وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université 20 Aout 1955 de Skikda

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

جامعة 20 أوت 1955 ، سكيكدة

كلـــــية العلـــوم

قسم الرياضيات

N^0 : U.S/F.S/D.M/2022/2023

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Sur quelques inégalités intégrales

Option : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Par : GUEND Nawal

Encadrée par : Dr. NASRI NASSIMA **M.C.B** U. SKIKDA

Devant le jury :

Présidente : Dr.. KHENNICHE GHANIA M.C.B U. SKIKDA
Examinatrice : Dr. KAREK CHAFIA M.C.B U. SKIKDA

Année universitaire : 2022/2023

Remerciement

Un grand merci revient à Dieu le tout puissant qui lui seul nous a donner la volonté de réaliser ce modeste travail.

Un grand merci a mon promoteur Dr Nassima Nasri pour ses conseils et son aide et qui a mis à ma disposition tout le nécessaire pour réaliser ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements au Dr Ghania Khenniche qui a acceptée de présider mon jury.

Je remercie très chaleureusement Dr chafia Karek qui m'a honorée en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie aussi monsieur Ghassen Touil pour ses conseils dans la rédaction de ce mémoire .

Je remercie tous les enseignants du département mathématique pour leurs aides et leurs encadrements.

Je remercie ma mère, ma famille et mes amies, pour m'avoir soutenu et motivé tout le long de la réalisation de ce travail.

Nawal Guend

Dédicace

Avec amour et respect, je dédie ce travail a:

Ma chérie, ma vie, mon amour et mon bras droit, ma mère chehmouna Djareddir qui a sacrifiée sa vie pour que nous arrivons jusqu'à la, tu es le bonheur, la joie et le secret de ma réussite, merci maman.

Mon homme, ma force, mon prince Youcef Guend,mon cher papa qui nous a quitté très taux, à toi je dédie cette réussite papa, j'espère être la fille dont vous avez autant rêvée.

Ma famille, mes amies, mes enseignants et tout ce qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, merci je vous aime.

Nawal Guend

Abstract

This research work is devoted to the study of integral inequalities of trapezium type for functions whose first derivatives in absolute values are convex, concave, s-concave and s-convex.
We are interested in the classical and fractional integral inequalities of trapezoidal types of which we have treated the cases where the absolute value of the first derivative as well as the absolute value of the first derivative to a certain power enjoy a certain type of convexity or concavity.

Key words : Trapezium type inequality, Hölder inequalities, Jensen inequalities, inequalities power-mean, convex functions, concave functions, s-convex functions, s-concave functions, Riemann-Liouville integral operator, special functions .

Résumé

Ce mémoire de recherche concerne l'étude des inégalités intégrales de type trapèze pour les fonctions dont les dérivées premières en valeurs absolues sont convexes, concaves, s-convexes, s-concaves.
Nous somme intéressé aux inégalités intégrales classiques et fractionnaires de types trapèzes dont nous avons traité les cas où la valeur absolue de la première dérivée ainsi que la valeur absolue de la dérivée première à une certaine puissance jouissent d'un certain type de convexité ou concavité.

Mots clés : Inégalité de type trapèze, inégalités de Hölder, inégalités de Jensen, inégalités des moyennes d'ordre q, fonctions convexes, fonctions concaves, fonctions s-convexes, fonctions s-concaves, opérateur intégrale de Riemann-Liouville, fonctions spéciales.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة المتراجحات التكاملية من النوع شبه منحرف للدوال التي تكون القيمة المطلقة لمشتقاتها الأولى محدبة، مقعرة، س محدبة و س مقعرة.
تطرقنا الى المتراجحات التكاملية الكلاسيكية و الكسر ية من نوع شبه المنحرف حيت قمنا بمعالجة الحالات التي تكون فيها القيمة المطلقة للمشتق الأول وكذلك القيمة المطلقة للمشتق الأول مرفوع إلى قوة معينة يتمتع بنوع معين من التحدب أو التقعر.

كلمات مفتاحية: المتراجحات من نوع شبه منحرف، متراجحة هولدر، متراجحة جنسن، متراجحة القيمة الوسطى من الدرجة ك، الدوال المحدبة، الدوال المقعرة، الدوال س المحدبة، الدوال س المقعرة، تكامل ريمان ليوفيل، الدوال الخاصة .

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie de l'espace de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc.

le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy et **Č**eby**š**ev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens :Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variée.

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extension ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard classiques et fractionnaires.
Ce mémoire est structuré comme suite :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques types de convexités et concavité, fonctions spéciales, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, ainsi que quelques inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre nous traitons les inégalités de type trapèzes pour les fonctions dont les premières dérivées sont convexes, concaves ainsi que s-convexes, s-concaves.

Le dernier chapitre sera consacré aux inégalités fractionnaires dont nous verrons l'analogue fractionnaire de l'inégalité d'Hermite-Hadamard ainsi que les inégalités des trapèzes fractionnaires.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRE

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques propriétés et définitions mathématiques. En premier lieu, nous commençons par les type des convexités et concavités. Après, nous déterminons les fonctions gamma et bêta ainsi que l'intégrale fractionnaire au sens Riemann-Liouville. Enfin, nous mentionnons quelques inégalités telles que l'inégalité de Hölder, et l'inégalité des moyennes d'ordre q et l'inégalité de Jensen.

1.1 La convexité

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 *([5]) Une fonction* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *est dite convexe, si :*

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{t}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\,\boldsymbol{y}\right) \leq \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{t})\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

est satisfaite pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{I}$ *et tout* $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$.

Définition 1.1.2 *([2]) Une fonction positive* $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{0}, \infty) \to \mathbb{R}$ *est dite* $\boldsymbol{s}$*-convexe au* *second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0, 1]$, *si :*

$$f(tx + (1 - t)y) \ \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0, \infty)$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

1.2 La concavité

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.([8])

Définition 1.2.1 *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite concave, si :*

$$f(tx + (1 - t) y) \geq tf(x) + (1 - t) f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

Définition 1.2.2 *Une fonction positive* $f\, [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *est dite* s*-concave au second sens pour un certain nombre fixé* $s \in (0, 1]$, *si :*

$$f(tx + (1 - t)y) \ \geq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0, \infty)$ *et tout* $t \in [0, 1]$.

1.3 Fonctions spéciales

1.3.1 la fonction gamma

la fonction gamma (ou fonction d'Euler de deuxième espèce) est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles.

