mais cela peut être atténué par un système de suspension plus performant, un système capable de s'adapter aux

conditions de la route pour ajuster de manière optimale l'amortissement des amortisseurs en anticipant les irrégularités, améliorant ainsi le confort de conduite. Clairement, les nombreux projets de recherche sur les techniques de contrôle capables d'améliorer cette action de suspension revêtent une grande importance, mais il est également important que le modèle dynamique de cette suspension soit le plus performant possible, avec des propriétés intrinsèques avantageuses en termes de réactivité et de contrôlabilité. Mais il est également crucial que le modèle dynamique de cette suspension soit le plus performant possible, doté de propriétés intrinsèques avantageuses en matière de réactivité et de contrôlabilité Zhao et al. [121], Büyükköprü et al.[122], Klockiewicz et Ślaski [123]. C'est pourquoi un axe majeur de la recherche dans ce domaine réside dans la conception de nouvelles structures et l'emploi de matériaux innovants pour la réalisation de ces systèmes, et pour obtenir des modèles permettant de faciliter le contrôle, d'atteindre des performances inégalées et d'assurer des réponses aussi rapides que précises, (Krauze [124], Soliman et Kaldas, [125]).

Les véhicules équipés de systèmes de suspension conventionnels, reposant sur un amortisseur hydraulique et les ressorts mécaniques présentent des performances limitées en termes de tenue de route et de confort de conduite. Les travaux de recherche menés dans le domaine des transports ont conclu que 51 % des accidents graves de voiture sont dus à un capotage. En effet, le système de suspension automobile doit être capable d'absorber rapidement les chocs de la route et de revenir lentement à sa position normale, tout en maintenant un contact optimal entre le pneu et la route.

Les recherches sur la conception et la modélisation des systèmes de suspension semi-active revêtent une importance cruciale pour l'industrie automobile. Récemment, la théorie du calcul fractionnaire s'est rapidement développée, principalement en tant que fondement pour de nombreuses disciplines appliquées, notamment les équations différentielles d'ordre fractionnaire (FDE) et la dynamique d'ordre fractionnaire. Les applications du calcul fractionnaire (FC) sont aujourd'hui extrêmement variées. De nombreux chercheurs ont déployé des efforts considérables pour appliquer ces connaissances en pratique (problèmes de physique et de sciences de l'ingénieur), encouragés par les propriétés très intéressantes de ces systèmes, comme leur robustesse naturelle contre les fluctuations de gain et leur mémoire longue (Ladaci et al. [126], Kissoum et al.[127]). Cependant, certains problèmes physiques restent sujets à débat et controverse, tout comme la modélisation et l'identification des systèmes fractionnaires (Monje et al. [65], Seghiri et al.[128], Ladaci and Benchaita [129]), Contrairement aux équations différentielles d'ordre entier, qui sont bien maîtrisées, la résolution analytique des équations différentielles fractionnaires (FDE) est nettement plus complexe, voire

quasiment impossible pour les équations d'ordre supérieur. La difficulté s'accroît particulièrement lorsque l'ordre du système augmente. Dans le cadre de nos recherches, les approximations dans les domaines temporel et fréquentiel ont été réalisées à l'aide de l'approche de Grünwald-Letnikov et de la méthode de singularité proposée par Charef et al [77], sont utilisées pour la modélisation et la simulation de systèmes d'ordre fractionnaire définis par des équations différentielles fractionnaires. Dans le contexte de la recherche actuelle, plusieurs travaux antérieurs ont proposé diverses stratégies de commande d'ordre fractionnaire pour la régulation des systèmes de suspension automobile (Zeraati [130], Nguyen et al. [131], Memlikai et al. [132]). D'autres ont déjà suggéré des modèles d'ordre fractionnaire pour la modélisation et l'identification de ces systèmes (You et al., [133], Wenjing et al., [134]).

Dans ce travail, nous proposons un modèle linéaire d'ordre fractionnaire pour identifier et approximer le modèle non linéaire de suspension semi-active ER, généralement représenté par un modèle linéaire d'ordre entier comme dans Pham et al. [135,136], Cette partie présente une description de la modélisation de la suspension semi-active dans un système quart de véhicule et encore présente la modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire proposée pour le système de suspension semi-active.

4.3 Système de suspension semi-active pour véhicule

Le modèle dynamique de l'amortisseur non linéaire d'un système de suspension semi-actif à fluide électrorhéologique (ER) est décrit par Nguyen et al. [137] selon Guo et al [138]. Ainsi, le modèle phénoménologique de la suspension semi active peut être formulé sous la forme de l'équation non linéaire suivante :

$$F_d = k_0 x_d + c_0 \dot{x}_d + f_c v \tanh(k_1 x_d + c_1 \dot{x}_d) \quad (4.1)$$

où

F_d est la force d'amortisseur.

c_0, c_1, k_0, k_1, f_c sont des paramètres constants.

x_d et \dot{x}_d désignant respectivement la déflexion et la vitesse de déflexion de l'amortisseur, v correspond à l'entrée du système de commande défini comme le rapport cyclique du signal PWM (modulation de largeur d'impulsion).

D'après l'équation (4.1), la force d'amortisseur F_d est décomposée en une deux parties, une force non contrôlée et une partie contrôlée, comme suit :

$$F_d = F_{uc} + F_c \quad (4.2)$$

où

La force d'amortissement non contrôlée est défini par l'équation suivante :

$$F_{uc} = k_0 x_d + c_0 \dot{x}_d \quad (4.3)$$

La force d'amortissement contrôlée est défini par cette équation :

$$F_c = f_c F_{nl} v \quad (4.5)$$

avec :

$$F_{nl} = \tanh(k_1 x_d + c_1 \dot{x}_d) \quad (4.6)$$

L'équation (4.2) décrit uniquement le comportement statistique de l'amortisseur ER. Dans le but d'élaborer un modèle orienté commande, intégrant ses caractéristiques non linéaire et dynamiques, le comportement de fluide ER doit être pris en compte dans la force d'amortissement contrôlée, on applique un filtre du premier ordre sur la composante commandée f_c permet d'approximer de manière suffisamment prise le comportement dynamique de l'amortisseur on obtient ainsi :

$$\tau \dot{F}_{er} + F_{er} = F_c \quad (4.7)$$

où F_{er} désigne la force d'amortissement contrôlée en intégrant le comportement dynamique de l'amortisseur.

En substituant de l'équation (4.5) dans (4.6), la dynamique associée à la force F_{er} est définie par l'expression suivante :

$$\dot{F}_{er} = -\frac{1}{\tau} F_{er} + \frac{1}{\tau} f_c F_{nl} v \quad (4.8)$$

En posant $u_{nl} = F_{nl} v$ la force dynamique F_{er} est alors exprimée sous forme suivante :

$$\dot{F}_{er} = -\frac{1}{\tau}F_{er} + \frac{f_c}{\tau}u_{nl} \quad (4.9)$$

Par conséquent, le modèle dynamique non linéaire de l'amortisseur semi-actif (ER) peut être formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_d = F_{uc} + F_{er} \\ \dot{F}_{er} = -\frac{1}{\tau}F_{er} + \frac{f_c}{\tau}u_{nl} \end{cases} \quad (4.10)$$

L'ensemble des paramètres du modèle de suspension semi active (ER) présente dans le tableau 4.1 [136].