Définition 1.3.1 *([9]) La fonction gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha - 1} dt, \tag{1.1}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 1.3.1 *Une propriété importante de la fonction gamma est la relation de récurrence suivante :*

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \qquad \alpha>0} \tag{1.2}$$

en effet, $\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\alpha+1-1}dt}$.

Pour $\boldsymbol{0<a<b}$ *et en intégrant par parties, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t}t^{\alpha+1-1}dt &= \int_a^b e^{-t}t^{\alpha}dt \\ &= \left(-t^{\alpha}e^{-t}\right]_a^b + \alpha\int_a^b e^{-t}t^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{a^{\alpha}}{e^{a}} - \frac{b^{\alpha}}{e^{b}} + \alpha\int_a^b e^{-t}t^{\alpha-1}dt\end{aligned}$$

Si $\boldsymbol{a\to 0^{+}}$ *et* $\boldsymbol{b\to+\infty}$, *on trouve :*

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1)=0-0+\alpha\Gamma(\alpha)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)}$$

Propriété 1.3.2 *La fonction gamma d'Euler généralise la factorielle car, on a pour tout* $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$.

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1)=n!} \tag{1.3}$$

Raisonnons le par récurrence si $\boldsymbol{n=0}$, *alors :*

$$\boldsymbol{\Gamma(0+1)=\Gamma(1)=1=0!}$$

Supposons que la formule est vraie pour $\boldsymbol{n-1}$ *:*

$$\boldsymbol{\Gamma((n-1)+1)=\Gamma(n)=(n-1)!.}$$

Et montrons qu'elle est vraie pour $\boldsymbol{n}$.

D'après l'équation (1.2), on trouve :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma(n+1)} &= \boldsymbol{n\Gamma(n)} \\ &= \boldsymbol{n(n-1)\Gamma(n-1)} \\ &= \boldsymbol{n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)} \\ &= \boldsymbol{n(n-1)(n-2)..........3\ 2\ 1\ \Gamma(1)}\end{aligned}$$

On peut calculer aussi :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma(1)} &= \boldsymbol{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt} \\ &= \boldsymbol{\left(-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0+1 = 1.}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma(n+1)} &= \boldsymbol{n(n-1)(n-2)..........3\ 2\ 1} \\ &= \boldsymbol{n!.}\end{aligned}$$

Donc

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$$

Et selon le dernier résultat on a :

$$\boldsymbol{\Gamma(2) = 1; \Gamma(1) = 1; \Gamma(3) = 2; \Gamma(4) = 6......}$$

1.3.2 la fonction bêta

Définition 1.3.2 *([4]) La fonction bêta (ou fonction d'Euler de première espèce) est définit par :*

$$\boldsymbol{B : (p,q) \to \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,} \tag{1.4}$$

tels que $\boldsymbol{: p > 0}$ *et* $\boldsymbol{q > 0}$.

1.3.3 La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta

La fonction bêta est liée à la fonction gamma par :

$$\boldsymbol{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \tag{1.5}$$

1.4 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $\boldsymbol{f}$ est une fonction continue sur l'intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, on considère l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_a^{(1)} f(t) &= \int_a^t f(x)\,dx \\ I_a^{(2)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(x)\,dx, \end{aligned} \tag{1.6}$$

D'après le théorème de Fubini on trouve :

$$I_a^{(2)} f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t-x)^{2-1} f(x)\,dx, \tag{1.7}$$

En répétant la même opération $\boldsymbol{n}$ fois on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{(n)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \ldots \int_a^{t_{n-1}} (t-x)^{n-1} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

pour tout entier $\boldsymbol{n}$.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(\boldsymbol{n}-1)! = \Gamma(\boldsymbol{n})$, Riemann c'est rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand $\boldsymbol{n}$ prend des valeurs non entières, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.4.1 *([7]) Soit $f \in L^1[a,b]$, pour tout $x \in [a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle intégrale fractionnaire (à gauche), de Riemann-Liouville de f d'ordre α et on note I_{a+}^{α}, la fonction définie par :*

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx, \qquad t > a \tag{1.8}$$

On on appelle intégrale fractionnaire (à droite), de Riemann-Liouville de f d'ordre α et on note I_{b-}^{α}, la fonction définie par :

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x)\,dx, \qquad t < b \tag{1.9}$$

où $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction gamma.

***Cas particulier** : $I_{a_+}^0 f(t) = I_{b_-}^0 f(t) = f(t)$, (i.e I_{a+}^0 est l'opérateur identité).*

Remarque 1.4.1 *Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite* $I_{0_+}^{\alpha}$ *par* I^{α}.

Remarque 1.4.2 *Par le simple changement de variable* $s = t - x$, *on remarque que* $I_{a_+}^{\alpha}$ *peut être écrite sous la forme suivante :*

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s)\, ds. \tag{1.10}$$

(autre définition de l'intégrale de R-L).

1.5 Quelques inégalités

1.5.1 Inégalité de Hölder

Définition 1.5.1 *([1]) Soit* $p, q > 1$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Si* f *et* g *sont deux fonctions réelles définies sur* $[a, b]$ *et si* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *sont des fonctions intégrables sur* $[a, b]$, *alors :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.5.2 Inégalité des moyennes d'ordre q (power-mean)

Définition 1.5.2 *([10]) Soient* $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ *et* $p = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ *deux n-uplet strictement positives et soit* $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par p est définie par :*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \text{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$, *on a*

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]}.$$

La version intégrale de l'inégalité de la moyens d'ordre q est : pour $\boldsymbol{q \geq 1}$ *et si* $|\boldsymbol{f}|$ *et* $|\boldsymbol{g}|^{q}$ *sont intégrables sur* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$*, alors :*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

1.5.3 Inégalité de Jensen

Définition 1.5.3 *([6]) Soient* $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et convexe, pour toute fonction convexe* $\boldsymbol{f}$ *et les nombres* $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ *dans le domaine de la fonction, et* $(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n)$ *sont les facteurs de pondération positifs, alors :*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Si les facteurs de pondération sont égaux, alors :

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Si $\boldsymbol{f}$ *est une fonction concave sur* $\boldsymbol{I}$*, alors :*

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Les variables $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ *peuvent être une fonction d'une autre variable* $\boldsymbol{t}$ *ou* $x_i = g(t)$*, et les sommes sont remplacées par des intégrales et les facteurs de pondération avec une fonction de pondération non négative.*

CHAPITRE

2

INÉGALITÉS DES TRAPÈZES

([11], [3], [12])