Tableau 4.1 Valeurs des paramètres du modèle quart de véhicule équipé d'un amortisseur ER

Paramètre	Description	Valeur	Unité
m_s	Masse suspendue	0.27	kg
m_{us}	Masse non suspendue	0.25	kg
k_s	Rigidité du ressort	1396	N/m
k_t	Rigidité du pneu	12270	N/m
k_0	Coefficient de rigidité de l'amortisseur passif	170.4	N/m
c_0	Coefficient d'amortissement visqueux	68.83	N.s/m
k_1	Coefficient d'hystérésis dû au déplacement	218.16	N.s/m
c_1	Coefficient d'hystérésis dû à la vitesse	21	N.s/m
f_c	Force seuil dynamique du fluide (ER)	28.07	N
τ	Constante du temps	43	ms

4.4 Description du modèle quart de véhicule

Dans cette partie est consacrée à la présentation du modèle du système quart de véhicule d'un système de suspension semi active à fluide électro-rhéologique, illustré à la figure 4.2.

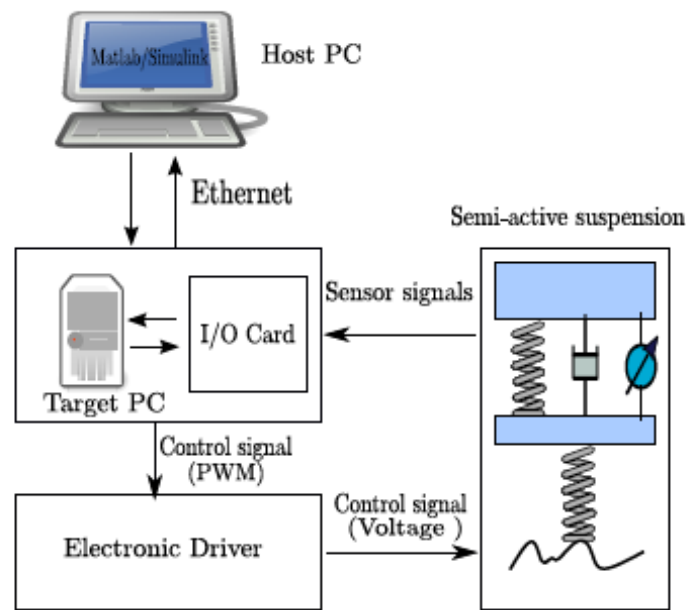


Figure 4.3 Schéma de principe du banc d'essai d'un système de suspension semi active

En application de la deuxième loi de Newton relative au mouvement, les équations dynamiques du système relative peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= -F_s - F_d \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= F_s + F_d - F_t \end{cases} \quad (4.11)$$

où:

$F_s = k_s(z_s - z_{us})$ est la force du ressort.

$F_t = k_t(z_{us} - z_r)$ est la force du pneu.

La force de l'amortisseur F_d est donnée par l'équation (4.10), avec une déflexion $x_d =$

$$z_{def} = z_s - z_{us} .$$

Les équations dynamiques du système peuvent être reformulées de la manière suivante :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= F_s - F_{uc} - F_{er} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= F_s + F_{uc} + F_{er} - F_t \end{cases} \quad (4.12)$$

La substitution de l'équation (4.10) dans l'équation (4.12) et en appliquant les transformations nécessaires conduit à formulation suivante :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = (k_s + k_0)(z_s - z_{us}) - c_0(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) - F_{er} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} = (k_s + k_0)(z_s - z_{us}) + c_0(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) + F_{er} - k_t(z_{us} - z_r) \\ \dot{F}_{er} = -\frac{1}{\tau} F_{er} + \frac{f_c}{\tau} u_{nl} \end{cases} \quad (4.13)$$

Avec z_s et z_{us} , désignant respectivement les déplacements accociés à la masse suspendue et à de la masse non suspendue, alors que z_r , représente le déplacement de la route, avec $x_d = z_{def} = z_s - z_{us}$, le système dynamique peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s &= F_s - F_{uc} - F_{er} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} &= F_s + F_{uc} + F_{er} - F_t \end{cases} \quad (4.12)$$

En substituant l'équation (4.10) dans l'équation (4.12) et en transformant, on obtient les équations différentielles régissant le système sont :

$$\begin{cases} \ddot{z}_s = \frac{1}{m_s} ((k_s + k_0)(z_s - z_{us}) - c_0(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) - F_{er}) \\ \ddot{z}_{us} = \frac{1}{m_{us}} ((k_s + k_0)(z_s - z_{us}) + c_0(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) + F_{er} - k_t(z_{us} - z_r)) \\ \dot{F}_{er} = -\frac{1}{\tau} F_{er} + \frac{f_c}{\tau} u_{nl} \end{cases} \quad (4.13)$$

Les paramètres m_s , k_s , k_t , k_0 , c_0 , f_c et τ sont définis dans le tableau 4.1.

En définissant les états du système comme suits :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [z_s - z_{us} \ \dot{z}_s \ z_{us} - z_r \ \dot{z}_{us} \ F_{er}]^T \in \mathbb{R}^n.$$

$y = [\dot{z}_s, \dot{z}_{us}]^T \in \mathbb{R}^m$, et les variables mesurées, la dynamique du système, exprimées sous forme d'espace d'états, se presentent sous la forme suivante [136] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_{nl} + D_1\omega \\ y = Cx + D_2\omega \end{cases} \quad (4.14)$$

Où les matrices A, B, C, D_1, D_2 sont définies comme suit [136] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{(k_s + k_0)}{m_s} & -\frac{c_0}{m_s} & 0 & \frac{c_0}{m_s} & -\frac{1}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{(k_s + k_0)}{m_{us}} & \frac{c_0}{m_{us}} & -\frac{k_t}{m_{us}} & -\frac{c_0}{m_{us}} & \frac{1}{m_{us}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[0, 0, 0, 0, \frac{f_c}{\tau} \right]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{(k_s + k_0)}{m_s} & -\frac{c_0}{m_s} & 0 & \frac{c_0}{m_s} & -\frac{1}{m_s} \\ -\frac{(k_s + k_0)}{m_{us}} & \frac{c_0}{m_{us}} & -\frac{k_t}{m_{us}} & -\frac{c_0}{m_{us}} & \frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$\omega = \begin{pmatrix} \dot{z}_r \\ n \end{pmatrix}$, regroupe les perturbations agissant sur le système, la composante \dot{z}_r représente la dérivée du profil de la route, et la composante représente n le bruit de mesure provenant des capteurs.

Les sorties considérées peuvent être mesurées à l'aide d'accéléromètres montés sur la masse suspendue et la masse non suspendue. u_{nl} est l'entrée de commande du système (4.14), le profil de la route est présenté par une succession de bosses sinusoïdales $z_r = 15 \sin(4\pi t)$.

L'étude du système de suspension en boucle ouverte permet de mettre en évidence ses propriétés critique et identifier la plage fréquentielle en régime permanent adaptée à la conception d'une loi de commande et à l'obtention d'un modèle identifié cohérent.

Le digramme de bode est ainsi utilisé pour représenter la réponse fréquentielle du système l'absence de perturbation de la route et le bruit de mesure est présenté à la figure 4.4.

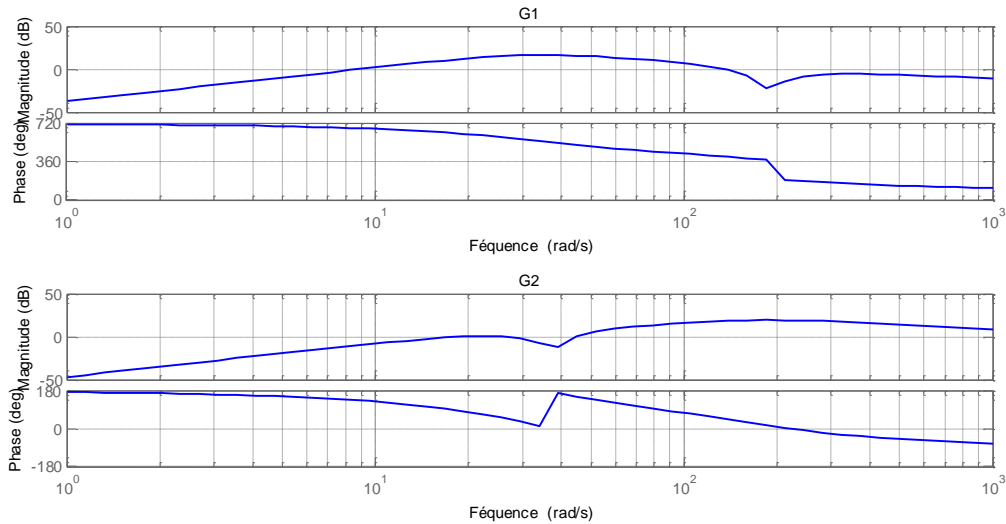


Figure 4.4 Diagramme de bode du système de suspension semi active (ER)

4.5 Modélisation proposée d'un système d'ordre fractionnaire

L'analyse théorique du système présentée dans la section 4.3 a permis d'établir un modèle d'espace d'état (4.16) du système de suspension, qui constitue la base du développement du modèle identifié à l'ordre fractionnaire [110].

Dans cette étude, nous proposons de modéliser le système de suspension semi actif (ER) à l'aide d'un modèle à ordre fractionnaire. Dans le but d'améliorer ses caractéristiques intrinsèques et de permettre de meilleure performance sur la route.

Le modèle d'espace d'état d'ordre fractionnaire proposé est défini comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + B\mu_{nl} + D_1\omega \\ y = Cx + D_2\omega \end{cases} \quad (4.15)$$

ou, $x \in \mathbb{R}^n$, le vecteur d'état μ_{nl} représente l'entrée de commande $y \in \mathbb{R}^m$ la sortie

$\omega \in \mathbb{R}$ représente la perturbation de la route, et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha < 1$ est l'ordre de dérivation fractionnaire.

tel que : $D_x^\alpha = [D_{x_1}^\alpha, D_{x_2}^\alpha, \dots, D_{x_n}^\alpha]^T$.

Ainsi, le système simulé à ordre fractionnaire est obtenu en intégrant le vecteur d'état de la selon l'expression suivante :

$$\begin{cases} x = I^\alpha (Ax + B\mu_{nl} + D_1\omega) \\ y = Cx + D_2\omega \end{cases} \quad (4.17)$$

avec , $I^\alpha\{.\}$. intégration fractionnaire d'ordre α

4.6 Simulation du système d'ordre fractionnaire

Des simulations numériques ont été effectuées afin d'évaluer les performances du modèle fractionnaire (4.17). Objectif est d'améliorer les performances du système de suspension du véhicule, en le rendant plus efficace et robuste grâce à l'introduction d'opérateurs d'ordre fractionnaire dans le modèle identifié du système de suspension quart de véhicule.

4.6.1 Validation du modèle dans le cas idéal

L'analyse effectuées dans des conditions idéales, considérées en l'absence de perturbation du profil de la route et le bruit de mesure, les réponses indicielles du système de suspension semi active (ER) à ordre fractionnaire, considerant le cas entier ($\alpha = 1$) et deux valeurs fractionnaires ($\alpha = 85$), et ($\alpha = 95$), permettent ainsi d'établir une comparaison directe entre la dynamique entière et fractionnaire.

Les accélérations correspondant à de la masse suspendue et à de la masse non suspendue du système de suspension sont présentent respectivement sur la figure (4.5) et la figure (4,6) pour différents ordres de la valeurs α .

La première remarque met en évidence que les valeurs optimales de l'ordre fractionnaire sont celle proche de l'unité. En pratique les valeurs α sont comprises entre 0.8 et 1, traduisent un comportement réaliste du modèle, pour des valeurs plus faibles, le système devient excessivement oscillatoire et perd son intérêt.

La figure (4.5) montre les différentes réponses de la première sortie \ddot{z}_s (accélération de la masse suspendue). Nous remarquons que le temps de réponse du modèle à ordre fractionnaire est plus court, ainsi qu'une diminution de l'amplitude, en particulier pour $\alpha = 0,85$. Cela traduit une réaction plus rapide aux variations de la référence et du profil du châssis.

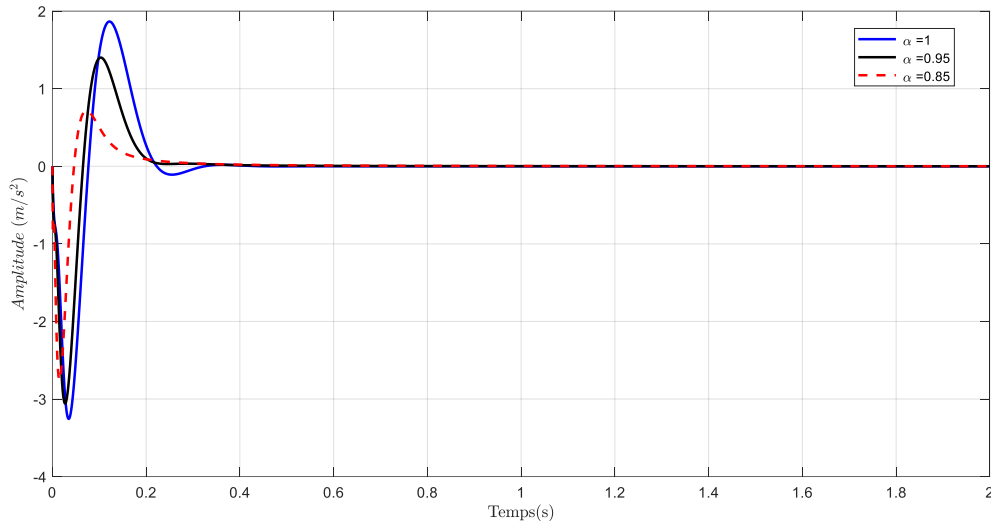


Figure 4.5 L'accélération de la masse suspendue \ddot{z}_s

Les mêmes remarques sont observées dans la figure (4.6), qui présente les différentes réponses de la deuxième sortie \ddot{z}_{us} (accélération de la masse non suspendue). On constate que le modèle à ordre fractionnaire présente un temps de réponse plus court, ainsi qu'une légère augmentation de l'amplitude, notamment pour $\alpha = 0,85$. Cela traduit une réaction plus rapide aux variations de la référence et du profil routier.

Ces résultats de simulation valident notre choix d'un modèle à ordre fractionnaire et justifient son utilisation dans le cas idéal considéré, avec un but d'améliorer ses performances lorsque le système sera soumis au bruit des capteurs et aux perturbations routières.