2.1 Quelques identités intégrales

Lemme 2.1.1 *Soit* $\boldsymbol{f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ *une application différentiable sur* $\boldsymbol{I^\circ, a, b \in I^\circ}$ *avec* $\boldsymbol{a < b}$. *Si* $\boldsymbol{f' \in L[a, b]}$, *alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\, f'(ta + (1-t)\,b)\,dt \quad (2.1)$$

Preuve. En utilisant un changement de variable et en posant :

$$I = \int_0^1 (1-2t)\, f'(ta + (1-t)\,b)\,dt$$

On intégré $\boldsymbol{I}$ par parties par rapport à $\boldsymbol{t}$ sur l'intervalle $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-2t)\, f'(ta+(1-t)\,b)\, dt \\ &= \left(\frac{(1-2t)\, f(ta+(1-t)\,b)}{a-b} \right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)\,b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)\, dt \end{aligned}$$

En substituant $\boldsymbol{I}$ dans (2.1), nous obtenons :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)\, dt\right]$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)\, dt$$

En utilisant le changement de variable $x = ta + (1-t)\,b$, $t \in [0, 1]$, on trouve :

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)\,b)\, dt = \int_b^a \frac{f(x)}{a-b} dx$$

Alors

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Donc l'égalité est vérifiée. ■

2.2 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions convexes

Théorème 2.2.1 *Soit* $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* $I^\circ, a, b \in I^\circ$ *avec* $a < b$. *Si l'application* $|f'|$ *est convexe sur* $[a, b]$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{(b-a)\,(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du lemme 2.1.1, puis en utilisant le fait que $|f'|$ est convexe, on a :

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
= & \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)\,b)\,dt\right| \\
\leq & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\,|f'(ta+(1-t)\,b)|\,dt \\
\leq & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\,[t\,|f'(a)|+(1-t)\,|f'(b)|]\,dt \\
= & \frac{b-a}{2}|f'(a)|\int_0^1 |1-2t|t\,dt+\frac{b-a}{2}|f'(b)|\int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 |1-2t|t\,dt \\
I_2 &= \int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt
\end{aligned}$$

Calculons I_1 et I_2, commençons d'abord par I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 |1-2t|t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\,t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t-2t^2\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2t^2-t\right)dt \\
&= \left(\frac{t^2}{2}-2\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left(2\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Alors $I_1 = \frac{1}{4}$

Calculons $\boldsymbol{I_2}$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 |1-2t|\,(1-t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\,(1-t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)\,(1-t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2t^2-3t+1\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-2t^2+3t-1\right) dt \\
&= \left(2\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left(-2\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} - t\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Alors $\boldsymbol{I_2} = \frac{1}{4}$

En substituant $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$ dans l'inégalité (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \frac{(b-a)}{2}|f'(a)|\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{(b-a)}{2}|f'(b)|\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{(b-a)}{8}|f'(a)| + \frac{(b-a)}{8}|f'(b)|
\end{aligned}$$

Alors

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right)$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

Théorème 2.2.2 *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $I^\circ, a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et soit $p > 1$. Si l'application $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Preuve. En utilisant le lemme 2.1.1 :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

Entrez la valeur absolue sur les côté de lemme 2.1.1, on obtient :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b|\,dt \quad (2.3)$$

On applique l'inégalité de Hölder à l'inégalité (2.3), on obtient :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Comme $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe, on déduit :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left(t|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+(1-t)|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (2.4)\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale suivante, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t|^p dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p\,dt \\ &= -\left(\frac{1}{2}\frac{(1-2t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\frac{(2t-1)^{p+1}}{p+1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{1}{2(p+1)}+\frac{1}{2(p+1)} \\ &= \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^1 |1-2t|^p dt = \frac{1}{p+1}$$

En outre, comme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(t|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+(1-t)|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)dt &= |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{t^2}{2}\right]_0^1+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\left(t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\end{aligned}$$

En substituant les intégrales précédentes dans l'inégalité (2.4), on obtient :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Donc l'inégalité est vérifiée . ■

Théorème 2.2.3 *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur $I^\circ, a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, pour $q \geq 1$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

Preuve. Du lemme 2.1.1, on a :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

Et d'après l'inégalité des moyennes d'ordre q (power-mean), on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |1-2t|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt\\ \leq\ &\left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t|\,|f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est convexe, on trouve :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 |1-2t|dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1 |1-2t|\,[t|f'(a)|^q+(1-t)\,|f'(b)|^q]\,dt\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

En outre, comme :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t|dt &= \int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)\,dt\\ &= \left(t-t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left(t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{2.5}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |1-2t|\left(t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q\right)dt \\
=\;& |f'(a)|^q\int_0^1 |1-2t|\,t\,dt+|f'(b)|^q\int_0^1|1-2t|(1-t)\,dt \\
=\;& |f'(a)|^q\left(\frac{1}{4}\right)+|f'(b)|^q\left(\frac{1}{4}\right) \\
=\;& \frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

D'après les égalités (2.5) et (2.6), on déduit :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Alors

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

■ Donc l'inégalité est vérifiée.

2.3 Inégalités intégrales des trapèzes pour les fonctions concaves

Théorème 2.3.1 *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est concave sur $[a,b]$, pour $q > 1$ et, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{4}\left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)$$

Preuve. Du lemme 2.1.1, on a :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

Après simplification, on trouve :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt\right] \tag{2.7}$$

On applique l'inégalité de Hölder à l'inégalité (2.7), on trouve :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\ & \frac{b-a}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt=-\left(\frac{(1-2t)^{\frac{2q-1}{q-1}}}{2\left(\frac{2q-1}{q-1}\right)}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{2(2q-1)}{q-1}}=\frac{q-1}{2(2q-1)}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}\,dt=\left(\frac{(2t-1)^{\frac{2q-1}{q-1}}}{2\left(\frac{2q-1}{q-1}\right)}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{\frac{2(2q-1)}{q-1}}=\frac{q-1}{2(2q-1)}$$

Donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}\,dt=\frac{q-1}{2(2q-1)}$$

On a

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt=\int_0^{\frac{1}{2}}t^0\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt$$

Comme $|f'|^q$ est concave et d'après l'inégalité de Jensen, on trouve :

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0 dt}\leq\left|f'\left(\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0(ta+(1-t)b)\,dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0 dt}\right)\right|^q$$

Alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^0\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^0 dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0(ta+(1-t)b)\,dt}{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0 dt}\right)\right|^q$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^0 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \\ \leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt\right) & \left| f'\left(\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} (ta+(1-t)b)\,dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt}\right)\right|^q \end{aligned} \tag{2.8}$$

Calculons les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (ta+(1-t)b)\,dt = (a-b)\int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt + b\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dt = \frac{a+3b}{8}$$

En remplaçant les intégrales précédentes dans l'inégalité (2.8), on obtient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q$$

Et de manière analogue :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q$$

Alors

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ +\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

2.4 Inégalités des trapèzes pour les fonctions s-convexes

Dans tout ce qui suit $\boldsymbol{I}$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par $\boldsymbol{I}^{\circ}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}^{\circ}$ avec $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{L}^{1}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{s}$ un nombre fixé dans $(\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Théorème 2.4.1 *Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{I} \subset [\mathbf{0}, \infty)$, une fonction différentiable sur $\boldsymbol{I}^{\circ}$ et $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}$ avec $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ telle que $\boldsymbol{f}' \in \boldsymbol{L}^{1}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])$. Si $|\boldsymbol{f}'|^{q}$ est s-convexe sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ pour $\boldsymbol{q} \geq \mathbf{1}$ et un certain nombre fixé $\boldsymbol{s} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{s+\frac{1}{2^{s}}}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Preuve. Supposons $\boldsymbol{q} = \mathbf{1}$, du lemme 2.1.1, on a :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}|1-2t|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

Comme $|\boldsymbol{f}'|$ est s-convexe, on déduit :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}|1-2t|\left[t^{s}|f'(a)|+(1-t)^{s}|f'(b)|\right]dt \\
=\ & \frac{b-a}{2}\left(|f'(a)|\int_{0}^{1}t^{s}|1-2t|\,dt+|f'(b)|\int_{0}^{1}(1-t)^{s}|1-2t|\,dt\right) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
I_{1} &= \int_{0}^{1} t^{s}|1-2t|\,dt \\
I_{2} &= \int_{0}^{1} (1-t)^{s}|1-2t|\,dt
\end{aligned}$$

Calculons $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$, commençons d'abord par $\boldsymbol{I_1}$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t^s|1-2t|dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^s\,(1-2t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^s\,(2t-1)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^s - 2t^{s+1}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2t^{s+1} - t^s\right) dt \\
&= \left(\frac{t^{s+1}}{s+1} - 2\frac{t^{s+2}}{s+2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left(2\frac{t^{s+2}}{s+2} - \frac{t^{s+1}}{s+1}\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \left[\frac{1}{2^{s+1}\,(s+1)} - \frac{2}{2^{s+2}\,(s+2)}\right] + \left[\left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}\right) - \left(\frac{2}{2^{s+2}\,(s+2)} - \frac{1}{2^{s+1}\,(s+1)}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2^{s+1}\,(s+1)} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2^{s+1}\,(s+1)}\right) + \left(\frac{2}{s+2} - \frac{2}{2^{s+2}\,(s+2)} - \frac{2}{2^{s+2}\,(s+2)}\right) \\
&= \left(\frac{2}{2^s 2\,(s+1)} - \frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{2}{s+2} - \frac{4}{2^s 2^2\,(s+2)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^s\,(s+1)} - \frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{2^s\,(s+2)}\right) \\
&= \left[\frac{1}{2^s}\left(\frac{s+2-s-1}{(s+1)\,(s+2)}\right)\right] + \left[\frac{2s+2-s-2}{(s+1)\,(s+2)}\right] \\
&= \left(\frac{1}{2^s} + s\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$I_1 = \left(\frac{1}{2^s} + s\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)$$

Calculons $\boldsymbol{I_2}$:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (1-t)^s\,|1-2t|\;dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\,(1-2t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s\,(2t-1)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\,dt - 2\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\,t\;dt + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s\,t\;dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^s\,dt
\end{aligned}$$

On calcule les intégrales dans $\boldsymbol{I_2}$, commençons d'abord par :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\,dt = -\left(\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{s+1}\left(\frac{1}{2^{s+1}} - 1\right) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2^s 2\,(s+1)} \tag{2.10}$$

Calculons :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^s\,tdt \tag{2.11}$$

En utilisant le changement de variable :

$$\boldsymbol{u = (1-t) \Rightarrow du = -dt}$$

En remplaçant le changement de variable dans l'équation (2.11), on trouve :

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} (1-u)\, u^s du \\
&= -\left(\frac{u^{s+1}}{s+1} - \frac{u^{s+2}}{s+2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{(1-t)^{s+2}}{s+2} - \frac{(1-t)^{s+1}}{s+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2^{s+2}(s+2)} - \frac{1}{2^{s+1}(s+1)} \right] - \left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^s\, t\, dt &= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^s (1-u)\, du \\
&= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(u^s - u^{s+1} \right) du \\
&= \left(\frac{u^{s+2}}{s+2} - \frac{u^{s+1}}{s+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \left(\frac{(1-t)^{s+2}}{s+2} - \frac{(1-t)^{s+1}}{s+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{2^{s+1}(s+1)} - \frac{1}{2^{s+2}(s+2)} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Calculons :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^s\, dt = -\left(\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2^{s+1}(s+1)} \tag{2.14}$$

En substituant les égalités (2.10), (2.12), (2.13), (2.14), dans $\boldsymbol{I_2}$, alors :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I_2} &= \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2^s 2\,(s+1)}\right) + \left(\frac{1}{2^s\,(s+1)} - \frac{1}{2^s 2\,(s+2)} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2^s\,(s+1)} - \frac{1}{2^s 2\,(s+2)}\right) - \left(\frac{1}{2^{s+1}\,(s+1)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right) + \left(\frac{2}{2^s\,(s+1)} - \frac{2}{2^s 2\,(s+1)}\right) - \left(\frac{2}{2^s 2\,(s+2)}\right) \\
&= \left(\frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{2}{2^s\,(s+1)} - \frac{1}{2^s\,(s+1)}\right) - \left(\frac{1}{2^s\,(s+2)}\right) \\
&= \frac{s}{(s+1)\,(s+2)} + \frac{1}{2^s}\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\boldsymbol{I_2} = \left(s + \frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)$$

En substituant $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$ dans l'inégalité (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f\,(a) + f\,(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}|f'\,(a)\,|\left(s + \frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right) + \frac{b-a}{2}|f'\,(b)\,|\left(s + \frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)
\end{aligned}$$

Donc après simplification, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f\,(a) + f\,(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(s + \frac{1}{2^s}\right)\left(\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\right)(|f'\,(a)\,| + |f'\,(b)\,|)
\end{aligned}$$

La preuve de ce cas est terminée pour $\boldsymbol{q = 1}$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{q > 1}$.