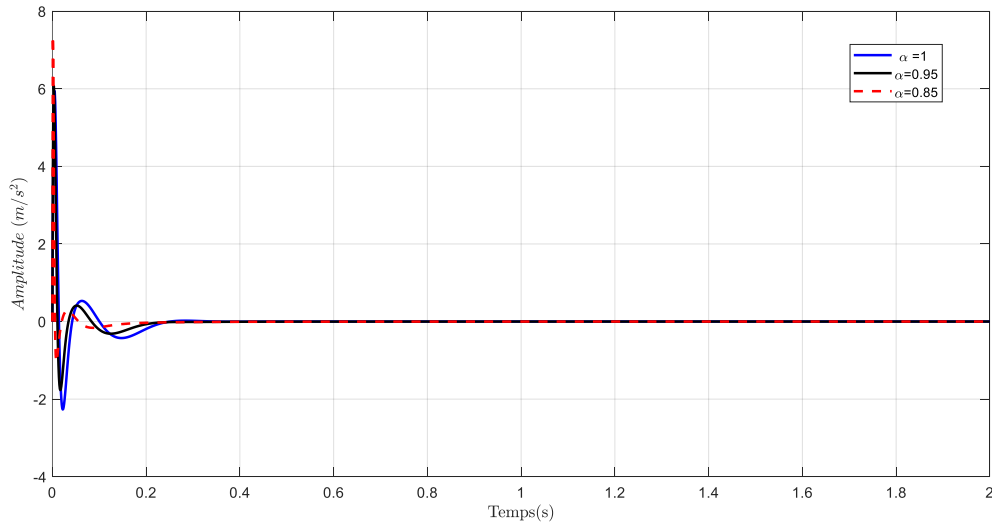


Figure 4.6 L'accélération de la masse non suspendue \ddot{z}_{us}

4.6.2 Test de robustesse

Dans le but de comparer les différentes performances de sortie en fonction de l'ordre fractionnaire du modèle de suspension semi-active (ER), en définissant le critère quadratique de fonction coût J_e^α est définie comme suit :

$$J_e^\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_f(i) - y_{fw}(i))^2} \quad (4.18)$$

Où

y_f : la sortie du système fractionnaire sans perturbation de route et sans bruit de mesure.

y_{fw} : la sortie du système fractionnaire en présence de perturbation de la route et bruit de mesure.

Les valeurs optimales de l'ordre fractionnaire correspondent à celles qui minimisent le critère d'erreur.

En prenant $u_{nl} = 0.5$ et en appliquant une perturbation additive ainsi que des bruits au modèle du système (4.15) pour différentes valeurs de l'ordre α . Nous obtenons les résultats présentés dans le tableau 4.2, où le critère est calculé séparément pour les deux sorties \ddot{z}_s et \ddot{z}_{us} .

Tableau 4.2 Critère d'erreur quadratique en fonction de l'ordre fractionnaire dans des conditions de conduite bruitées et perturbées.

α	$J_e(\ddot{z}_s)$	$J_e(\ddot{z}_{us})$
0.83	0.0087	0.0060
0.84	0.0091	0.0061
0.85	0.0094	0.0061
0.86	0.0098	0.0062
0.87	0.0102	0.0063
0.88	0.0107	0.0064
0.89	0.0111	0.0065
0.90	0.0116	0.0067
0.91	0.0122	0.0068
0.92	0.0128	0.0069
0.93	0.0134	0.0071
0.94	0.0141	0.0073
0.95	0.0148	0.0074
0.96	0.0156	0.0076
0.97	0.0165	0.0079
0.98	0.0174	0.0081
0.99	0.0184	0.0083
1	0.0195	0.0086

4.7 Discussion des résultats de simulation

Comme l'illustre le tableau (4.2), une augmentation de l'ordre fractionnaire α entraîne une élévation du critère d'erreur associé aux sorties d'accélération de la masse suspendue (\ddot{z}_s) et de la masse non suspendue (\ddot{z}_{us}). À l'inverse, la diminution de α se traduit par une réduction du critère d'erreur relatif à ces deux sorties du système.

- Il est donc clair que l'utilisation du modèle d'ordre fractionnaire pour la suspension semi-active ajoute un nouveau paramètre de réglage, qui constitue en fait un nouveau degré de liberté pour ce nouveau modèle.

- L'identification de l'ordre fractionnaire optimale $\alpha = 0.83$, permet d'affiner la modélisation du comportement dynamique du système et d'optimiser ses performances aux perturbations routières et aux bruits de mesures.
- Les résultats obtenus montrent que le modèle fractionnaire proposé pour le système de suspension semi active (ER) est plus performant et plus robuste que le modèle à ordre entière cette amélioration est particulièrement significative en ce qui concerne les sorties correspondant à l'accélération de la masse suspendue et non suspendue, cela se traduit par une meilleure capacité d'absorption des vibrations et donc un confort accru pour les passagers.

4.8 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un modèle linéaire d'ordre fractionnaire pour l'identification d'un système de suspension semi-active (ER) de véhicule, dans le but de rendre ce système plus efficace et plus robuste. Les résultats de simulation permettent d'optimiser les performances du système face aux perturbations routières et aux bruits de mesure, notamment en ce qui concerne l'accélération de la masse suspendue et non suspendue. Ensuite, nous avons montré que réduire cette accélération et filtrer les oscillations dans ce système fractionnaire offre au concepteur un nouveau degré de liberté. Cela présente un intérêt important pour le confort, la sécurité et la prévention de la perte d'adhérence du véhicule, en réduisant l'accélération de la masse suspendue et non suspendue et en filtrant les oscillations, la transmission des vibrations entre les roues, le châssis et les passagers est atténuée, contribuant ainsi à l'amélioration du confort global. Ainsi, le filtrage des oscillations constitue un paramètre déterminant qui influence les performances dynamiques du système et joue un rôle essentiel dans la stabilisation du comportement dynamique du véhicule, dans l'amélioration du contact roue-sol et dans la réduction de l'usure des composants mécaniques.

Conclusion générale et perspectives

Actuellement, le calcul fractionnaire suscite un intérêt croissant en raison de son efficacité relativement à la modélisation et à l'identification des systèmes dynamiques.

Cette thèse s'attache essentiellement à l'étude et à l'identification des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire dans le domaine temporel, l'identification s'impose également comme une phase préalable essentielle à la conception de nombreuses stratégies de commande et de supervision de processus industriels et technologiques.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les concepts essentiels concernant les opérateurs et les systèmes d'ordre fractionnaire, servant de base à la compréhension et à l'élaboration de notre étude.

Le deuxième chapitre expose les processus d'identification des systèmes dynamiques, en mettant en évidence les principales méthodes d'identification des systèmes, les approches paramétriques et non paramétriques se complètent dans le processus d'identification. La méthode non paramétrique fournit une description initiale du comportement sans imposer de structure, tandis que l'approche paramétrique permet une modélisation précise fondée sur l'estimation des paramètres. Leur combinaison offre une représentation à la fois flexible et rigoureuse du système étudié. Nous avons introduit l'algorithme des Moindres Carrés Récursifs (RLS), largement utilisé pour son efficacité dans l'estimation en ligne des paramètres et sa capacité à s'adapter aux variations temporelles. Enfin, nous avons abordé le cas des différentes de systèmes non linéaires, dont la complexité nécessite des structures de modélisation spécifiques. Ce chapitre constitue ainsi une base essentielle pour les travaux d'identification qui seront développés dans le chapitre suivant, notamment dans le cadre de l'application aux systèmes fractionnaires.