On a en outre, comme :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |1-2t||f'\,(ta + (1-t)\,b)\,|dt &= \int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}}|1-2t|^{\frac{1}{q}}|f'\,(ta + (1-t)\,b)\,|dt \\
&\leq \int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}}\left(|1-2t|^{\frac{1}{q}}|f'\,(ta + (1-t)\,b)\,|\right)dt
\end{aligned} \tag{2.15}$$

On applique l'inégalité de Hölder à l'inégalité (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}} \left(|1-2t|^{\frac{1}{q}} |f'(ta+(1-t)b)|\right) dt \\
\leq\ & \left(\int_0^1 |1-2t|^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(|1-2t|^{\frac{1}{q}} |f'(ta+(1-t)b)|\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \left(\int_0^1 |1-2t|^{p\left(\frac{1}{p}\right)} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \left(\int_0^1 |1-2t| dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt
\end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \left(\int_0^1 |1-2t| dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t| dt\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\left(\int_0^1|1-2t|dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1|1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe, on déduit :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1|1-2t|dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1|1-2t|\left(t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Après simplification, on trouve :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1|1-2t|dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(|f'(a)|^q\int_0^1|1-2t|t^s\,dt+|f'(b)|^q\int_0^1|1-2t|(1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

On a

$$\int_0^1|1-2t|dt=\frac{1}{2}$$
$$\int_0^1|1-2t|t^s dt=\left(\frac{1}{2^s}+s\right)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$
$$\int_0^1|1-2t|(1-t)^s\,dt=\left(\frac{1}{2^s}+s\right)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

Alors

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\left(\frac{1}{2^s}+s\right)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Donc

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{s+\frac{1}{2^s}}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Donc l'inégalité est vérifiée . ■

Théorème 2.4.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset [0,\infty)$, une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^{1}([a,b])$. Si $|f'|^{q}$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour $q > 1$ et un certain nombre fixé $s \in (0,1)$, alors :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\left(|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\left(|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Preuve. Du lemme 2.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
=\ & \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)|f'(ta+(1-t)b)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]
\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(ta+(1-t)b)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
+\ & \frac{b-a}{2}\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(ta+(1-t)b)|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons obtenu :

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}=\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}}$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe, on a :

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q$$

Intégrons l'inégalité par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq |f'(a)|^q \int_0^1 t^s dt + |f'(b)|^q \int_0^1 (1-t)^s dt \\ \int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\leq \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \end{aligned} \tag{2.16}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$:

On a

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = b \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} \\ t = 1 \Rightarrow x = a \end{cases}$$

Alors, l'inégalité (2.16) devient :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q + |f'(b)|^q}{s+1}$$

Et de manière analogue, on trouve :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'(a)|^q + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q}{s+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(|f'(a)|^q + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{q\to+\infty}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{4}$$

Démontrons maintenant que :

$$\lim_{q\to 1}\left[\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right]^{\frac{q-1}{q}}=1$$

En utilisant un changement de variable et en posant :

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right]^{\frac{q-1}{q}} \\ \ln y &= \left(\frac{q-1}{q}\right)\ln\left(\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right) \\ \ln y &= \lim_{q\to 1}\left[\frac{\ln\frac{q-1}{2(2q-1)}}{\frac{q}{q-1}}\right]=\frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

On utilise la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to c}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to c}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

On pose :

$$f\left(q\right)=\ln\left(\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right)\qquad et\qquad g\left(q\right)=\frac{q}{q-1}$$

Calculons les dérivées des fonctions $f\left(x\right)$ et $g\left(x\right)$

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{\left(2q-1\right)\left(q-1\right)}\qquad et\qquad g'\left(x\right)=\frac{-1}{\left(q-1\right)^2}$$

On a

$$\lim_{q\to 1}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{q\to 1}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=\lim_{q\to 1}\frac{\frac{1}{(2q-1)(q-1)}}{\frac{-1}{(q-1)^2}}=\lim_{q\to 1}\left(\frac{q-1}{1-2q}\right)=0$$

Nous avons trouvé que :

$$\lim_{q\to 1}\ln\left[\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right]^{\frac{q-1}{q}}=0$$

Donc

$$\left[\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right]^{\frac{q-1}{q}}=1$$

On obtient :

$$\left[\frac{q-1}{2\left(2q-1\right)}\right]^{\frac{q-1}{q}}\leq 1,\qquad q\in\left]1,+\infty\right[$$

et

$$\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \leq 1, \qquad s \in (0,1)\,, \qquad q \in]1,+\infty[$$

Alors

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\left(|f'(a)|^q + |f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

2.5 Inégalités des trapèzes pour les fonctions s-concaves

Dans tout ce qui suit I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, dont l'intérieur est noté par I°,$a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, $L^1([a,b])$ l'espace des fonctions intégrables sur $[a,b]$, s un nombre fixé dans $(0,1]$.

Théorème 2.5.1 *Soit $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction s-concave au second sens, avec $s \in (0,1)$ et soit $a, b \in [0,\infty)$, $a < b$. Si $f \in L^1([a,b])$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

Preuve. On a f une fonction s-concave :

$$f(ta+(1-t)b) \geq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

En intégrant l'inégalité par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt \geq f(a)\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 (1-t)^s\,dt$$
$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt \geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta + (1-t)$,$t \in [0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \int_b^a \frac{f(x)}{a-b}dx$$

Donc

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{2.17}$$

D'autre part, on a :

$$f(tx+(1-t)y) \geq t^s f(x) + (1-t)^s f(y) \tag{2.18}$$

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$ dans l'inégalité (2.18), on trouve :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2^s} \tag{2.19}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta+(1-t)b$ et $y = tb+(1-t)a$, $t \in [0,1]$, alors l'inégalité (2.19) devient :

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a)$$

Comme f est s-concave, alors :

$$f(ta+(1-t)b) \geq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) \tag{2.20}$$

$$f(tb+(1-t)a) \geq t^s f(b) + (1-t)^s f(a) \tag{2.21}$$

Combinons les deux inégalité (2.20) et (2.21), on obtient :

$$f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a) \geq t^s f(a)+(1-t)^s f(b)+t^s f(b)+(1-t)^s f(a)$$

Donc

$$2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) + t^s f(b) + (1-t)^s f(a) \tag{2.22}$$

En intégrant l'inégalité (2.22) par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt &\geq \int_0^1 \left[t^s f(a) + (1-t)^s f(b) + t^s f(b) + (1-t)^s f(a)\right] dt \\
2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq \frac{2(f(a)+f(b))}{s+1} \\
2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

D'après les inégalités (2.17) et (2.23), on trouve :

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

Donc l'inégalité est vérifiée .