Dans le troisième chapitre, deux modèles sont identifiés. Le premier correspond à un modèle linéaire noté $H_{n_1 n_2}$, dont les paramètres sont estimés à partir de l'erreur de prédiction. Les intégrales fractionnaires sont approximées à l'aide de la méthode de singularité proposée par Charef. L'estimation des paramètres est réalisée à l'aide de l'algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli, largement utilisé pour l'estimation adaptative en temps réel. Le second modèle correspond à un système non linéaire représenté sous la forme d'une structure

à blocs orientés, plus précisément un modèle de Hammerstein d'ordre fractionnaire. L'identification porte à la fois sur la partie linéaire fractionnaire et sur la partie non linéaire du système. Les résultats de simulation obtenus se révèlent très satisfaisants.

Le quatrième chapitre a présenté le développement d'un système de suspension semi-active à fluide électrorhéologique (ER) d'ordre fractionnaire, conçu pour renforcer la robustesse face aux perturbations routières et aux bruits de mesure, tout en améliorant le confort de conduite. L'identification de l'ordre fractionnaire a permis d'adapter finement la dynamique du système et d'optimiser ses performances globales. À l'avenir, ce modèle pourra être étendu pour intégrer des conditions routières variables et des incertitudes du système, permettant ainsi d'optimiser davantage la performance de la suspension et le confort des passagers dans des scénarios réels.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives est travaux futurs intéressantes.

1- Application de la technique d'identification proposée à des systèmes réels dont le modèle s'adapte aux systèmes de Hammerstein d'ordre fractionnaire, afin de réaliser une validation expérimentale des résultats et de confirmer les performances des approches développées.

2-Étendre l'étude réalisée sur les systèmes de suspension semi-actifs à fluide électrorhéologique en appliquant une stratégie de commande d'ordre fractionnaire, accompagnée d'une optimisation des efforts de commande.

3- Il serait pertinent d'étendre les méthodes proposées à des systèmes plus complexes, notamment des systèmes multi-entrées multi-sorties (MIMO) et des systèmes à retard.

4- L'intégration de techniques d'intelligence artificielle pourrait également améliorer la précision de l'identification et la robustesse face aux perturbations.

5- Enfin, l'optimisation des algorithmes en vue d'une implémentation en temps réel constitue une perspective prometteuse pour des applications industrielles.

Références

- [1] Oldham K.B., Spanier J., " The Fractional Calculus ", Academic Press, New York, London, 1974.
- [2] Miller K.S., Ross B., " An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations », Wiley, New York, 1993.
- [3] Oustaloup A., " La dérivation non-entière : théorie, synthèse et applications », Hermès, Paris, 1995.
- [4] Sabatier J., Francisco J.M., Guillemard F., MozeM., Lavigne L., Merveillaut M.," Lithium-ion batteries modeling : A simple fractional differentiation based model and its associated parameters estimation method ", In : Signal Processing, vol. 107, p. 290–301, 2015.
- [5] Gabano J.D., Poinot T., Houcem K., " LPV continuous fractional modeling applied to ultra capacitor impedance identification ", In : Control Engineering Practice, vol 45, p. 86–97, 2015.
- [6] Hernández-Balaguera E.," Coulostatics in bioelectrochemistry : A physical interpretation of the electrode-tissue processes from the theory of fractional calculus ", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 45, 110787, 2021.
- [7] Maity S., Saha M., Saha P., Khanra M.," Fractional calculus-based modeling and state-of-charge estimation of supercapacitor ", Journal of Energy Storage, vol. 81, no.110317,2024.
- [8] Moreau X., Ramus-Serment C., Oustaloup A. " Fractional Differentiation in Passive Vibration Control ", Journal Nonlinear Dynamics, vol. 29, p. 343–362, 2002.
- [9] Meral F. C., Royston T. J., Magin R.," Fractional calculus in viscoelasticity : An experimental study ", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, no. 04, p. 939–945, 2010.
- [10] Dai Z., Peng Y., Mansy H. A., Sandler R. H., Royston T. J.,"A model of lung parenchyma stress relaxation using fractional viscoelasticity ", In : Medical Engineering and Physics, vol.37, p.752–758, 2015.
- [11] Paola Di M., Reddy J.N., Ruocco E. " On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic Reddy beam ", Meccanica, vol.55, p.1365–1378, 2020.

- [12] Zhu F., Xing G.H., Lyu G.J., Zhang L.T., Wang Y.J., Pelletier J.M., Qiao J.C., " Physics-motivated fractional viscoelasticity model for dynamic relaxation in amorphous solids " , International Journal of Plasticity, vol.164,103588, 2023.
- [13] Giusti A., Colombaro I., Garra R., Garrappa R., Mentrelli A., " On variable-order fractional linear viscoelasticity " , Fractional Calculus and Applied Analysis An International Journal for Theory and Applications, vol.27, p.1564–1578, 2024.
- [14] Han B., Yin D., Gao Y.O., " The application of a novel variable-order fractional calculus on rheological model for viscoelastic materials " , Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol.31, no.28, 2024.
- [15] Couceiro M.S., Fernando M.L, Rocha R.P., Ferreira N. M. F., " Nuno M. F. Ferreira, Introducing the fractional order robotic Darwinian PSO " , AIP Conference Proceedings, vol.1493, no.1, p. 242–251, 2012.
- [16] Emilio J.T., Inés T., Javier P.A., Blas-M. V., " Fractional order modelling of contact with the environment in flexible robot applications " , Journal Automática, vol.39, Badajoz, 2018.
- [17] Liu X., Gan H., Luo Y., Chen Y., Gao L., " Digital-Twin-Based Real-Time Optimization for a Fractional Order Controller for Industrial Robots " , Fractal and fractional Fractal Fract, vol.7, no.2, p.167, 2023.
- [18] Husnain S., Abdulkader R., " Fractional Order Modeling and Control of an Articulated Robotic Arm " , Engineering, Technology, applied science Research, vol. 13, no. 6, 2023.
- [19] Yang Y., Zhu P., Wang X., Li W, Gao J., Voyles M.R., " A Fractional-Order Recurrent Neural Network Model for Time-Variant Quadratic Programming in Robot Motion Planning " , IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Boston, MA, USA, 15-19, July, 2024.
- [20] Živković N., Lazarević M., Vidaković J., " Fractional-order Iterative Learning Control Enhanced Intelligent PID for Articulated Robots " , International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 23, p.2036–2045, 2025.
- [21] Oustaloup A., " La Commande CRONE : Commande Robuste d'Ordre Non Entier " , Hermès, 1991.
- [22] Podlubny I., " Fractional order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers " , IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no.1, p.208-214, 1999.