Dans le cas o**ù** $|f'|^q$ est s-concave, on obtient :

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f'(x)|^q dx \geq \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \tag{2.24}$$

■

Théorème 2.5.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset [0,\infty)$, une fonction différentiable sur I° et $a,b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L^1([a,b])$. Si $|f'|^q$ est s-concave sur $[a,b]$ pour $q > 1$ et un certain nombre fixé $s \in (0,1)$, alors :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} 2^{\frac{s-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

Preuve. Du lemme 2.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \\
=\ & \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)|f'(ta+(1-t)b)|dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)|f'(ta+(1-t)b)|dt\right]
\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
+\ & \frac{b-a}{2}\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

De ce qui précède, nous avons obtenu :

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^{\frac{q}{q-1}}\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}=\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}}$$

Comme $|f'|^q$ est s-concave, on a :

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q\geq t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q \tag{2.25}$$

Intégrons l'inégalité (2.25) par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\geq |f'(a)|^q\int_0^1 t^s dt+|f'(b)|^q\int_0^1(1-t)^s\,dt \\
\int_0^1|f'(ta+(1-t)b)|^q dt &\geq \frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En outre, comme :

$$|f'(tx+(1-t)y)|^q\geq t^s|f'(x)|^q+(1-t)^s|f'(y)|^q$$

Pour tous $x,y\in[0,\infty)$, $t\in[0,1]$ et un certain nombre fixé $s\in(0,1]$.
Prenons $t=\frac{1}{2}$, alors :

$$\left|f'\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|^q\geq\frac{|f'(x)|^q+|f'(y)|^q}{2^s} \tag{2.27}$$

En utilisant le changement de variable $x=ta+(1-t)b$ et $y=tb+(1-t)a$, $t\in[0,1]$, en substituant dans l'inégalité (2.27), on obtient :

$$2^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\geq|f'(ta+(1-t)b)|^q+|f'(tb+(1-t)a)|^q$$

Nous avons $|f'|^q$ est une s-concave, alors :

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \geq t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q \tag{2.28}$$

$$|f'(tb+(1-t)a)|^q \geq t^s|f'(b)|^q + (1-t)^s|f'(a)|^q \tag{2.29}$$

En combinons (2.28) et (2.29), on obtient :

$|f'(ta+(1-t)b)|^q + |f'(tb+(1-t)a)|^q \geq |f'(a)|^q [t^s+(1-t)^s] + |f'(b)|^q [t^s+(1-t)^s]$

Donc

$$2^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \geq |f'(a)|^q [t^s+(1-t)^s] + |f'(b)|^q [t^s+(1-t)^s] \tag{2.30}$$

Intégrons l'inégalité (2.30) par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on trouve :

$$\int_0^1 2^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt \geq \int_0^1 \left(|f'(a)|^q [t^s+(1-t)^s] + |f'(b)|^q [t^s+(1-t)^s]\right) dt$$

Alors

$$\begin{aligned} 2^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q &\geq \frac{2}{s+1}\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right) \\ 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q &\geq \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1} \end{aligned} \tag{2.31}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta+(1-t)b$, $t \in [0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f'(x)|^q dx$$

D'après l'inégalité (2.24), on a :

$$\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q$$

En utilisant le changement de variable $x = ta+(1-t)b$, $t \in [0,1]$, on trouve :

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow x=b \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{a+b}{2} \\ t=1 \Rightarrow x=a \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}\right)\right|^q$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q$$

Et de manière analogue :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt \leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(2^{s-1}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

On a

$$\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} \leq 1, \qquad q \in \,]1,+\infty[$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left[\frac{q-1}{2(2q-1)}\right]^{\frac{q-1}{q}} 2^{\frac{s-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

CHAPITRE

3

INÉGALITÉS DES TRAPÈZES FRACTIONNAIRES

3.1 Inégalité d'Hermite Hadamard fractionnaire pour les fonctions convexes

([8])

Théorème **3.1.1** *Soit* $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive avec* $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ *et* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{1}}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. *Si* $\boldsymbol{f}$ *une fonction convexe sur* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, *alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}\right) \leq \frac{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\alpha}}\left[\boldsymbol{I}_{a+}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{I}_{b-}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\right] \leq \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{2}} \tag{3.1}$$

avec $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{0}$.

Preuve. f est une fonction convexe sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ pour $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ avec $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$, alors :

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}}\right) \leq \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{2}} \tag{3.2}$$

En utilisant le changement de variable $\boldsymbol{x = ta + (1-t)\,b}$ et $\boldsymbol{y = tb + (1-t)\,a}$, $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0, 1}]$, en substituant dans l'inégalité (3.2), alors l'inégalité (3.2) devient :

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(ta + (1-t)\,b\right) + f\left(tb + (1-t)\,a\right) \tag{3.3}$$

En multipliant l'inégalité (3.3) par $\boldsymbol{t^{\alpha-1}}$, et intégrons par rapport à $\boldsymbol{t}$ sur l'intervalle $[\boldsymbol{0, 1}]$, on obtient :

$$2\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(ta + (1-t)\,b\right) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(tb + (1-t)\,a\right) dt$$

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(ta + (1-t)\,b\right) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(tb + (1-t)\,a\right) dt \tag{3.4}$$

Encore une fois, nous utilisons le changement de variable $\boldsymbol{u = ta + (1-t)\,b}$ et $\boldsymbol{v = tb + (1-t)\,a}$, $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0, 1}]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} \frac{f(u)}{a-b} du + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} \frac{f(v)}{a-b} dv \\
\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_a^b \frac{(b-u)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}(b-a)} f(u)\, du + \int_a^b \frac{(v-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}(b-a)} f(v)\, dv \\
\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^{\alpha}} \left[\int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)\, du + \int_a^b (v-a)^{\alpha-1} f(v)\, dv\right]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

D'après l'intégrale de Riemann-Liouville :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x)\, dx, \qquad t > a$$