- [23] Bettayeb M., Mansouri R., Al-Saggaf U., Mehedi I., " Smith predictor based fractional-order-filter PID controllers design for long time delay systems ", Asian Journal of Control, vol.19, no.2, p. 1–12, 2017.
- [24] Chen Y.Q., Moore K. L., " Discretization schemes for fractional - order differentiators and integrators ", IEEE Trans. On Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, no. 3, p. 363–367, 2002.
- [25] Rajasekhar K., Krishna B.T., " Indirect Discretization Based Design of Fractional Order Differintegrators at Various Sampling Intervals and Its Application to Edge Detection ", International Journal of Applied and Computational Mathematic, vol.9, no.131, 2023.
- [26] Shah S.M., Samar R., Khan N. M., Raja M. A. Z., " Fractional-order adaptive signal processing strategies for active noise control systems ", Nonlinear Dynamics, vol. 85, p. 1363–1376, 2016.
- [27] Jalab H. A., Ibrahim R.W., Ahmed amr., " Image denoising algorithm based on the convolution of fractional Tsallis entropy with the Riesz fractional derivative ", Neural Computing and Applications, Vol. 28, p.217–223, 2017.
- [28] Huang G., Qin H.-y., Chen Q., Shi Z., Jiang S., Huang C., " Research on Application of Fractional Calculus Operator in Image Underlying Processing ", Fractal and Fractional, vol.8.no.1, 37, 2024.
- [29] Mathur A., Akhtar A., " Fractional Calculus in Signal Processing : The Use of Fractional Calculus in Signal Processing Applications, Such as Image Denoising, Filtering, and Time Series Analysis ", International Journal For Multidisciplinary Research, vol.5, no. 4, 2023.
- [30] Huangzhi Xia., Yifen Ke., Riwei Liao., Yunqiang Sun., " Fractional order calculus enhanced dung beetle optimizer for function global optimization and multilevel threshold medical image segmentation ", Journal of super computing, vol. 81, article number. 90, 2025.
- [31] Zhang Haozhe., Huo Hanliang., Ma Ruoxun., Mo Lipo., " Fractional Order LMS Algorithms : A Review and Application in Signal Denoising ", Proceedings of 2023 Chinese Intelligent Systems Conference, p. 193–202, 2023.
- [32] Ortigueira M. D., " Principles of fractional signal processing ", Digital Signal Processing Vol. 149, no.104490, 2024.
- [33] Spasic D.T., Kovincic N.I., Dankuc D.V., " A new material identification pattern for the fractional kelvin-zenner model describing biomaterials and human tissues ",

- Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.37, p. 193–199, 2016.
- [34] Ucar E., Ozdemir N., Altun E., " Fractional order model of immune cells influenced by cancer cells ". Mathematical Modelling of Natural Phenomena, vol. 14, No. 3, 308, 2019.
- [35] Machado J. T., Mata M. E., " Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn ", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 22, no.1-3, p. 396-406, 2015.
- [36] Machado J.T., Mata M.E., Lopes A. M.," Fractional State Space Analysis of Economic Systems ", Journal Entropy, vol.17, p. 5402-5421, 2015.
- [37] Luo D., Wang J. R., Fečkan M.," Applying Fractional Calculus to Analyze Economic Growth Modelling ", Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics, vol. 14, no.1, 2018.
- [38] Rogosin S., Karpiyeny M.," Fractional models for analysis of economic risks ", Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 26, p. 2602–2617, 2023.
- [39] Thomassin M., R Malti.," Multivariable identification of continuous-time fractional system ". ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Paper No : DETC2009-86975, p . 1187-1195, San Diego, California, USA, August 30–September 2, 2009.
- [40] Malti R., Thomassin M.," Differentiation similarities in fractional pseudo-state space representations and the subspace-based methods ", In : Fractional Calculus and Applied Analysis, vol.16, no.1, p. 273–287.
- [41] Djouambi A., Voda, A., Charef A.," Recursive prediction error identification of fractional order models ". Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol.17, no.6, p.2517–2524, 2012.
- [42] Hu Y., Fan Y., Wei Y., Wang Y., Liang Q.," Subspace-based continuous-time Identification of fractional order systems from non-uniformly sampled data ". In : International Journal of Systems Science, vol. 47. no. 1, p. 122–134, 2016.
- [43] Sersour L., Djamah T., Bettayeb M., " Nonlinear system identification of fractional Wiener models ", Nonlinear Dynamics, vol. 92, no.4, p. 1-13, 2018.
- [44] Hammar, K., Djamah, T., Bettayeb, M. " Nonlinear system identification using fractional Hammerstein-Wiener models ", Nonlinear Dynamics, vol.98, No.3, p.2327-2338, 2019.

- [45] Wang Z., Liang S., Chen B., Sun H., Liang S., " Fractional order system identification using a joint multi-innovation fractional gradient descent algorithm ", vol.14, no.30802, 2024.
- [46] Mathieu B., Oustaloup A., Levron F., " Transfer function parameter estimation by interpolation in the frequency domain ", In : European Control Conference (ECC95), Rome, Italie,1995.
- [47] Rahmani M.-R., Farrokhi M., " Fractional-order Hammerstein state-space modeling of nonlinear dynamic systems from input–output measurements ", ISA Transactions, vol. 96, p. 177-184, 2020.
- [48] Galvão R.K.H., Teixeira M.C.M., Minhoto M.C., Assunção E., Paiva H.M., Hadjiloucas S., " Identification of fractional-order transfer functions using exponentially modulated signals with arbitrary excitation waveforms ", ISA Transactions, vol.103, p.10-18, 2020.
- [49] Yazgaç B.G., Kırıcı, M.," Fractional Differential Equation-Based Instantaneous Frequency Estimation for Signal Reconstruction ", Fractal Fract., vol.5, no.3, p.83,2021.
- [50] Narang A., Shah S.L., Chen T.," Continuous-time model identification of fractional-order models with time delays ", IET Control Theory and Applications, vol. 5, no.7, 2011.
- [51] Idiou D., Charef A, Djouambi A," Linear fractional order system identification using adjustable fractional order differentiator ", IET signal processing IET Signal Processing, vol. 8, vo. 4, p.301-428, 2014.
- [52] Victor S., Duhé J.-F., Melchior P., Abdelmounen Y., Roubertie F., Roubertie F., " Long-memory recursive prediction" error method for identification of continuous-time fractional models ", Nonlinear Dynamics, vol.110, p. 635–648, 2022.
- [53] Zhang B., Tang Y., Lu Y.," Identification of linear time-varying fractional order system susing block pulse functions based on repetitive principle ", ISA Transactions, vol.123, p. 218-229, 2022.
- [54] Yüce A.," System Identification Based on Experimental Technique Using Stability Boundary Locus Method for Linear Fractional Order Systems ", Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 49, p.16795–16807, 2024.
- [55] Wang Z., Chen B., Sun H., Liang S.," Fractional order system identification using a joint multi-innovation fractional gradient descent algorithm ", Scientific Reports vol.14, 30802, 2024.

- [56] Rahmani M.R., Farrokhi M.," Fractional-order Hammerstein state-space modeling of nonlinear dynamic systems from input–output measurements ", ISA Transactions, vol. 96, p. 177-184, 2020.
- [57] Zhang L., Li K., Du D., Li Y., Fei M.," A regularised fast recursive algorithm for fraction model identification of non linear dynamic systems ", International Journal of systems science vol.54, no.7, 2023.
- [58] Oliva-Gonzalez L. J., Martínez-Guerra R.," State estimation-based parameter identification for a class of nonlinear fractional-order systems ", Nonlinear Dynamics, vol. 112, p.6379–6402, 2024.
- [59] Xue D., " Fractional-Order Control Systems: Fundamentals and Numerical Implementations ", De Gruyter; 1^{er} edition, 10 Juillet, 2017.
- [60] Hilfer R.," Applications of Fractional Calculus in Physics ", World Scientific, Singapore, 2000.
- [61] Podlubny I.," Fractional Differential Equations ", Mathematics in Science and Engineering, vol.198, p.1-340, Academic Press, New York, 1999.
- [62] Matignon D., " Stability result on fractional differential equations with applications to control processing ", In: Proceedings of the IMACS-IEEE Multi conference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA 96). Lille, France, p. 963–968, 1996.
- [63] Petras I., Dorcak L., " The Frequency Method for Stability Investigation of Fractional Control system ", Journal of SACTA, Vol. 2, p. 75–85, 1999.
- [64] Matignon D., " Stability properties for generalized fractional differential systems " ESAIM: Proceedings Fractional Differential Systems Models Methods and Applications, vol. 5, p. 145-158, 1998.
- [65] Monje A., Chen Y-Q., Vinagre B-M., Xue D., Feliu V., " Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications ", London: Springer, 2010.
- [66] Bettayeb M., Djennoune S.," New results on the controllability and observability of fractional dynamical systems ", Journal of Vibration and Control, vol.14 No. 9–10, p.1531–1541, 2008.
- [67] Matignon, D., d'Andréa-Novel B.," Observer-based controllers for fractional differential systems ", In: 36th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, p. 4967–4972, 1997.