Et

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x)\, dx, \qquad t < b$$

Alors

$$\Gamma(\alpha)\, I_{a+}^{\alpha} f(b) = \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)\, du, \qquad b > a \tag{3.6}$$

$$\Gamma(\alpha)\, I_{b-}^{\alpha} f(a) = \int_a^b (v-a)^{\alpha-1} f(v)\, dv, \qquad a < b \tag{3.7}$$

En combinant les inégalités (3.6) et (3.7), on obtient :

$$\Gamma(\alpha)\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]=\int_a^b(b-u)^{\alpha-1}f(u)\,du+\int_a^b(v-a)^{\alpha-1}f(v)\,dv$$

Alors l'inégalité (3.5) devient :

$$\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left(I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right)$$

D'après la relation de récurrence de la fonction gamma, alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left(I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right)\tag{3.8}$$

D'autre part, nous avons f une fonction convexe sur $[a,b]$ pour $x,y\in[a,b]$ et $\lambda\in[0,1]$:

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)\tag{3.9}$$

$$f(tb+(1-t)a)\leq tf(b)+(1-t)f(a)\tag{3.10}$$

Combinons (3.9) et (3.10), on trouve :

$$f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)\leq f(a)+f(b)\tag{3.11}$$

En multiplié l'inégalité (3.11) par $t^{\alpha-1}$, et intégrons par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, alors :

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f(tb+(1-t)a)\,dt\leq[f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Donc

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\tag{3.12}$$

D'après les inégalité (3.8) et (3.12), on déduite :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

Corollaire 3.1.1 *On pose* $\alpha = 1$ *dans l'inégalité :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

On obtient l'inégalité suivante :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Preuve.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(2)}{2(b-a)}\left[I_{a+} f(b)+I_{b-} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

D'après de l'intégrale de Riemann-Liouville, on a :

$$I_{a+} f(b) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^b f(x)\, dx, \qquad b > a$$

$$I_{b-} f(a) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^b f(x)\, dx, \qquad a < b$$

La fonction gamma est définie par l'intégral suivante :

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

Calculons $\Gamma(1)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \left(-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0+1 = 1, \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma(1) = 1$$

D'après la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)}\left[\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

$$\boldsymbol{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}}$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

3.2 Inégalités de type Hermite Hadamard fractionnaires pour les fonctions dont la dérivé $|f'|$ est convexe

Lemme 3.2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $f' \in L[a,b]$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[I_{a+}^\alpha f(b) + I_{b-}^\alpha f(a)\right]} \\ = &\boldsymbol{\frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} &= \boldsymbol{\int_0^1 \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt} \\ &= \boldsymbol{\left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt\right] + \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt\right]} \\ &= \boldsymbol{I_1 + I_2} \end{aligned}$$

Commençons d'abord par I_1, on intégré I_1 par parties par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \\
&= \left(\frac{(1-t)^{\alpha}}{a-b} f(ta+(1-t)b)\right]_0^1 + \int_0^1 \alpha (1-t)^{\alpha-1} \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} dt \\
&= \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\alpha}{a-b} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b} dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \frac{(a-x)^{\alpha-1}}{(a-b)^{\alpha}} f(x)\,dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_b^a \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(a-b)^{\alpha}} (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

En simplifie :

$$\frac{(-1)^{\alpha-1}}{(a-b)^{\alpha}} = (-1)^{\alpha-1}(a-b)^{-\alpha} = (-1)^{-1}(b-a)^{-\alpha} = -\frac{1}{(b-a)^{\alpha}}$$

Alors I_1 devient :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a} \int_a^b \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha}} f(x)\,dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}} \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Par définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on a :

$$I_{b-}^{\alpha} f(a)\,\Gamma(\alpha) = \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x)\,dx, \qquad a < b$$

De (3.14), on obtient :

$$I_1 = \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{b-}^{\alpha} f(a)$$

Donc

$$I_1 = \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{b-}^{\alpha} f(a) \tag{3.15}$$

Calculons I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^1 t^{\alpha} f'(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= -\left(\frac{t^{\alpha}}{a-b} f(ta+(1-t)b)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\alpha\, t^{\alpha-1}}{a-b} f(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta+(1-t)b)\,dt \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $x = ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$, on trouve :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1} \frac{f(x)}{a-b}dx \\ &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} \frac{f(x)}{a-b}dx \\ &= \frac{f(a)}{b-a} + \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_b^a (b-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx \\ &= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on a :

$$I_{a+}^{\alpha} f(b)\,\Gamma(\alpha) = \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx$$

Alors

$$I_2 = \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{a+}^{\alpha} f(b)$$

$$I_2 = \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{a+}^{\alpha} f(b) \tag{3.16}$$

En combinons I_1 et I_2 :

$$I = I_1 + I_2 = \left[\frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] + \left[\frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} I_{a+}^{\alpha} f(b)\right]$$

Alors

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b) + I_{b-}^{\alpha} f(a)\right]$$

En substituant $\boldsymbol{I}$ dans l'égalité (3.13), on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \\ = & \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(a)+f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right]\right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \\ = & \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vérifiée. ■

Corollaire 3.2.1 *On pose $\alpha = 1$ dans l' égalité :*

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b)+I_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \\ = & \frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt \end{aligned}$$

On obtient l'égalité suivante :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

Preuve. . Si $\alpha = 1$, alors :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(2)}{2(b-a)}\left[I_{a+} f(b)+I_{b-} f(a)\right]=\frac{b-a}{2}\int_0^1(1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

Par définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on a :

$$I_{a+} f(b)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad b>a$$

Et

$$I_{b-} f(a)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad a<b$$

La fonction gamma est définie par l'intégral suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt,}$$

Calculons $\boldsymbol{\Gamma(1)}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma(1)} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \left(-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1,\end{aligned}$$

Alors

$$\boldsymbol{\Gamma(1) = 1.}$$

D'après la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1}$$

On obtient :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{2(b-a)}\left(2\int_a^b f(x)\,dx\right) = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

Donc l'égalité est vérifie. ■

Théorème 3.2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur (a,b) avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b) + I_{b-}^{\alpha} f(a)\right]\right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \tag{3.17}$$

Preuve. En utilisant le lemme 3.2.1, on a :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha} f(b) + I_{b-}^{\alpha}\right]\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

Comme $|f'|$ est convexe, alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}\right]\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)\left[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|\right]dt \\
+\ & \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right)\left[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|\right]dt
\end{aligned} \tag{3.18}$$

On pose

$$K_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)\left[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|\right]dt$$