- [68] Zeng Q., Cao G., Zhu X., " Research on controllability for a class of fractional-order linear control systems ", Journal of Systems Engineering and Electronics, vol.16, no.2, 376–381, 2005.
- [69] Petras I., Podlubny I., O’Leary P., Dorcak L., Vinagre, B. M., "Analogue Realization of Fractional Order Controllers ", Faculty of BERG, Technical University of Kosice, Kosice, 2002.
- [70] Vingare B.M., Poudlubny I., Hernandez A., Felieu V.," some approximations of fractional order opertors used in control theroy and application ", fractional calculs and applid Analysis, vol.3, p.231-248, 2000.
- [71] Ladaci S, " Contribution à la commande adaptative d’ordrefractionnaire ", Thèse de Doctorat, Université Mentouri Constantine, 2007.
- [72] Nezzari H., " Contribution à l’analyse des systèmes d’ordre fractionnaire ", Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine, 2013.
- [73] Oustaloup A., " Systèmes asservis linéaires d’ordre fractionnaire ", Masson, Paris,1983.
- [74] Oustaloup A., " La commande CRONE ", Hermès, Paris,1991.
- [75] Oustaloup A., Melchior P., Lanusse P., Cois O., Dancla F., " The CRONE toolbox for Matlab ", In Proceedings of IEEE International Symposium on Computer-aided Control System Design (CACSD 2000), p. 190–195,2000.
- [76] Charef A., " Analogue realization of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller", IEE Proceedings, Control Theory Appl, vol. 153, no. 6, p. 714-720, 2006.
- [77] Charef A., Sun H.H., Tsao Y.Y., Onaral B., " Fractal system as represented by singularity function ", IEEE Trans. Auto. Cont, vol. 37, no. 9, p. 1465-1470, 1992.
- [78] Vinagre B. M., Petras I., Merchan P., Dorcak L., " Two digital realizations of fractional controllers: Application to temperature control of a solid ", Proceedings European Conrol Conference (ECC2001), Porto, Portugal, 4-7, September, 2001.
- [79] Chen Y.Q., Vinagre B.M., Podlubny I., "A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Continued Fraction Expansion ", Proceedings of DETC’03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, 2-6, September ,2003.
- [80] Povy L., " Identification des processus ", Dunod,1975.
- [81] Ljung L., " System Identification : Theory for the User ", 2nd Edition, Prentice Hall PTR, UpperSaddle River,1999.

- [82] Maurice R., Ferrier J.-L., " Commande par ordinateur identification ", 3th Edition, Eyrolles,1997.
- [83] Hammar K. " Identification des systèmes bloc-structurés fractionnaires non-linéaires " Thèse de Doctorat Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2021.
- [84] Wiener N., " Nonlinear Problems in Random Theory ", The MIT Press, Massachusetts, USA,1966.
- [85] Schetzen M., " The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems ", New York, Wiley,1980.
- [86] Mathews V.J., " Adaptive polynomial filters ", IEEE Signal Processing Magazine., vol. 8, no.3, p.10–26,1991.
- [87] Hazem M.A., Bayoumi M.M., " Volterra system identification using adaptive genetic algorithms ", Applied Soft Computing, vol.5, no.1, p. 75-86, 2004.
- [88] Narendra K., Gallman P., " An iterative method for the identification of nonlinear systems using a Hammerstein model ", IEEE Transactions on Automatic Control., vol.11, no.3, p. 546-550,1966.
- [89] R. Haber, H. Unbehauen., " Structure identification of Non linear systems—A survey on Input/output Approaches ", Automatica, vol. 26, no, 4, p. 651-677,1990.
- [90] Giri F., Bai E.W., " Block-oriented Nonlinear System Identification ", Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [91] Hunter I.W., Korenberg M.J., " The identification of nonlinear biologicalsystems : Wiener and Hammerstein cascade models ", Biological Cybernetics, vol. 55, p. 135–144, 1986.
- [92] Fruzzetti K.P., Palazoglu A., McDonald K.A., " Nolinear model predictive control using Hammerstein models ", Journal of Process Control, vol 7, no.1, p. 31-41,1997.
- [93] Bloemen H.H.J., Chou C.T., Van den Boom T.J.J., Verdult V., Verhaegen M., Backx T.C., " Wiener model identification and predictive control for dual composition control of a distillation column ", Journal of Process Control, vol.11, no.6, p. 601-620, 2001.
- [94] Elleuch K., Kharrat M., Chaari A., Chaabane M., " Modeling and identification of block-oriented heat transfer process ", International Journal of Information and Systems Sciences, vol. 5, no.1, p.41-56, 2009.
- [95] Wang D.F., Ren Y.Y., Liu C.L., Han P., " Identification of thermal process using Hammerstein model based on particle swarm optimization algorithm ", Unifying Electrical Engineering and Electronics Engineering, Conference paper, p.1961-1968, 2013.

- [96] Wiener N., " Nonlinear problems in randomtheory ", Wiley, New York.1985.
- [97] Rugh W.J., "Nonlinear System Theory, The Volterra/Wiener Approach", Johns Hopkins University Press,1981.
- [98] Bloemen H.H.J., Chou C.T., Van den Boom T.J. J., Verdult V., Verhaegen M., Backx T. C., (2001), " Wiener model identification and predictive control for dual composition control of a distillation column ", Journal of Process Control, vol.11, no.6, p.601-620, 2001.
- [99] Peng, J., Dubay R.," Identification and adaptive neural network control of a DC motor system withdead-zone characteristics ", ISA Transactions, vol.50, no.4, p.588-598,2011.
- [100] Luo X. S., Song Y. D., " Data-driven predictive control of Hammerstein-Wiener systems based on subspace identification ", Information Sciences, vol.422, p.447-461, 2018.
- [101] Kumar P., Devanand, R., Schoen M. P.," sEMG and Skeletal Muscle Force Modeling : A Nonlinear Hammerstein-Wiener Model, Multiple Regression Model and Entropy Based Threshold Approach ", In 2nd International Electronic Conference on Entropy and Its Applications,2015.
- [102] Zambrano D., Tayamon S., Carlsson B., Wigren T., " Identification of a discrete time nonlinear Hammerstein-Wiener model for a selective catalytic reduction system ", In American Control Conference (ACC 2011), 78-83, 2011.
- [103] Dewhirst O. P., Simpson D. M., Angarita N., Allen R., Newland P. L., " Wiener-Hammerstein parameter estimation using diferential evolution application to limb reflex dynamics ", In Third International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing, January 20-23, Valencia, Spain, 2010.
- [104] Bai Er-W., Cai Z., Dudley-Javorosk S., Shields R. K., " Identification of a modified Wiener-Hammerstein system and its application in electrically stimulated paralyzed skeletal muscle modeling ", Automatica, vol.45, no.3, p.736-743, 2009.
- [105] Chen Y.Q., Vinagre B.M., Podlubny I., "A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Continued Fraction Expansion", Proceedings of DETC'03 ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference Chicago, Illinois, USA, 2-6, September ,2003.
- [106] Khadrahoui A., Jelassi K., Trigeassou J.C., " Identification of a fractionalorder model by a least square technique : Hn model ", Progress in Computing Applications Vol. 2, no.2,2013.

- [107] Khadrahoui A., Jelassi K., Trigeassou J.C., " Identification of a fractional order model by a least squares techniques : $H_{n1,n2}$ Model ", Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 14th International Conference, 2013.
- [108] Ali-Larnene Y., Ladaci S., Belemeguenai A., " RLS-based Identification of fractional order $H_{n1,n2}$ system using the Singularity Function approximation ", Algerian Journal of Signals and Systems, vol.5, no.4, p.197-202,2020.
- [109] Ali-Larnene Y., Ladaci S., Belemeguenai A.," Recursive Identification of Fractional order Hammerstein system ", In: 4th International Conference on Advanced Engineering in Process Intelligence (ICAEPI2023), Special Session on 'Fractional order Systems and Control Design and Application for processes of petroleum industry ', Skikda-Algeria, 2023.
- [110] Ali Larnene Y., Ladaci S., Belmeguenai A.," Fractional-order model-based robust identification for a vehicle semi-active electro-rheological suspension system ", International Journal of Advanced Mechatronic Systems, vol.11, no.2, p.111-119,2024.
- [111] Savaresi S.M., Bittanti S., Montiglio M., " Identification of semi-physical and black-box nonlinear models : the case of MR-dampers for vehicles control ", Automatica, vol. 41, no. 1, p.113–127, 2005.
- [112] Ikonen E.," Active suspension control with state estimation using finite Markov chains ", Int. J. Advanced Mechatronic Systems, vol. 7, no. 3, p.183–192, 2017.
- [113] Pham T.-P., Sename O., Dugard L., Vu V.T., " Real time estimation of the damping force of vehicle electro-rheological suspension ", The 16th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA Budapest, Hungary ,5-7, November, 2018.
- [114] Theunissen J., Tota A., Gruber P., Dhaens M., Sorniotti A., " Preview-based techniques for vehicle suspension control : a state-of-the-art review ", Annual Reviews in Control, vol. 51, no. 2, p.206–235, 2021.
- [115] Patra A.K., "A vehicle suspension system based on Kalman filtering model predictive control algorithm ", Int. J. Advanced Mechatronic Systems, vol. 9, no. 2, p.55–65, 2021.
- [116] Stanway R., Sproston J., Stevens N., " Nonlinear modelling of an electro-rheological vibration damper Journal of Electrostatics ", vol. 20, no. 2, p.167–184, 1987.

- [117] Lozoya-Santos J.d.J., Morales-Menendez R., Ramirez-Mendoza R., " Magnetorheological damper an experimental study ", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 23, no. 11, p.1213–1232, 2012.
- [118] Soong M.F, Ramli R., Saifizul A.A., Mamat A., " Handling performance criteriaevaluation for vehicle suspension system with semi-active control strategies ", *Int. J. Advanced Mechatronic*.
- [119] Savaresi S.M., Poussot-Vassal C., Spelta C., Sename O., Dugard L., " Semi-Active Suspension Control Design for Vehicle ", Elsevier, Butterworth-Heinemann, UK, 2011.
- [120] Yan Z., Shi C., Zheng Y., Gu s.," study on a vehicule semi acive suspension control system based on road elevtion identification ", *plos one*, vol.177, no.6, 2022.
- [121] Zhao, L., Yu, Y., Zhou, C., Wang, S., Yang, F. and Wang, S."A hydraulic semi-active suspension based on road statistical properties and its road identification ", *Applied Sciences*, vol. 8, no. 5, p.740, 2018.
- [122] Büyükköprü M., Uzunsoy E., Mouton X., " Implementation of semi-active control methods in a full car model and a comparative study in terms of ride comfort and road holding ", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 2023.
- [123] Klockiewicz Z., Ślaşki G., " Comparison of vehicle suspension dynamic responses for simplified and advanced adjustable damper modelswith friction, hysteresis and actuation delay for differentcomfort-oriented control strategies ", *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 17, no. 1, p.1–15, 2023.
- [124] Krauze P., " Identification of control-related signal path for semi-active vehicle suspension withmagnetorheological dampers ", *Sensors*, vol. 23, no. 12, p.5770, 2023.
- [125] Soliman A., Kaldas M., " Semi-active suspension systemsfromresearch to mass-market – a review ", *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 40, no. 2, p.1005–1023, 2021.
- [126] Ladaci S., Charef A., Loiseau J.J.," Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 19, no. 1, p.69–76, 2009.
- [127] Kissoum S., Ladaci S., Charef A., " Smith predictor PID-based robust adaptive gain-scheduled control for a class of fractionalorder LPV systems with time delays ", *Int. J. Dynamics and Control*, vol. 11, no. 6, p.3096–3108, 2023.

- [128] Seghiri T., Ladaci S., Haddad S., " Fractional order adaptive MRAC controller design for high-accuracy position control of an industrial robot arm ", *Int. J. Advanced Mechatronic Systems*, vol. 10, no. 1, p.8–20, 2023.
- [129] Ladaci S., Benchaita H., " Fractional order fault tolerant control – a survey ", *International Journal of Robotics and Control Systems*, vol. 3, no. 3, p.561–587, 2023.
- [130] Zeraati S., " Designing fractional order PID for car suspension systems ", *Int. J. Scientific & Engineering Research*, vol. 6, no. 11, pp.821–833, 2015.
- [131] Nguyen S.D., Lam B.D., Ngo V.H., " Fractional-order sliding-mode controller for semi-active vehicle MRD suspensions ", vol. 101, no. 3, p.795–821, 2016.
- [132] Memlikai E., Kapoulea S., Psychalinos C., Baranowski J., Bauer W., Tutaj A. Piątek P., " Design of fractional-order lead compensator for a car suspension system based on curve-fitting approximation ", *Fractal and Fractional*, vol. 5, no. 2, 46, p.1–11, 2021.
- [133] You H., Shen Y., Xing H., Yang S., " Optimal control and parameters design for the fractional-order vehicle suspension system ", *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, vol. 37, no. 3, p.456–467, 2018.
- [134] Wenjing Z., Jiangchuan N., Yongjun S., Shaofang W., " Combined control of vehicle suspension with fractional-order magnetorheological fluid damper model ", *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 53, no. 7, p.2037–2046, 2021.
- [135] Pham T-P., Sename O., Dugard L., " Real time damper force estimation of vehicle electrorheological suspension : a nonlinear parameter varying approach ". 3rd IFAC Conference, vol. 52, no. 28, p.94–99, 2019.
- [136] Pham T-P., Sename O., Dugard L., Vu, V.T., " Real-time estimation of the damping force of vehicle electrorheological suspension ", *The 16th Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA Budapest, Hungary, November, 2018.*
- [137] Nguyen M.Q., Canale M., Sename O., Dugard L., "A model predictive approach for semi active suspension control problem of a full car ", *IEEE Conference on Decision and Control*, 12–14 December, 2016, Las Vegas, NV, USA, 2016.

[138] Guo S., Yang S., Pan C., " Dynamic modeling of magnetorheological damper behaviors", Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 17, no. 1, p.3–14, 2006.