Et

$$K_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right)\left[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|\right]dt$$

Calculons K_1 et K_2, commençons d'abord par K_1 :

$$\begin{aligned}
K_1&=|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)tdt+|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right)(1-t)\,dt \\
&=|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t(1-t)^{\alpha}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt\right]+|f'(b)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)\,t^{\alpha}dt\right]
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale dans K_1, on commençons par :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}}t(1-t)^{\alpha}dt&=-\left(\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&=-\left[\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right)-\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}\right)\right] \\
&=\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha+1}dt=\left(\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.20}$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha+1}dt=-\left(\frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.21}$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\, t^{\alpha} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^{\alpha} - t^{\alpha+1}\right) dt = \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.22}$$

D'après les égalités (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), alors :

$$\begin{aligned} K_1 &= |f'(a)| \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right) \\ &+ |f'(b)| \left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right) \end{aligned}$$

Pour K_2, Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned} K_2 &= |f'(a)| \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right) t dt + |f'(b)| \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t^{\alpha} - (1-t)^{\alpha}\right) (1-t)\, dt \\ &= |f'(a)| \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha}\, t dt\right] + |f'(b)| \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha} (1-t)\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+1} dt\right] \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1} dt = \left(\frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.23}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,(1-t)^{\alpha}\, dt = -\left(\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.24}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)\, t^{\alpha} dt = \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{t^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.25}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+1} dt = -\left(\frac{(1-t)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{3.26}$$

D'après les égalités (3.23) et (3.24) et (3.25) et (3.26), on obtient :

$$\begin{aligned} K_2 &= |f'(a)| \left(\frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right) \\ &+ |f'(b)| \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right) \end{aligned}$$

En combinant $\boldsymbol{K_1}$ et $\boldsymbol{K_2}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K_1+K_2} &= |f'(a)|\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)+|f'(b)|\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\\
&= |f'(a)|\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)+|f'(b)|\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\\
&= (|f'(a)|+|f'(b)|)\,\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Alors, en substituant $\boldsymbol{K_1+K_2}$ dans l'inégalité (3.18), on trouve :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\\
\leq\;&\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right)[|f'(a)|+|f'(b)|]
\end{aligned}$$

Alors

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

Corollaire 3.2.2 *On pose* $\boldsymbol{\alpha=1}$ *dans l'inégalité :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[I_{a+}^{\alpha}f(b)+I_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

On obtient l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{b-a}{8}[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

Preuve. Si $\boldsymbol{\alpha=1}$, alors :

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(2)}{2(b-a)}[I_{a+}f(b)+I_{b-}f(a)]\right|\leq\frac{b-a}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

Par définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on a :

$$I_{a+}f(b)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b f(x)\,dx,\qquad b>a$$

Et

$$\boldsymbol{I_{b-}f\left(a\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1\right)}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx,\qquad a<b}$$

La fonction gamma est définie par l'intégral suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma:\alpha\rightarrow\int_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt,}$$

Calculons $\boldsymbol{\Gamma\left(1\right)}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma\left(1\right)} &= \boldsymbol{\int_{0}^{+\infty}e^{-t}dt}\\ &= \boldsymbol{\left(-e^{-t}\right]_{0}^{+\infty}=0+1=1,}\end{aligned}$$

Alors

$$\boldsymbol{\Gamma\left(1\right)=1}$$

D'après la relation

$$\boldsymbol{\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}$$

Donc

$$\boldsymbol{\Gamma\left(2\right)=\Gamma\left(1+1\right)=1\Gamma\left(1\right)=1.}$$

On obtient :

$$\boldsymbol{\left|\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}-\frac{\Gamma\left(2\right)}{2\left(b-a\right)}\left(2\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right)\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(a\right)\right|+\left|f'\left(b\right)\right|\right]}$$

Alors

$$\boldsymbol{\left|\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left|f'\left(a\right)\right|+\left|f'\left(b\right)\right|\right]}$$

Donc l'inégalité est vérifiée. ■

CONCLUSION

La problématique de ce mémoire était d'étudier certaines inégalités de type trapèzes et de se familiariser avec certains outils nécessaires dans les démonstrations de ce genre de problèmes.

Dans la première partie, nous sommes intéressés à rappeler quelque classes de fonctions ainsi que quelques identités.

Dans la seconde partie, nous avons étudiés quelques inégalités de type trapèzes classiques pour les fonctions dont la valeur absolue des dérivées premières sont convexe, concave, ainsi s-convexes et s-concaves.

Dans la troisième partie, nous avons discutés l'inégalité d'Hermite-Hadamard ainsi que l'inégalité de type trapèzes via les opérateurs intégraux de Riemann-Liouville.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Meftah, New integral inequalities Through the '-preinvexity. Iran. J. Math. Sci. Inform. 15 (2020), no. 1, 79-83.

[2] B. Meftah, Some new Ostrowski's inequalities for functions whose nth derivatives are logarithmically convex. Ann. Math. Sil. 32 (2018), no. 1, 275–284.

[3] C. E. M. Pearce and J. Peµcariĉ, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2 ,51–55.

[4] D. S. Mitrinovi´c, J. E. Peµcari´c and A. M. Fink, Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Mathematics and its Applications (East European Series), 53. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[5] E. Set, I. · I¸scan, M. Z. Sarikaya and M. E. Özdemir, On new inequalities of Hermite- · Hadamard-Fejér type for convex functions via fractional integrals. Appl. Math. Comput. 259 (2015), 875–881.

[6] Jensen, J.W.V.(1906), "sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes". Acta mathematica.

[7] M. E. Özdemir, M. Gürbüz and H. Kavurmac¬, Hermite-Hadamard-type inequalities for (g ; 'h)-convex dominated functions. J. Inequal. Appl. 2013, 2013 :184, 7 pp.

[8] M. Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, and N. Basak, Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Mo-

delling, vol. 57, pp. 2403–2407, 2013.

[9] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical pro. . . le of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 (1959), 849–869.

[10] S. S. Dragomir, P. Cerone, J. Roumeliotis and S. Wang, A weighted version of Ostrowski inequality for mappings of Hölder type and applications in numerical analysis. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 42(90) (1999), no. 4, 301– 314.

[11] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[12] U.S.Kirmaci, M. Klari***č***i***ć*** Bakula, M.E. ***Ö***zdemir, J. Pe***č***ari***ć***, Hadamard-type inequalities for s-convex functions , Applied Mathematics and Computation 193 (2007) 26-35.